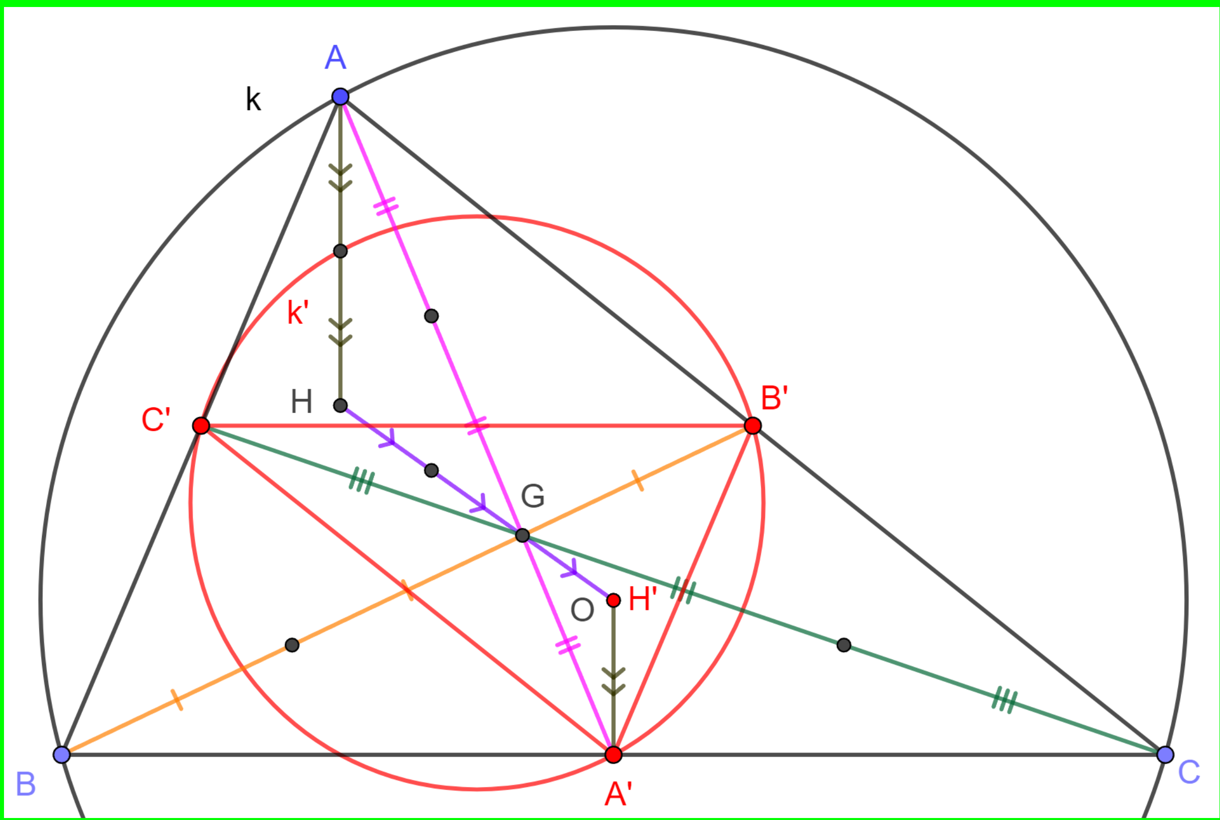
Baricentro: teoria, construções e problemas



Juan López Linares

JUAN LÓPEZ LINARES

Baricentro: teoria, construções e problemas

DOI: 10.11606/9786587023311

Pirassununga - SP
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)
2023

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

Vice-Reitora: Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

http://www.fzea.usp.br

Diretor: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

Vice-Diretor: Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes de Oliveira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo

```
        López Linares, Juan
L864b      Baricentro: teoria, construções e problemas. / Juan
        López Linares. -- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e
        Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo,
        2023.
           71 p.

           ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book)
           DOI: 10.11606/9786587023311


           1. Geometria. 2. Olimpíadas. 3. GeoGebra. 4. Ensino
        fundamental. 5. Ensino médio. 6. Formação de
        professores. I. Título.
```

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.

Dedico este livro a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos Professores e Estudantes do curso de Geometria Olímpica com GeoGebra que motivaram a escrita deste livro eletrônico.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

AUTOR

Prof. Associado JUAN LÓPEZ LINARES: https://orcid.org/0000-0002-8059-0631.

Quando adolescente participava como estudante de um grupo de treinamento para olimpíadas de Física. Embora tivesse sucessos nas competições desta disciplina, nas olimpíadas de Matemática não tinha resultados espetaculares. Sempre sentiu falta de um grupo de treinamento em Matemática. Essa experiência extracurricular determinou seu futuro profissional e motivou sua linha de trabalho hoje.

Professor Associado do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de "Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio" e "Geometria Olímpica com GeoGebra" para professores e estudantes de alto rendimento.

Na área de Ensino de Matemática Olímpica, publicou 17 artigos, 13 livros eletrônicos (e-book), um capítulo de livro, uma dissertação de mestrado e uma tese de livre docência. Textos completos e gratuitos podem ser encontrados aqui. Também disponibilizou mais de 750 vídeo aulas. Adicionalmente, no site do GeoGebra estão disponíveis mais de 1000 construções geométricas interativas.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respetivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProFMat) pela UFSCar em 2019 e Livre Docente na área de Ensino de Matemática Olímpica na FZEA USP em 2022.

Título

Baricentro: teoria, construções e problemas

Prefácio

Entre os centros de triângulos o baricentro ou centroide é o mais conhecido devido a sua grande utilização em diversos campos da Matemática e Física. A discussão neste e-book é organizada em três capítulos: Fundamentos teóricos; Construções, exercícios e desafios; Problemas de olimpíadas internacionais. Este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso "Geometria Olímpica com GeoGebra" para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O texto conta com 42 figuras que facilitam acompanhar a resolução. Todas têm como complemento links para os gráficos interativos no site do GeoGebra e, vários, a resolução em vídeo do YouTube. O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa. O GeoGebra também convida o leitor a interagir, a pôr as mão na massa.

Palavras-chave: Geometria, Olimpíadas, GeoGebra, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Formação de Professores.

Lista de Figuras

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Entre os centros de triângulos o baricentro ou centroide é o mais conhecido devido a sua grande utilização em diversos campos da Matemática e Física. A discussão neste e-book é organizada em três capítulos: Fundamentos teóricos; Construções, exercícios e desafios; Problemas de olimpíadas internacionais.

O livro faz parte de um projeto de longo prazo de treinamento de estudante e professores com problemas de Olimpíadas de Matemáticas. Em particular, este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso "Geometria Olímpica com GeoGebra" para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O mesmo aconteceu na modalidade de Ensino à Distância (EaD) pela plataforma Moodle de Cultura e Extensão da USP.

O texto conta com 42 figuras que facilitam o acompanhamento das resoluções. Como complemento, links para os gráficos interativos são disponibilizados em páginas do GeoGebra. Vários problemas contam com apresentação em vídeo disponíveis numa playlist do YouTube.

O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa.

Com uma boa organização e programação adequada discutir problemas na tela do GeoGebra permite ao leitor visualizar simultaneamente gráficos e textos. En contra partida, na versão impressa tradicional o aprendente precisa ficar alternando entre páginas para acompanhar uma resolução.

O GeoGebra também convida o leitor a interagir e aprender fazendo. Isto é, pode movimentar pontos da construção, colorir, modificar parâmetros de entrada, etc. Aos mais obstinados é permitido copiar e melhorar trabalhos já existentes.

Adicionalmente, a versão online do GeoGebra funciona como uma rede social de aprendizado e colaboração. Os profissionais e alunos podem disponibilizar e buscar construções, baixar e modificar ou alterar e salvar no próprio site. Em resumo, é um local que fornece materiais e meios alternativos para a troca de conhecimento relacionado ao ensino de Matemática.

Foram utilizadas as notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, curso de Geometria, Nível 2, do Prof. Bruno Holanda [4], do Prof. Rodrigo Pinheiro [37] e do Prof. Cícero Thiago [42]. Também serviram como referência os livros de Geometria [34], Geometria Analítica [2] e Matemática Discreta [33] adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Sete livros eletrônicos gratuitos com as notas de aulas do curso Geometria Olímpica com GeoGebra estão disponíveis em [19], [20], [21], [15], [13], [10] e [11]. Também foram publicados quatro livros eletrônicos dedicados a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática para o Ensino Médio: [18], [6], [7] e [8]. Outros trabalhos da área de Matemática são [12], [22], [23], [24], [17], [25], [26], [5], [27], [29], [30], [31], [32], [39], [28], [40], [14], [16], [9] e [41].

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

Parte do conteúdo deste e-book está disponível em vídeos de 2021, 2022 e 2023.

2.1 Teorema de Menelaus

Pelos registros históricos acredita-se que Menelaus de Alexandria, nasceu em 70 d.C., no norte do Egito. Morreu perto do ano 130 d.C. Entre outras coisas fez importantes contribuições na geometria de triângulos esféricos, segundo relatou Ptolomeu anos mais tarde [36].

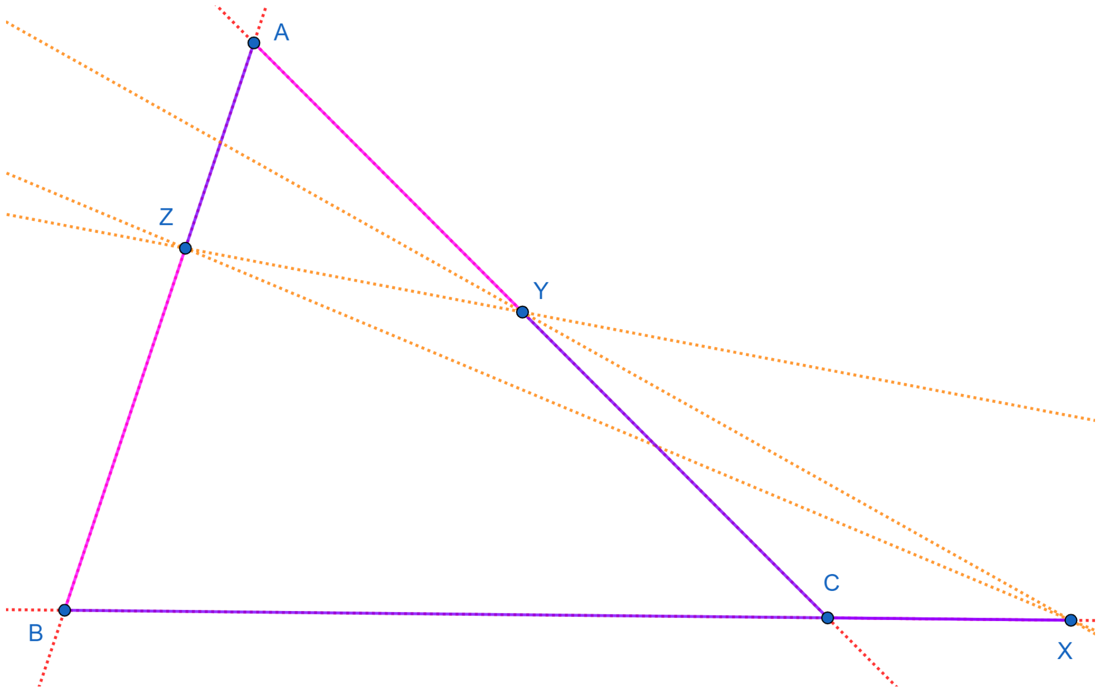
O Teorema a seguir lida com critérios necessários e suficientes para que três pontos sejam colineares. Não será utilizada a notação de segmentos orientados. Isto é, vale que as medidas de AB e BA coincidem.

Teorema 1 (Menelaus)**.** *Sejam ABC um triângulo e X, Y e Z pontos (diferentes de A, B e C) sobre as retas BC, CA e AB, respectivamente. Então os pontos X, Y e Z são colineares se, e somente se,*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1. \tag{2.1.1}$$

Na versão interativa da Figura 2.1 é possível deslocar os pontos sobre as retas BC, CA e AB, e verificar a validade ou não da equação (2.1.1).

Figura 2.1: Teorema de Menelaus. Caso em que os pontos X, Y e Z não são colineares. Versão interativa aqui. É possível deslocar os pontos sobre as retas e verificar a validade ou não de (2.1.1).

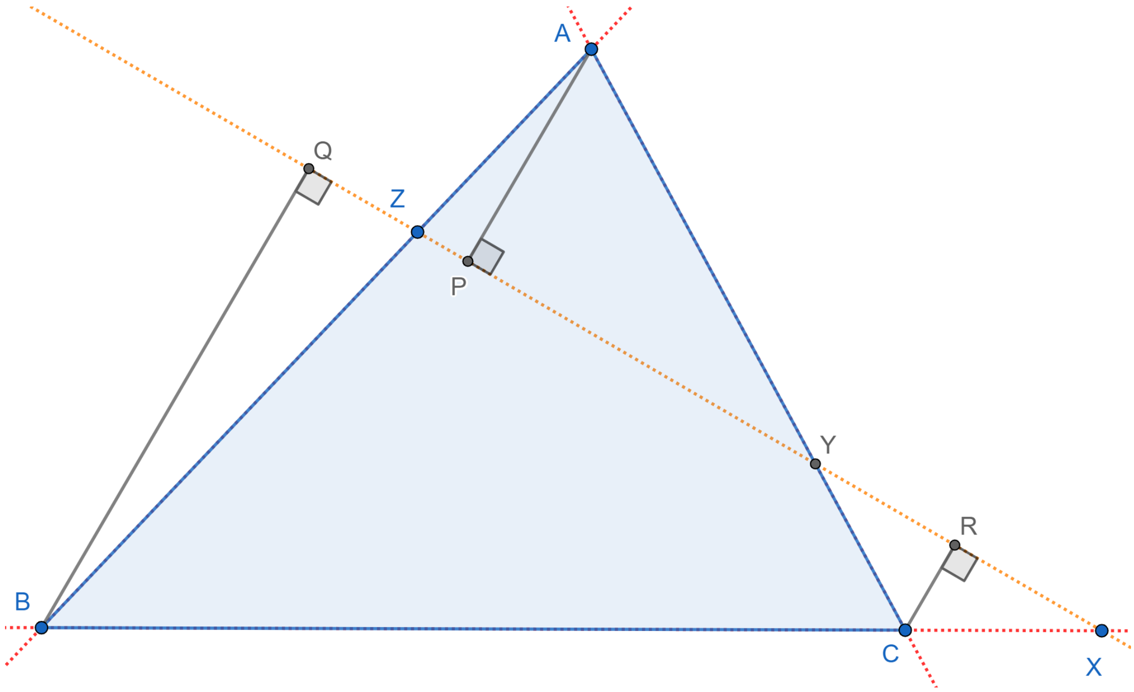


Fonte: O autor.

Demonstração. (Ida) Inicialmente suponha-se que os pontos X, Y e Z são colineares (Figura 2.2). Sejam AP, BQ e CR as perpendiculares traçadas a partir de A, B e C, respectivamente, à reta XZ.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 2.2: Ida do Teorema de Menelaus. Por hipótese os pontos X, Y e Z são colineares. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Os pares de triângulos retângulos BQX e CRX, APY e CRY e APZ e BQZ, são semelhantes pelo critério AA. Então,

$$\frac{BX}{CX} = \frac{BQ}{CR},$$

$$\frac{CY}{AY} = \frac{CR}{AP},$$

$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{AP}{BQ}.$$

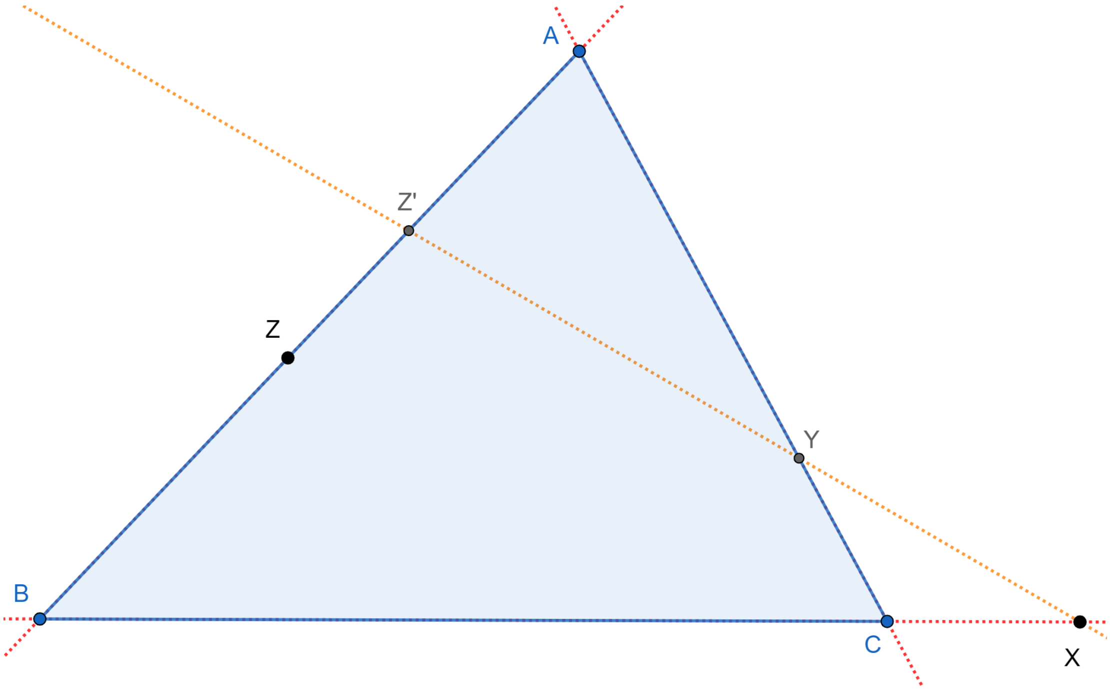
Segue que:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{BQ}{CR} \cdot \frac{CR}{AP} \cdot \frac{AP}{BQ} = 1.$$

(Volta) Agora suponha-se, por absurdo, que os pontos X, Y e Z não são colineares, mas vale a equação (2.1.1). Seja o ponto $Z' = XY \cap AB$ (Figura 2.3).

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 2.3: Volta do Teorema de Menelaus. Por hipótese vale a equação (2.1.1). Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Pela Ida do Teorema de Menelaus vale que:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = 1.$$

Logo, tem-se:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB},$$

$$\frac{AZ'}{Z'B} = \frac{AZ}{ZB}.$$

Como Z e Z' pertencem a reta AB o resultado anterior é uma contradição. Ou seja, $Z = Z'$. □

No caso em que mais de um dos pontos X, Y e Z pertencem aos prologamentos dos lados do triângulo ABC, o teorema anterior ainda é válido.

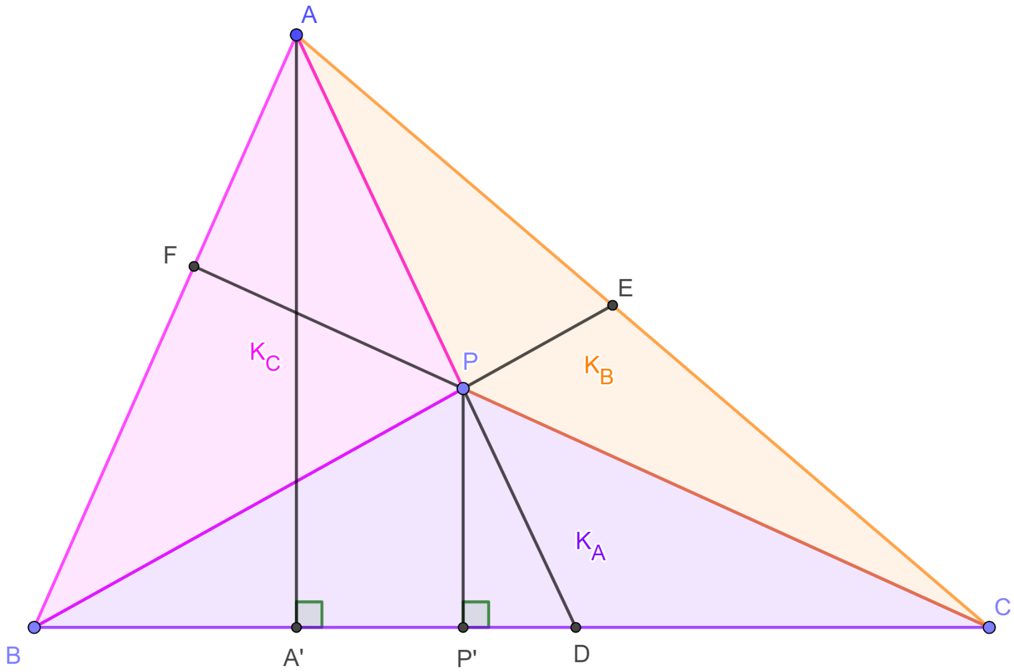
2.2 Áreas para calcular razão de segmentos

Proposição 2. *Seja ABC um triângulo, P um ponto no interior deste e D, E e F os pontos de interseção das semirretas AP, BP e CP com os lados BC, CA e AB, respectivamente. Define-se $K_A = [PBC]$, $K_B = [PCA]$ e $K_C = [PAB]$. Então*

1.
$$\frac{BD}{DC} = \frac{K_C}{K_B}, \ \frac{CE}{EA} = \frac{K_A}{K_C}, \ \frac{AF}{FB} = \frac{K_B}{K_A}.$$

2.
$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A}, \ \frac{BP}{PE} = \frac{K_A + K_C}{K_B}, \ \frac{CP}{PF} = \frac{K_A + K_B}{K_C}.$$

Figura 2.4: Áreas para calcular razão de segmentos. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Demonstração. Sejam A' e P' as projeções ortogonais dos pontos A e P sobre a reta BC (Figura 2.4).

1. Como os triângulos ABD e ACD têm a mesma altura AA' pode ser escrito:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[ABD]}{[ACD]}. \tag{2.2.1}$$

Analogamente, como os triângulos PBD e PCD têm a mesma altura PP' tem-se:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[PBD]}{[PCD]}. \tag{2.2.2}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Combinando as razões em (2.2.1) e (2.2.2) encontra-se:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[ABD] - [PBD]}{[ACD] - [PCD]} = \frac{K_C}{K_B}.$$

Similarmente demonstram-se as outras duas frações.

2. Pelo critério de semelhança AA vale que $\triangle ADA' \sim \triangle PDP'$. Segue que:

$$\frac{AP}{PD} + 1 = \frac{AP + PD}{PD} = \frac{AD}{PD} = \frac{AA'}{PP'}. \tag{2.2.3}$$

Por definição vale que $[ABC] = K_A + K_B + K_C$. Como os triângulos ABC e PBC têm a mesma base pode ser escrito:

$$\frac{AA'}{PP'} = \frac{[ABC]}{[PBC]} = \frac{K_A + K_B + K_C}{K_A} = 1 + \frac{K_B + K_C}{K_A}. \tag{2.2.4}$$

Substituindo (2.2.4) em (2.2.3) e simplificando encontra-se:

$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A}.$$

Da mesma maneira demonstram-se as outras duas frações.

□

2.3 Teorema de Ceva

Giovanni Benedetto Ceva nasceu em 1647 e morreu em 1734 na Itália. Ceva publicou *Opuscula Mathematica* em 1682. Nela investiga questões de geometria pura, bem como aplicações da matemática, particularmente à hidrodinâmica. Em *Geometria motus, opusculum geometricum in gratiam aquarum excogitatum* (1692), até certo ponto, antecipou o cálculo infinitesimal. Também foi um dos primeiros a escrever sobre economia matemática. Ceva redescobriu o Teorema de Menelaus e o utilizou para provar o análogo que ficou conhecido com seu nome [35].

Definição 1 (Cevianas)**.** *Dado um triângulo é denominada* <u>*ceviana*</u> *a qualquer segmento de reta que liga um dos vértices a um ponto do lado oposto a esse vértice ou ao prologamento desse lado.*

O Teorema a seguir lida com critérios necessários e suficientes para que três cevianas sejam concorrentes.

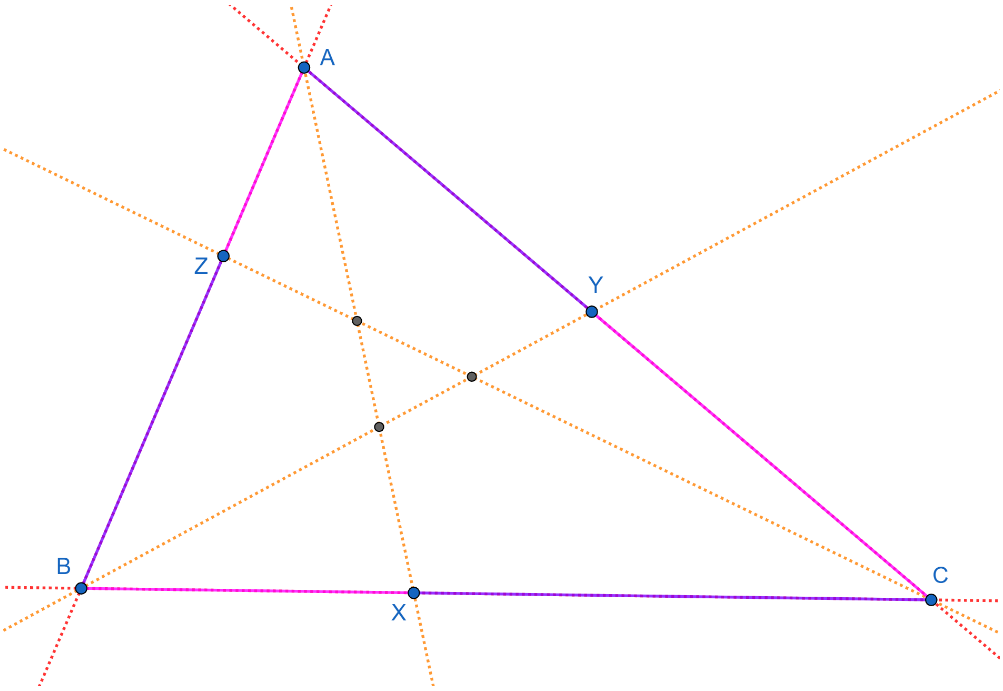
LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Teorema 3 (Ceva)**.** *Sejam ABC um triângulo e X, Y e Z pontos (diferentes de A, B e C) sobre as retas BC, CA e AB, respectivamente. Então as retas AX, BY e CZ são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1. \tag{2.3.1}$$

A Figura 2.5 mostra o caso de cevianas não concorrentes. Na versão interativa é possível deslocar os pontos e verificar a validade ou não da equação (2.3.1).

Figura 2.5: Teorema de Ceva. Cevianas não concorrentes. Versão interativa aqui. É possível deslocar os pontos e verificar a validade ou não de (2.3.1).

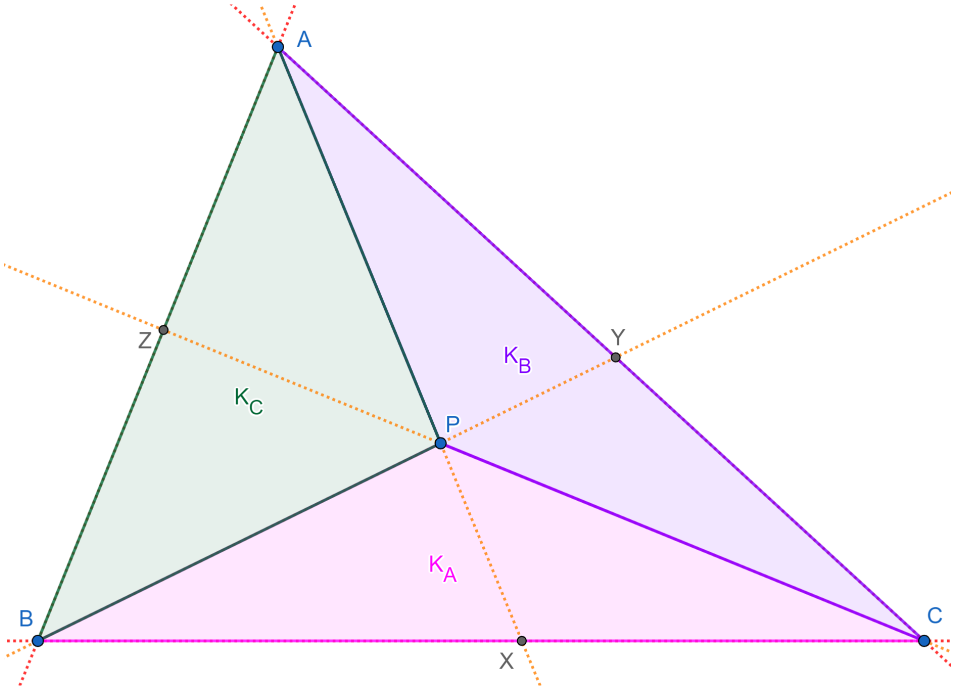


Fonte: O autor.

Demonstração 1. (Ida) Inicialmente suponha-se que as retas AX, BY e CZ são concorrentes num ponto P interior ao $\triangle ABC$ (Figura 2.6).

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 2.6: Ida do Teorema de Ceva. Cevianas concorrentes em P. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Define-se $K_A = [PBC]$, $K_B = [PCA]$ e $K_C = [PAB]$. Pela Proposição 2 vale que:

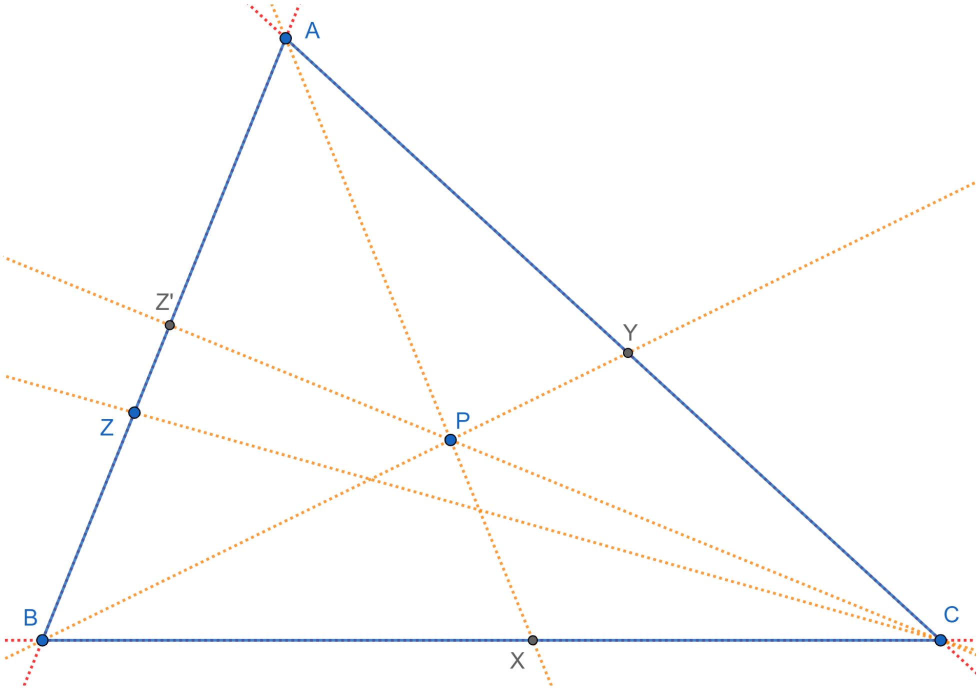
$$\frac{BX}{XC} = \frac{K_C}{K_B}, \ \frac{CY}{YA} = \frac{K_A}{K_C}, \ \frac{AZ}{ZB} = \frac{K_B}{K_A}.$$

Segue que:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{K_C}{K_B} \cdot \frac{K_A}{K_C} \cdot \frac{K_B}{K_A} = 1.$$

(Volta) Agora suponha-se, por absurdo, que as retas AX, BY e CZ não são concorrentes, mas vale a equação (2.3.1). Sejam os pontos $P = AX \cap BY$ e $Z' = CP \cap AB$ (Figura 2.7).

Figura 2.7: Volta do Teorema de Ceva. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Pela Ida do Teorema de Ceva vale que:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = 1.$$

Tem-se:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB},$$
$$\frac{AZ'}{Z'B} = \frac{AZ}{ZB}.$$

Como Z e Z' pertencem ao segmento AB o resultado anterior é uma contradição. Ou seja, $Z = Z'$. □

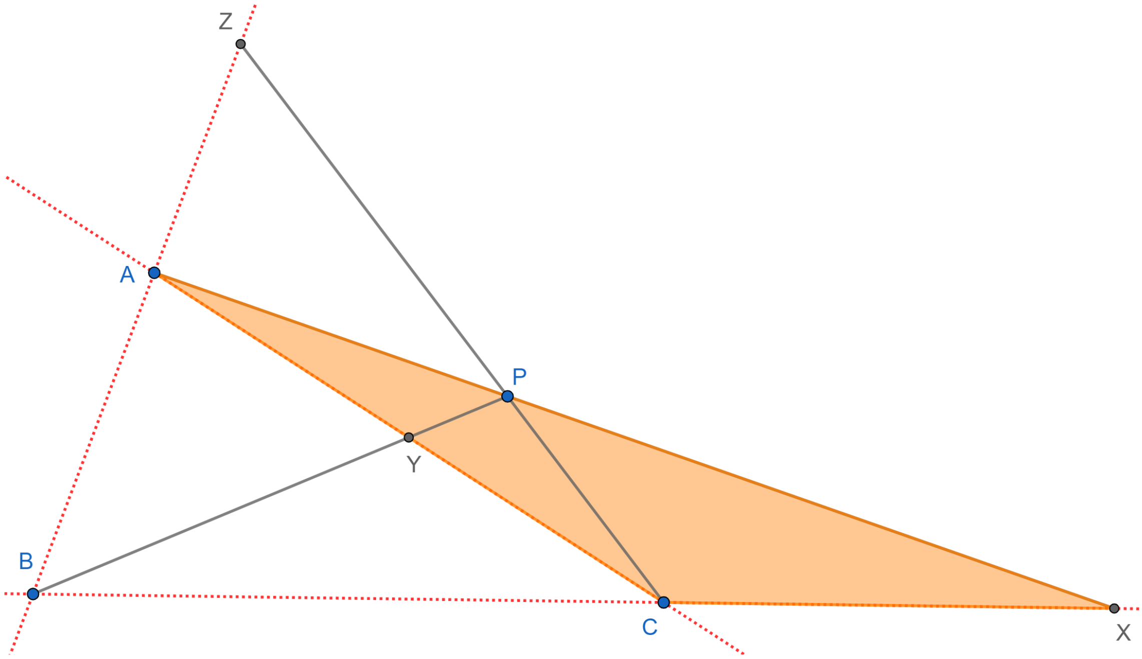
A segunda demonstração utiliza o Teorema 1 (Menelaus).

Demonstração 2. (Ida) Suponha-se que as retas AX, BY e CZ são concorrentes num ponto P. Primeiro, considera-se o $\triangle AXC$ e os pontos colineares $B \in CX$, $Y \in AC$ e $P \in AX$ (Figura 2.8). Pelo Teorema 1 (Menelaus) vale que:

$$\frac{AY}{YC}\frac{CB}{BX}\frac{XP}{PA} = 1.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 2.8: Segunda demonstração da ida do Teorema de Ceva. Aplica-se o Teorema 1 (Menelaus) ao $\triangle AXC$ e aos pontos colineares $B \in CX$, $Y \in AC$ e $P \in AX$. Versão interativa aqui.



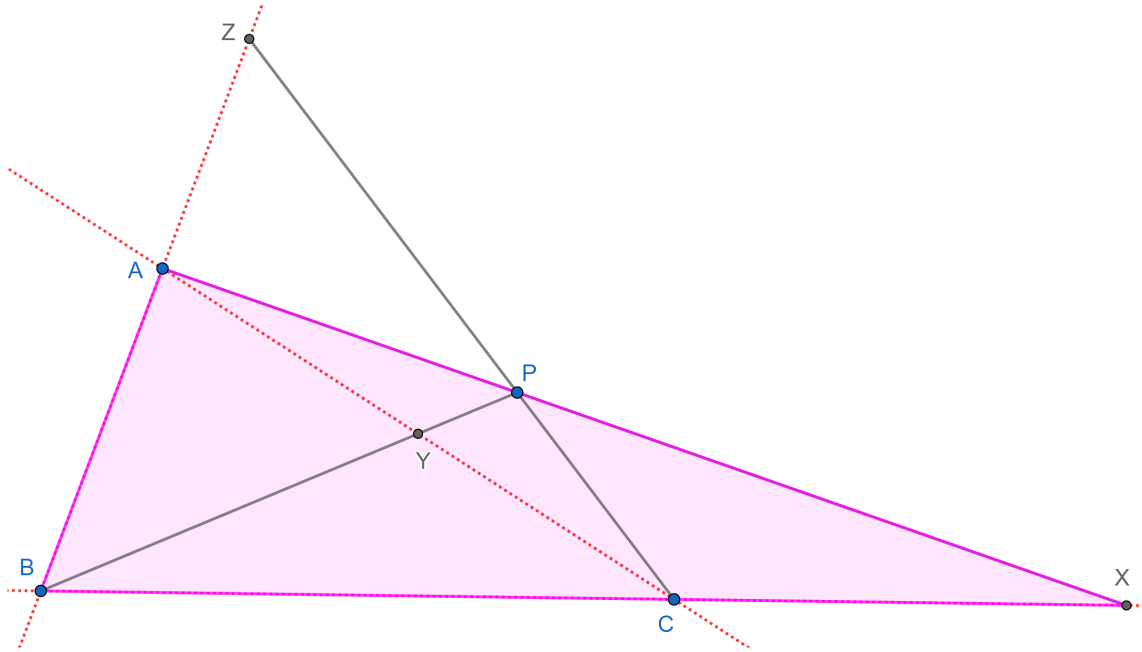
Fonte: O autor.

Segundo, considera-se o $\triangle ABX$ e os pontos colineares $C \in BX$, $P \in AX$ e $Z \in AB$ (Figura 2.9). Pelo Teorema 1 (Menelaus) vale que:

$$\frac{AZ}{ZB}\frac{BC}{CX}\frac{XP}{PA} = 1.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 2.9: Segunda demonstração da ida do Teorema de Ceva. Aplica-se o Teorema 1 (Menelaus) ao $\triangle ABX$ e os pontos colineares $C \in BX$, $P \in AX$ e $Z \in AB$. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Igualando e simplificando as duas equações anteriores segue que:

$$\frac{AY}{YC \cdot BX} = \frac{AZ}{ZB \cdot CX},$$

$$\frac{AY}{YC}\frac{CX}{XB}\frac{BZ}{ZA} = 1.$$

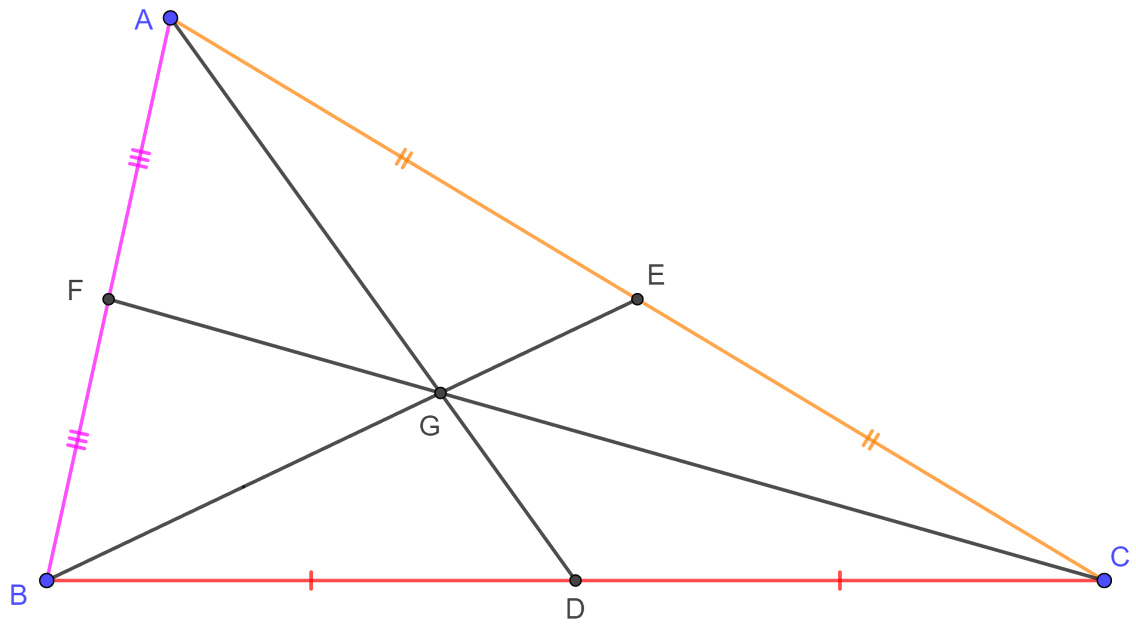
(Volta) Análoga a feita na demonstração 1. □

2.4 Definição de Baricentro

A Figura 2.10 mostra um triângulo ABC. Sejam D, E e F pontos médios dos lados BC, CA e AB, respetivamente. As medianas AD, BE e CF concorrem no ponto G, chamado Baricentro ou Centroide [34].

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 2.10: As medianas AD, BE e CF concorrem no ponto G, chamado Baricentro ou Centroide. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

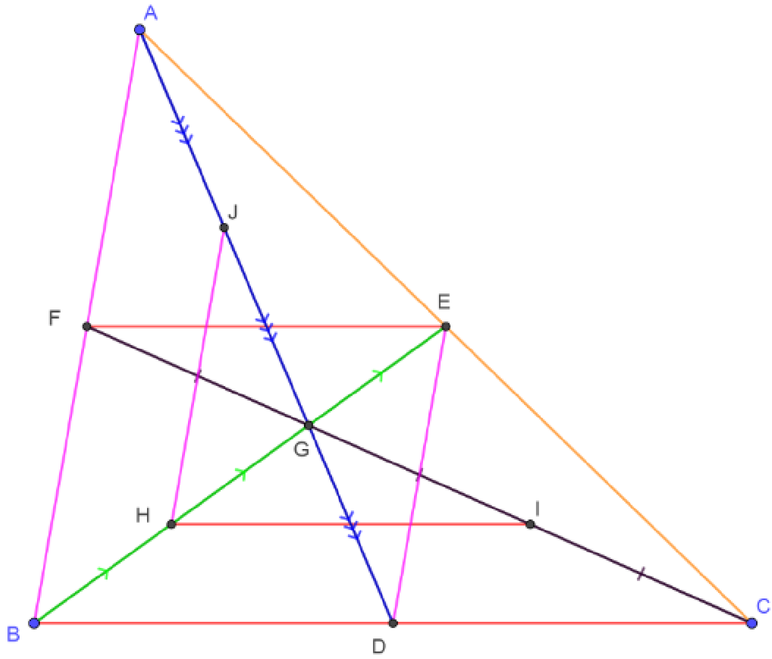
A concorrência das medianas prova-se pela aplicação da recíproca (volta) do Teorema de Ceva:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

2.5 Distância de um vértice ao Baricentro

Proposição 4. *A distância de um vértice ao Baricentro é duas vezes a distância do Baricentro ao pé da mediana correspondente (Figura 2.11).*

Figura 2.11: Guia para a demonstração da Proposição 4. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Demonstração. EF é Base Média do $\triangle ABC$ logo $EF \parallel BC$ e $EF = BD = DC = \frac{BC}{2}$. Sejam H e I pontos médios dos lados BG e CG, respetivamente. Tem-se que o segmento HI é Base Média do $\triangle GBC$. Segue que $HI \parallel BC$ e $HI = \frac{BC}{2}$.

Como $EF \parallel HI$ e $EF = HI$ o quadrilátero $EFHI$ é um paralelogramo e suas diagonais HE e FI encontram-se nos seus pontos médios: $HG = GE$ e $FG = GI$. Conclui-se que $BG = 2GE$ e $CG = 2GF$. Analogamente demonstra-se que $AG = 2GD$. □

2.6 Áreas determinadas pelo Baricentro

Utiliza-se a notação $S(P)$ para referir-se a área do polígono P. A Figura 2.12 permite acompanhar os detalhes da Proposição 5.

Proposição 5. *O Baricentro G do $\triangle ABC$ determina com os vértices e pontos médios M_{AB}, M_{BC} e M_{CA} dos lados AB, BC e CA, respectivamente, seis triângulos de igual área. Isto é,*

$$S(AGM_{AB}) = S(BGM_{AB}) = S(BGM_{BC}) = S(CGM_{BC})$$
$$= S(CGM_{CA}) = S(AGM_{CA}) = \frac{S(ABC)}{6}.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

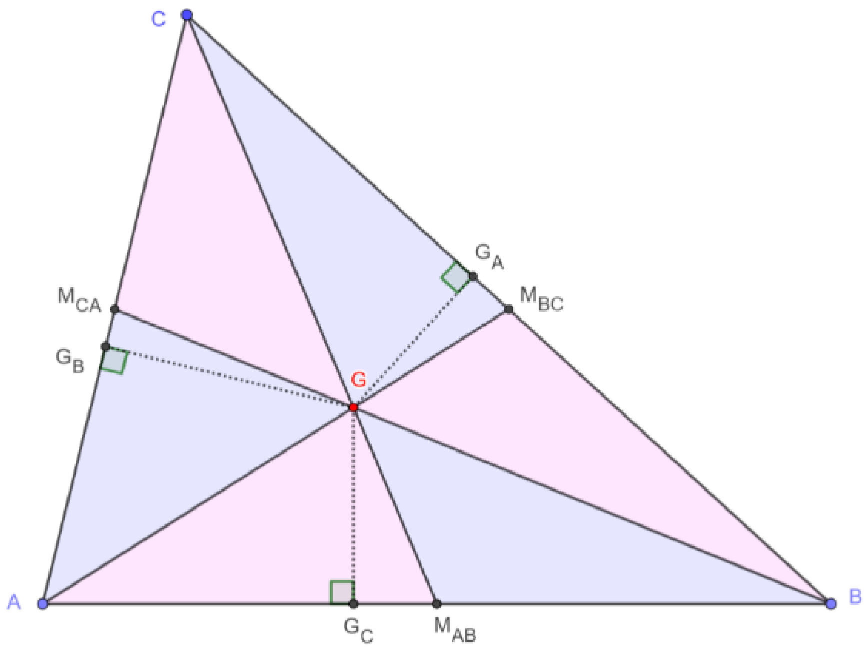
Os triângulos AGB, BGC e CGA têm a mesma área. Ou seja,

$$S(AGB) = S(BGC) = S(CGA) = \frac{S(ABC)}{3}.$$

Os triângulos ACM_{AB}, BCM_{AB}, BAM_{BC}, CAM_{BC}, CBM_{CA} e ABM_{CA} têm a mesma área. Isto é,

$$\begin{aligned} S(ACM_{AB}) &= S(BCM_{AB}) = S(BAM_{BC}) = S(CAM_{BC}) \\ &= S(CBM_{CA}) = S(ABM_{CA}) = \tfrac{S(ABC)}{2}. \end{aligned}$$

Figura 2.12: Igualdade de áreas envolvendo o Baricentro. Guia para a demonstração da Proposição 5. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Demonstração. Sejam G_C, G_A e G_B os pés das alturas do ponto G sobre os lados AB, BC e CA, respectivamente. Como GG_C é altura comum aos triângulos AGM_{AB} e BGM_{AB} e $AM_{AB} = M_{AB}B$ tem-se:

$$S(AGM_{AB}) = S(BGM_{AB}).$$

Adicionalmente, os triângulos ACM_{AB} e BCM_{AB} têm a mesma altura e base de igual medida. Logo,

$$S(ACM_{AB}) = S(BCM_{AB}).$$

Os dois resultados anteriores permitem afirmar que:

$$S(ACG) = S(BCG).$$

O resto das igualdades é provada do mesmo modo. □

Uma segunda figura interativa (mais detalhada) relativa a demonstração anterior está disponível aqui.

2.7 Baricentro de Polígono

Será seguida a estratégia de [1] para definir o Baricentro de um polígono utilizando o conceito de centro de massa para um conjunto finito de massas pontuais e unitárias. Isto é, para os pontos com coordenadas cartesianas $A_i = (A_{ix}, A_{iy})$, com $1 \leq i \leq n$ e $i, n \in \mathbb{N}$, define-se o Baricentro G como:

$$G = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} A_{ix}, \sum_{i=1}^{n} A_{iy}\right).$$

Ou seja, as coordenadas cartesianas de G são as médias aritméticas das coordenadas dos A_i, com $i = 1, 2, \cdots n$.

Uma vantagem do método de E. Carneiro e F. Girão em [1] é permitir mostrar de forma simples a colinearidade do ponto de Nagel, o Baricentro e o Incentro (encontro das bissetrizes internas). Essa abordagem também faz uma introdução implícita do conceito de Coordenada Baricêntrica.

O ponto de Nagel é definido pela concorrência das cevianas do mesmo nome. Estas são os segmentos de um vértice do triângulo ao ponto da interseção do Ex-incírculo com o lado correspondente.

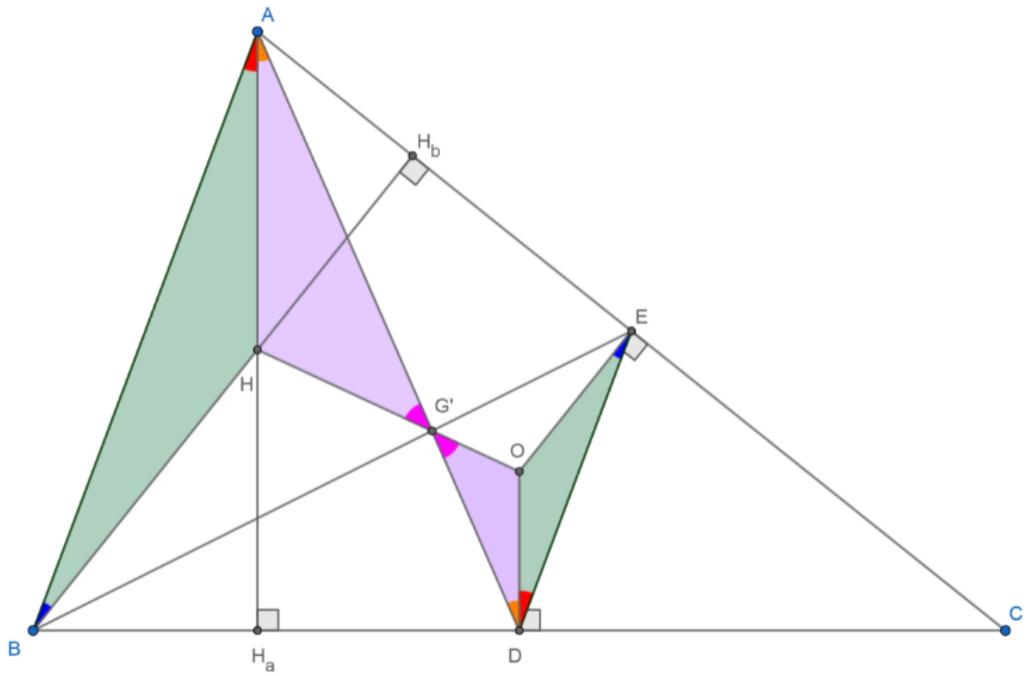
Outros dois centros de triângulos são o Circuncentro (encontro das mediatrizes) e o Ortocentro (encontro das alturas). A seguir mostra-se que os dois pontos anteriores ficam alinhados com o Baricentro. A reta que passa por eles é chamada de Reta de Euler.

2.8 Reta de Euler

Proposição 6 (Reta de Euler). *Para todo triângulo ABC, o Circuncentro O, o Baricentro G e o Ortocentro H são colineares e $HG = 2GO$. Adicionalmente, sendo D o pé da mediana relativa ao vértice A, vale que $AH = 2OD$ (Figura 2.13).*

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 2.13: Guia para a demonstração da Proposição 6. Os pontos H, G e O são colineares e determinam a Reta de Euler. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Demonstração. A Figura 2.13 ilustra um triângulo ABC. Sejam D e E pontos médios dos lados BC e CA, respectivamente. Sejam H_a e H_b os pés das alturas relativas aos vértices A e B. Constroem-se o Circuncentro O e o Ortocentro H do triângulo ABC. Denota-se por G' a interseção das retas AD e HO.

Mostrar-se-á que o ponto $G' = G$ é o Baricentro. Isto é, H, G e O são colineares. Tem-se que DE é Base Média relativa ao lado AB. Logo, $DE \parallel AB$ e

$$\frac{AB}{DE} = 2.$$

Como $AH_a \parallel OD$ e $BH_b \parallel OE$ segue que $\angle BAH = \angle EDO$ e $\angle ABH = \angle DEO$. Por AA tem-se $\triangle ABH \sim \triangle DEO$. Portanto,

$$\frac{BH}{EO} = \frac{AH}{DO} = \frac{AB}{DE} = 2.$$

Adicionalmente, por ângulos alternos entre paralelas, $\angle HAG' = \angle ODG'$ e, por opostos pelo vértice, $\angle AG'H = \angle DG'O$. Consequentemente, pelo critério de semelhança AA, tem-se $\triangle AHG' \sim \triangle DOG'$. Logo,

$$\frac{AH}{DO} = \frac{HG'}{OG'} = \frac{AG'}{DG'} = 2.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Como $AG' = 2DG'$ e $AG = 2DG$ conclui-se que $G' = G$ e os pontos H, G e O são colineares (pertencem à Reta de Euler). □

2.9 Teorema de Leibniz

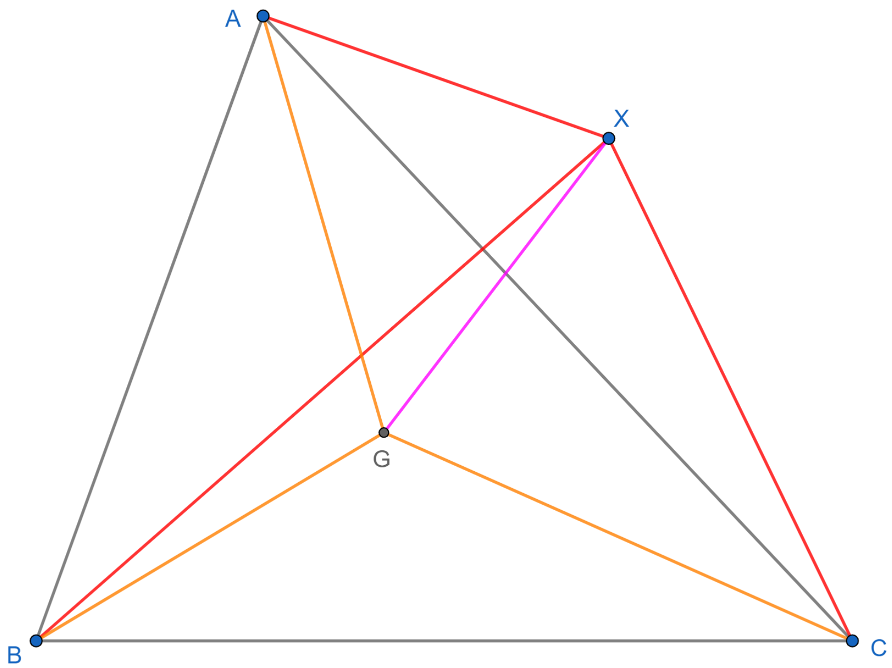
Teorema 7 (Leibniz)**.** *Seja T o centro de massa do conjunto de massas pontuais $\{(A_i, m_i)|i = 1, 2, \cdots, n\}$ de massa total $m = m_1 + \cdots + m_n$, e seja X um ponto arbitrário. Então*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left|\overrightarrow{XA_i}\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left|\overrightarrow{TA_i}\right|^2 + m\left|\overrightarrow{XT}\right|^2. \tag{2.9.1}$$

Especificamente, se $T = G$ é o centroide do $\triangle ABC$ (Figura 2.14) e as massas são unitárias, então

$$AX^2 + BX^2 + CX^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3 \cdot XG^2.$$

Figura 2.14: Teorema de Leibniz. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Na comunidade da Física a equação (2.9.1) é conhecida como Teorema do Eixo Paralelo e escrita:

$$I_X = I_T + md^2.$$

Onde I_X, I_T denotam o momento de inercia do conjunto de massas relativas a um eixo perpendicular passando por X e T, respectivamente. O valor $d = \left|\overrightarrow{XT}\right|$.

Demonstração. O produto escalar entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é denotado por $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$:

$$m_1 \left|\overrightarrow{XA_1}\right|^2 + \ldots + m_n \left|\overrightarrow{XA_n}\right|^2 = m_1 \left\langle \overrightarrow{XA_1}, \overrightarrow{XA_1} \right\rangle + \ldots + m_n \left\langle \overrightarrow{XA_n}, \overrightarrow{XA_n} \right\rangle =$$

$$= m_1 \left\langle \overrightarrow{XT} + \overrightarrow{TA_1}, \overrightarrow{XT} + \overrightarrow{TA_1} \right\rangle + \ldots + m_n \left\langle \overrightarrow{XT} + \overrightarrow{TA_n}, \overrightarrow{XT} + \overrightarrow{TA_n} \right\rangle =$$

$$= m_1 \left|\overrightarrow{XT}\right|^2 + 2m_1 \left\langle \overrightarrow{XT}, \overrightarrow{TA_1} \right\rangle + m_1 \left|\overrightarrow{TA_1}\right|^2 + \ldots +$$

$$+ m_n \left|\overrightarrow{XT}\right|^2 + 2m_n \left\langle \overrightarrow{XT}, \overrightarrow{TA_n} \right\rangle + m_n \left|\overrightarrow{TA_n}\right|^2 =$$

$$= m_1 \left|\overrightarrow{TA_1}\right|^2 + \ldots + m_n \left|\overrightarrow{TA_n}\right|^2 + (m_1 + \ldots + m_n) \left|\overrightarrow{XT}\right|^2 +$$

$$+2 \left\langle \overrightarrow{XT}, \underbrace{\left(m_1\overrightarrow{TA_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{TA_n}\right)}_{=0} \right\rangle =$$

$$= m_1 \left|\overrightarrow{TA_1}\right|^2 + \ldots + m_n \left|\overrightarrow{TA_n}\right|^2 + (m_1 + \ldots + m_n) \left|\overrightarrow{XT}\right|^2.$$

□

2.10 Relação de Stewart

Teorema 8 (Relação de Stewart)**.** *Seja D um ponto no lado BC do $\triangle ABC$. Sejam $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $BD = x$, $CD = y$ e $AD = z$. Vale que:*

$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = a + z^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

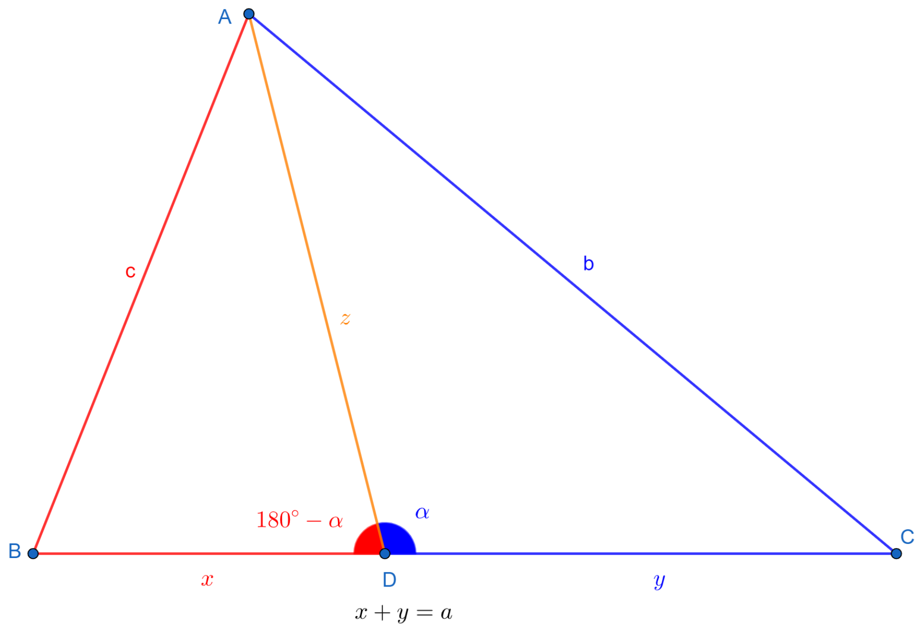
Ou equivalentemente:

$$z^2 = \frac{b^2}{a}x + \frac{c^2}{a}y - xy. \tag{2.10.1}$$

Esta relação permite encontrar o comprimento de uma ceviana AD sem precisar conhecer os ângulos por ela determinados. A Figura 2.15 permite acompanhar a prova.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 2.15: Guia para a demonstração do Teorema 8. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Demonstração. Pela Lei dos Cossenos no $\triangle ABD$ tem-se:

$$c^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos(180° - \alpha).$$

Mas $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$. Logo,

$$c^2 = x^2 + z^2 + 2xz\cos(\alpha),$$

$$\frac{c^2}{x} = x + \frac{z^2}{x} + 2z\cos(\alpha). \tag{2.10.2}$$

Pela Lei dos Cossenos no $\triangle ACD$ tem-se:

$$b^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos(\alpha),$$

$$\frac{b^2}{y} = y + \frac{z^2}{y} - 2z\cos(\alpha). \tag{2.10.3}$$

Somando (2.10.2) e (2.10.3) segue:

$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = x + y + z^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = a + z^2\frac{a}{xy},$$

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

$$\frac{b^2x+c^2y}{axy} = 1 + \frac{z^2}{xy},$$
$$z^2 = \frac{b^2x+c^2y}{a} - xy.$$

□

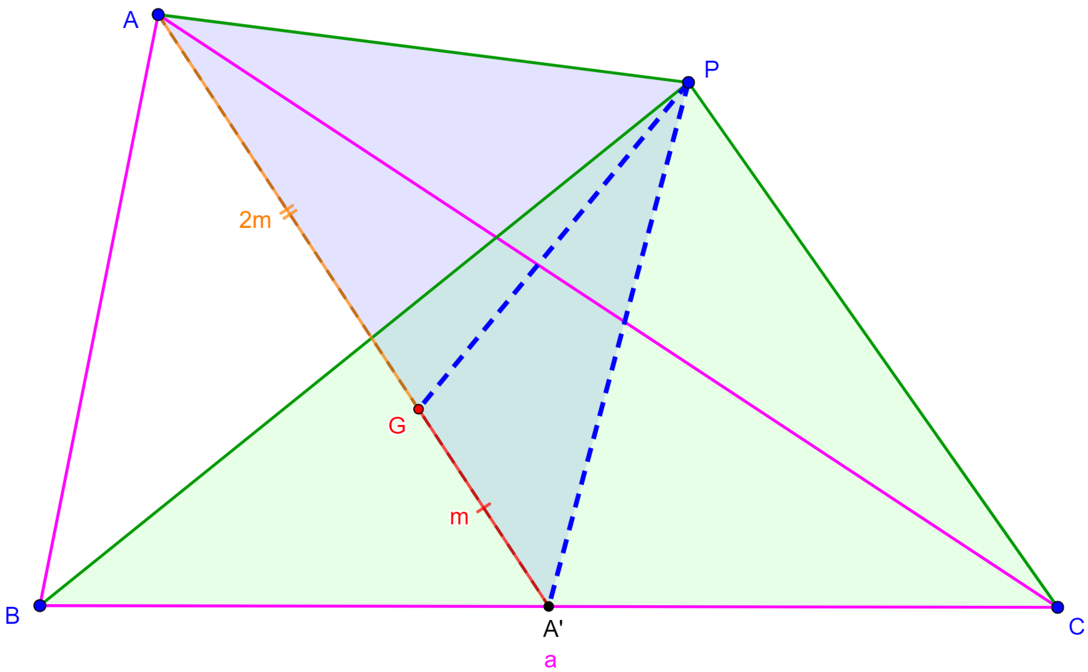
Observação 1. *Ainda com referência a Figura 2.15, no caso em que D é o ponto médio de BC vale $x = y = \frac{a}{2}$ e $z = m_a$ (mediana relativa ao vértice A). Utilizando (2.10.1) encontra-se:*

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

2.11 Mínimo da soma dos quadrados das distâncias de um ponto aos vértices utilizando a Relação de Stewart

Proposição 9. *A soma dos quadrados das distâncias de um ponto P aos vértices de um triângulo ABC é mínima quando P é o baricentro G (Figura 2.16).*

Figura 2.16: Demonstração pela Relação de Stewart. O baricentro G minimiza a soma dos quadrados das distâncias de um ponto P aos vértices de um triângulo ABC. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Demonstração. No $\triangle ABC$ toma-se $BC = a$. Seja A' o ponto médio de BC, G o baricentro do $\triangle ABC$ e P um ponto qualquer. Utilizando a Relação de Stewart no $\triangle PBC$, com mediana

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

PA', tem-se:

$$PB^2 + PC^2 = 2(PA')^2 + \frac{a^2}{2}. \tag{2.11.1}$$

Como o baricentro G é tal que $GA = 2GA'$, seja $GA' = m$ e $GA = 2m$. Aplicando o Teorema de Stewart no $\triangle APA'$, com ceviana PG, segue:

$$PA^2 + 2(PA')^2 = 3PG^2 + 6m^2. \tag{2.11.2}$$

Somando (2.11.1) com (2.11.2) encontra-se:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + 6m^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Como a e m são constantes (não dependem de P), então $PA^2 + PB^2 + PC^2$ é mínimo quando $PG = 0$. □

2.12 Homotetia.

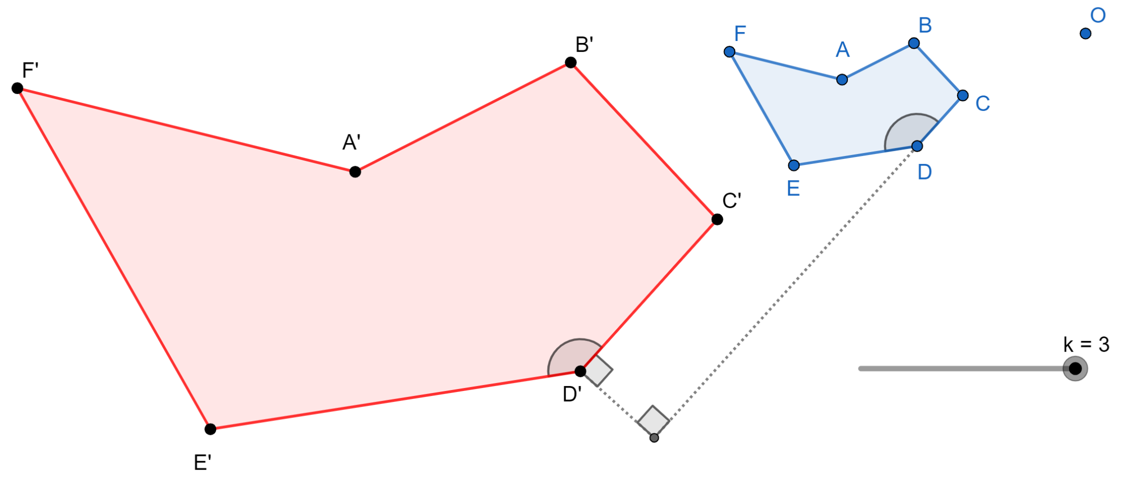
A palavra Homotetia é derivada do grego e significa Homo (similar, semelhante) e Tetia (posição). É uma transformação que se aplica ponto a ponto. Por exemplo, a homotetia de centro O e razão k transforma o ponto A no ponto A' e vale que:

$$OA' = k \cdot OA.$$

Porém, também pode ser aplicada a formas mais complexas. A Figura 2.17 mostra uma homotetia para o polígono $ABCDEF$.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 2.17: Homotetia do polígono $ABCDEF$ com centro O e fator k. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Toda homotetia preserva: ângulos, razões entre os segmentos de reta e o paralelismo. Exemplos: $\angle CDE = \angle C'D'E'$, $CD \parallel C'D'$ e

$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{A'F'}{AF} = k.$$

A área do polígono $A'B'C'D'E'F'$ é k^2 vezes a área do polígono $ABCDEF$.

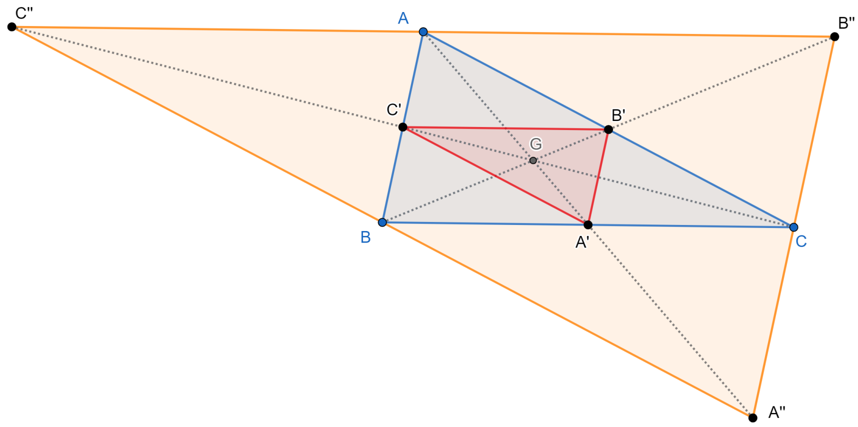
2.13 Duas homotetias com centro no Baricentro de um triângulo.

A homotetia do triângulo ABC com centro em G, baricentro do mesmo, e fator $-\frac{1}{2}$ é o triângulo $A'B'C'$ (medial), com vértices nos pontos médios dos lados do $\triangle ABC$.

A homotetia do triângulo ABC com centro em G e fator -2 é o triângulo $A''B''C''$. O $\triangle ABC$ é medial do $\triangle A''B''C''$. O ponto G é o baricentro comum dos triângulos ABC, $A'B'C'$ e $A''B''C''$. A Figura 2.18 mostra uma construção geométrica.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 2.18: Duas homotetias com centro no Baricentro de um triângulo. Versão interativa aqui.



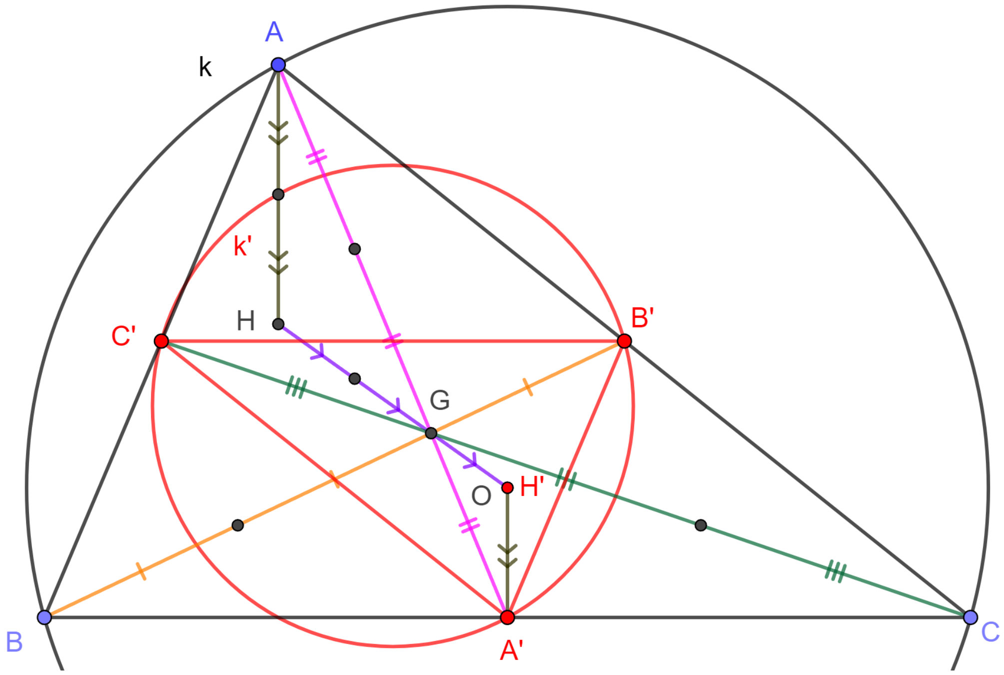
Fonte: O autor.

2.14 Homotetia. Baricentro. Círculo de Nove Pontos. Reta de Euler.

Viu-se que a homotetia do triângulo ABC com centro em G, baricentro do mesmo, e fator $-\frac{1}{2}$ é o triângulo $A'B'C'$ (medial), com vértices nos pontos médios dos lados do $\triangle ABC$ (Figura 2.19). Isto é consequência das propriedades do baricentro: $AG = 2GA'$, $BG = 2GB'$ e $CG = 2GC'$.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 2.19: Homotetia. Baricentro. Círculo de Nove Pontos. Reta de Euler. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Porém, existem outros "dois para um": $AH = 2OA'$ e $HG = 2GO$. Os pontos H e O são ortocentro e circuncentro do $\triangle ABC$, encontro das alturas e mediatrizes, respetivamente.

A homotetia anterior também transforma H em $H' = O$, ortocentro do $\triangle A'B'C'$. Adicionalmente, k circuncírculo do $\triangle ABC$ em k' circuncírculo do $\triangle A'B'C'$ (também conhecido como círculo de nove pontos do $\triangle ABC$). Os pontos H, G e $H' = O$, são colineares e definem a reta de Euler.

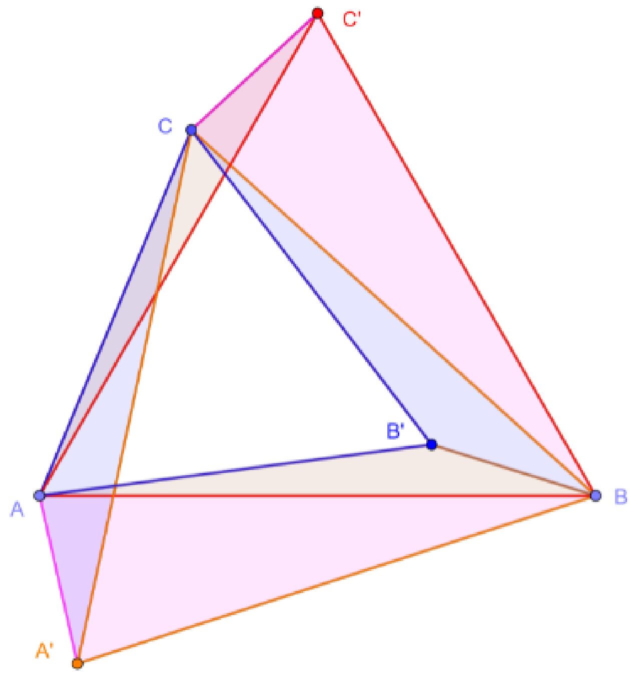
2.15 Teorema de Napoleão

Lema 10 (Para o Teorema de Napoleão)**.** *Se sobre os lados de um triângulo qualquer ABC (Figura 2.20) forem construídos triângulos equiláteros ABC', BCA' e CAB', então:*

$$AA' = BB' = CC'.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 2.20: Construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

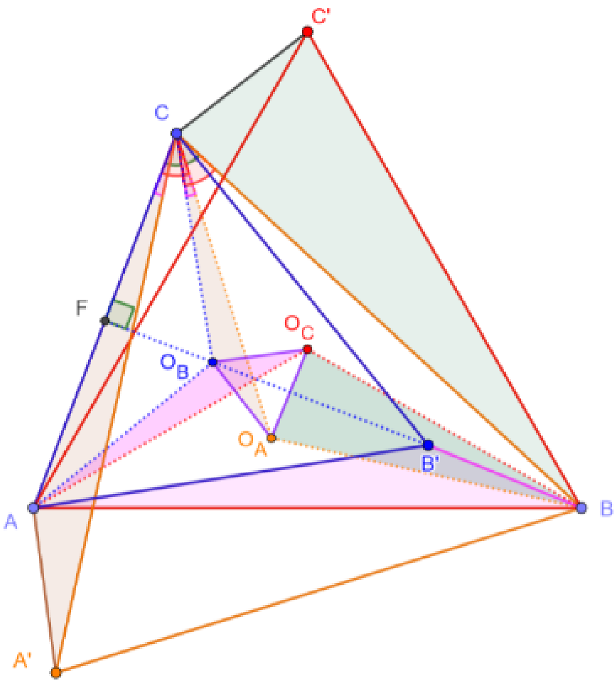
Demonstração. A Figura 2.20 mostra uma construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. O caso contrário pode ser encontrado em [38].

Por construção tem-se $AC = AB'$ e $AC' = AB$. De $\angle CAB' = \angle C'AB = 60°$, segue que $\angle CAC' = \angle B'AB$. Por LAL, encontra-se $\triangle ACC' \equiv \triangle AB'B$. Logo, $CC' = B'B$. Analogamente, $A'A = CC'$. Conclui-se que $AA' = BB' = CC'$. □

Teorema 11 (Teorema de Napoleão)**.** *Se sobre os lados de um triângulo qualquer ABC forem construídos triângulos equiláteros, os Ortocentros desses triângulos equiláteros formam igualmente um triângulo equilátero (Figura 2.21).*

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 2.21: Construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Demonstração. A Figura 2.21 mostra uma construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. O caso contrário pode ser encontrado em [38].

Sejam O_A, O_B e O_C os Ortocentros dos triângulos equiláteros BCA', CAB' e ABC', respectivamente. Girando o $\triangle O_BCO_A$ em 30° em sentido horário em torno do vértice C mostra-se que é semelhante com o $\triangle ACA'$.

De fato, como $\angle ACO_B = \angle BCO_A = 30°$ e $\angle ACO_A = \angle BCO_B$, então:

$$\angle ACA' = \angle O_BCO_A.$$

Seja F o ponto médio do lado AC. Em triângulos equiláteros o Ortocentro, o Incentro e o Baricentro coincidem. Logo,

$$FO_B = \frac{1}{3}FB'.$$

Segue que:

$$CO_B \cdot \operatorname{sen}(30°) = \frac{1}{3}CB' \cdot \operatorname{sen}(60°),$$

$$CA = CB' = \sqrt{3} \cdot CO_B.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Analogamente, $CA' = CB = \sqrt{3} \cdot CO_A$. Com isto,

$$\frac{CA'}{CA} = \frac{CO_A}{CO_B}.$$

Pelo caso de semelhança LAL tem-se $\triangle ACA' \sim \triangle O_B CO_A$. Segue que:

$$AA' = \sqrt{3} \cdot O_B O_A.$$

Similarmente, mostra-se que:

$$BB' = \sqrt{3} \cdot O_C O_B,$$

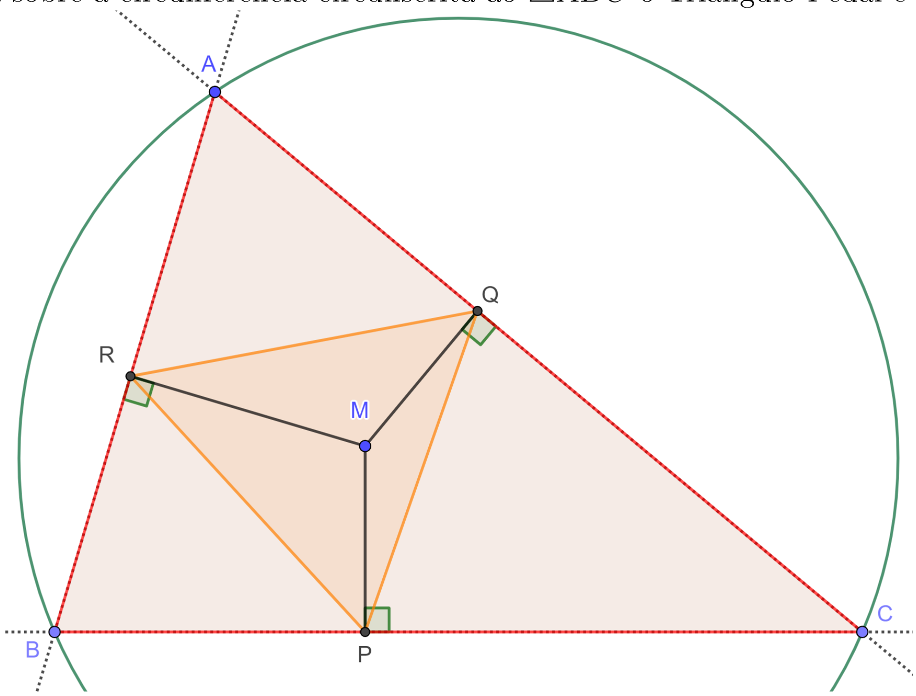
$$CC' = \sqrt{3} \cdot O_A O_C.$$

Como, provado no Lema 10, vale $AA' = BB' = CC'$, então o $\triangle O_A O_B O_C$ é equilátero. □

2.16 Triângulo Pedal

Definição 2. *Seja M um ponto no plano do triângulo ABC e P, Q e R as projeções de M sobre as retas BC, CA e AB. O $\triangle PQR$ é chamado* <u>*Pedal de M em relação ao $\triangle ABC$*</u> *(Figura 2.22).*

Figura 2.22: Definição de Triângulo Pedal. Versão interativa aqui. Verifica-se que quando o ponto M está sobre a circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$ o Triângulo Pedal é degenerado.



Fonte: O autor.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

2.17 Reta de Simson-Wallace

Teorema 12 (Teorema de Simson-Wallace)**.** *Dados um $\triangle ABC$, c sua circunferência circunscrita e um ponto P no mesmo plano de ABC, o Triângulo Pedal de P em relação a ABC é degenerado (D, E e F são colineares) se, e somente se, $P \in c$ (Figura 2.23).*

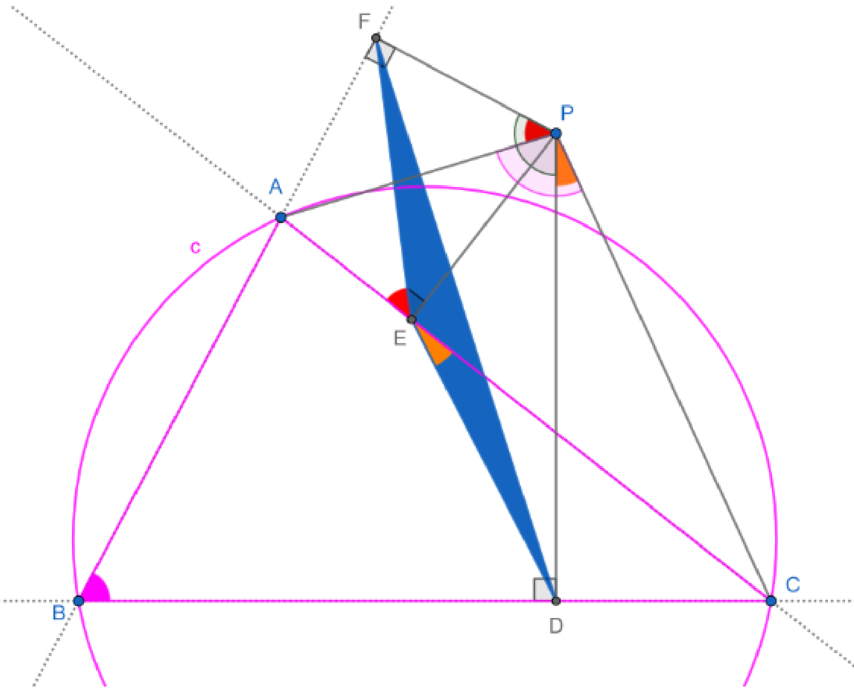


Figura 2.23: Construção geométrica para a prova do Teorema 12. Versão interativa aqui.

Demonstração. Como $\angle PFA = \angle PEA = 90°$, então $PFAE$ é um quadrilátero inscritível. Segue que $\angle FPA = \angle FEA$. De $\angle PEC = \angle PDC = 90°$ tem-se que $PEDC$ é um quadrilátero cíclico. Logo, $\angle DPC = \angle DEC$. Adicionalmente, $\angle PDB = \angle PFB = 90°$ implica que $PDBF$ é um quadrilátero cíclico. Consequentemente $\angle DPF = 180° - \angle ABC$.

Nota-se que:

$$\angle APC - \angle DPF = \angle DPC - \angle FPA = \angle DEC - \angle FEA.$$

Ou seja, $\angle APC = \angle DPF$ se, e somente se, $\angle DEC = \angle FEA$. Adicionalmente, $\angle DEC = \angle FEA$ se, e somente se, D, E e F são colineares. Mas neste caso, $\angle APC = \angle DPF$ se, e somente se, $\angle APC + \angle ABC = 180°$. Finalmente, $\angle APC + \angle ABC = 180°$ se, e somente se, $ABCP$ é cíclico. □

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Capítulo 3

Construções, exercícios e desafios

3.1 Baricentro, trapézio e semelhança de triângulos

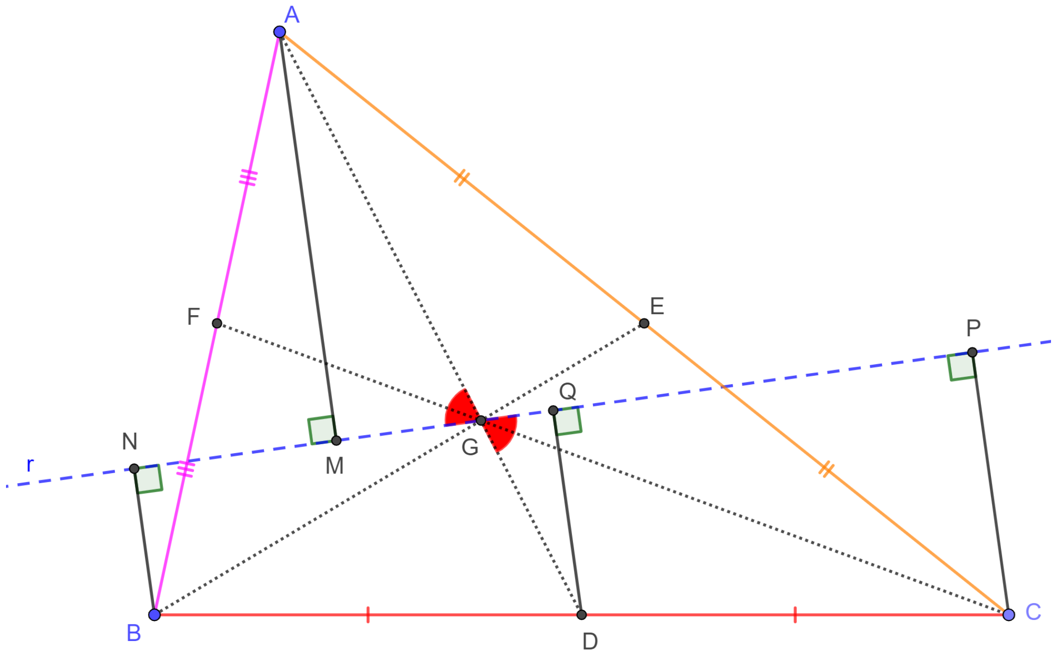
Problema 1. *Uma reta r passa pelo baricentro de um triângulo ABC deixando o vértice A em um semiplano e os vértices B e C no outro semiplano determinado por r. As projeções de A, B e C sobre a reta r são M, N e P, respectivamente. Provar que:*

$$AM = BN + CP.$$

3.1.1 Resolução do Problema 1.

A Figura 3.1 mostra uma construção geométrica.

Figura 3.1: Uma construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Seja Q o ponto médio de NP. Então, DQ é a base média do trapézio $NBCP$, assim $DQ \parallel BN$ e

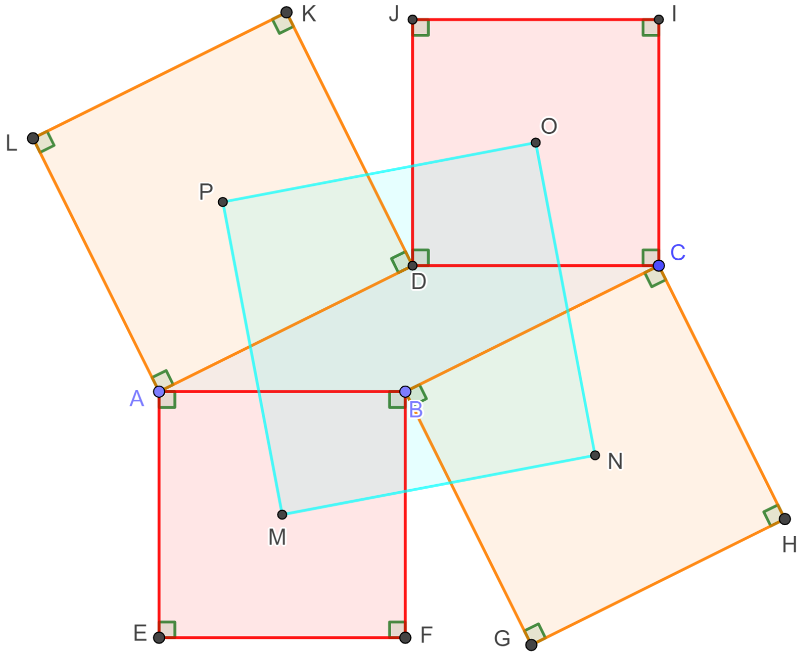
$$DQ = \frac{BN + CP}{2}.$$

Como G é o baricentro do triângulo ABC, então $AG = 2DG$. Pelo critério de semelhança AA tem-se $\triangle AMG \sim \triangle DQG$, segue que $AM = 2DQ$. Portanto, $AM = BN + CP$.

3.2 Problema de Thebault-I

Problema 2. *Seja $ABCD$ um paralelogramo e sejam $ABFE$, $BCHG$, $CDJI$ e $DALK$ quadrados construídos externamente a $ABCD$. Provar que os baricentros dos quadrados formam outro quadrado $MNOP$ (Figura 3.2).*

Figura 3.2: Uma construção geométrica inicial para o Problema 2. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

3.2.1 Resolução do Problema 2.

Seja $\angle DAB = \alpha$ (Figura 3.3). Como $ABCD$ é um paralelogramo obtêm-se que $AB = CD$, $BC = DA$, $\angle BCD = \alpha$ e

$$\angle ABC = \angle CDA = 180^\circ - \alpha.$$

Pelo critério de congruência LAL vale que:

$$\triangle PAM \equiv \triangle MBN \equiv \triangle NCO \equiv \triangle ODP.$$

De fato:

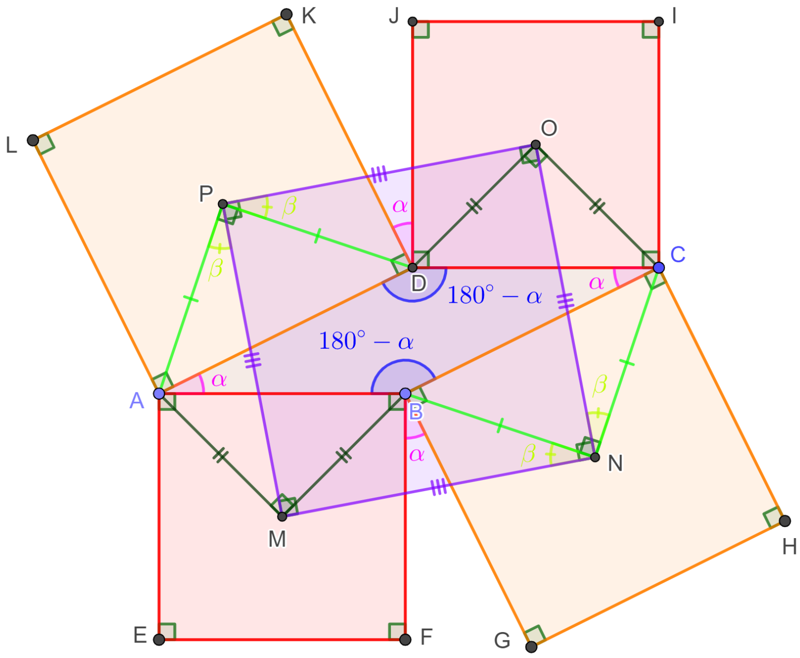
$$\begin{cases} PA = NB = NC = PD \\ \angle PAM = \angle MBN = \angle NCO = \angle ODP = 90^\circ + \alpha \\ AM = MB = OC = OD \end{cases}.$$

Segue que $PM = MN = NO = OP$ e

$$\angle APM = \angle BNM = \angle CNO = \angle DPO = \beta.$$

Como
$$\angle APD = \angle BMA = \angle CNB = \angle DOC = 90°,$$
então dos dois últimos conjuntos de igualdades conclui-se que:
$$\angle MPO = \angle NMP = \angle ONM = \angle PON = 90°.$$

Figura 3.3: Uma construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

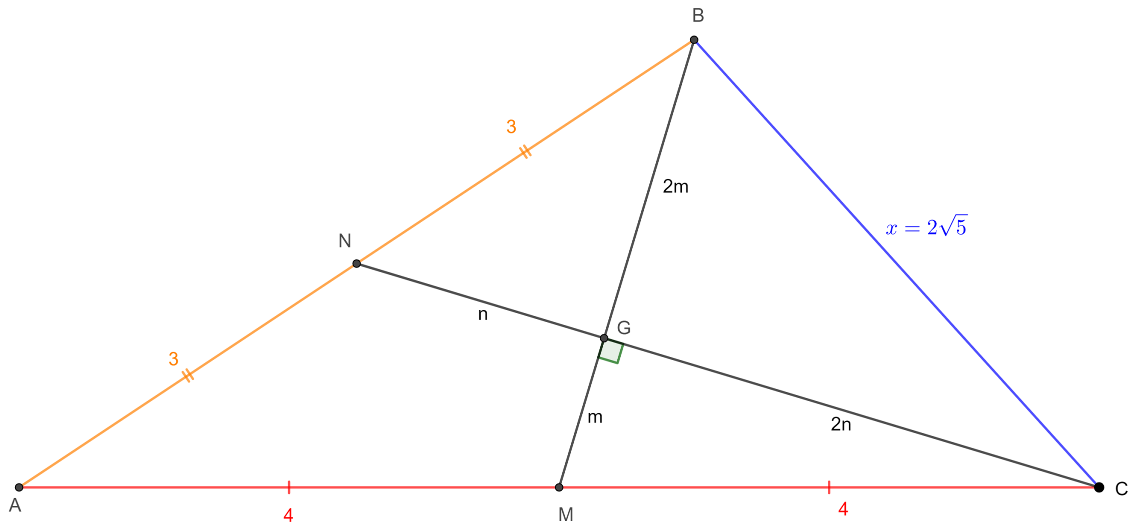
3.3 Problema com medianas perpendiculares

Problema 3. *No triângulo ABC as medianas dos lados AB e AC são perpendiculares. Sabendo que $AB = 6$ e $AC = 8$, determinar BC.*

3.3.1 Resolução do Problema 3.

Sejam M e N os pontos médios de AC e AB, respectivamente (Figura 3.4). Como o ponto $G = BM \cap CN$ é o baricentro, segue que $BG = 2GM = 2m$ e $CG = 2GN = 2n$.

Figura 3.4: Uma construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Utilizando o Teorema de Pitágoras no $\triangle MGC$ tem-se:

$$m^2 + 4n^2 = 16. \tag{3.3.1}$$

Pelo Teorema de Pitágoras no $\triangle NGB$ encontra-se:

$$4m^2 + n^2 = 9. \tag{3.3.2}$$

Resolvendo o sistema de equações (3.3.1) e (3.3.2) segue que: $m^2 = \frac{4}{3}$ e $n^2 = \frac{11}{3}$. Utilizando o Teorema de Pitágoras no $\triangle BGC$ tem-se:

$$4(m^2 + n^2) = x^2,$$

$$x = 2\sqrt{5}.$$

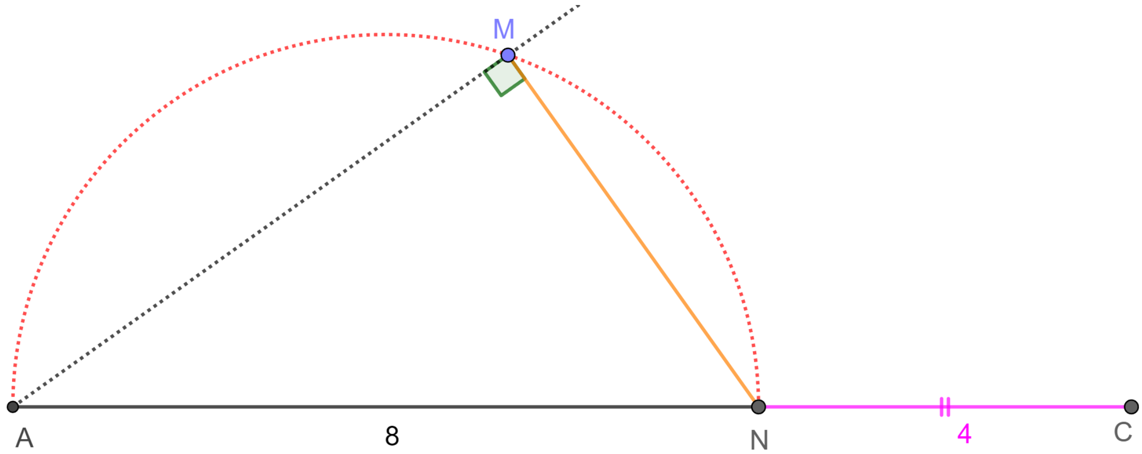
3.4 Baricentro, recíproca de Tales e mediana de triângulo retângulo

Problema 4. *Seja N o ponto do lado AC do $\triangle ABC$ tal que $AN = 2NC$ e M o ponto do lado AB tal que MN é perpendicular a AB. Sabendo que $AC = 12$ cm e que o baricentro G do triângulo ABC pertence ao segmento MN, determinar o comprimento do segmento BG.*

3.4.1 Resolução do Problema 4.

A Figura 3.5 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 3.5: Construção geométrica inicial para o Problema 4. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Seja D o ponto médio de AC (Figura 3.6). Obtêm-se $AD = DC = 6$, $DN = 2$ e:

$$\frac{DN}{NC} = \frac{1}{2}.$$

Como G é o baricentro, encontra-se:

$$\frac{DG}{GB} = \frac{1}{2}.$$

Juntando as duas equações anteriores segue:

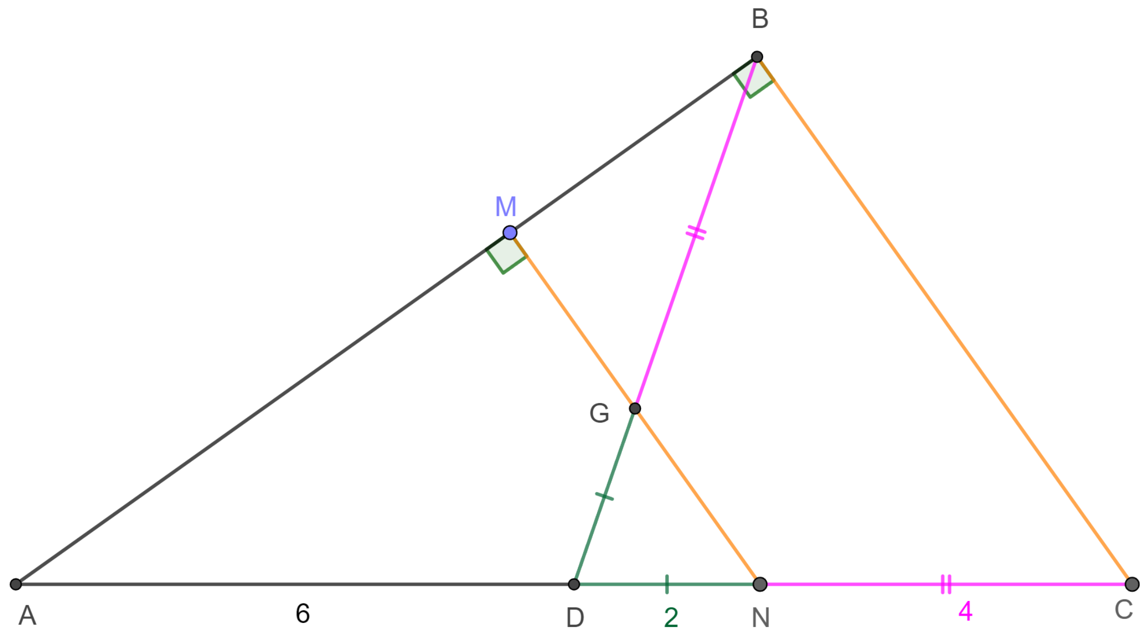
$$\frac{DN}{NC} = \frac{DG}{GB}.$$

Logo, pela recíproca do Teorema de Tales segue que $MN \parallel GN \parallel BC$. Portanto,

$$\angle ABC = 90°.$$

Como a mediana BD é metade da hipotenusa AC, vale que $AD = DC = DB = 6$. Logo, $DG = 2$ e $GB = 4$.

Figura 3.6: Construção geométrica para o Problema 4. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

3.5 Baricentro, triângulo isósceles e reflexão

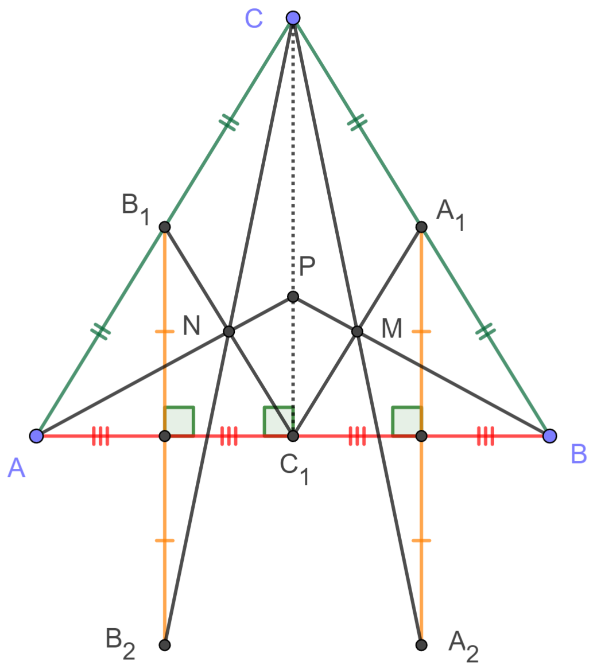
Problema 5. *Seja ABC um triângulo isósceles, com $AC = BC$, tal que A_1, B_1 e C_1 são os pontos médios de BC, AC e AB, respectivamente. Os pontos A_2 e B_2 são os simétricos de A_1 e B_1 com relação ao lado AB. Seja M a interseção de CA_2 e A_1C_1 e seja N a interseção de CB_2 e B_1C_1. Seja P a interseção de AN e BM, provar que $AP = BP$.*

3.5.1 Resolução do Problema 5.

A Figura 3.7 mostra uma construção geométrica inicial.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 3.7: Construção geométrica inicial para o Problema 5. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

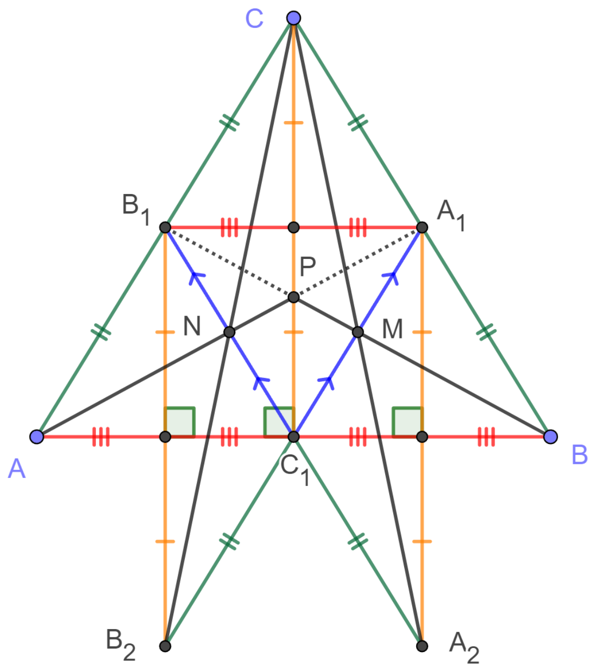
Como $CC_1 \parallel A_1A_2$ e $CC_1 = A_1A_2$, tem-se que $CC_1A_2A_1$ é um paralelogramo. Então, $A_1M = C_1M$ (Figura 3.8).

O quadrilátero $A_1B_1C_1B$ também é um paralelogramo. Portanto, a interseção de BM e AC é B_1. Então, P está sobre a mediana BB_1. Analogamente, P está sobre a mediana AA_1.

O ponto P é o baricentro do triângulo isósceles ABC, onde as medianas AA_1 e BB_1 possuem o mesmo comprimento. Portanto,

$$AP = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}BB_1 = BP.$$

Figura 3.8: Construção geométrica para o Problema 5. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

3.6 Baricentro, paralelogramo e semelhança

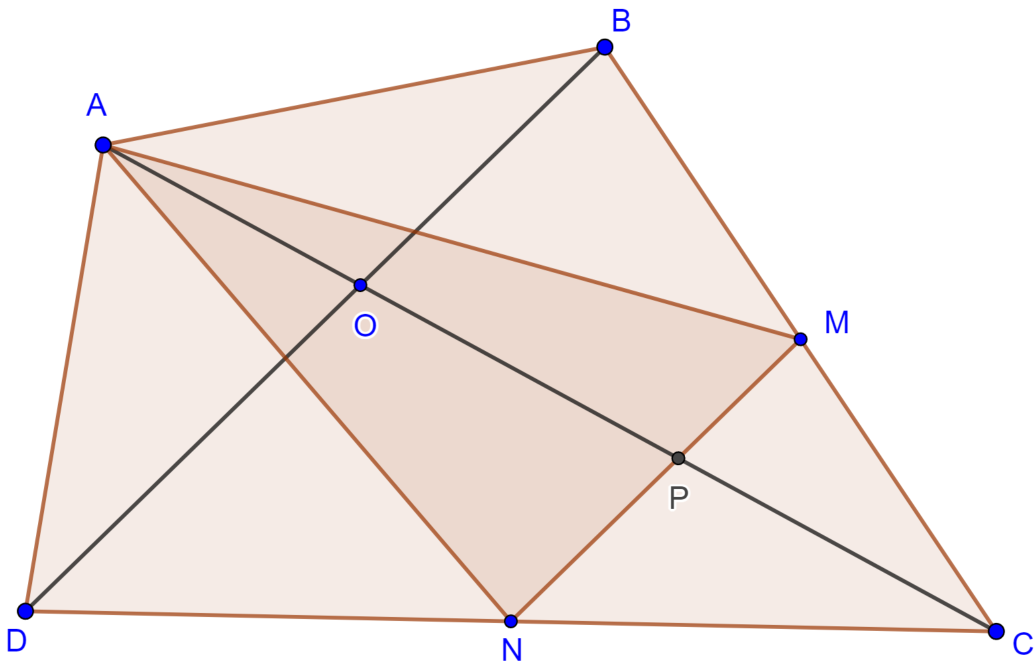
Problema 6. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, onde N é o ponto médio de DC, M é o ponto médio de BC, e O é a interseção entre as diagonais AC e BD. Mostrar que O é o baricentro do triângulo AMN se, e somente se, $ABCD$ é um paralelogramo.*

3.6.1 Resolução do Problema 6.

A Figura 3.9 mostra uma construção geométrica para a primeira parte da demonstração.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 3.9: Construção geométrica para a ida do Problema 6. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Inicialmente, seja o ponto O o baricentro do $\triangle AMN$. Quer-se provar que $ABCD$ é um paralelogramo.

Para os triângulos MCN e BCD o $\angle C$ é comum e vale:

$$\frac{CN}{CD} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{2}.$$

Pelo critério de semelhança LAL tem-se:

$$\triangle MCN \sim \triangle BCD.$$

Como, por hipótese, O é baricentro do $\triangle AMN$, então a reta AO intercepta MN em P, tal que $NP = PM$.

Da semelhança também é concluído que O é ponto médio da diagonal BD.

Por outro lado,

$$\frac{OP}{AO} = \frac{1}{2}.$$

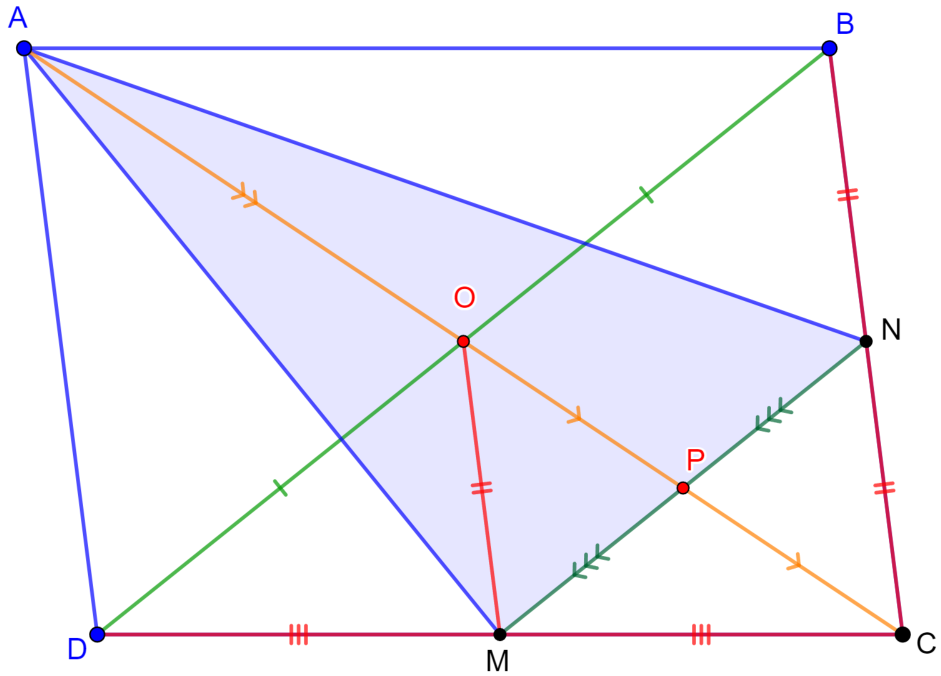
Pela semelhança, $CP = OP$ e

$$\frac{CP}{CO} = \frac{1}{2}.$$

Segue que $AO = OC$. Ou seja, O é ponto médio da diagonal AC. Portanto, as diagonais do quadrilátero $ABCD$ encontram-se em seu ponto médio. Isto é, $ABCD$ é um paralelogramo.

A Figura 3.10 mostra uma construção geométrica para a segunda parte da demonstração (volta).

Figura 3.10: Construção geométrica para a volta do Problema 6. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Neste caso, por hipótese, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo. Ou seja, $AO = OC$, $DO = OB$, $AB = DC$, $BC = AD$, $AB \parallel DC$ e $BC \parallel AD$. Quer-se provar que o ponto O é o baricentro do $\triangle AMN$.

Pelos mesmos argumentos utilizados anteriormente tem-se:

$$\triangle MCN \sim \triangle DCB.$$

Adicionalmente, consideram-se os $\triangle BDC$ e $\triangle OMD$ com ângulo comum em D :

$$\frac{DM}{DC} = \frac{DO}{DB} = \frac{1}{2}.$$

Pelo critério de semelhança LAL, $\triangle BCD \sim \triangle ODM$. Logo, $OM \parallel NC$ e

$$OM = \frac{BC}{2} = NC.$$

Ou seja, $MCNO$ é paralelogramo. Seja o ponto $P = OC \cap MN$. Tem-se: $OP = PC$. Ou

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

seja, $OP = \frac{AO}{2}$, AP é mediana e O é baricentro.

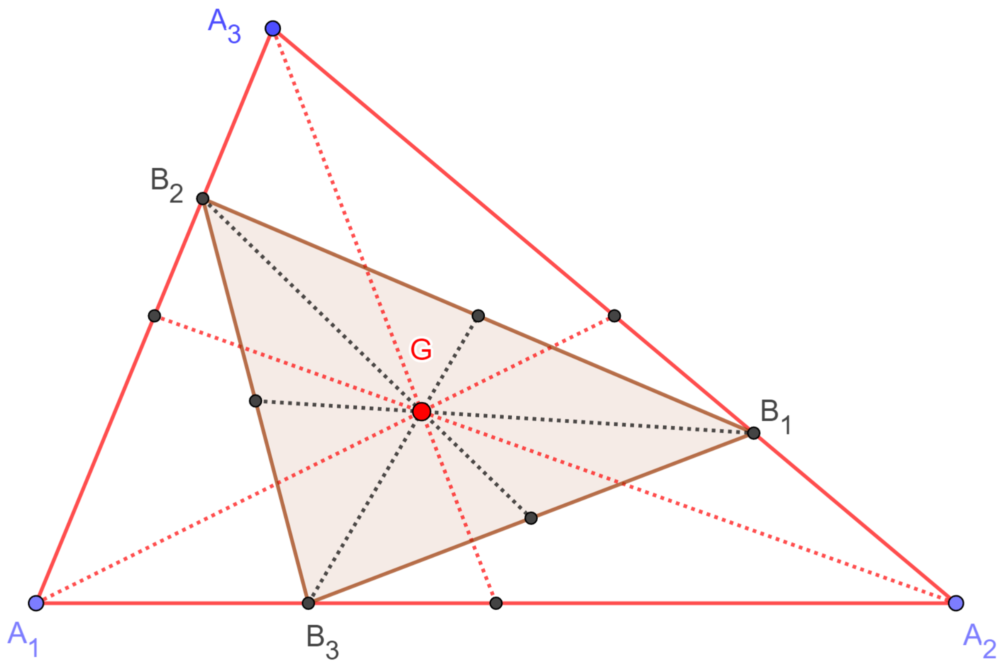
3.7 Triângulos com o mesmo baricentro

Proposição 13. *Se o $\triangle B_1B_2B_3$ está inscrito no $\triangle A_1A_2A_3$ e*

$$\frac{A_1B_3}{A_1A_2} = \frac{A_2B_1}{A_2A_3} = \frac{A_3B_2}{A_3A_1} = t = cte,$$

então os dois têm o mesmo baricentro G. Também vale a recíproca (Figura 3.11).

Figura 3.11: Triângulos com o mesmo baricentro. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

A demonstração é deixada como exercício para o leitor.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Capítulo 4

Problemas de olimpíadas internacionais

4.1 Baricentro. Homotetia. Quadriláteros cíclicos. P36-LL-IMO-1966.

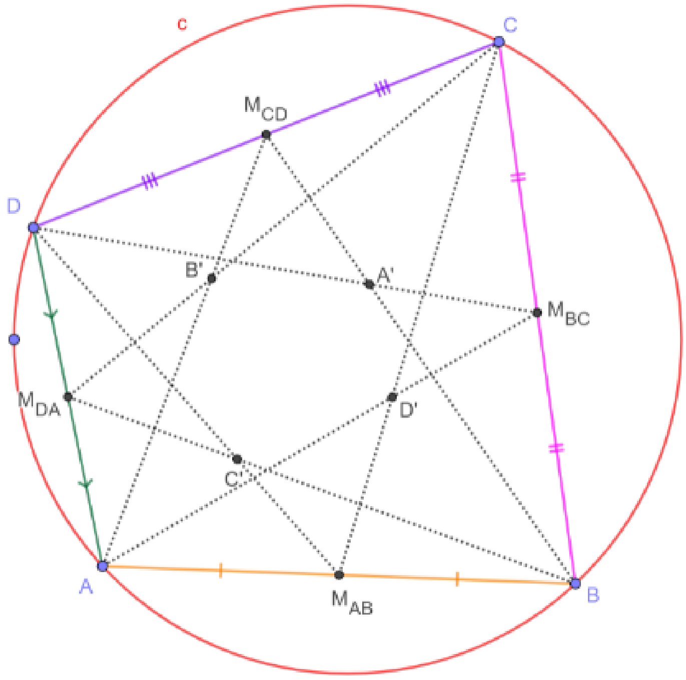
Problema 7. *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível. Mostrar que os Baricentros dos triângulos ABC, BCD, CDA e DAB pertencem a um mesma circunferência.*

A IMO 1966 foi realizada na cidade de Sófia, Bulgária. Esse é o Problema 36 da lista longa (LL), proposto pela delegação da Polônia [3].

4.1.1 Resolução do Problema 7.

A Figura 4.1 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.1: Construção geométrica inicial para o Problema 7. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Considera-se que c é a circunferência circunscrita ao quadrilátero $ABCD$. Sejam D', A', B' e C' os Baricentros dos triângulos ABC, BCD, CDA e DAB, respectivamente.

Proposição 14. *O ponto G, Baricentro do quadrilátero $ABCD$, coincide com o ponto G', Baricentro do quadrilátero $D'A'B'C'$, isto é, $G = G'$.*

Demonstração. Tem-se:

$$D' = \frac{1}{3} \cdot (A_x + B_x + C_x, A_y + B_y + C_y),$$

$$A' = \frac{1}{3} \cdot (B_x + C_x + D_x, B_y + C_y + D_y),$$

$$B' = \frac{1}{3} \cdot (C_x + D_x + A_x, C_y + D_y + A_y),$$

$$C' = \frac{1}{3} \cdot (D_x + A_x + B_x, D_y + A_y + B_y),$$

onde $J = (J_x, J_y)$, com $J \in \{A, B, C, D\}$.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Somando, por coordenadas, as quatro equações anteriores segue:

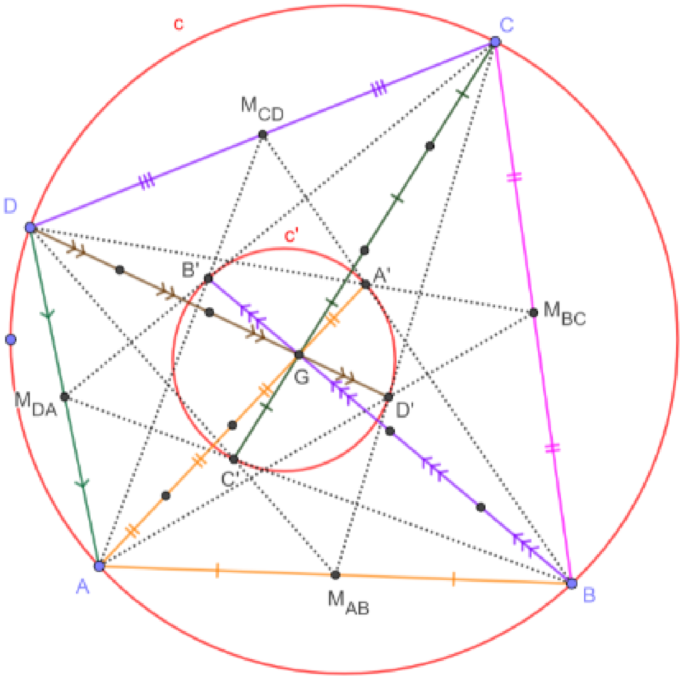
$$\begin{aligned} G' &= \tfrac{1}{4} \cdot \left(D'_x + A'_x + B'_x + C'_x, D'_y + A'_y + B'_y + C'_y \right) \\ &= \tfrac{1}{12} \cdot (3A_x + 3B_x + 3C_x + 3D_x, 3A_y + 3B_y + 3C_y + 3D_y) \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot (A_x + B_x + C_x + D_x, A_y + B_y + C_y + D_y) = G. \end{aligned}$$

□

Proposição 15. *Com relação aos pontos* A, B, C, D, A', B', C', D' *e* G *(Figura 4.2) vale que:*

$$\frac{AG}{GA'} = \frac{BG}{GB'} = \frac{CG}{GC'} = \frac{DG}{GD'} = 3.$$

Figura 4.2: Construção geométrica para o Problema 7. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Demonstração. Tem-se:

$$G_x - A_x = \tfrac{1}{4} \cdot (B_x + C_x + D_x - 3A_x)\,,$$

$$G_y - A_y = \tfrac{1}{4} \cdot (B_y + C_y + D_y - 3A_y)\,,$$

$$AG = \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{(B_x + C_x + D_x - 3A_x)^2 + (B_y + C_y + D_y - 3A_y)^2}.$$

Também tem-se:

$$\begin{aligned} A'_x - G_x &= \tfrac{1}{3}\cdot(B_x + C_x + D_x) - \tfrac{1}{4}\cdot(A_x + B_x + C_x + D_x) \\ &= \tfrac{1}{12}\cdot(B_x + C_x + D_x - 3A_x)\,, \\ A'_y - G_y &= \tfrac{1}{3}\cdot(B_y + C_y + D_y) - \tfrac{1}{4}\cdot(A_y + B_y + C_y + D_y) \\ &= \tfrac{1}{12}\cdot(B_y + C_y + D_y - 3A_y)\,, \\ GA' &= \tfrac{1}{12}\cdot\sqrt{(B_x + C_x + D_x - 3A_x)^2 + (B_y + C_y + D_y - 3A_y)^2}. \end{aligned}$$

Com isto foi provado que:

$$\frac{AG}{GA'} = 3.$$

O resto da demonstração é feita de forma análoga. □

As duas proposições anteriores permitem afirmar que uma Homotetia, com centro no ponto G, e fator de proporcionalidade $-\frac{1}{3}$ transforma A, B, C, D e c em A', B', C', D' e c', respectivamente, sendo c' a circunferência circunscrita ao quadrilátero $A'B'C'D'$. A Figura 4.2 mostra uma construção geométrica.

4.2 Baricentro. Áreas. Desigualdade. P9 SL IMO 1968.

Problema 8. *Seja ABC um triângulo arbitrário e M um ponto no interior deste. Sejam d_a, d_b, e d_c as distâncias de M aos lados BC, CA, e AB; e a, b, c a medida dos lados, respectivamente. Seja S a área do $\triangle ABC$. Provar que:*

$$abd_ad_b + bcd_bd_c + cad_cd_a \leq \frac{4S^2}{3}. \tag{4.2.1}$$

Provar que a igualdade acontece quando M é o Baricentro.

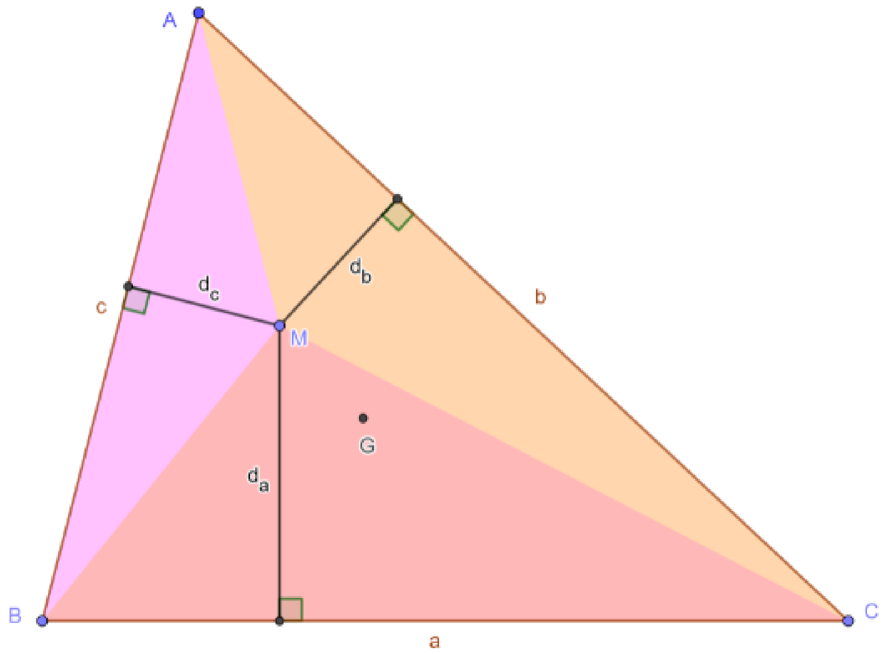
A IMO 1968 foi realizada na cidade de Moscou, Rússia. Esse é o Problema 9 da SL e foi proposto pela delegação da Romênia [3].

4.2.1 Resolução do Problema 8.

A Figura 4.3 mostra uma construção geométrica.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 4.3: Construção geométrica para o Problema 8. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Inicia-se notando que a desigualdade (4.2.1) é equivalente a:

$$\frac{ad_a}{2}\cdot\frac{bd_b}{2}+\frac{bd_b}{2}\cdot\frac{cd_c}{2}+\frac{cd_c}{2}\cdot\frac{ad_a}{2}\leq\frac{S^2}{3}.$$

Sejam $S_a = S(BCM) = \frac{ad_a}{2}$, $S_b = S(CAM) = \frac{bd_b}{2}$ e $S_c = S(ABM) = \frac{cd_c}{2}$. Segue que:

$$S_a\cdot S_b+S_b\cdot S_c+S_c\cdot S_a\leq\frac{S^2}{3}.$$

Como $S = S_a + S_b + S_c$, a desigualdade anterior equivale a:

$$3\left(S_a\cdot S_b+S_b\cdot S_c+S_c\cdot S_a\right)\leq\left(S_a+S_b+S_c\right)^2.$$

Desenvolvendo o quadrado e simplificando encontra-se:

$$S_a\cdot S_b+S_b\cdot S_c+S_c\cdot S_a\leq S_a^2+S_b^2+S_c^2.$$

Multiplica-se toda a desigualdade por 2 e colocam-se os termos do lado esquerdo no direito:

$$0\leq 2\left(S_a^2+S_b^2+S_c^2\right)-2\left(S_a\cdot S_b+S_b\cdot S_c+S_c\cdot S_a\right).$$

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

A linha anterior pode ser reescrita como:

$$0 \leq (S_a - S_b)^2 + (S_b - S_c)^2 + (S_c - S_a)^2 .$$

Como o quadrado de um número é sempre maior o igual a zero a última desigualdade é verdadeira. Todas as transformações utilizadas foram de equivalência, logo fica provado (4.2.1). A igualdade acontece quando $S_a = S_b = S_c$. Pela Proposição 5, o anterior significa que $M = G$.

4.3 Baricentro. Lugar Geométrico. Circunferências. P27 LL IMO 1974.

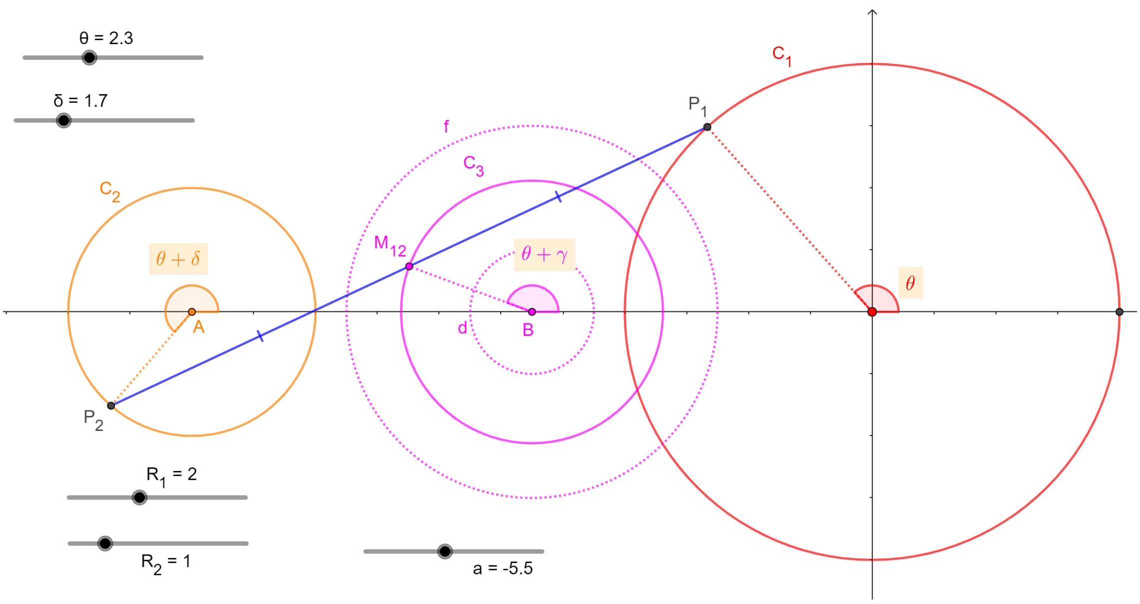
Problema 9. *Sejam C_1 e C_2 circunferências no mesmo plano, P_1 e P_2 pontos arbitrários sobre C_1 e C_2, respectivamente, e M_{12} o ponto médio do segmento P_1P_2. Encontrar o Lugar Geométrico dos pontos M_{12} quando P_1 e P_2 passam por todas as posições possíveis.*

A IMO 1974 foi realizada na cidade de Erfurt, Alemanha. Esse é o Problema 27 da lista longa (LL) e foi proposto pela delegação da Romênia [3].

4.3.1 Resolução do Problema 9.

A Figura 4.4 mostra uma construção geométrica.

Figura 4.4: Uma construção geométrica para o Problema 9. A circunferência C_3 é obtida variando somente o parâmetro θ. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Coloca-se a origem de um sistema cartesiano coincidindo com o centro da circunferência C_1 e o centro de C_2 sobre o eixo x. Isto é, C_1 tem centro em $(0,0)$ e raio R_1 e C_2 centro em $A=(a,0)$ e raio R_2. Também será suposto, sem perda de generalidade, que $R_1 > R_2$.

As coordenadas dos pontos P_1 e P_2 podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} P_1 &= (R_1 \cdot \cos(\theta), R_1 \cdot \operatorname{sen}(\theta))\,, \\ P_2 &= (a + R_2 \cdot \cos(\theta+\delta), R_2 \cdot \operatorname{sen}(\theta+\delta))\,, \end{aligned}$$

onde θ é um ângulo que serve de parâmetro para percorrer todos os pontos das circunferência e δ é um valor fixo que descreve a defasagem inicial entre $P_1 \in C_1$ e $P_2 \in C_2$.

As coordenadas do ponto médio entre P_1 e P_2 serão:

$$M_{12} = \frac{1}{2} \cdot (a + R_1 \cdot \cos(\theta) + R_2 \cdot \cos(\theta+\delta), R_1 \cdot \operatorname{sen}(\theta) + R_2 \cdot \operatorname{sen}(\theta+\delta))\,.$$

Após a utilização de identidades trigonométrica pode-se reescrever as coordenadas do ponto M_{12} como:

$$M_{12} = (b + R_3 \cos(\theta+\gamma), R_3 \operatorname{sen}(\theta+\gamma))\,,$$

onde

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2}a, \\ R_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos(\delta)}, \\ \operatorname{tg}(\gamma) &= \frac{R_2 \operatorname{sen}(\delta)}{R_1 + R_2\cos(\delta)}. \end{aligned}$$

Fixado δ, quando θ varia o ponto M_{12} descreve uma circunferência C_3 com centro em $B=(b,0)$, desfasagem γ e raio R_3. Porém, como $-1 \le \cos(\delta) \le 1$ tem-se que:

$$\frac{1}{2}(R_1 - R_2) \le R_3 \le \frac{1}{2}(R_1 + R_2).$$

Ou seja, o Lugar Geométrico dos pontos M_{12} é o anel entre as circunferências d e f na Figura 4.4.

4.4 Baricentro. Lugar Geométrico. Teorema de Napoleão. SL P12 IMO 1987.

Problema 10. *Dado um triângulo não equilátero ABC, com os vértices listados em sentido anti-horário, encontrar o Lugar Geométrico dos centroides dos triângulos equiláteros $A'B'C'$*

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

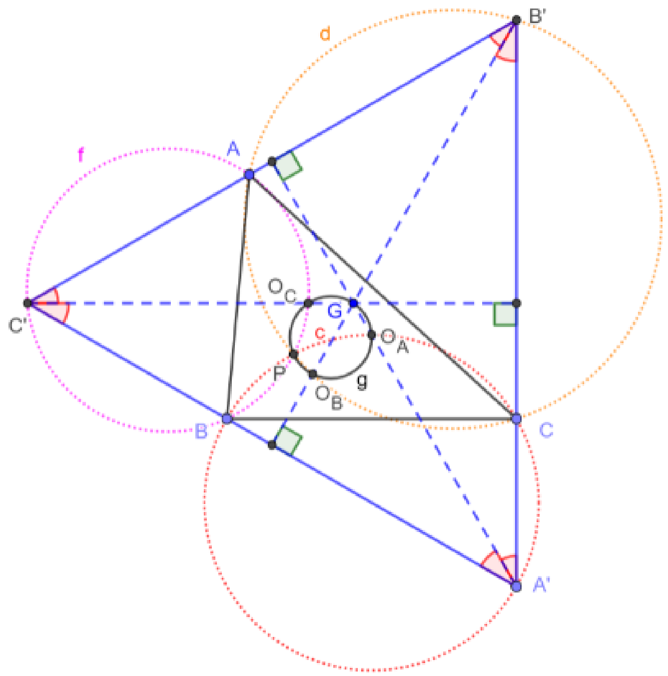
(vértices listados em sentido anti-horário) para os quais as triplas de pontos A', C, B'; B', A, C' e C', B, A' são colineares.

A IMO 1987 foi realizada na cidade de Havana, Cuba. Esse é o Problema 12 da SL e foi proposto pela delegação da Polônia [3].

4.4.1 Resolução do Problema 10.

A Figura 4.5 mostra uma construção geométrica para o Problema 10.

Figura 4.5: Primeira construção geométrica do Problema 10. Caso $\angle BA'C = 60°$. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

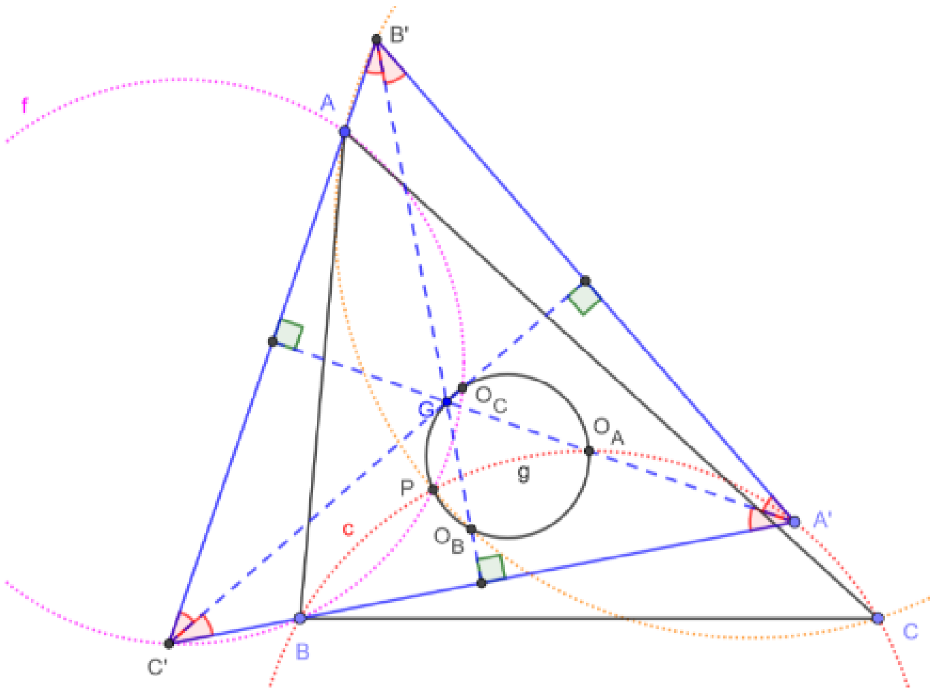
Coloca-se o ponto O_A no interior do $\triangle ABC$ de tal forma que:

$$\angle O_ABC = \angle O_ACB = 30°.$$

Ter-se-á que $\angle BO_AC = 120°$. A seguir esboça-se a circunferência circunscrita c ao $\triangle BO_AC$. Posiciona-se o ponto A' sobre c. Constroem-se as retas $A'B$ e $A'C$. Podem-se ter os Quadriláteros cíclicos $BA'CO_A$, $BCA'O_A$ e BCO_AA'. No primeiro caso $\angle BA'C = 60°$ e nos dois últimos $\angle BA'C = 120°$. A Figura 4.5 mostra o primeiro caso, o segundo pode ser visto na Figura 4.6.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 4.6: Segunda construção geométrica do Problema 10. Caso $\angle BA'C = 120°$. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Analogamente, constrói-se o ponto O_B no interior do $\triangle ABC$ de tal forma que:

$$\angle O_BCA = \angle O_BAC = 30°.$$

Ter-se-á que $\angle CO_BA = 120°$. A seguir esboça-se a circunferência circunscrita d ao $\triangle CO_BA$. Marca-se $B' \neq C$ como a interseção de $A'C$ e d.

Similarmente, é construído o ponto O_C no interior do $\triangle ABC$ de tal forma que:

$$\angle O_CAB = \angle O_CBA = 30°.$$

Ter-se-á que $\angle AO_CB = 120°$. A seguir esboça-se a circunferência circunscrita f ao $\triangle AO_CB$. Marca-se $C' \neq B$ como a interseção de $A'B$ e f.

Constroem-se as medianas do $\triangle A'B'C'$ e marca-se o ponto em que concorrem: G. Em todo triângulo equilátero o Baricentro coincide com o Ortocentro, o Circuncentro e o Incentro. Segue que $\angle A'GB' = \angle B'GC' = \angle C'GA' = 120°$. Adicionalmente os pontos O_A, O_B e O_C pertencem as bissetrizes dos ângulos em A', B' e C', respectivamente. O $\triangle O_AO_BO_C$ é o triângulo napoleônico interno do $\triangle ABC$, Teorema 11 (Napoleão). Isto é, o $\triangle O_AO_BO_C$ é equilátero e $\angle O_AO_BO_C = 60°$. Com isto, tem-se $\angle O_AO_BO_C + \angle O_AGO_C = 180°$, ou seja, o quadrilátero $O_AGO_CO_B$ é cíclico.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

É construída a circunferência g circunscrita ao $\triangle O_A O_B O_C$. O Lugar Geométrico dos centroides dos triângulos equiláteros $A'B'C'$ é g. Marca-se o ponto P, de Fermat ou Torricelli, na interseção de c, d e f. Quando $A' = P$ o $\triangle A'B'C'$ é reduzido ao ponto P. O ponto de Fermat de um triângulo é aquele que minimiza a soma das distâncias aos vértices.

4.5 Baricentro. Teorema de Simson-Wallace. Homotetia. P5 SL IMO 1998.

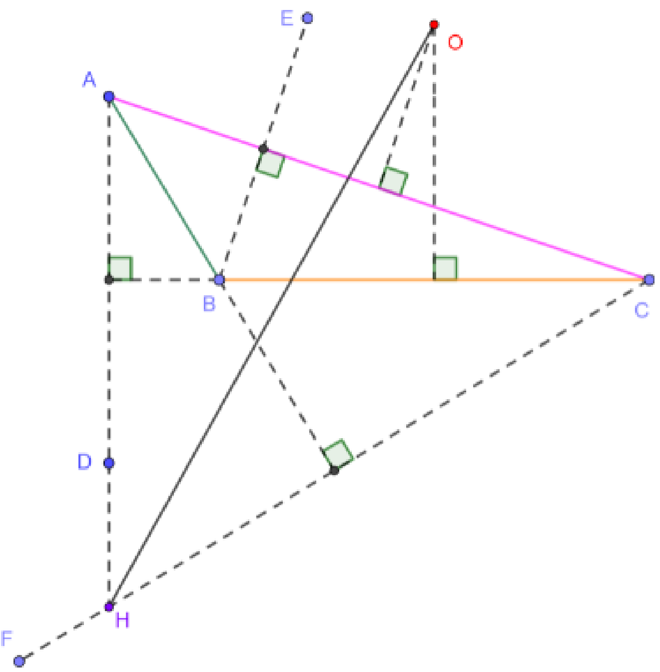
Problema 11. *Seja ABC um triângulo, H seu Ortocentro, O seu Circuncentro, e R seu circunraio. Seja D a reflexão de A em BC, E de B em CA, e F de C em AB. Provar que D, E, e F são colineares se, e somente se, $OH = 2R$.*

A IMO 1998 foi realizada na cidade de Taipé, Taiwan. Esse é o Problema 5 da SL e foi proposto pela delegação da França [3].

4.5.1 Resolução do Problema 11.

A Figura 4.7 mostra uma construção geométrica inicial para o Problema 11.

Figura 4.7: Construção geométrica inicial para o Problema 11. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Seja G o Baricentro do $\triangle ABC$ e $\mathbb{H}$ uma Homotetia com centro em G e razão $-\frac{1}{2}$. Sejam $A' = \mathbb{H}(A)$, $B' = \mathbb{H}(B)$ e $C' = \mathbb{H}(C)$.

Pela Proposição 4 sabe-se que a distância de um vértice ao Baricentro é duas vezes a distância do Baricentro ao pé da mediana correspondente. Logo A', B' e C' são os pontos médios de BC, CA e AB, respectivamente. Adicionalmente, de $HG = 2GO$ (Proposição 6) tem-se $O = \mathbb{H}(H)$.

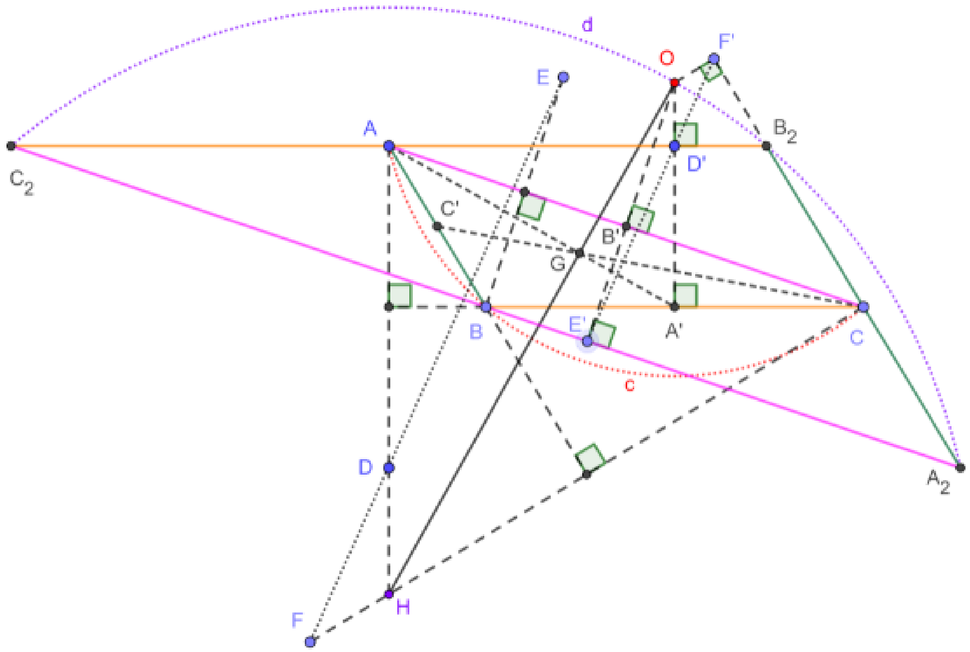
É construído o $\triangle A_2B_2C_2$ tal que A, B e C sejam os pontos médios de B_2C_2, C_2A_2 e A_2B_2, respectivamente. Isto é, $AB \parallel B_2A_2$, $BC \parallel C_2B_2$ e $CA \parallel A_2C_2$ e $B_2A_2 = 2AB$, $C_2B_2 = 2BC$, e $A_2C_2 = 2CA$. Com isto, $A = \mathbb{H}(A_2)$, $B = \mathbb{H}(B_2)$ e $C = \mathbb{H}(C_2)$.

Como D é a reflexão de A em BC, então $D' = \mathbb{H}(D)$ é a reflexão de A' em $B'C'$. Segue que $D' \in B_2C_2$ e $A'D' \perp B_2C_2$. Por outro lado, da definição de Circuncentro e $BC \parallel C_2B_2$ tem-se que OA' e B_2C_2 são ortogonais. Os dois resultados anteriores permitem afirmar que O, D' e A' são colineares e D' é a projeção de O em B_2C_2. Analogamente, $E' = \mathbb{H}(E)$ e $F' = \mathbb{H}(F)$ são as projeções de O em C_2A_2 e A_2B_2.

Pelo Teorema 12 (Simson-Wallace), D', E' e F' são colineares (o qual equivale por $\mathbb{H}$ a D, E e F serem colineares) se, e somente se, o ponto O está sobre a circunferência d circunscrita ao $\triangle A_2B_2C_2$. Como $c = \mathbb{H}(d)$ e $O = \mathbb{H}(H)$, d tem centro em H e raio $2R$. Esta última condição é equivalente a $HO = 2R$. A Figura 4.8 mostra uma construção geométrica.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Figura 4.8: Construção geométrica para o Problema 11. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Capítulo 5

Referências Bibliográficas

[1] CARNEIRO, E. GIRÃO, F. Centro de massa e aplicações à Geometria, **Revista Eureka!**, Vol. 1, No. 21, p. 29-37, 2005. (Página 28)

[2] DELGADO, J. *et al.* **Geometria Analítica**, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, ISBN: 9788583371212, 2017. (Página 13)

[3] DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium:** a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2009. New York: Springer, 2011. (Página 54, 57, 59, 61, 63)

[4] HOLANDA, B. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2011. (Página 13)

[5] JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas.** Livro: Conhecimentos pedagógicos e conteúdos disciplinares das ciências exatas e da terra, DOI do Livro: 10.22533/at.ed.242213108, ISBN: 978-65-5983-424-2, 2021. Páginas: 161-175. Disponível em DOI do Capítulo: 10.22533/at.ed.24221310814. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[6] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023106. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[7] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN

978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023113. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[8] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática v.3.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023144. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[9] LÓPEZ LINARES, J. Jogos com a desigualdade triangular. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 3, p. 73-94, dez. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n32022073094. ISSN 2316-9664. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[10] LÓPEZ LINARES, J. **Jogos e problemas olímpicos envolvendo caminhos mínimos e desigualdades.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 85 p. ISBN 978-65-87023-28-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023281. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[11] LÓPEZ LINARES, J. **Potência de ponto relativo a uma circunferência: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 64 p. ISBN 978-65-87023-30-4 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023304. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[12] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática.** 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[13] LÓPEZ LINARES, J. **Teorema de Pitágoras: Demonstrações Interativas no GeoGebra.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 57 p. ISBN 978-65-87023-26-7 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023267. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[14] LÓPEZ LINARES, J. Transformação de Inversão: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista**

LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023311.

Eletrônica Paulista de Matemática, v. 22, n. 1, p. 27-47, jul. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n12022027047. ISSN 2316-9664. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[15] LÓPEZ LINARES, J. **Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 105 p. ISBN 978-65-87023-25-0 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023250. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[16] LÓPEZ LINARES, J. **Treinamento de Professores e Estudantes do Ensino Fundamental e Médio com Problemas de Olimpíadas de Matemática.** 155 f. Tese (Livre-docência) Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Universidade de São Paulo, 2022. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/livredocencia/74/tde-28112022-091705/pt-br.php. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[17] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdvol19202023169664jll118127. ISSN 2316-9664. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[18] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[19] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.1.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 86 p. ISBN 978-65-87023-21-2 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023212. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[20] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra. v.2.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 115 p. ISBN 978-65-87023-23-6 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023236. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[21] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra - v. 3.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 91 p. ISBN 978-65-87023-24-3 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023236. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[22] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO),** v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. ISSN: 2319-023X. Disponível em: https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[23] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdvol17ermac202023169664jllabagfb127138. ISSN 2316-9664. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[24] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdvol18202023169664jllabagfb7888. ISSN 2316-9664. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[25] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 20, p. 22–40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdvol20202123169664jlljpmsafj2240. ISSN 2316-9664. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[26] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[27] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática.

Revista de Matemática de Ouro Preto, v.2, pp:117-139, nov. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[28] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; BRUNO-ALFONSO, A. Desigualdade de Ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:15-37, abr. 2022. ISSN: 2237-8103. Disponível em: https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5396/4012. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[29] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[30] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[31] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três Problemas sobre Recorrências na Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA EM FOCO**, v. 8 n. 1 (2020), p. 1-11. Publicado em 2021-12-21, ISSN: 2318-0552. Disponível em: https://seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/58967. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[32] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 21, p. 36–51, dez. 2021. ISSN 2316-9664. DOI: 10.21167/cqdvol21202123169664jlljpmsafj3651. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[33] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção ProfMat). (Página 13)

[34] NETO, A. C. M. **Geometria**, Coleção ProfMat, SBM, Primeira Edição, ISBN: 9788585818937, 2013. (Página 13, 24)

[35] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Giovanni Benedetto Ceva**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2012. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ceva_Giovanni/. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página 19)

[36] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Menelaus of Alexandria**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1999. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Menelaus/. Acesso em: 10 dez. 2022. (Página 14)

[37] PINHEIRO, R. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2006. (Página 13)

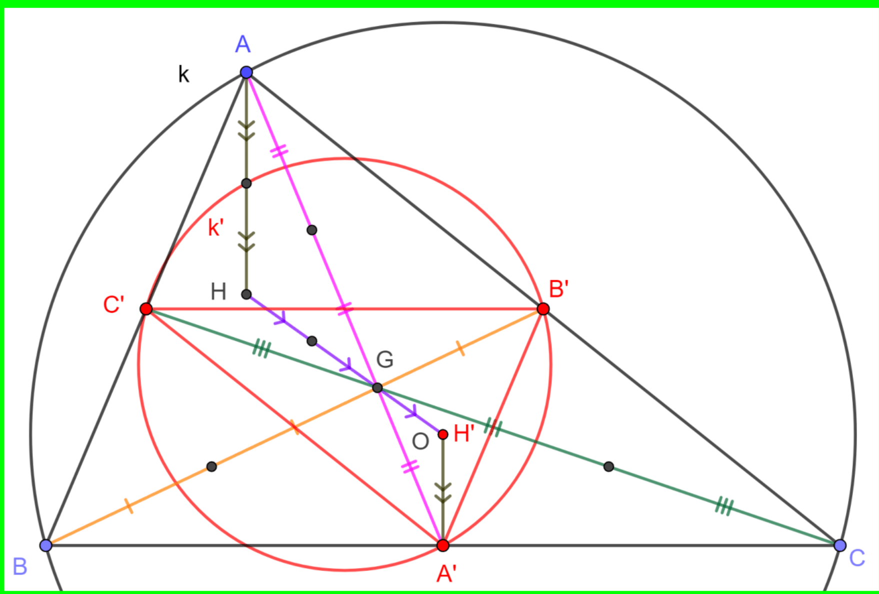
[38] RODRIGUES, A. R. Napoleão e as "revoluções" no plano euclidiano. **É Matemática, Oxente!**, 2019. (Página 38, 39)

[39] SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A.; LÓPEZ LINARES, J. Retas de Euler e o esquema aditivo RGB: construções dinâmicas no GeoGebra, **Revista do Instituto GeoGebra internacional de São Paulo**, v. 10 n. 2 (2021), p. 026–039. Publicado em 2021-12-27, ISSN: 2237-9657, DOI: 10.23925/2237-9657.2021.v10i2p026-039. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/52286/38626. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[40] SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J.; RAMALHO DE FREITAS, M.P.O. Diferentes perspectivas de um problema de otimização: Matemática Dinâmica com GeoGebra, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol.3, N.1, Jan-Jun 2022, pp. 70-87. Disponível em: https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i1.10227. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[41] SANTOS, J. P. M.; Marcus Vinícius de Araújo Lima; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J. Minimização da soma de quadrados de distâncias aos vértices em polígonos convexos, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol. 3, N. 2, Jul - Dez 2022, pp. 66 – 82. Disponível em: https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i2.11309. Acesso em: 17 mar. 2023. (Página 13)

[42] THIAGO, C. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria-Nível 2, 2006. (Página 13)



ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book)