

Universidade de São Paulo - USP
Escola de Engenharia de São Carlos - EESC
Departamento de Engenharia de Estruturas - SET

Estática das Estruturas
Material de Apoio e Complementar
Conceitos Básicos

Rodrigo Ribeiro Paccola

Rogério Carrazedo

Professores do Departamento de Engenharia de Estruturas

EESC-USP
São Carlos
2022

DOI: 10.11606/9786586954227

Universidade de São Paulo

Reitor: Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

Vice-Reitora: Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

Escola de Engenharia de São Carlos

Direto: Prof.Dr. Edson Cezar Wendland

Vice-diretor: Prof.Dr. Denis Vinicius Coury

Ficha catalográfica elaborada pela Seção de Atendimento ao Usuário do Serviço de Biblioteca "Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes"

P114e Paccola, Rodrigo Ribeiro
Estática das estruturas: material de apoio e complementar: conceitos básicos / Rodrigo Ribeiro Paccola e Rogério Carrazedo. -- São Carlos: EESC-USP, 2022.

62 p.

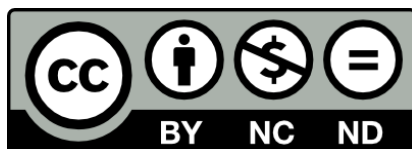
ISBN 978-65-86954-22-7

DOI 10.11606/9786586954227

1. Estática - noções básicas. 2. Equilíbrio - noções básicas. 3. Estruturas lineares - método clássico. 4. Diagrama de esforços solicitantes. 5. Trabalhos virtuais - princípios. I. Carrazedo, Rogério. II. Título.

Elaborado por Eduardo Graziosi Silva - CRB-8/8907

Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.



Este texto foi dividido em três partes. Nesta parte 1 são revisados os conceitos fundamentais, que são necessários à estática das estruturas, mas que são considerados de pleno conhecimento do leitor e são apenas brevemente revisitados. Todos os tópicos são discutidos em disciplinas anteriores – mecânica geral, mecânica dos sólidos e resistência dos materiais. No entanto, algumas demonstrações são disponibilizadas para que o leitor faça breve revisão.

Na parte 2 são apresentados três tópicos específicos à estática das estruturas – obtenção de linhas de influência e resolução de estruturas hiperestáticas pelo processo dos esforços e pelo processo dos deslocamentos. São pontos fundamentais para o estudo do comportamento de estruturas.

Na parte 3, não menos importante, são estudadas formulações de problemas de valor de contorno e a sua resolução pelos métodos de Rayleigh-Ritz, de Resíduos Ponderados e pelo método dos elementos finitos.

Por fim, salienta-se que este não é um texto introdutório. Traz apenas as relações mais importantes, necessárias para a compreensão de conceitos empregados ao longo do texto, mas a dedução completa não é feita aqui. Apenas algumas equações e discussões são trazidas por serem essenciais ao aprofundamento do estudo. Servem apenas para ilustrar e relembrar pontos de interesse. As demais deduções devem ser consultadas na bibliografia dos cursos respectivos.

Autores, dezembro de 2022.

CAPÍTULO 1 - NOÇÕES DE ESTATICA E EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	9
1.1 DEFORMAÇÕES	12
1.2 TENSÕES	13
1.2.1 TENSÕES PRINCIPAIS	14
1.2.2 TENSÕES MÁXIMAS DE CISLHAMENTO	15
1.3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS	16
1.4 DETERMINAÇÃO GEOMÉTRICA	17
1.5 CASOS EXCEPCIONAIS DE LIGAÇÕES ENTRE CHAPAS	18
1.6 GRAU DE HIPERESTATICIDADE	21
CAPÍTULO 2 - MÉTODO CLÁSSICO PARA ESTRUTURAS LINEARES	23
2.1 IDEALIZAÇÕES SOBRE A GEOMETRIA	24
2.2 IDEALIZAÇÕES SOBRE AS SOLICITAÇÕES	26
2.3 IDEALIZAÇÃO SOBRE CONDIÇÕES DE VINCULAÇÃO	26
2.4 LINEARIDADE GEOMÉTRICA	28
2.5 CONDIÇÃO DE CONTINUIDADE	29
2.6 LINEARIDADE FÍSICA	29
2.7 PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS	30
2.8 HIPÓTESE CINEMÁTICA DE EULER-BERNOULLI	30
2.9 RELAÇÕES DIFERENCIAIS EM ESTRUTURAS LINEARES	31
2.9.1 CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO INFINITESIMAL	31
2.9.2 CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE INFINITESIMAL	32
2.9.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	32
CAPÍTULO 3 - DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES	35
3.1 EXEMPLOS	36
3.1.1 EXEMPLO 1	37
3.1.2 EXEMPLO 2	39
3.1.3 EXEMPLO 3	41
3.1.4 EXEMPLO 4	42

CAPÍTULO 4 - PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS	45
4.1 CÁLCULO DE DESLOCAMENTO EM ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS	47
4.1.1 EXEMPLO TRIVIAL	49
4.1.2 PRIMEIRO EXEMPLO COMPLEMENTAR	51
4.1.3 SEGUNDO EXEMPLO COMPLEMENTAR	53
4.2 SELEÇÃO DE EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO EM ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS	55
4.2.1 EXEMPLO DE CÁLCULO DE REAÇÃO	56
4.3 TEOREMA DE RECIPROCIDADE DE BETTI	57
4.4 TEOREMA DE MAXWELL	58
4.5 APLICAÇÕES DO PTV	59
CAPÍTULO 5 - BIBLIOGRAFIAS COMPLEMENTARES	61

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.	Corpo de dimensão arbitrária.....	9
Figura 2.	Componentes da força F aplicada na origem no caso tridimensional.....	10
Figura 3.	Momento M de uma força F aplicada em A em relação ao ponto O	10
Figura 4.	Todo binário tem seu Momento.....	11
Figura 5.	Mudança de configuração de um corpo deformável.	12
Figura 6.	Vetores de tensão.....	13
Figura 7.	Componentes de tensão nas faces de um cubo.	14
Figura 8.	Vetor tensão principal.....	14
Figura 9.	Tensões críticas de cisalhamento.	16
Figura 10.	Polos absolutos e relativos, próprios e impróprios.	19
Figura 11.	Raio vetor.....	20
Figura 12.	Lugar geométrico e posição de polos.	20
Figura 13.	Grau de hiperestaticidade de quadros.	21
Figura 14.	Elementos de treliça, Viga, grelha, Pórtico plano e pórtico espacial.	25
Figura 15.	Representação de vínculos internos e externos.....	27
Figura 16.	Vínculos, reações e esforços internos.	27
Figura 17.	Configuração Inicial e atual de uma estrutura.	28
Figura 18.	Linearização dos Giros.	29
Figura 19.	Continuidade.....	29
Figura 20.	Lei de Hooke – Relação linear entre tensões e deformações	30
Figura 21.	Cinemática de Euler-Bernoulli.	31
Figura 22.	Equilíbrio infinitesimal.	31
Figura 23.	Esforços solicitantes em um elemento estrutural.....	35
Figura 24.	Convenção de sinais para diagramas de esforços em problemas planos.	36
Figura 25.	Princípio dos trabalhos Virtuais.....	45
Figura 26.	Deslocamentos absolutos e relativos de um elemento infinitesimal.....	46
Figura 27.	Cálculo de deslocamento em estrutura isostática.	47
Figura 28.	Distribuição de temperatura em um elemento infinitesimal.....	48
Figura 29.	Cálculo de reação ou esforço em estrutura isostática.	56
Figura 30.	Teorema de Betti.	58
Figura 31.	Teorema de Maxwell.	58

Capítulo 1 - Noções de Estática e Equações de Equilíbrio

Neste capítulo você vai ver:

- Noções sobre forças e conjugados;
- Noções sobre esforços internos e deformações;
- Noções sobre graus de liberdade e dimensionalidade;
- Grau de hiperstaticidade e determinação geométrica;
- Casos excepcionais (polos);
- Equações de equilíbrio.

Na análise estática de estruturas, algumas idealizações, considerações e hipóteses são assumidas para possibilitar uma solução simples, relacionada às forças que atuam em um corpo para obtenção do equilíbrio. Considere um corpo de dimensão arbitrária e geometria qualquer (vide Figura 1). Quando a geometria não interfere na análise, pode-se reduzir o problema ao equilíbrio de uma única partícula ou ponto material (Figura 1a). Caso interfiram na análise de equilíbrio, esta deve ser realizada considerando a estrutura como um conjunto de partículas ou pontos materiais combinados entre si (Figura 1b).

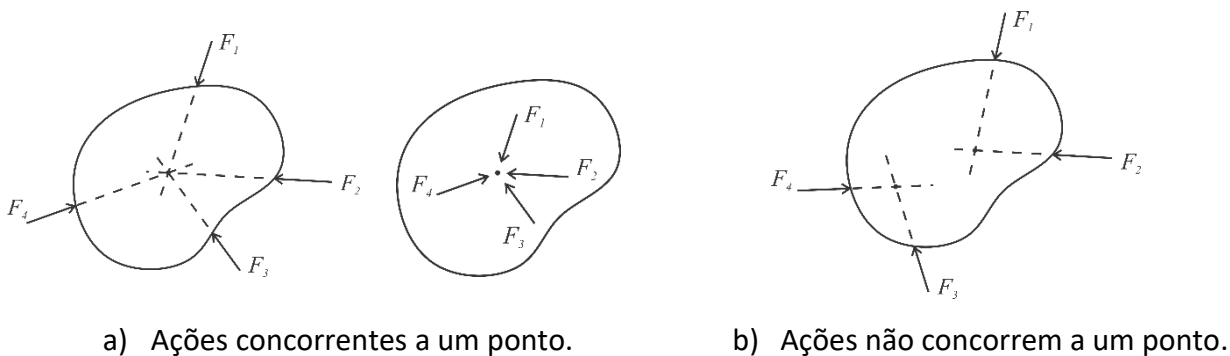


FIGURA 1. CORPO DE DIMENSÃO ARBITRÁRIA.

Este mesmo corpo pode sofrer uma mudança de configuração devido a atuação de forças em pontos distintos. Se esta mudança de configuração não envolver mudança de forma, ou seja, não envolver deformações ou que estas possam ser desprezadas, o corpo pode ser considerado rígido. Neste caso, pode-se dizer que as grandezas fundamentais envolvidas na análise estática de partículas ou pontos materiais e de corpos rígidos são força e momento.

Com isto em mente, pode-se definir força como a interação de um corpo ou partícula sobre outro, em função de sua intensidade, direção, sentido e ponto de aplicação, sendo representada por um vetor. Podem ser idealizadas como concentradas pois a região de sua atuação é pequena se comparada com as dimensões do corpo. A Figura 2 e a equação (1.1) apresentam a força concentrada \vec{F} no espaço cartesiano, aplicada na origem "O", em função dos versores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} , e de suas componentes segundo os eixos cartesianos.

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \quad (1.1)$$

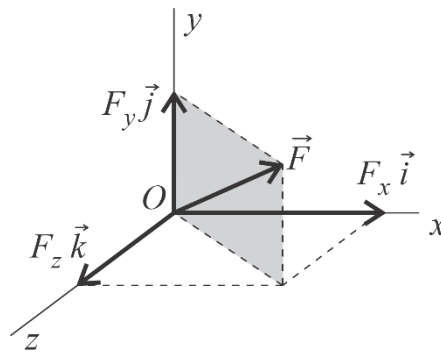


FIGURA 2. COMPONENTES DA FORÇA \vec{F} APLICADA NA ORIGEM NO CASO TRIDIMENSIONAL.

As forças podem ser divididas em ativas e reativas, sendo representadas como um vetor com intensidade e direção. As forças ativas são aquelas que atuam diretamente sobre a estrutura. As forças reativas são decorrentes dos vínculos para fixação da estrutura, proporcionando equilíbrio.

Uma força tende a promover uma translação, assim como pode promover uma tendência de rotação, o que define o conceito de momento. Para tanto considere uma força \vec{F} aplicada em um ponto A , conforme a Figura 3. O momento \vec{M} , ou seja, a tendência de rotação promovida pela força \vec{F} em relação à origem O é dado pelo produto vetorial entre os vetores \vec{OA} e \vec{F} .

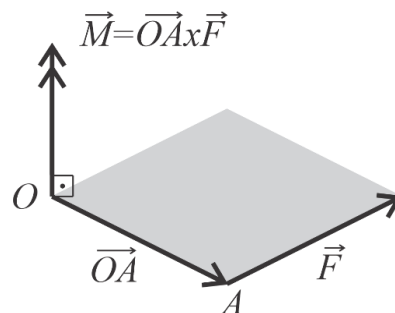


FIGURA 3. MOMENTO \vec{M} DE UMA FORÇA \vec{F} APLICADA EM A EM RELAÇÃO AO PONTO O .

O momento pode ser expresso por suas componentes em relação aos eixos cartesianos, o que define a tendência de giro em relação aos referidos eixos:

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} \quad (1.2)$$

Representa-se o momento por um vetor de ponta dupla, como visto na Figura 3. Para observar o sentido de giro, emprega-se a regra da mão direita, em que o polegar aponta na direção do vetor e o ato de fechar a mão indica a direção de giro.

Define-se ainda o conceito de binário, que é um sistema de duas forças paralelas distantes entre si em \vec{d}_\perp (ou seja, perpendicularmente), de mesma intensidade e sentidos opostos. O momento promovido por esse sistema de forças é igual para qualquer ponto do corpo, sendo chamado de momento do binário, Figura 4, e dado por:

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{d}_\perp \quad (1.3)$$

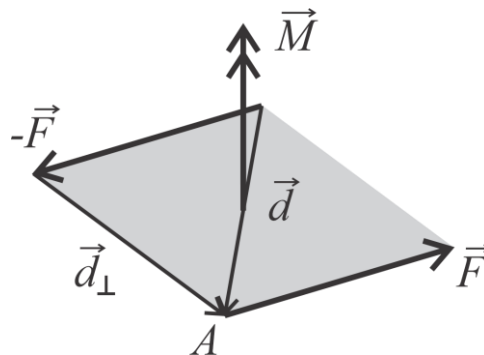


FIGURA 4. TODO BINÁRIO TEM SEU MOMENTO.

Empregando o conceito de binário, o conjunto de forças que atuam sobre um corpo pode ser reduzido a uma única resultante \vec{R} e um momento de binário \vec{M}_r , de forma que ambos os sistemas sejam estaticamente equivalentes. De forma simplificada, basta transferir todas as forças que atuam sobre o corpo para o ponto desejado, acrescentando o momento correspondente a cada uma das forças em relação a este ponto. A situação de equilíbrio é alcançada quando a resultante de forças \vec{R} e a resultante de momentos \vec{M}_r forem nulos.

$$\sum \vec{F} = \vec{R} = \vec{0} \quad (1.4)$$

$$\sum \vec{M} = \vec{M}_r = \vec{0} \quad (1.5)$$

Neste caso recupera-se a Primeira Lei de Newton, pois não há tendências de translação e rotação. Os vetores resultantes de força e momento expressos por suas componentes definem as equações de equilíbrio da estática, referentes à tendência de translação e rotação do corpo em cada direção do espaço cartesiano.

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} = (\sum F_x) \vec{i} + (\sum F_y) \vec{j} + (\sum F_z) \vec{k} \quad (1.6)$$

$$\vec{M}_r = (\sum M_x) \vec{i} + (\sum M_y) \vec{j} + (\sum M_z) \vec{k} \quad (1.7)$$

1.1 Deformações

No caso de corpos deformáveis, ou seja, naqueles em que a mudança de configuração envolve mudança de forma, a variação nas dimensões pode interferir nas resultantes de força e momento. No entanto, tratando-se de texto introdutório, considera-se que tais mudanças não afetam de forma significativa a distribuição das forças – ou seja, o equilíbrio estabelecido na configuração inicial vale na configuração final, ao se considerar o regime de pequenos deslocamentos, giros e deformações.

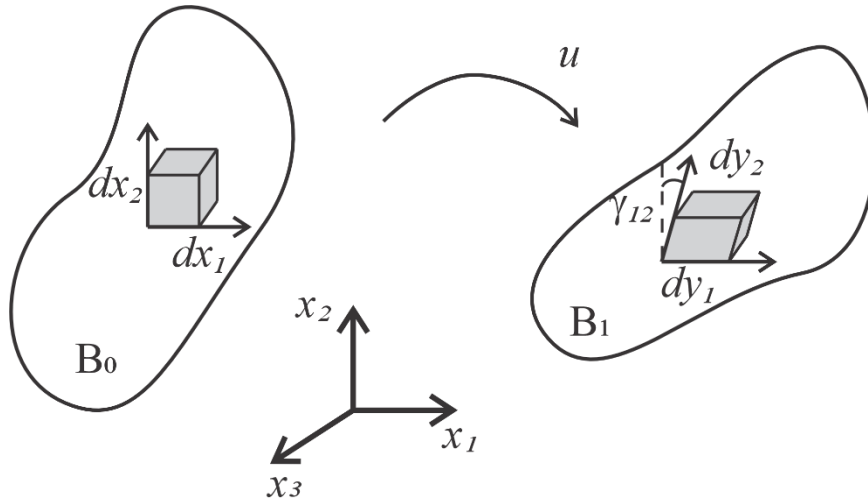


FIGURA 5. MUDANÇA DE CONFIGURAÇÃO DE UM CORPO DEFORMÁVEL.

Dito isto, a deformação de um corpo é medida pela variação nas suas dimensões e forma. A medida de deformação de engenharia ε é a forma mais simples de averiguar a deformação. Em um elemento infinitesimal, que passa por uma mudança de configuração conforme ilustra a Figura 5, a deformação na direção dos eixos cartesianos, que representa a variação de encurtamento ou de alongamento do elemento, é dada por:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{dy_i - dx_i}{dx_i} = \frac{\left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx_i\right) - dx_i}{dx_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (1.8)$$

em que u é a função mudança de configuração, que descreve o deslocamento de todas as partículas do corpo. Na equação (1.8), i varia de 1 a 3 e está associado às direções cartesianas.

A deformação no elemento pode ocorrer sem que ocorra seu encurtamento ou alongamento, promovida apenas por uma variação de forma, chamada distorção ou deformação transversal γ . Esta é dada por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.9)$$

1.2 Tensões

A mudança de configuração do corpo em estudo pode ser devida a atuação de forças em pontos distintos. Considerando um corpo deformável seccionado conforme a Figura 6, em suas configurações inicial e atual, para que este se mantenha em equilíbrio devem surgir forças distribuídas, chamadas esforços internos. Em um elemento de superfície infinitesimal da seção, de normal N e n e área dA_0 e dA , nas configurações inicial e atual respectivamente, a força resultante é dada por:

$$dR_i = t_i dS = T_i dA_0 \qquad dR = t dS = T dA_0 \qquad (1.10)$$

em que t é o vetor de tensão de Cauchy (ou verdadeiro), vetor de força por unidade de área definido na configuração atual, e T é o vetor de tensão de Piola-Kirchhoff (ou nominal), definido na mesma direção de t , porém escrito na configuração inicial. Quando a deformação é pequena, estes se confundem.

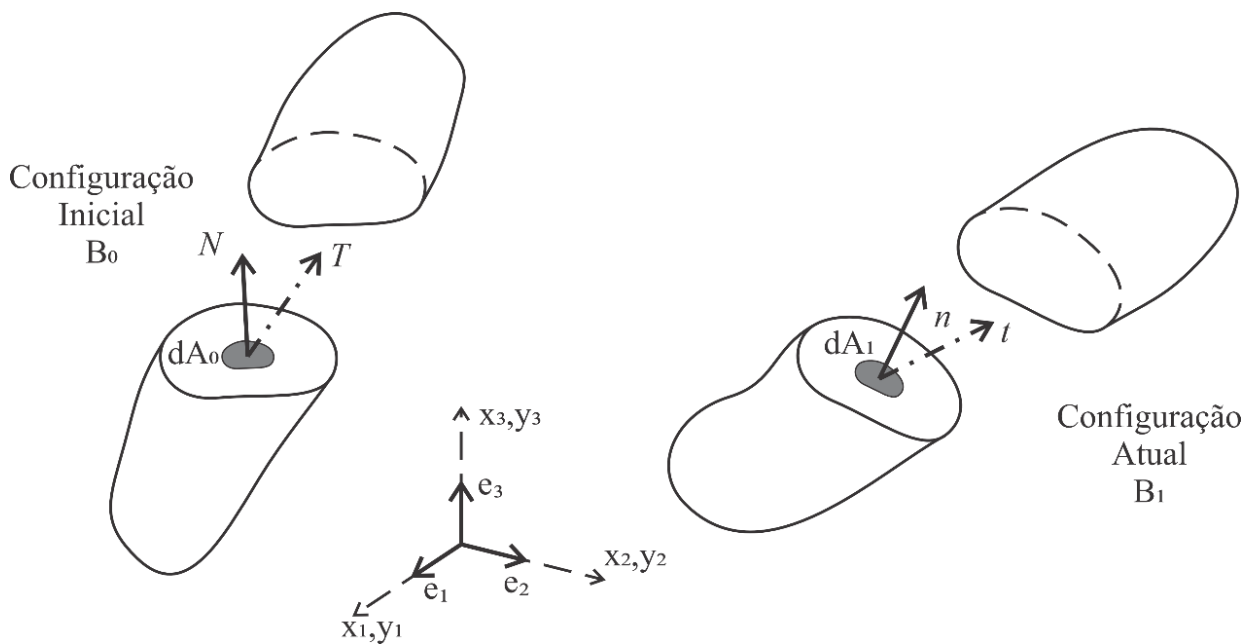


FIGURA 6. VETORES DE TENSÃO.

Os vetores tensão são funções da normal ao plano de corte. Desta forma, para definir o estado completo de tensão em um ponto seriam necessários infinitos pares vetor tensão / versores para devida representação. Pode-se, no entanto, empregar planos ortogonais para esta representação, e estados intermediários obtidos por transformação de coordenadas. É usual adotar versores relacionados aos planos cartesianos como planos de corte (e_i), como mostra a Figura 7.

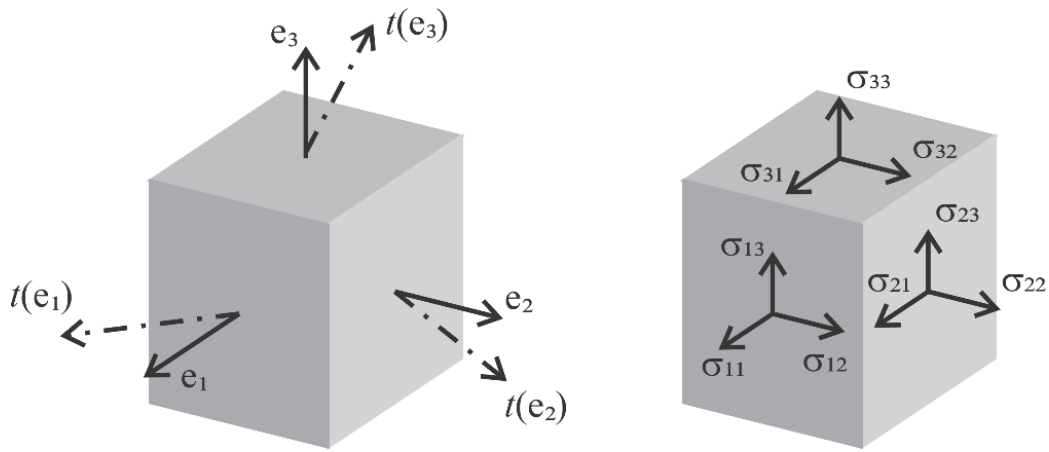


FIGURA 7. COMPONENTES DE TENSÃO NAS FACES DE UM CUBO.

Ou seja, o vetor tensão que ocorre na face de versor e_j é dado pelas suas componentes relacionados aos versores cartesianos, conforme abaixo:

$$\begin{aligned} t(e_1) &= t_1(e_1)e_1 + t_2(e_1)e_2 + t_3(e_1)e_3 \\ t(e_2) &= t_1(e_2)e_1 + t_2(e_2)e_2 + t_3(e_2)e_3 \\ t(e_3) &= t_1(e_3)e_1 + t_2(e_3)e_2 + t_3(e_3)e_3 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Destaca-se que a componente do vetor tensão que ocorre na mesma direção da normal do plano de seção define a tensão normal, enquanto que as demais definem tensões cisalhantes. Dito isto, define-se o tensor de segunda ordem de tensões de Cauchy:

$$\begin{aligned} t(e_1) &= \sigma e_1 = \sigma_{11}e_1 + \sigma_{21}e_2 + \sigma_{31}e_3 \\ t(e_2) &= \sigma e_2 = \sigma_{12}e_1 + \sigma_{22}e_2 + \sigma_{32}e_3 \\ t(e_3) &= \sigma e_3 = \sigma_{13}e_1 + \sigma_{23}e_2 + \sigma_{33}e_3 \end{aligned} \quad (1.12)$$

em que σ_{ij} são as componentes do tensor de tensões de Cauchy, e_j são os versores cartesianos (não suas componentes) e $t(e_j)$ é o vetor tensão que ocorre na face de versor e_j .

1.2.1 Tensões principais

Se o vetor tensão $t(n)$ e o vetor normal ao plano de seção forem colineares, implica que n é uma das direções principais de tensão, conforme apresentado na Figura 8.

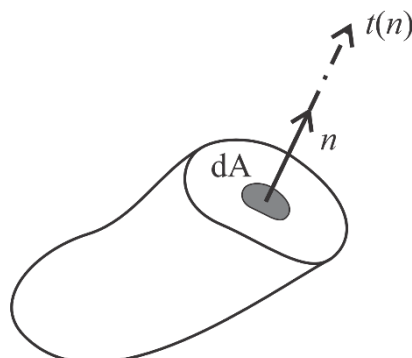


FIGURA 8. VETOR TENSÃO PRINCIPAL.

Neste caso, o vetor tensão pode ser escrito em função de sua magnitude ou intensidade (λ), ou como comumente associada, um de seus valores principais, conforme a equação (1.13):

$$t_i = \lambda n_i \quad t = \lambda n \quad (1.13)$$

A equação (1.13) pode ser expressa em função do tensor de tensões de Cauchy:

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\lambda)n_j = 0 \quad (1.14)$$

O determinante dos termos entre parênteses define a equação característica, da seguinte forma:

$$|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\lambda| = 0 \quad (1.15)$$

Desenvolvendo o determinante, leva a:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \quad (1.16)$$

em que I_1 , I_2 e I_3 são os invariantes do tensor de tensões, dados por:

$$I_1 = \sigma_{ii} \quad (1.17)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) \quad (1.18)$$

$$I_3 = \epsilon_{mno}\sigma_{m1}\sigma_{n2}\sigma_{o3} \quad (1.19)$$

As três raízes da equação (1.16) são os auto-valores do tensor de tensões, as tensões principais. As tensões principais independem do sistema de coordenadas, e cada tensão principal está associada a uma direção, sendo ortogonais entre si. Cada direção é definida por um auto-versor, obtido pela solução não-trivial normalizada da equação (1.14).

Usualmente ordena-se o tensor em função dos valores principais por $\sigma_{11}^p > \sigma_{22}^p > \sigma_{33}^p$, ou seja:

$$\sigma_{ij}^p = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}^p \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

1.2.2 Tensões máximas de cisalhamento

Da mesma forma que existem três planos que apresentam apenas tensões normais, definidos pelos auto-versores, há três planos que apresentam tensões de cisalhamento críticas. Estes planos formam ângulo de 45° com os planos principais, e promovem tensão cisalhante críticas de:

$$\sigma_{12}^c = \frac{|\sigma_{11}^p - \sigma_{22}^p|}{2} \quad (1.21)$$

$$\sigma_{23}^c = \frac{|\sigma_{22}^p - \sigma_{33}^p|}{2} \quad (1.22)$$

$$\sigma_{31}^c = \frac{|\sigma_{33}^p - \sigma_{11}^p|}{2} \quad (1.23)$$

Nos planos de tensão de cisalhamento crítica existem componentes de tensão normal, que são dadas por:

$$\sigma_{11} = \frac{|\sigma_{11}^p + \sigma_{22}^p|}{2} \quad (1.24)$$

$$\sigma_{22} = \frac{|\sigma_{22}^p + \sigma_{33}^p|}{2} \quad (1.25)$$

$$\sigma_{33} = \frac{|\sigma_{33}^p + \sigma_{11}^p|}{2} \quad (1.26)$$

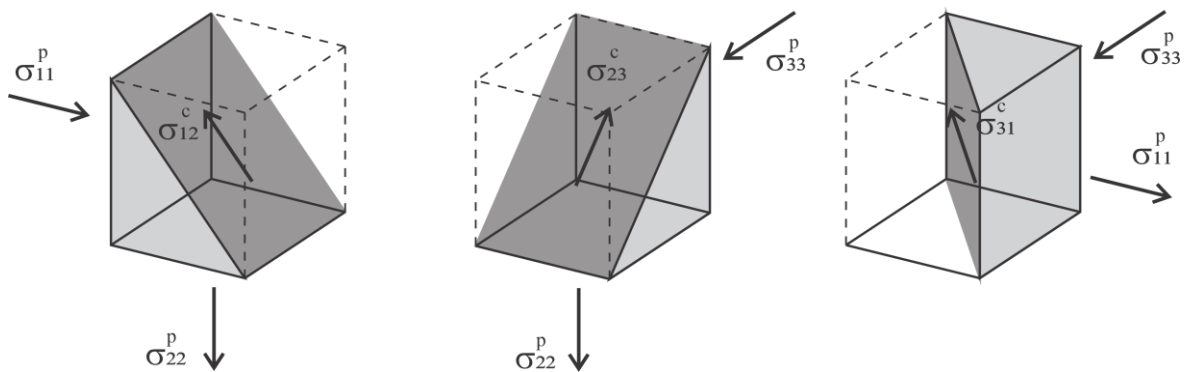


FIGURA 9. TENSÕES CRÍTICAS DE CISALHAMENTO.

A determinação das tensões principais e tensões críticas de cisalhamento permite a elaboração de critérios de falha para o material.

1.3 Relações Constitutivas

A resposta de um material quanto a uma ação depende de suas propriedades físicas, que são expressas por uma relação constitutiva. No caso da mecânica dos sólidos ou das estruturas, estabelece-se uma relação constitutiva entre tensões e deformações, que pode depender de diversos fatores, inclusive do tempo. Assim definem-se materiais elásticos, plásticos, viscoelásticos, entre outros.

No âmbito deste texto será empregada relação linear entre tensões e deformações, ou seja, a lei de Hooke. A linearidade entre tensão e deformação, ou seja, o regime elástico, é fundamental para o princípio de superposição de efeitos e de proporcionalidade entre causa e efeito, largamente utilizados na estática das estruturas. Maiores detalhes sobre as leis constitutivas deverão ser obtidos em outras referências específicas, associadas a resistência dos materiais.

1.4 Determinação geométrica



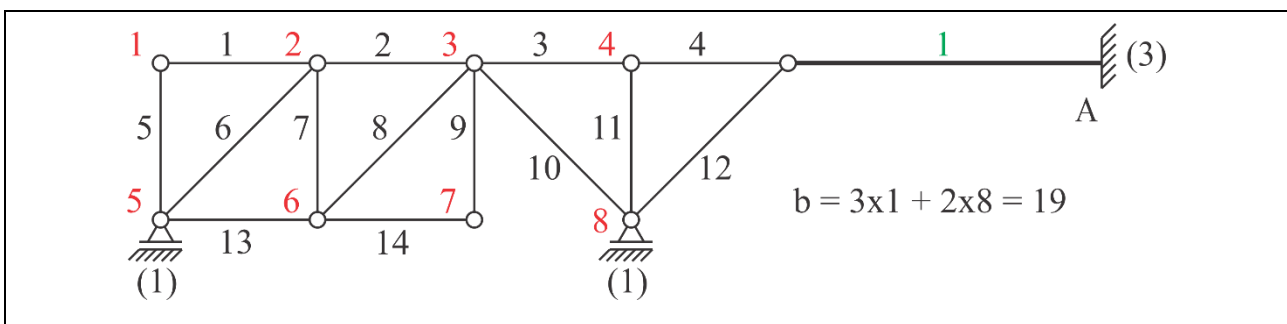
Relação entre vínculos e elementos de um arranjo estrutural que estabelece condição necessária, porém não suficiente, de sua estabilidade.

Uma estrutura pode ser classificada como móvel (indeterminada), determinada ou superdeterminada conforme o número de barras vinculares e arranjo de barras, nós e chapas que a constituem. Para a determinar a condição geométrica de uma estrutura plana, relaciona-se o número de chapas c , o número total de barras b , incluindo vinculares equivalentes, e o número de nós n , empregando a equação:

$$b = 3c + 2n \tag{1.27}$$

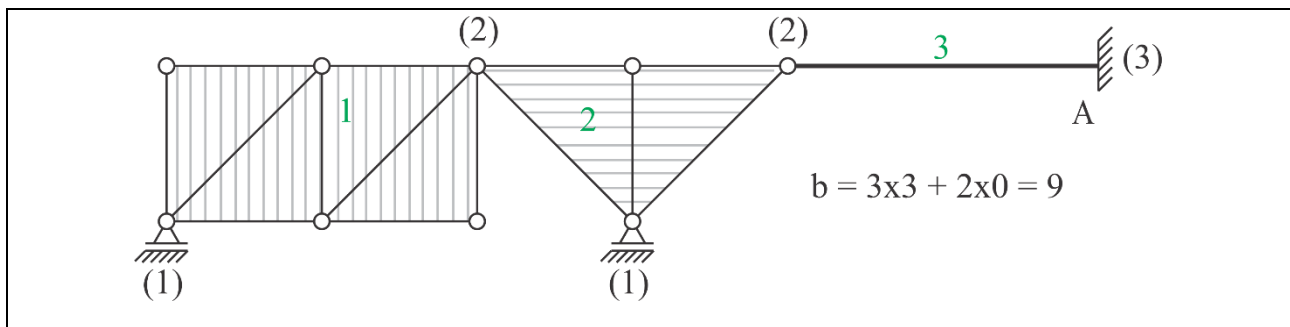
Para esta contagem, considera-se como barras os elementos lineares articulados em ambas extremidades, sem que ocorram conexões intermediárias (ao longo da barra). Elementos que não se enquadram nesta situação são considerados chapas. As articulações em que se conectam apenas barras é chamada de nó.

A título de exemplo, considere a estrutura mista abaixo:



QUADRO 1. EXEMPLO DE DETERMINAÇÃO GEOMÉTRICA.

A estrutura do Quadro 1 é composta por um trecho treliçado, em que foram numeradas as barras (em preto) e nós (em vermelho). A articulação que conecta o trecho treliçado com uma chapa (numerada em verde) não é um nó. Os valores indicados entre parênteses indicam as barras vinculares, existentes na conexão da estrutura com a chapa terra (apoios) e na conexão entre chapas. Desta forma contabilizam-se 1 chapa, 8 nós e 19 barras, o que implica em uma estrutura geometricamente determinada, pois o número de barras existentes é igual ao número de barras necessárias.



QUADRO 2. EXEMPLO DE DETERMINAÇÃO GEOMÉTRICA.

Alternativamente, considera-se uma estrutura composta por trechos que representam chapas rígidas de treliça, que atuam em conjunto. A ligação entre chapas do Quadro 2 é realizada por duas barras vinculares, que impedem o deslizamento entre estas, porém permitindo o giro. Esta ligação é usualmente chamada de rótula ou articulação. Assim são contabilizadas três chapas e nove barras, o que leva à mesma determinação geométrica obtida anteriormente.

1.5 Casos excepcionais de ligações entre chapas

É condição necessária para estabilidade que uma estrutura seja geometricamente determinada, porém não é suficiente para que seja considerada estável. Existem casos excepcionais que podem tornar a estrutura móvel pela ligação por articulações e barras vinculares, mesmo sendo geometricamente determinada.

Para compreender tal afirmação, é necessário observar as cadeias cinemáticas com um grau de liberdade, que consistem em um conjunto de chapas rígidas ligadas entre si por articulações ou barras vinculares. Como tem apenas um grau de liberdade, ou seja, apenas uma direção de movimento que não está restrito, o deslocamento ou giro ocorre apenas nesta direção. O ponto em torno do qual uma chapa gira é chamado de polo absoluto e em torno do qual duas chapas giram é chamado de polo relativo, como mostra a Figura 10.

Na Figura 10a, a chapa 1 rotaciona em torno do polo absoluto próprio (I), definido pelo encontro dos segmentos de reta estabelecidos pelas barras vinculares com a chapa terra. Os segmentos de reta são chamados de Lugar Geométrico. O polo é dito absoluto quando pertence à chapa e próprio quando contido nos arredores da chapa.

Na Figura 10b, a chapa 1 rotaciona em torno de um polo absoluto impróprio (I), localizado no infinito, onde supostamente as retas paralelas definidas pelas barras vinculares se encontram. Ou seja, a chapa só pode se deslocar transversalmente em relação às barras vinculares. O polo é dito impróprio pois está contido no infinito.

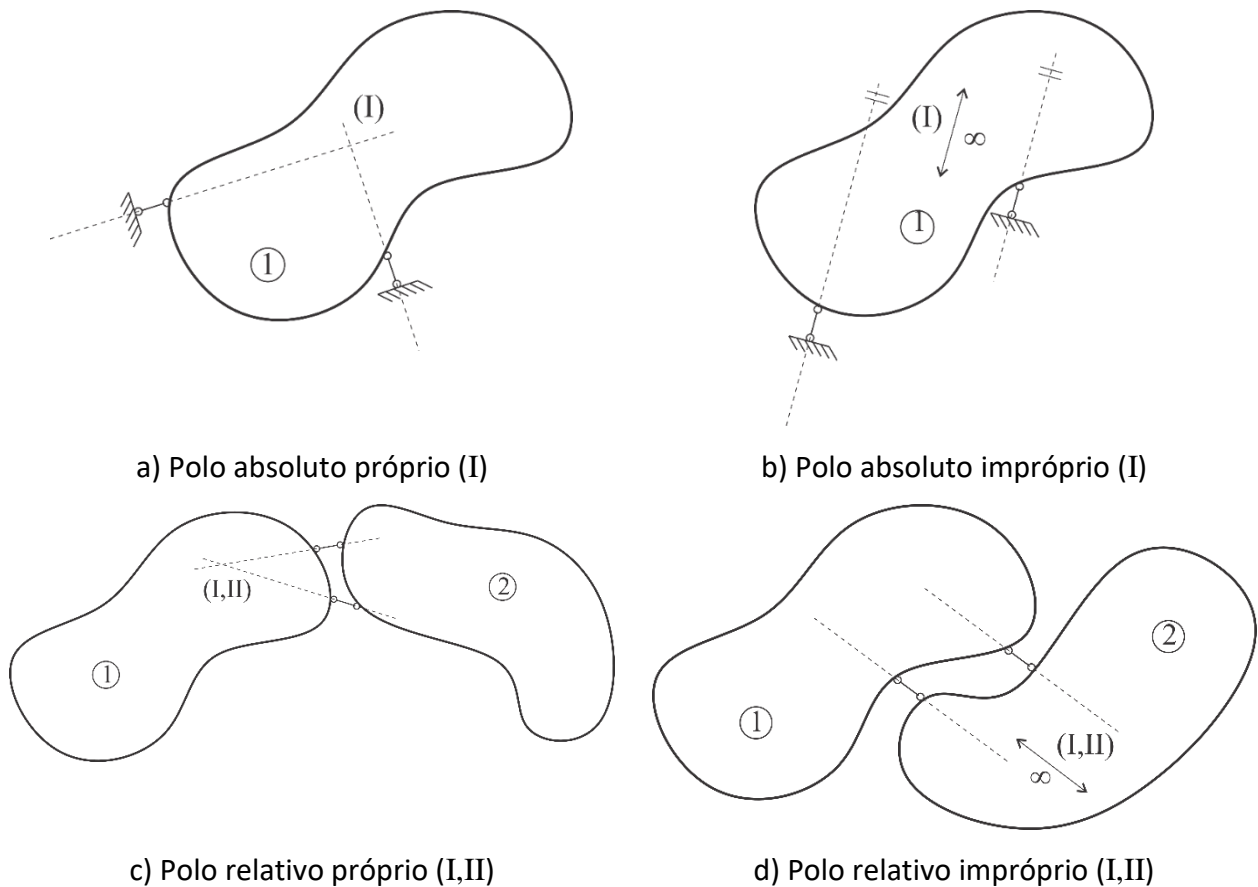


FIGURA 10. POLOS ABSOLUTOS E RELATIVOS, PRÓPRIOS E IMPRÓPRIOS.

Na Figura 10c, as chapas 1 e 2 rotacionam relativamente em torno do polo relativo próprio (I,II), definido pelo encontro dos segmentos de retas estabelecidos pelas barras que vinculam ambas as chapas. Portanto, o polo é dito relativo quando pertence à ligação de duas chapas.

Na Figura 10d, as chapas 1 e 2 só podem deslizar transversalmente em relação às barras vinculares que as interligam em virtude do polo relativo ser impróprio, localizado no infinito. Desta forma, o polo é dito relativo pois pertence à ligação de duas chapas e impróprio por não estar contido nos arredores das chapas.



Polo é o ponto em torno do qual uma chapa com um grau de liberdade gira. Este pode ser absoluto se estiver relacionado com a ligação com a chapa terra, ou relativo se estiver relacionado com a ligação entre chapas. Um polo pode ser impróprio ou próprio, caso esteja contido no infinito ou não, respectivamente.

No caso de polo absoluto próprio, o giro promovido por um deslocamento na chapa ocorre em relação a ele. Disto decorre importante propriedade, em que se define o raio vetor:

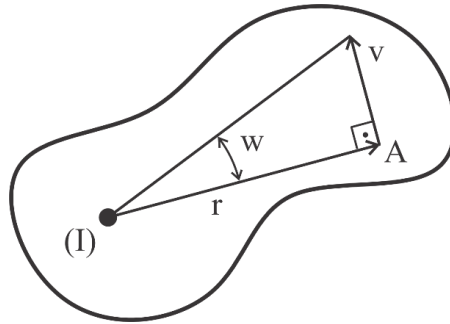


FIGURA 11. RAIOS VETOR.

Considerando pequenos deslocamentos e giros, em que $tg(w) \cong w$, tem-se que:

$$\vec{v} = w \cdot \vec{r} \quad (1.28)$$

Barras vinculares definem lugares geométricos, que por sua vez definem a posição dos polos. Os lugares geométricos podem ser expressos tanto por barras vinculares associadas à chapa terra, quanto com barras vinculares entre duas chapas, como mostrado na Figura 12.

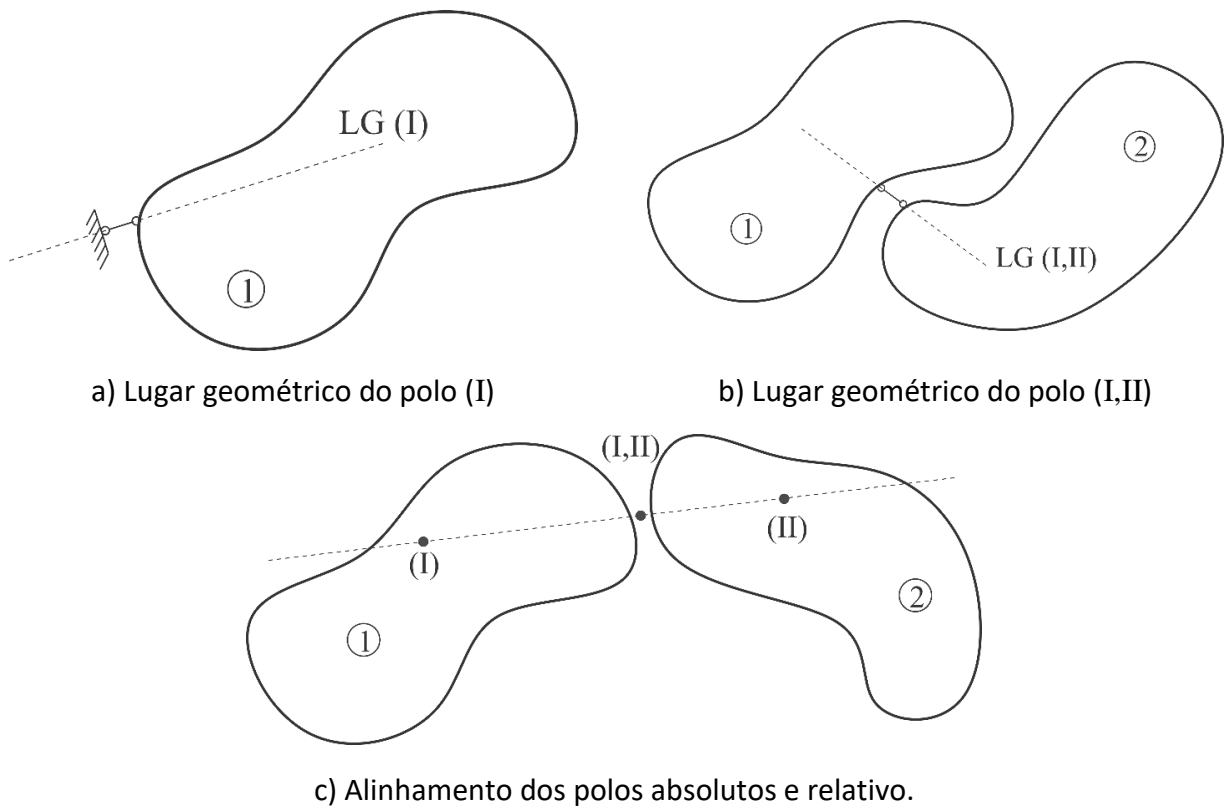


FIGURA 12. LUGAR GEOMÉTRICO E POSIÇÃO DE POLOS.

Ademais, um lugar geométrico entre chapas é definido pelo alinhamento dos polos, pois o polo relativo de duas chapas e seus respectivos polos absolutos estão contidos na mesma reta. Isto é mostrado na Figura 12c.

Os conceitos aqui apresentados, de cadeias cinemáticas e seus lugares geométricos, são essenciais para a determinação de linhas de influência.

1.6 Grau de hiperestaticidade



Grau de hiperestaticidade é a representação numérica do número de vínculos excedentes à determinação estática da estrutura.

O grau de hiperestaticidade é dado pela diferença entre o número de esforços incógnitos e o número de equações de equilíbrio disponíveis. O elemento estrutural é denominado hipostático se esta diferença for negativa (número de equações de equilíbrio maior), isostático se igual a zero, e hiperestático se esta diferença for positiva (número de esforços incógnitos maior). Considere, como exemplo, o quadro apresentado na Figura 13:

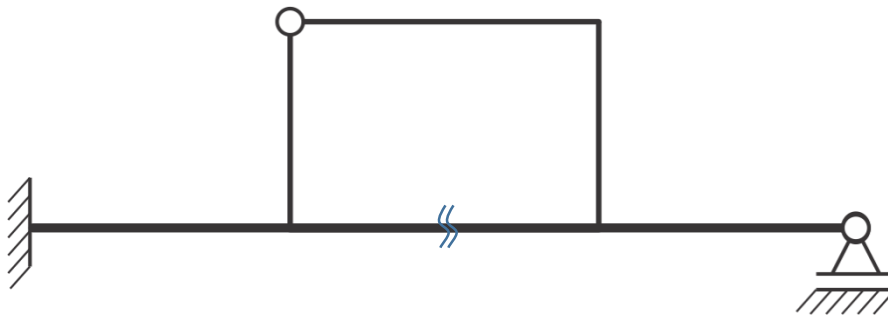


FIGURA 13. GRAU DE HIPERESTATICIDADE DE QUADROS.

Os vínculos externos, ou seja, o engaste e o apoio móvel, apresentam quatro reações incógnitas. Estando disponíveis três equações de equilíbrio, uma reação permaneceria desconhecida, demonstrando um grau de hiperestaticidade externo unitário.

Há ainda possibilidade de a estrutura apresentar esforços internos incógnitos, mesmo quando conhecidas todas as reações de apoio. Considere a estrutura da Figura 13, que de forma hipotética fossem conhecidas as reações de equilíbrios nos vínculos. Uma seção realizada no ponto indicado, por exemplo, não leva à obtenção dos esforços internos, pois não é possível separar a estrutura em duas partes. Ou seja, a conexão ainda existente da estrutura mantém a transferência de esforços internos, indicando a existência de esforços indeterminados.

De forma genérica, cada quadro plano amplia o grau de hiperestaticidade em três, que são os esforços internos de esforço normal, esforço cortante e momento fletor. Considerando o quadro exemplo da Figura 13, devido a presença de uma rótula, o grau de hiperestaticidade interna é dois. Adicionando o grau externo contabilizado anteriormente, o grau total de hiperestaticidade da estrutura é três.

Capítulo 2 - Método Clássico para Estruturas Lineares

Neste capítulo você vai ver:

- Teoria da Elasticidade Linear;
- Hipóteses, Simplificações e Idealizações;
- Condições de compatibilidade;
- Condições de equilíbrio;
- Relações constitutivas

Considera-se uma estrutura como um conjunto de partículas e sólidos organizados e com geometria definida, denominados elementos estruturais, ligados entre si e ao meio externo, capaz de receber solicitações externas e transmitir até os pontos onde se encontra vinculada.

A concepção de um modelo estrutural para representação do comportamento de estruturas, dependendo dos fenômenos físicos que se desejam representar, contempla uma série de hipóteses simplificadoras que devem ser adotadas com base em uma idealização sobre o comportamento real da estrutura. Esse conjunto de hipóteses simplificadoras deve ser adotado para viabilizar a obtenção de modelos matemáticos representativos do comportamento estrutural, almejando soluções analíticas.

A mais simples das abordagens para concepção de um modelo estrutural constitui o chamado Método Clássico ou Teoria da Elasticidade Linear em pequenos deslocamentos, que contempla um conjunto de hipóteses, simplificações e idealizações. Se destacam a condição de continuidade, o princípio da superposição de efeitos e o regime de pequenas deformações. Consideram-se ainda idealizações sobre a geometria dos elementos, sobre as solicitações, regime de pequenos deslocamentos e proporcionalidade entre causas e efeitos. A partir destas hipóteses são estabelecidas as condições de equilíbrio, de compatibilidade entre deslocamento e deformações, e condições sobre o comportamento dos materiais.

2.1 Idealizações sobre a geometria

No método clássico são tratadas apenas estruturas reticuladas, compostas por elementos estruturais lineares, que são aqueles que possuem uma dimensão predominante em relação às demais. Tais elementos são usualmente chamados de barras. As outras duas dimensões, ortogonais à dimensão predominante, definem a seção transversal do elemento.

Os elementos lineares são representados por seu eixo longitudinal, posicionado ao longo do baricentro de consecutivas seções transversais. Esta idealização sobre a geometria é representada na Figura 14, onde são apresentados, em sequência, os elementos lineares de treliça, viga, grelha, pórtico plano e pórtico espacial. A distinção decorre do plano de ação das forças atuantes sobre o elemento e das considerações quanto aos esforços internos.

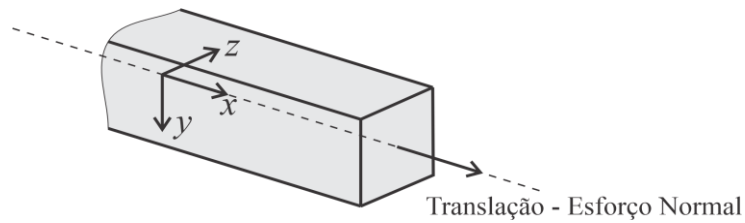
Assim sendo, treliça é o elemento estrutural sujeito a apenas solicitações normais à sua seção transversal. Seu esforço interno é chamado esforço normal, promovendo o alongamento ou encurtamento do elemento. Pode ser dividida em treliça plana e treliça espacial, conforme sua descrição geométrica.

Viga é o elemento sujeito a apenas a solicitações transversais à sua seção, em um dos planos ortogonais (usualmente, no plano $x-y$). Seus esforços internos são chamados momento fletor e esforço cortante, promovendo deformações normais (flexão) e deformações transversais (distorção) ao longo da seção.

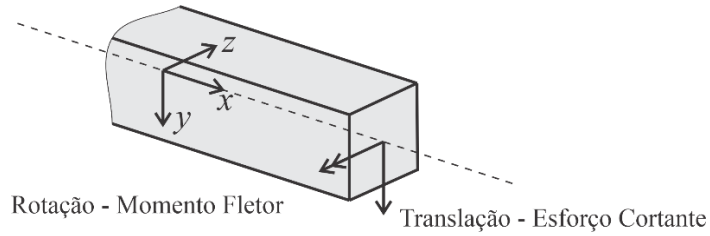
Grelha é o elemento sujeito a solicitações transversais à sua seção, em um dos planos ortogonais. Seus esforços internos são o momento fletor, o esforço cortante e o momento torçor, em torno do eixo do elemento. Tais esforços promovem deformações normais devido a flexão, e deformações de distorção transversais decorrentes do esforço cortante e do momento torçor.

Pórtico plano é o elemento sujeito a solicitações normais e transversais à sua seção (em um dos planos ortogonais). Seus esforços internos são o esforço normal, o esforço cortante e o momento fletor, promovendo deformações normais e transversais na seção transversal.

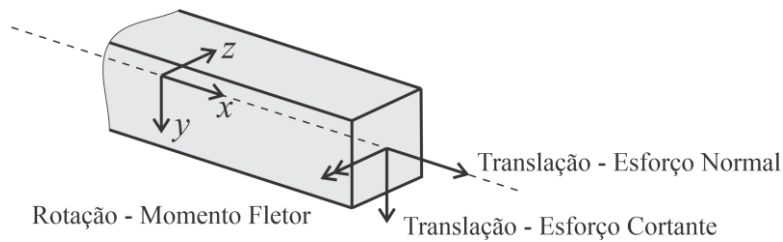
Por fim, o pórtico espacial é o elemento sujeito a solicitações nos três planos ($x-y$; $x-z$; $y-z$), promovendo momentos fletores em dois eixos, esforços cortantes em dois eixos, esforço normal e momento torçor. Seus seis esforços internos promovem deformações ao longo e em torno dos três eixos que definem o elemento.



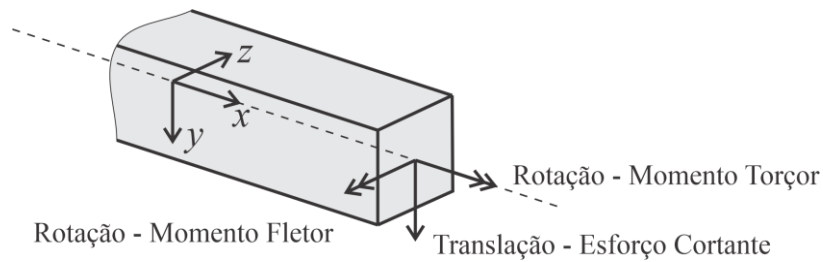
a) Elemento de Treliça.



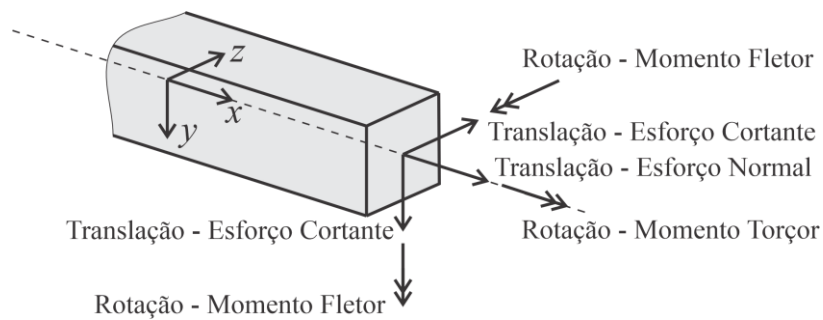
b) Elemento de Viga.



c) Elemento de Grelha.



d) Elemento de Pórtico Plano.



e) Elemento de Pórtico Espacial.

FIGURA 14. ELEMENTOS DE TRELIÇA, VIGA, GRELHA, PÓRTICO PLANO E PÓRTICO ESPACIAL.



- Treliças: Solicitadas axialmente (à normal) apenas;
- Vigas: Solicitadas à flexão e ao cisalhamento;
- Grelhas: Solicitadas à flexão, à torção e ao cisalhamento;
- Pórticos planos: Solicitados à flexão, à normal e ao cisalhamento;
- Pórticos espaciais: Solicitados à flexão e ao cisalhamento em dois eixos, à torção, e à normal;

2.2 Idealizações sobre as solicitações

O tipo de análise a ser realizada está diretamente relacionada ao tipo de solicitação a que a estrutura está sujeita. As solicitações são elencadas conforme a combinação de ações que podem atuar sobre a estrutura simultaneamente, visando estabelecer as situações mais desfavoráveis para a avaliação de segurança da estrutura, seja em um estado limite último, seja em um estado limite de utilização.

As ações, por sua vez, são as causas que promovem os esforços solicitantes ou deformações nas estruturas. São ditas permanentes quando assumem valores constantes ou com pequena variação durante a vida da estrutura, i.e., peso próprio do elemento estrutural; peso próprio de enchimentos e revestimentos; ações de protensão, etc.

As ações são ditas variáveis quando seus valores variam significativamente durante a vida da estrutura, podendo, inclusive, não ter uma posição fixa. São, em sua maioria, cargas estabelecidas por códigos normativos segundo a probabilidade de ocorrência, associadas à utilização da construção. A ação da temperatura, da água, do vento e de pessoas, são exemplos de ações de curta duração e/ou variáveis. A ação de veículos é outro exemplo de ação variável que pode atuar em posições (instantes) distintas da estrutura.

As ações podem ainda ser tomadas como excepcionais quando envolvem baixas probabilidades de ocorrência durante a vida da estrutura, porém pode ser necessário considerá-las em algumas situações, em especial quando a falência ou colapso da estrutura gerar graves consequências. Explosões e sismos podem ser considerados exemplos deste tipo de ação.

2.3 Idealização sobre condições de vinculação

Uma estrutura se conecta a outros sistemas estruturais ou ao meio externo por meio de vínculos, também chamados apoios ou barras vinculares. Tais elementos impedem o movimento absoluto ou relativo de chapas, em uma ou mais direções, e são representados conforme os graus de liberdade livres, como ilustra a Figura 15 para uma estrutura plana.

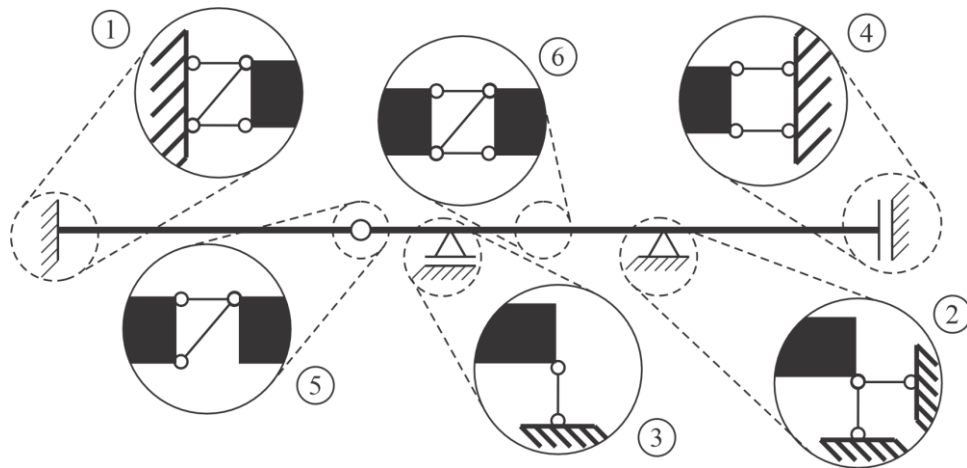


FIGURA 15. REPRESENTAÇÃO DE VÍNCULOS INTERNOS E EXTERNOS.

O vínculo 1 da Figura 15 é um engaste, que restringe dois deslocamentos transversais assim como o giro. A representação de engaste equivale a uma ligação por três barras vinculares com a chapa terra. O vínculo 2 é um apoio fixo, que restringe dois deslocamentos transversais, porém permite o giro, representado por duas barras vinculares. O vínculo 3 é um apoio móvel, que restringe apenas um deslocamento, representado por uma barra vincular.

O vínculo 4 é uma ligação deslizante, um engaste móvel. O giro entre a chapa e a chapa terra (ou referencial fixo) é impedido, assim como uma das direções de deslocamento – horizontal no caso. Apenas o deslizamento ou escorregamento vertical entre as chapas é permitido. As barras vinculares são paralelas, pois, caso uma chapa venha a sofrer rotação, a outra irá acompanhar o movimento.

O vínculo interno 5 é uma rótula, também chamada de articulação. O giro entre chapas é permitido, e os deslocamentos relativos são restringidos por barras vinculares. Por fim, o vínculo 6 representa continuidade. Não há possibilidade de deslocamento ou giro relativo. Na Figura 16 são mostrados as reações e os esforços internos associados a cada uma das vinculações discutidas anteriormente.

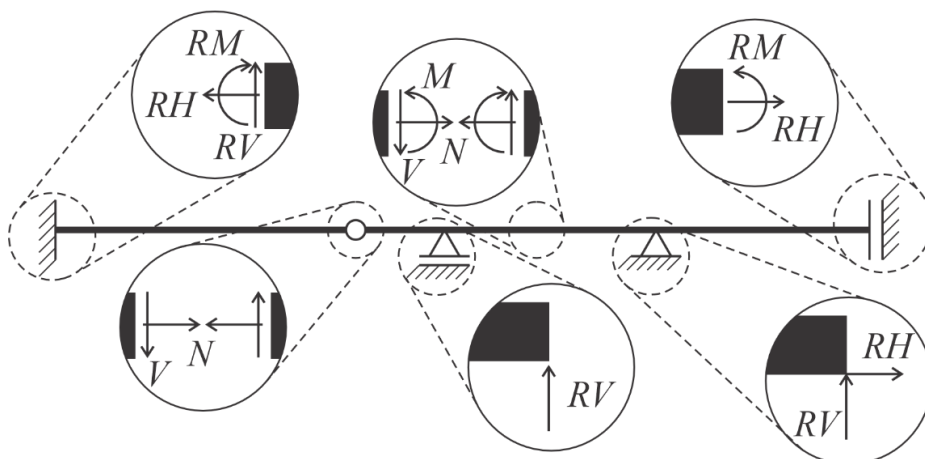


FIGURA 16. VÍNCULOS, REAÇÕES E ESFORÇOS INTERNOS.

2.4 Linearidade Geométrica

O equilíbrio estabelecido na configuração inicial vale na configuração final. Decorre da consideração de pequenos deslocamentos e giros, assim como do regime de pequenas deformações. Considere a estrutura que ocupava a posição inicial indicada em linha sólida na Figura 17, sujeita a uma carga concentrada P , e cuja configuração deslocada encontra-se em linha tracejada. A reação de momento calculada no engaste, considerando a configuração deslocada da estrutura, é dada por:

$$M_A = P \cdot (L + \delta) \quad (2.1)$$

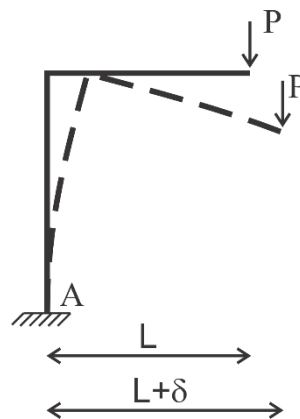


FIGURA 17. CONFIGURAÇÃO INICIAL E ATUAL DE UMA ESTRUTURA.

No caso do deslocamento $\delta \ll L$, pode-se desconsiderar o acréscimo de reação de momento promovido por δ , computando a reação na configuração inicial, tão somente, como:

$$M_A = P \cdot L \quad (2.2)$$

Ou seja, o equilíbrio da estrutura é promovido na configuração indeslocada e, portanto, os esforços solicitantes são relacionados somente às dimensões da estrutura. Desta forma, os esforços solicitantes são proporcionais aos carregamentos e às demais causas físicas aplicadas na estrutura.

Outra consequência de se considerar a hipótese de pequenos deslocamentos e deformações e, por conseguinte, giros pequenos, está na linearização dos referidos giros. Neste caso, o valor da tangente do ângulo de giro se confunde com o valor do próprio ângulo, como pode ser visto na Figura 18.

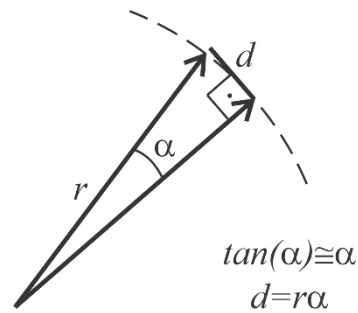


FIGURA 18. LINEARIZAÇÃO DOS GIROS.

Por fim, a linearidade geométrica implica que a geometria e as propriedades constitutivas da estrutura, quando dependentes da geometria da estrutura, não se alteram com a mudança de configuração.

2.5 Condição de continuidade

A estrutura sofrer deformação, permanece contínua. Os vínculos internos (ligações) e externos (apoios) são mantidos. Considera-se ainda que o ângulo formado entre duas barras é mantido após a deformação, ou seja, que os nós são rígidos.

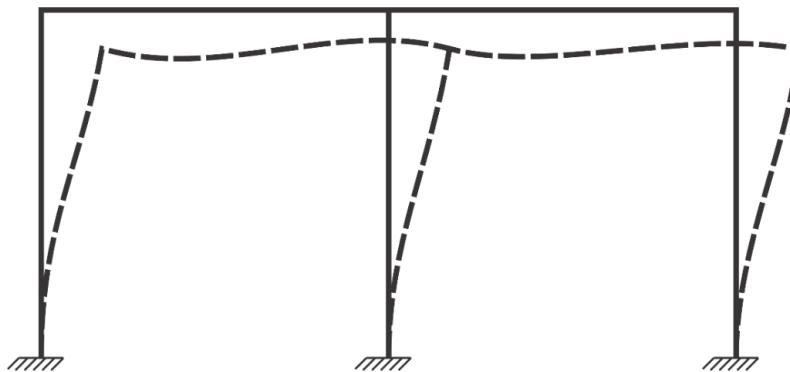


FIGURA 19. CONTINUIDADE.

2.6 Linearidade Física

O material é considerado elástico linear. Neste caso, as tensões normal e cisalhante são diretamente proporcionais às deformações específicas – normal e distorcional. Isto implica na validade da Lei de Hooke, vide Figura 20. Desta forma, removendo-se a causa física que promoveu certa deformação, a estrutura retorna para a situação inicial indeformada, sem o surgimento de deformações e tensões residuais correspondentes.

Considera-se, de forma adicional, material homogêneo e isotrópico. Neste caso, todos os pontos do corpo respondem da mesma forma, e com propriedades físicas idêntica em todas as direções.

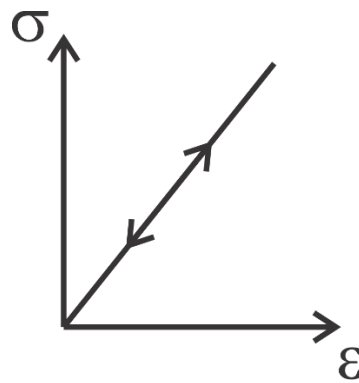


FIGURA 20. LEI DE HOOKE – RELAÇÃO LINEAR ENTRE TENSÕES E DEFORMAÇÕES



A lei de Hooke estabelece que “As forças deformantes são proporcionais às deformações elásticas produzidas”.

2.7 Princípio de superposição de efeitos

A associação das hipóteses anteriores implica na validade do princípio da superposição dos efeitos. Ou seja, o efeito de várias causas pode ser dado pela superposição dos efeitos das causas consideradas separadamente. Não importa a ordem que estas causas foram impostas na estrutura, pois é equivalente a uma transformação linear. Associa-se ao princípio de superposição a proporcionalidade entre causas e efeitos, pois a superposição dos efeitos deve ser independente da sequência de imposição dos efeitos. Ambos princípios podem ser escritos na forma:

$$E(x + y) = E(x) + E(y) \quad (2.3)$$

$$E(k \cdot x) = k \cdot E(x) \quad (2.4)$$

2.8 Hipótese cinemática de Euler-Bernoulli

Apesar de não estar enumerada como uma das hipóteses do Método Clássico, é usual empregar a hipótese cinemática de Euler-Bernoulli, que consiste em supor que as seções transversais inicialmente planas permanecem planas e ortogonais ao eixo longitudinal após a deformação da estrutura (vide Figura 21). Esta consideração influencia diretamente na distribuição de tensões ao longo da seção transversal do elemento de barra, estabelecendo relações em que as tensões são determinadas diretamente a partir dos esforços solicitantes, uma vez que são resultantes da integração dessas tensões ao longo da seção transversal do elemento. Desta forma, as tensões são diretamente proporcionais aos esforços solicitantes.

A hipótese cinemática, em suma, é dada por:

$$\theta(x) = v'(x) \quad (2.5)$$

em que θ é o giro da seção transversal, v é a elástica da viga e $'$ denota a derivada.

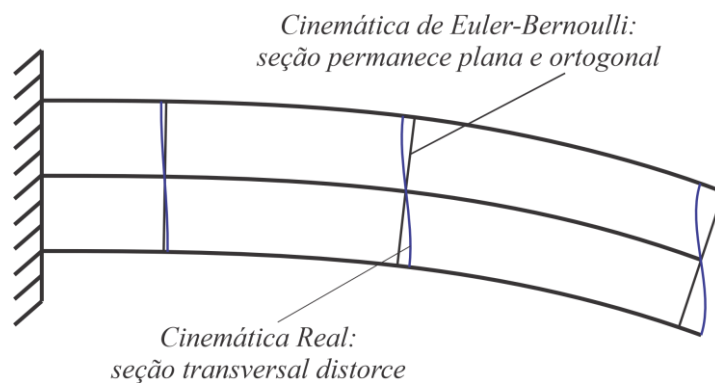


FIGURA 21. CINEMÁTICA DE EULER-BERNOULLI.

2.9 Relações Diferenciais em Estruturas Lineares

Destaca-se que as equações disponibilizadas nesta seção estão em acordo com a convenção de sinais expressa na Figura 14.

2.9.1 Condições de equilíbrio infinitesimal

O equilíbrio estático é estabelecido quando a resultante de forças e momentos é nula, em todo e qualquer ponto da estrutura. Algumas relações diferenciais entre os esforços solicitantes podem ser estabelecidas separando-se um elemento de comprimento infinitesimal, submetido à carregamentos distribuídos na direção do seu eixo e nas direções perpendiculares a ele, representando-se os esforços solicitantes e suas variações atuando em cada uma de suas seções, garantindo-se assim o equilíbrio, como mostra a Figura 22. Por questões de simplificação, apresentam-se as relações diferenciais apenas para o caso bidimensional com cargas no plano dos elementos, sendo o caso tridimensional uma generalização do que se segue.

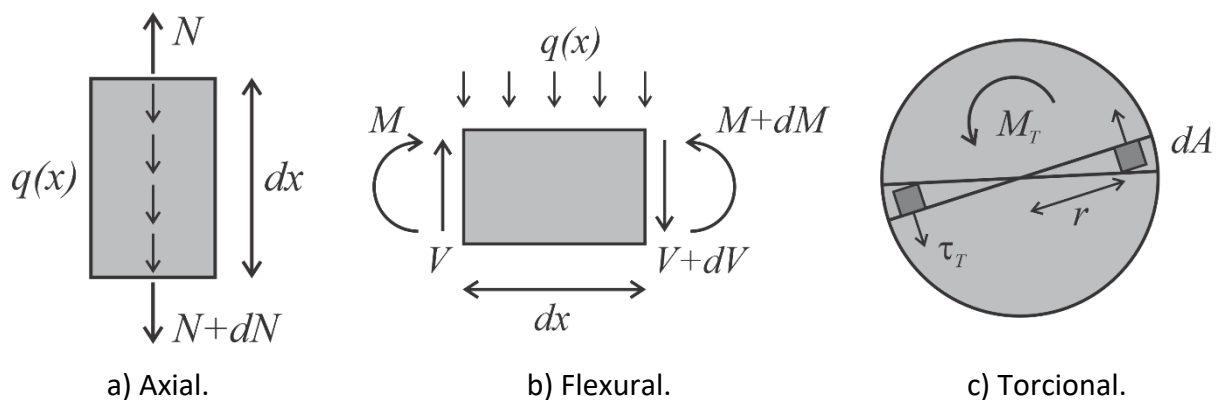


FIGURA 22. EQUILÍBRIO INFINITESIMAL.

O equilíbrio infinitesimal decorrente de esforços axiais resulta em uma relação entre a carga distribuída axialmente e a variação do esforço normal:

$$\frac{dN}{dx} = -q(x) \quad (2.6)$$

O equilíbrio infinitesimal em uma seção transversal decorrente de esforços flexurais provê duas relações – do esforço cortante e do momento fletor:

$$\frac{dV}{dx} = -q(x) \quad (2.7)$$

$$\frac{dM}{dx} = V \rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = -q(x) \quad (2.8)$$

A relação (2.8) é obtida ao se desprezar infinitésimos de ordem superior. Já o equilíbrio infinitesimal em uma seção transversal decorrente de esforços torcionais estabelece relação entre o momento torçor e as tensões cisalhantes de torção, não havendo relação com esforços distribuídos neste caso:

$$\tau_T = \frac{M_T}{\int r dA} \quad (2.9)$$

2.9.2 Condições de Compatibilidade Infinitesimal

A compatibilidade estabelece relação entre o deslocamento e a deformação. As deformações axiais estão relacionadas com a variação do deslocamento:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = u'(x) \quad (2.10)$$

Já as deformações de flexão, segundo a cinemática de Euler-Bernoulli - equação (2.5), se relacionam com o deslocamento axial de uma fibra qualquer por:

$$\varepsilon_x = -yv''(x) \quad (2.11)$$

As deformações por cisalhamento são desprezadas na referida cinemática. Na torção, a distorção por torção se relaciona com o ângulo de torção da seguinte forma:

$$\gamma_T = r \frac{d\phi}{dx} = r\phi' \quad (2.12)$$

2.9.3 Equações Diferenciais

Para obter as relações diferenciais, deve-se adotar uma relação entre as deformações e as tensões, o que é feito pela Lei de Hooke neste caso. Desta forma, a equação diferencial para barras solicitadas axialmente é dada por:

$$u''(x) = \frac{-q(x)}{EA} \quad (2.13)$$

Para barras solicitadas transversalmente, é dada por:

$$v''v(x) = \frac{q(x)}{EI} \quad (2.14)$$

Para barras solicitadas por torção (pura ou de Saint-Venant, sem empenamento), é dada por:

$$\phi'(x) = \frac{M_T}{GJ_p} \quad (2.15)$$

Capítulo 3 - Diagramas de Esforços Solicitantes

Neste capítulo você vai ver:

- Obtenção de diagramas de esforços solicitantes por equilíbrio;
- Determinação das equações de momento / cortante;
- Pontos característicos / notáveis no traçado dos diagramas.

Considere um elemento estrutural seccionado por um corte fictício, que o divide em dois trechos. Para transmitir quaisquer solicitações aos vínculos, são desenvolvidos internamente esforços solicitantes.

Os esforços solicitantes garantem o equilíbrio de cada uma das partes, e são resultantes da integração das tensões existentes nas seções transversais, tensões estas provocadas em oposição à tendência de movimento relativo entre as partículas que constituem a seção transversal. Ou seja, os esforços solicitantes surgem aos pares e em sentido contrário, manifestados para equilibrar as forças ativas e/ou reativas que atuam na estrutura, vide Figura 23.

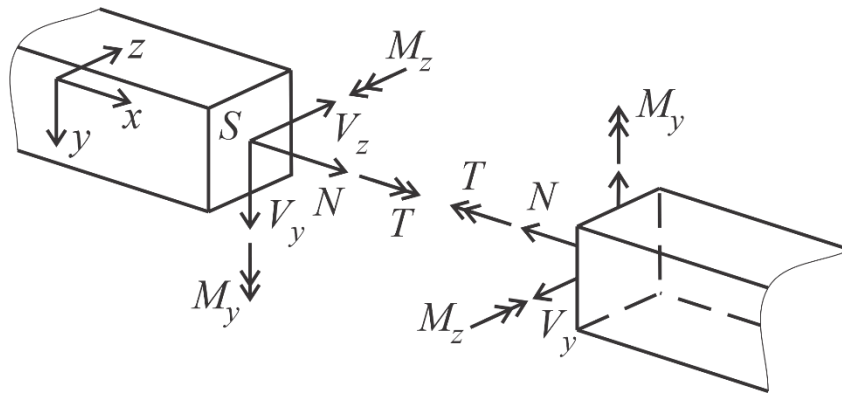


FIGURA 23. ESFORÇOS SOLICITANTES EM UM ELEMENTO ESTRUTURAL.

No caso tridimensional, são três componentes de força e três componentes de momento, associadas às três translações e três rotações possíveis da seção transversal. Considerando o plano de corte, o esforço normal N impede o afastamento ou aproximação dos referidos planos na direção x . Os esforços cortantes V_y e V_z impedem, respectivamente, o deslizamento entre os planos nas direções y e z . Já os momentos fletores M_y e M_z impedem, na devida ordem, o giro relativo entre os planos gerados pela seção em torno dos eixos locais y e z , e o momento torçor T impede o giro relativo entre os referidos planos em torno do eixo x .

Como os esforços solicitantes podem variar de seção para seção do elemento estrutural, passa a ser interessante a representação gráfica de tais esforços ao longo do eixo do elemento, sendo esta representação denominada diagrama de esforços solicitantes. Os valores dos esforços são apresentados como ordenadas diretamente sobre as linhas que definem os eixos das barras do elemento estrutural, tomados como abscissas na representação gráfica.

Uma convenção de sinais deve ser assumida para representação conveniada. No caso bidimensional, em que os eixos dos elementos estão contidos em um mesmo plano x e y , é comum que a convenção seja a apresentada na Figura 24.

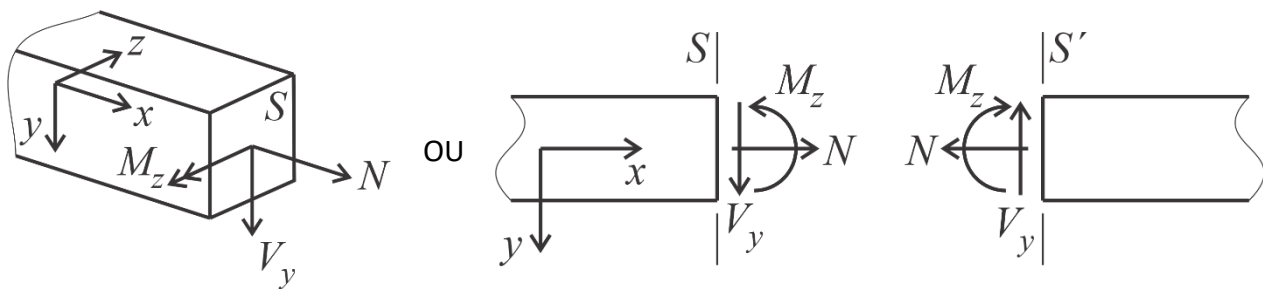


FIGURA 24. CONVENÇÃO DE SINAIS PARA DIAGRAMAS DE ESFORÇOS EM PROBLEMAS PLANOS.

Para obtenção dos diagramas de esforços, ou de expressões que representem os esforços solicitantes ao longo do eixo dos elementos, faz-se cortes imaginários em diferentes seções ao longo do eixo do elemento. Este procedimento é conhecido como Método das Seções.

Apesar de os esforços solicitantes poderem variar de seção a seção do elemento estrutural, as expressões dos diagramas são, em geral, contínuas por trechos do elemento sempre que o carregamento e a própria estrutura (i.e., geometria e seção transversal) forem contínuos no referido trecho. O mesmo é válido para mudanças de material e a existência de forças reativas. Portanto, a presença de ações concentradas (forças ou momentos) ao longo do eixo do elemento implica obrigatoriamente em um ponto de descontinuidade de um ou mais diagramas, seja esta descontinuidade no valor dos esforços ou na derivada destes.

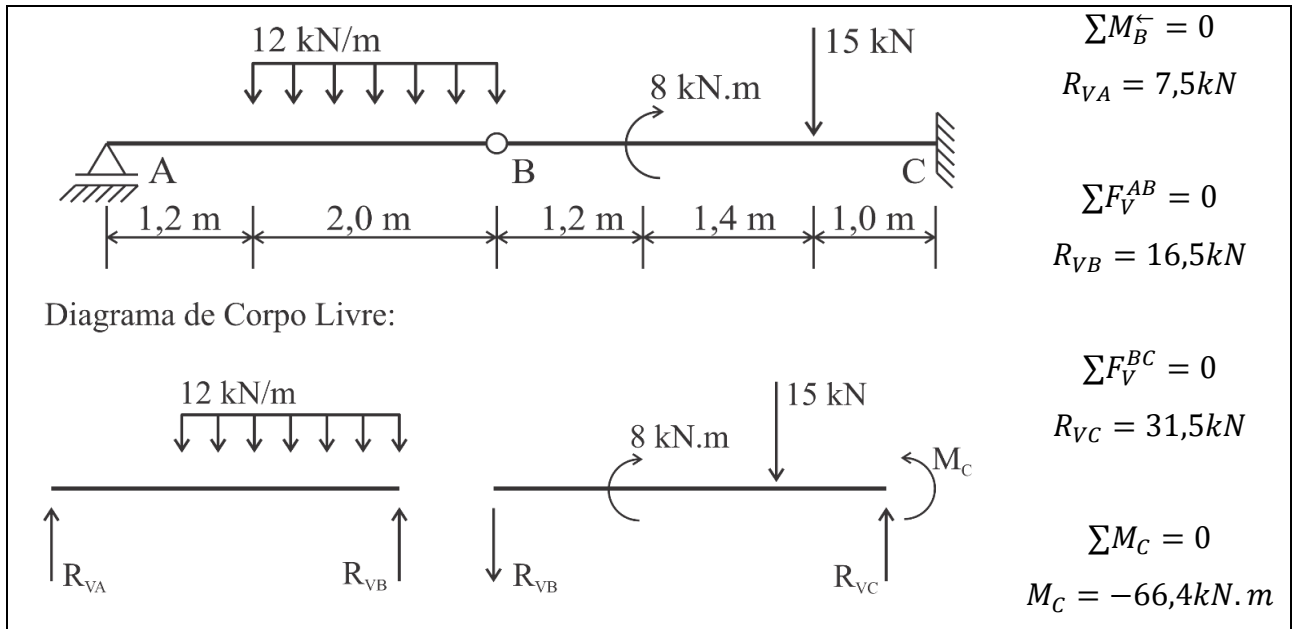
Dito isto, o número de seções necessárias para que se determinem as expressões dos esforços ao longo do eixo de determinado elemento depende do tipo de carregamento a que este encontra-se submetido e de sua geometria. Vide seção 2.9, página 31.

3.1 Exemplos

Quatro exemplos são resolvidos para ilustrar as discussões relativas à obtenção dos diagramas de esforços solicitantes. Como este não é um texto introdutório, algumas liberdades foram tomadas nos diagramas, como representação conjunta dos esforços solicitantes.

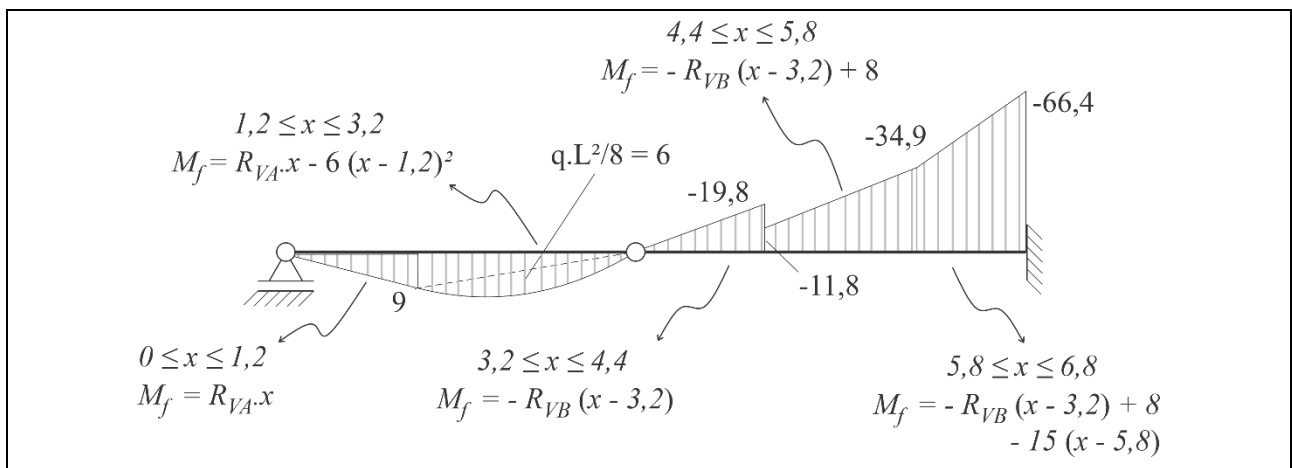
3.1.1 Exemplo 1

Como exemplo inicial, considera-se uma viga isostática sujeita ao carregamento indicado. Parte-se do chamado Diagrama de Corpo Livre (D.C.L.) do elemento estrutural, em que os vínculos são substituídos pelas respectivas reações, sendo a estrutura representada livre do referencial fixo e submetido apenas a forças ativas e reativas.



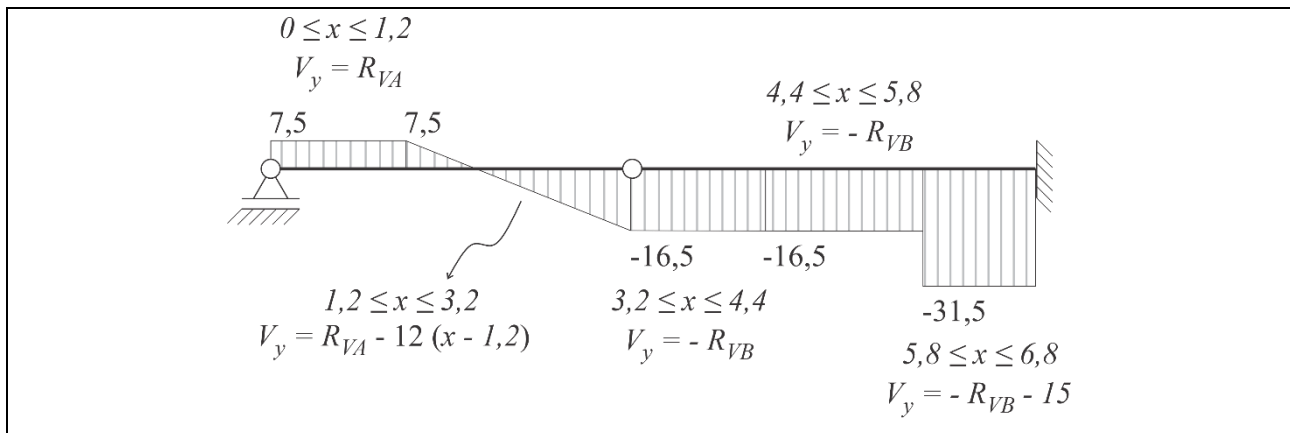
QUADRO 3. GEOMETRIA DO EXEMPLO 1.

Não estando solicitada por forças axiais (horizontais), a reação horizontal em C é nula, e, portanto, sequer foi indicada na resolução. Percebe-se no diagrama de corpo livre os vínculos internos e externos substituídos pelas respectivas forças reativas, com direção definida de forma arbitrária – em pares no vínculo interno. São as equações de equilíbrio que vão efetivamente definir o sentido correto das forças e momentos. Há mais de um caminho de solução, e todos os caminhos levam à solução, pois esta é unívoca. Uma vez conhecido o equilíbrio, pode-se calcular as equações representativas para os esforços solicitantes ao longo da estrutura.



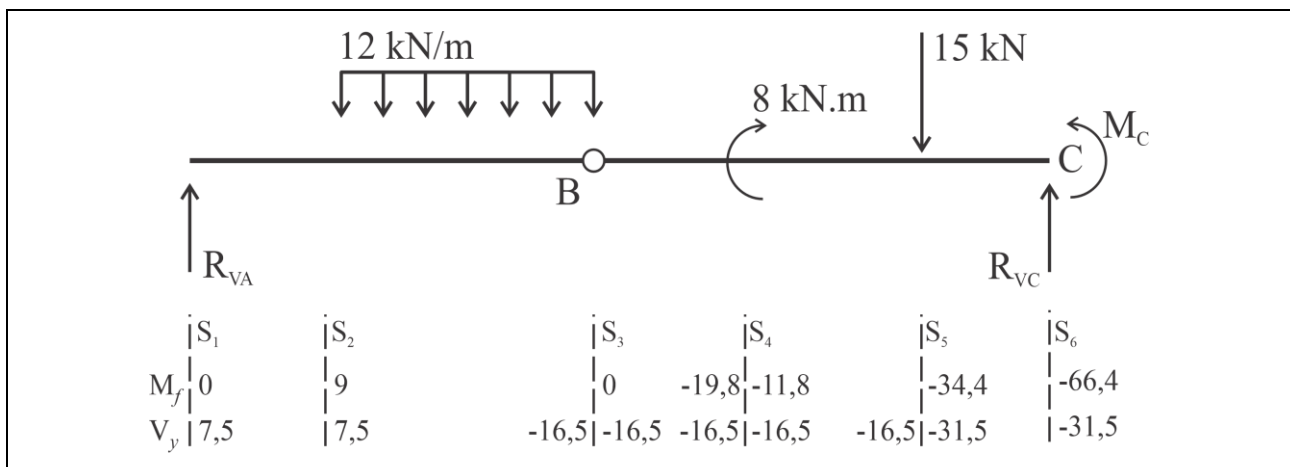
QUADRO 4. DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR PARA O EXEMPLO 1.

Considerando o ponto A como $x = 0$, obtêm-se as expressões relativas ao momento fletor M_f , seccionando os trechos e olhando-se para a esquerda. A seguir são encontradas as expressões relativas ao esforço cortante V_y , obtidos de forma análoga.



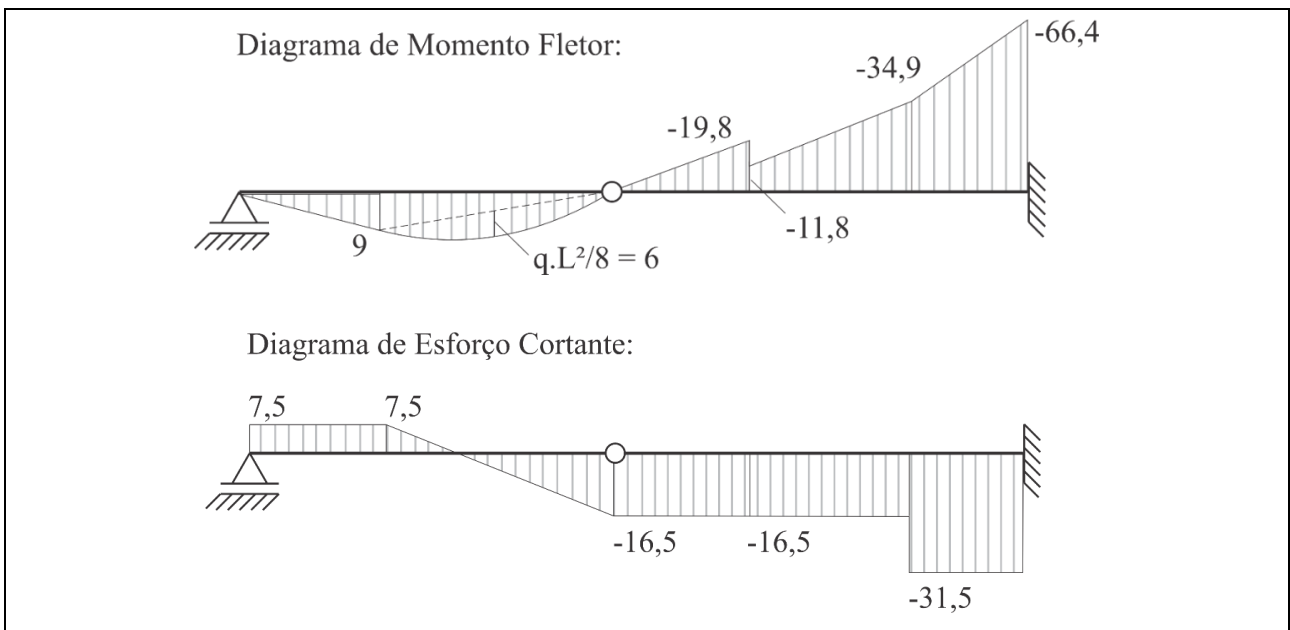
QUADRO 5. DIAGRAMA DE ESFORÇO CORTANTE PARA O EXEMPLO 1.

Apesar dos diagramas poderem ser representados por meio de equações representativas aos trechos, é mais simples empregar o Método das Seções, em que se calcula os esforços solicitantes em seções da estrutura. As seções devem ser dispostas sempre que houver uma mudança de continuidade, seja de carregamento ou características do elemento estrutural.



QUADRO 6. MÉTODO DAS SEÇÕES.

Uma vez conhecidos os valores nas seções, basta traçar o diagrama a partir dos valores estabelecidos. Nos trechos em que existem cargas uniformemente distribuídas, “pendura-se” o valor relativo à contribuição do trecho. Salienta-se que as seções indicadas no Quadro 6 são as mínimas necessárias para obtenção do diagrama – outras seções podem ser incluídas por conveniência ou para verificação dos valores.



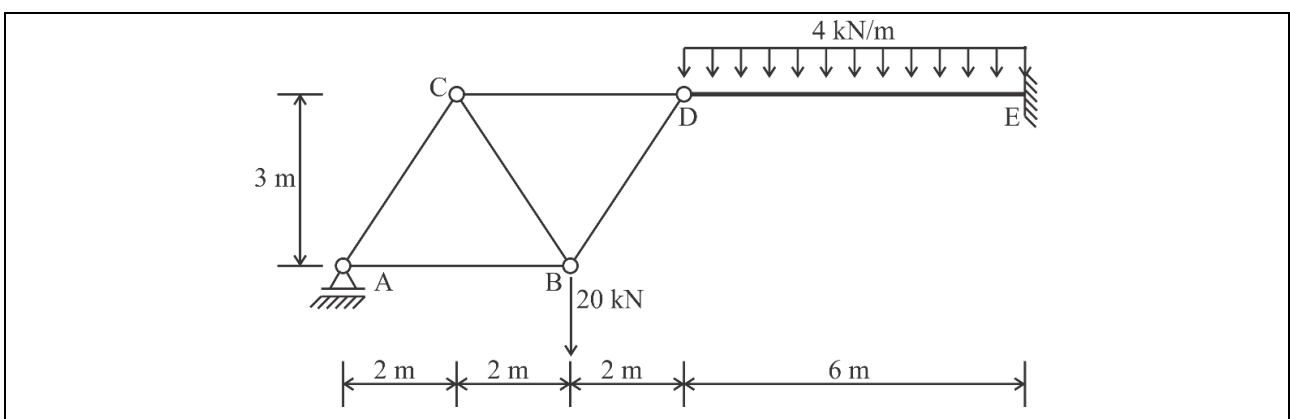
QUADRO 7. DIAGRAMAS OBTIDOS PELO MÉTODO DAS SEÇÕES.

Alguns pontos notáveis podem ser observados. No diagrama de momento fletor, as variações são sempre lineares, exceto quando associadas a uma carga distribuída. No caso de uma carga uniformemente distribuída, a variação é quadrática. A concavidade é disposta na direção contrária à componente transversal do carregamento em relação ao eixo da barra do elemento estrutural.

Outro ponto que merece atenção é a rótula. Se não há momento aplicado nas imediações, o momento fletor neste ponto sempre será nulo. No ponto de aplicação de um momento concentrado, ocorre um salto de mesmo valor no diagrama, o que é esperado.

Com relação ao diagrama de esforço cortante, sempre ocorre salto no ponto de aplicação de uma força, tanto ativa quanto reativa, transversalmente ao eixo do elemento. No trecho em que há uma carga uniformemente distribuída, a variação do esforço cortante é linear. Outras conclusões podem ser extraídas dos diagramas fazendo-se uso das relações diferenciais apresentadas na seção 2.9, página 31.

3.1.2 Exemplo 2



QUADRO 8. GEOMETRIA DO EXEMPLO 2

A estrutura mista do exemplo 2 apresenta exclusivamente esforços normais nas barras com rotulação em ambas extremidades, caso visto nas barras AB, AC, BC, BD e CD. Já a barra DE pode apresentar tanto esforços transversais quanto esforços axiais, decorrente das ações impostas e da transferência de esforços das barras de treliça, que deve ser observado pelo equilíbrio de ações.

Inicialmente, determinam-se por equilíbrio as reações de apoio. Para tanto, adotam-se forças reativas positivas para direita e para cima, e momento reativo positivo horário.

$$\begin{array}{cccc} \sum M_E = 0 & \sum F_H = 0 & \sum F_V = 0 & \sum M_D^{\vec{}} = 0 \\ V_A = 6,667 \text{ kN} & H_E = 0 \text{ kN} & V_E = 37,333 \text{ kN} & M_E = 152 \text{ kN.m} \end{array}$$

São quatro incógnitas reativas, o que requer quatro equações de equilíbrio para obtenção das reações. A rótula em D apresenta a quarta equação de equilíbrio, pois o momento em uma rótula é nulo.

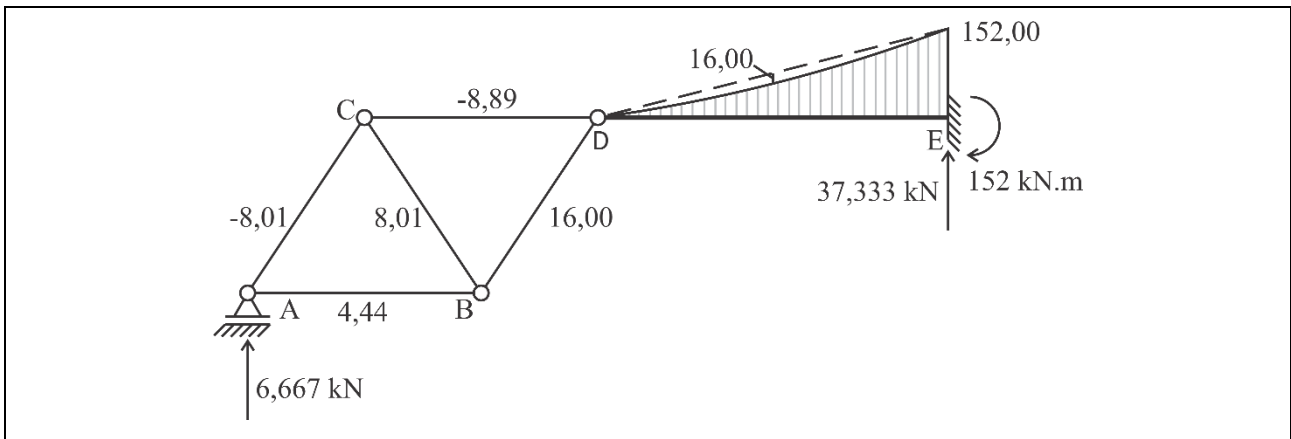
Uma vez obtidas as reações de apoio, determinam-se as Normais das barras de treliça. Adota-se tração positiva. O equilíbrio em cada nó (Método dos Nós) possibilita a obtenção dos esforços normais.

$$\begin{array}{ccc} N_{AB} = 4,44 \text{ kN} & N_{BC} = 8,01 \text{ kN} & N_{CD} = -8,89 \text{ kN} \\ N_{AC} = -8,01 \text{ kN} & N_{BD} = 16,0 \text{ kN} & N_{DE} = 0 \text{ kN} \end{array}$$

Conhecidos os esforços axiais em todas as barras, resta apenas determinar os esforços transversais na barra DE, o que é facilmente atingido a partir do método das seções já discutido anteriormente e das reações de apoio obtidas.

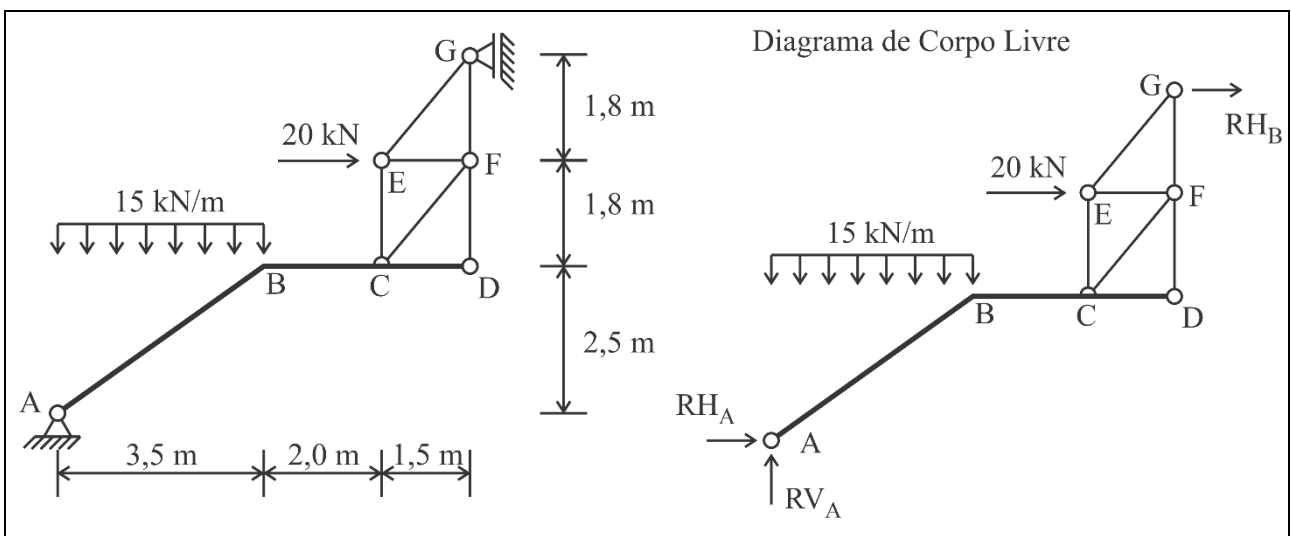
De forma simplificada, representam-se os valores de esforço normal nas barras de treliça e de momentos fletores no trecho DE, solicitado à esforços transversais, em um único diagrama. Essa representação não é a mais adequada, pois está associando dois tipos de esforços internos, sendo feito apenas em estruturas mistas em que há clara separação dos esforços preponderantes. Neste caso não são apresentados os esforços normais das barras sujeitas a flexão, o que pode levar à falsa impressão que não existem esforços normais nas mesmas, caso do exemplo 3.

Percebe-se que no ponto D há uma rótula, o que implica que o momento fletor no ponto é nulo. No apoio E, há um momento reativo devido ao engaste, de valor conhecido. Segundo a convenção empregada, as fibras tracionadas pelo momento são as fibras superiores, portanto desenhado conforme segue. Por fim, acresce-se o efeito da carga distribuída ao longo do vão, pendurando o valor relativo à contribuição específica ao trecho, desconsiderando outras ações, na direção transversal ao vão.



QUADRO 9. PRINCIPAIS ESFORÇOS SOLICITANTES NOS ELEMENTOS.

3.1.3 Exemplo 3



QUADRO 10. GEOMETRIA E DIAGRAMA DE CORPO LIVRE DO EXEMPLO 3

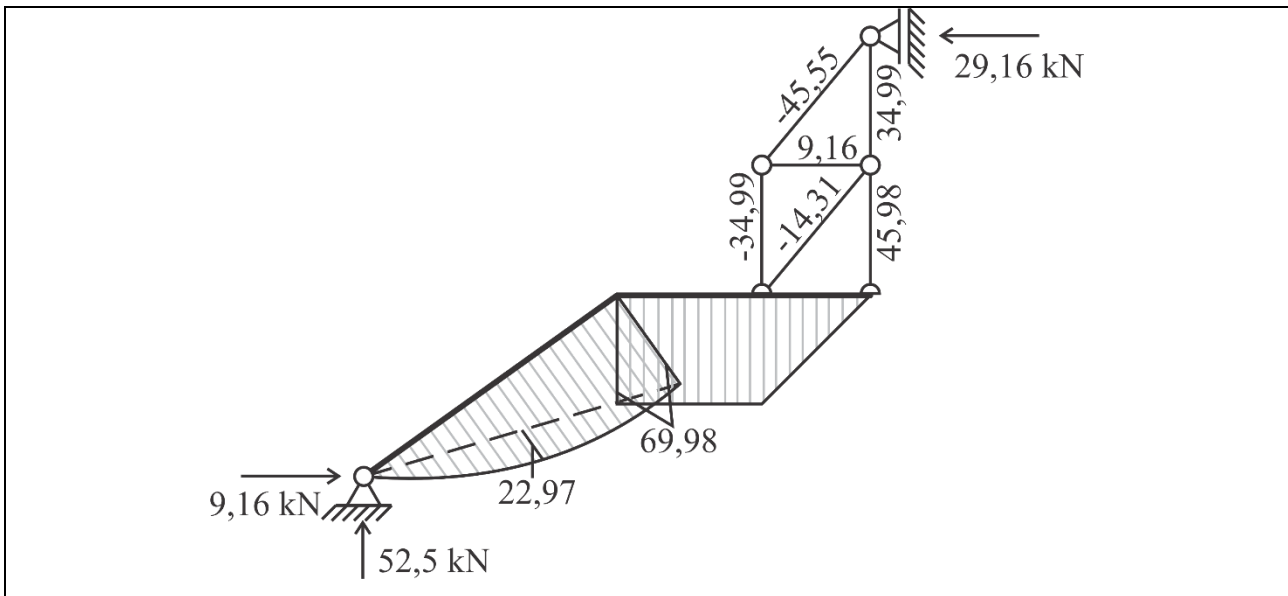
Este exemplo traz novamente uma estrutura mista. As reações de apoio por equilíbrio, adotando-se sentido positivo para direita e para cima, são:

$$\begin{aligned} \sum F_V = 0 & & \sum M_A = 0 & & \sum F_H = 0 \\ V_A = 52,5 \text{ kN} & & H_G = -29,16 \text{ kN} & & V_A = 9,16 \text{ kN} \end{aligned}$$

Conhecidas as reações de apoio, determinam-se os esforços normais, sendo adotada tração positiva. Iniciando pelas barras de treliça, os esforços normais são obtidos diretamente por equilíbrio nodal.

$$\begin{aligned} N_{EG} = -45,55 \text{ kN} & & N_{FG} = 34,99 \text{ kN} & & N_{EF} = 9,16 \text{ kN} \\ N_{CE} = -34,99 \text{ kN} & & N_{CF} = -14,31 \text{ kN} & & N_{DF} = 45,98 \text{ kN} \end{aligned}$$

Obtidos os esforços axiais nas barras onde estes são preponderantes, pode-se, por equilíbrio e empregando o método das seções, determinar os esforços internos nas barras sujeitas a flexão. Faz-se uso novamente da representação simplificada de esforço normal e momento fletor nos trechos de interesse em uma única figura.

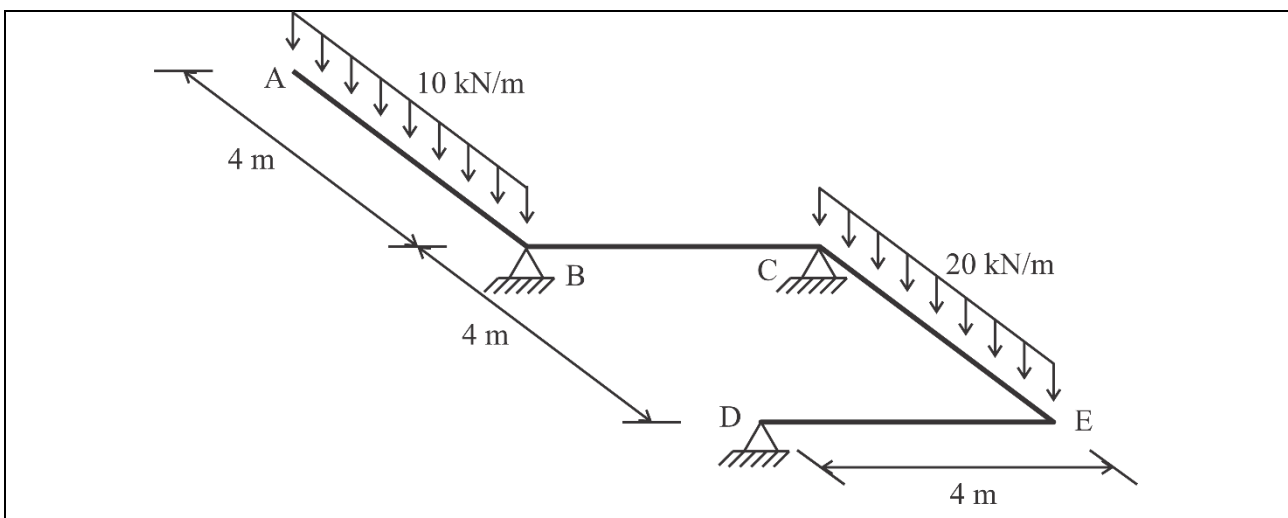


QUADRO 11. REPRESENTAÇÃO DOS ESFORÇOS SOLICITANTES NO EXEMPLO 3.

Um ponto essencial na análise deste exemplo é o ponto B. Há continuidade no valor do momento fletor no referido ponto. Como não há momento concentrado aplicado no referido ponto, isto é mandatório. Assim, ao fazer uma seção no ponto B, pode-se verificar o equilíbrio tanto observando-se a seção à esquerda quanto à direita, e os valores do momento fletor devem ser coincidentes.

Outra questão importante está no trecho parabólico que foi adicionado ao diagrama – o trecho pendurado, entre os pontos A e B. Conhecidos os valores dos momentos na extremidade da barra AB, o valor do momento adicionado corresponde apenas à parcela transversal da ação distribuída, que deve ser decomposta para tal fim.

3.1.4 Exemplo 4

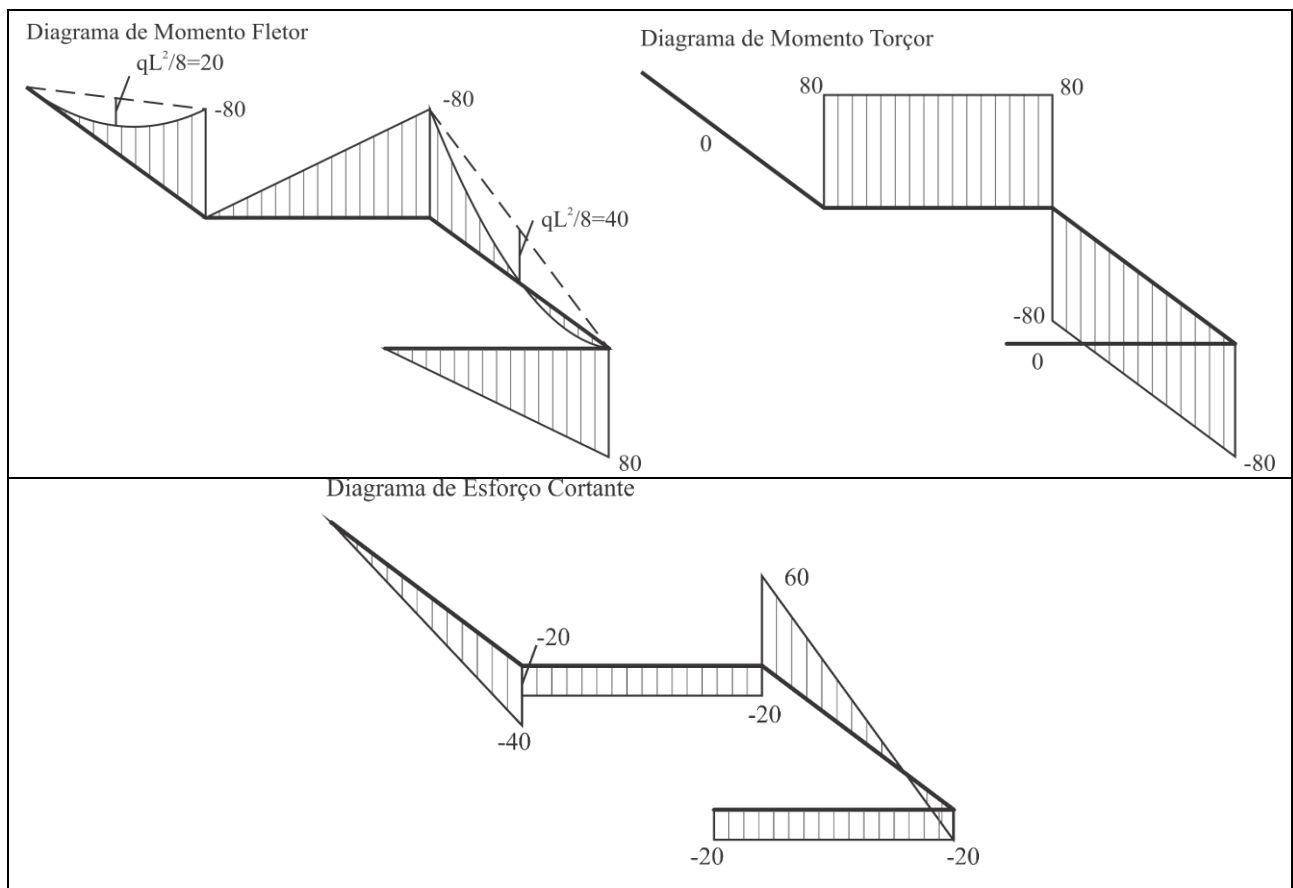


QUADRO 12. GEOMETRIA DO EXEMPLO 4.

Conforme tratado anteriormente, grelhas são elementos solicitados à flexão, à torção e ao cisalhamento, e os esforços externos estão contidos transversalmente ao plano que contém os elementos. Determina-se por equilíbrio as reações de apoio, para posteriormente desenhar os diagramas associados aos esforços solicitantes. O equilíbrio é atingido fazendo-se uso das equações de equilíbrio de momento em torno de eixos arbitrados bem como somatório de forças na direção perpendicular ao plano da estrutura, ou seja:

$$\begin{aligned} \sum M_{BC} &= 0 & \sum M_{ABD} &= 0 & \sum F_V &= 0 \\ 4V_D &= 20.4.2 - 10.4.2 & 4V_C &= 20.4.4 & V_B + V_C + V_D &= 120 \text{ kN} \\ V_D &= 20 \text{ kN} & V_C &= 80 \text{ kN} & V_B &= 20 \text{ kN} \end{aligned}$$

Conhecidas as reações de apoio, são feitas seções nas extremidades das barras, analisando os três esforços solicitantes na seção, tendo em mente a convenção de sinais respectiva.



QUADRO 13. DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES EM GRELHA.

Um ponto especialmente notável pode ser destacado no diagrama de momentos fletores e torçores em grelhas. Quando o encontro de duas barras de grelha ocorre em ângulo reto, os esforços solicitantes de momento fletor são transferidos para a outra barra como momento torçor. O inverso também é válido. Desta forma, o valor (em módulo) do momento fletor no fim de uma barra deve ser o mesmo para o momento torçor no início da outra barra.

Isto é facilmente percebido no ponto B, em que a barra AB tem momento fletor de 80 kN.m em B e a barra BC tem momento torçor de mesmo valor no ponto. Da mesma forma, o momento torçor de AB em B é nulo, assim como o momento fletor de BC. Quando o encontro ocorre em ângulo diferente de reto, deve ser feita a devida decomposição do vetor momento atuante na seção ou nó da estrutura.

Capítulo 4 - Princípio dos Trabalhos Virtuais

Neste capítulo você vai ver:

- Definições gerais do PTV;
- Teoremas de Energia;
- Aplicações do PTV: cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas;
- Aplicações do PTV: seleção de equação de equilíbrio.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) constitui em um teorema fundamental, que possibilita a imposição de condições de equilíbrio e de restrições de compatibilidade, largamente empregado para obtenção de deslocamentos, reações e esforços em estruturas isostáticas, auxiliando no traçado de linhas de influência, sendo base para formulações de resolução de estruturas hiperestáticas.

De forma geral, o PTV pode ser enunciado a partir de dois estados distintos atuando sobre uma estrutura, sem ligação obrigatória entre tais estados. Um dos estados é considerado um estado de forças (vide Figura 25, estado (1)), em que se exige o equilíbrio entre forças externas e esforços internos. O segundo estado é tido como um estado de deslocamentos (Figura 25, estado (2)), em compatibilidade com suas deformações, respeitando vínculos externos e a continuidade existente.

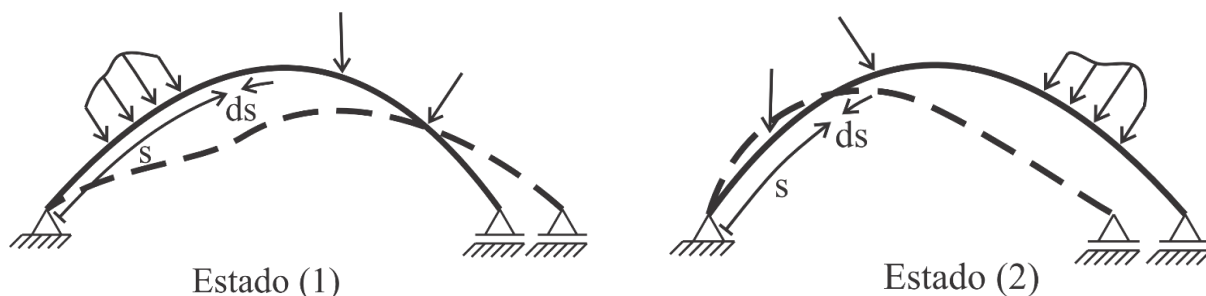


FIGURA 25. PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS.

Com base no Princípio da Conservação de Energia, o PTV estabelece que:

O trabalho virtual externo realizado pelas forças de (a) $F_i^{(a)}$ sobre os correspondentes deslocamentos de (b) $\delta_i^{(b)}$ é igual ao trabalho virtual interno realizado pelos esforços internos de (a) $\sigma_j^{(a)}$ sobre as correspondentes deformações de (b) $\varepsilon_j^{(b)}$:

$$\Sigma T_{ext} = \Sigma T_{int} \rightarrow \Sigma F_i^{(a)} \delta_i^{(b)} = \int \sigma_j^{(a)} \varepsilon_j^{(b)} d\Omega \quad (4.1)$$

O termo virtual decorre da independência entre os estados adotados, sendo necessário apenas que o estado de forças esteja em equilíbrio e o estado de deslocamentos seja compatível, respeitando a continuidade e vínculos da estrutura. Ou seja, o estado de deslocamentos e estado de forças, criados ou aplicados sobre a mesma estrutura, não apresentam, necessariamente, qualquer ligação. Apesar de providos pela mesma estrutura, os estados são independentes, e não tem nenhuma relação causa efeito entre eles.

Particularmente para estruturas reticuladas, para o caso bidimensional com cargas contidas no plano da estrutura, a parcela a direita da equação (4.1) pode ser escrita em função dos esforços solicitantes – esforço normal $N^{(a)}$, esforço cortante $V^{(a)}$ e momento fletor $M^{(a)}$:

$$\sum F_i^{(a)} \delta_i^{(b)} = \int N^{(a)} du^{(b)} + \int V^{(a)} dv^{(b)} + \int M^{(a)} d\phi^{(b)} \quad (4.2)$$

em que $du^{(b)}$, $dv^{(b)}$ e $d\phi^{(b)}$ são, respectivamente, deslocamentos relativos que ocorrem entre duas seções vizinhas distantes em ds , associados ao esforço normal, esforço cortante e momento fletor. Os referidos deslocamentos relativos, assim como os deslocamentos totais, são mostrados na Figura 26.

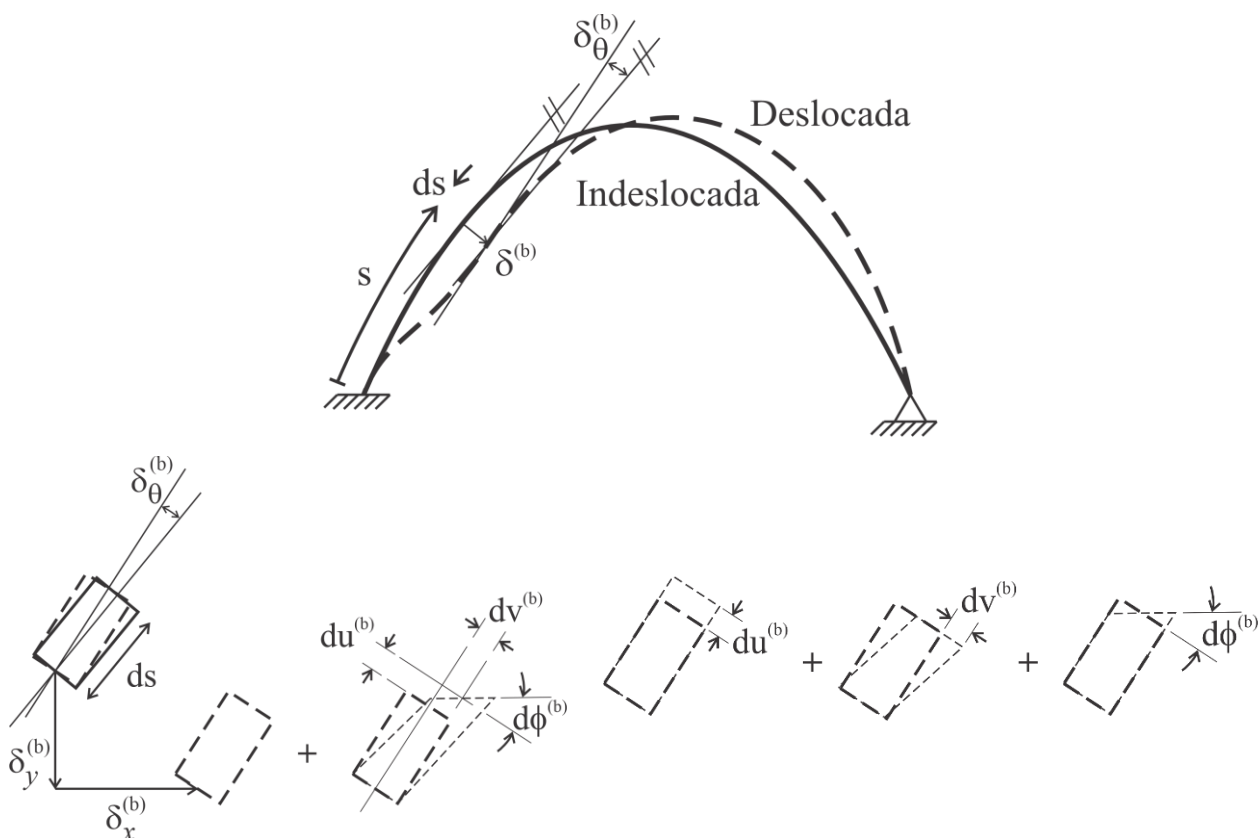


FIGURA 26. DESLOCAMENTOS ABSOLUTOS E RELATIVOS DE UM ELEMENTO INFINITESIMAL.

A Figura 26 mostra uma estrutura sujeita a uma causa física qualquer, que promoveu uma configuração deslocada. Desta forma, um elemento infinitesimal de dimensão ds é sujeito a um

deslocamento de translação $\delta^{(b)}$ (decomposto em $\delta_x^{(b)}$ e $\delta_y^{(b)}$) e uma rotação $\delta_\theta^{(b)}$. A variação de deslocamento no sentido axial é dada por $du^{(b)}$, no sentido transversal por $dv^{(b)}$ e rotacional por $d\phi^{(b)}$, estabelecidos conforme a cinemática adotada e a causa física à qual encontra-se submetido o elemento estrutural onde estes são calculados.

A interpretação do Princípio dos Trabalhos Virtuais dá origem a duas formas convenientes: O Princípio das Forças Virtuais (PFV) e o Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV). Em linhas gerais, o PFV estabelece que, impondo-se um estado de deslocamentos real (b) em um estado de forças virtual (a), em equilíbrio e convenientemente criado, o trabalho externo das forças virtuais de (a) com os deslocamentos reais de (b) é igual ao trabalho interno das tensões virtuais de (a) sobre as deformações reais de (b), sendo assim possível de se impor condições de compatibilidade ao estado de deslocamentos real. Esta forma do PTV é particularmente interessante para determinação de deslocamentos em estruturas.

Já o PDV estabelece que, impondo-se um estado de deslocamentos virtual (b), convenientemente criado e compatível com os vínculos, a um estado de forças real (a), o trabalho externo das forças reais de (a) com os deslocamentos virtuais de (b) é igual ao trabalho interno das tensões reais de (a) sobre as deformações virtuais de (b), sendo possível de se impor condições de equilíbrio ao estado de forças real. Esta forma do PTV é particularmente interessante para determinação de reações e esforços solicitantes em estruturas.

4.1 Cálculo de deslocamento em estruturas isostáticas

A determinação de deslocamentos em estruturas isostáticas decorre da aplicação do Princípio das Forças Virtuais, em que se impõem ao estado de deslocamentos real (b) um estado de forças virtual (a) criado de forma conveniente, com uma força (ou momento) unitária na direção e sentido do deslocamento que se deseja determinar, tal como ilustrado na Figura 27.

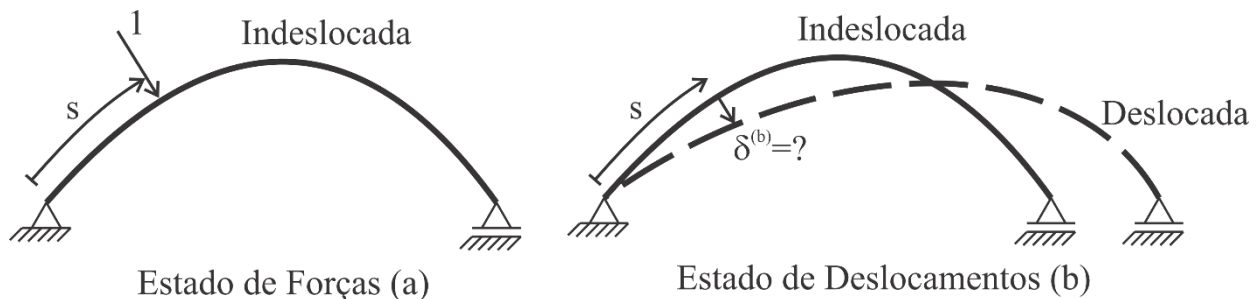


FIGURA 27. CÁLCULO DE DESLOCAMENTO EM ESTRUTURA ISOSTÁTICA.

Impondo-se o estado de deslocamentos (b) ao estado de forças (a), de acordo com a equação (4.2), tem-se que:

$$1. \delta^{(b)} = \int N^{(a)} du^{(b)} + \int V^{(a)} dv^{(b)} + \int M^{(a)} d\phi^{(b)} \quad (4.3)$$

reduzindo o problema do cálculo do deslocamento $\delta^{(b)}$ à determinação de integrais de produtos de funções definidas sobre o eixo das barras da estrutura, com $du^{(b)}$, $dv^{(b)}$ e $d\phi^{(b)}$ determinados de acordo com a cinemática adotada e com as causas físicas às quais encontram-se submetidos os elementos da estrutura no estado de deslocamentos (b).

Com as considerações e restrições dispostas no Capítulo 2 - associadas ao método clássico -, as variações de deslocamento devido a um carregamento qualquer em um elemento infinitesimal de comprimento ds são definidas por:

$$du^{(b)} = \frac{N^{(b)}}{EA} ds \quad (4.4)$$

$$dv^{(b)} = \chi \frac{V^{(b)}}{GA} ds \quad (4.5)$$

$$d\phi^{(b)} = \frac{M^{(b)}}{EI} ds \quad (4.6)$$

$$d\varphi^{(b)} = \frac{T^{(b)}}{GJ_t} ds \quad (4.7)$$

em que E é o módulo de elasticidade longitudinal, G é o módulo de elasticidade transversal, A é a área da seção transversal, I é a inércia da seção em relação ao eixo longitudinal, e χ é um fator de correção do cisalhamento associado à forma da seção transversal. Inclui-se ainda $d\varphi^{(b)}$, que é a variação angular entre seções associada com a distorção decorrente da torção (verificada em elementos de grelha e pórticos espaciais), sabendo-se que J_t é o momento polar de inércia, também conhecido como momento de inércia à torção.

Quando a causa física é uma variação de temperatura, já em equilíbrio a partir de um referencial livre de tensões, as variações de deslocamento são dadas conforme a Figura 28.

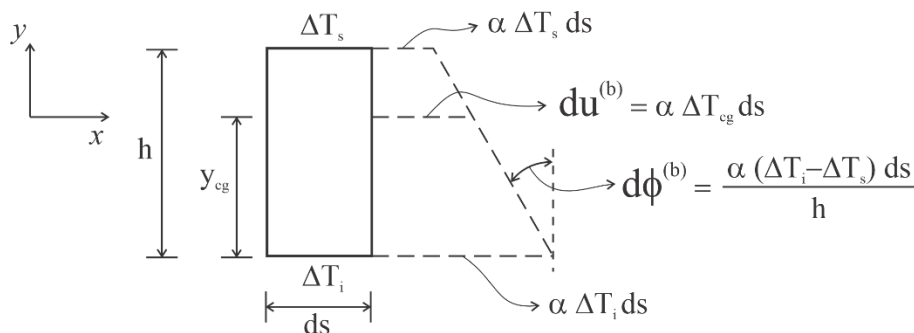


FIGURA 28. DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM UM ELEMENTO INFINITESIMAL.

Tendo isto em mente, as variações de deslocamento são dadas por:

$$du^{(b)} = \alpha \Delta T_{cg} ds \quad (4.8)$$

$$dv^{(b)} = 0 \quad (4.9)$$

$$d\phi^{(b)} = \alpha \frac{\Delta T_i - \Delta T_s}{h} ds \quad (4.10)$$

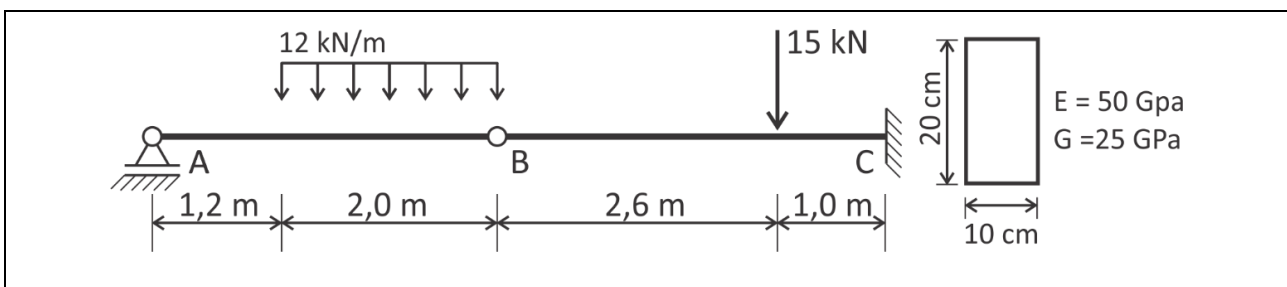
em que α é o coeficiente de expansão térmica, ΔT_{cg} é a variação de temperatura em relação ao eixo longitudinal, ΔT_i e ΔT_s são as variações de temperatura em relação às fibras inferiores e superiores, respectivamente, e h é a altura da seção.

Para uma seção em que o eixo longitudinal se encontra na metade da altura, $du^{(b)}$ reduz para:

$$du^{(b)} = \alpha \frac{\Delta T_i + \Delta T_s}{2} ds \quad (4.11)$$

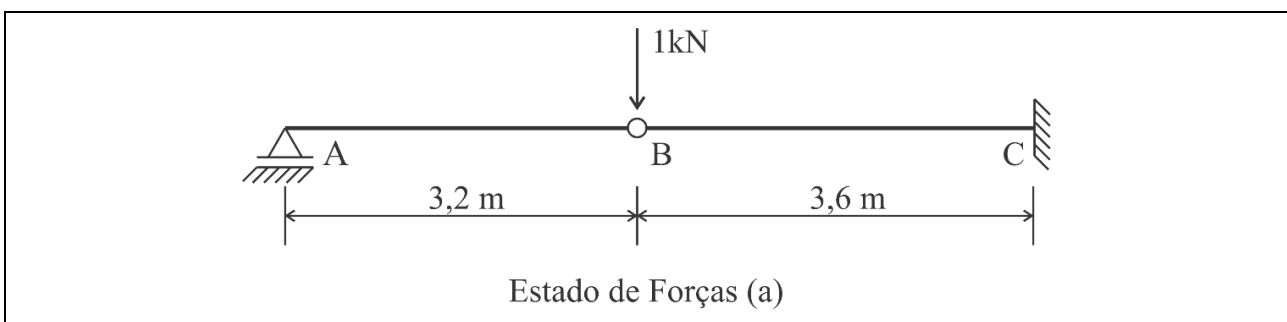
4.1.1 Exemplo trivial

Considere a viga apresentada no Quadro 14, em que se deseja conhecer o deslocamento vertical em B. O estado de deslocamentos é provido pelos diagramas de esforços solicitantes associados às propriedades geométricas da seção transversal e propriedades físicas do material constituinte.



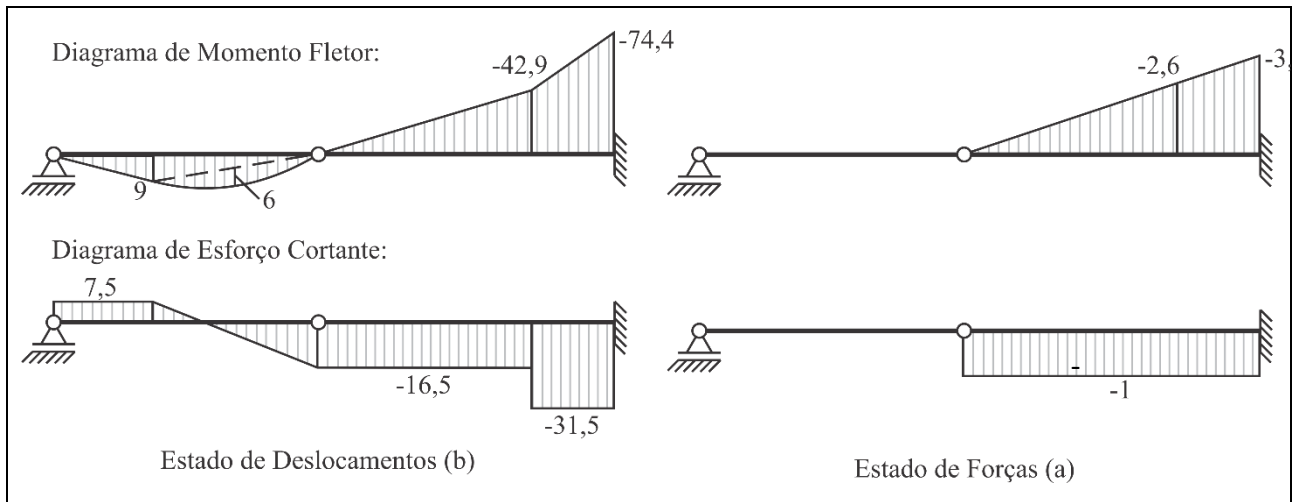
QUADRO 14. EXEMPLO DE CÁLCULO DE DESLOCAMENTO EM ESTRUTURA ISOSTÁTICA PELO PTV.

Já o estado de forças é proposto conforme o deslocamento que se deseja obter, impondo-se uma força unitária na direção do deslocamento e sentido arbitrado positivo.



QUADRO 15. ESTADO DE FORÇAS ARBITRADO PARA CÁLCULO DE DESLOCAMENTO PELO PTV.

Para obtenção do deslocamento em B, relacionam-se os diagramas de esforços solicitantes por meio da equação (4.3), conforme a seguir.



QUADRO 16. DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES PARA CÁLCULO PELO PTV.

Cada trecho do diagrama deve ser convertido em uma expressão, e cada variação nos diagramas envolve a dedução de nova expressão. No entanto, as integrais envolvidas podem ser facilmente obtidas empregando-se tabelas de integração de produto de duas funções, como a mostrada no Quadro 17. Outras tabelas, com maior número de relações, são facilmente obtidas em outras bibliografias, porém as relações apresentadas são suficientes para as aplicações mais gerais.

$f_1(x)dx$ $f_2(x)dx$	a a	a a	a b
α α	$a \alpha L$	$\frac{a \alpha}{2} L$	$\frac{\alpha(a+b)}{2} L$
α α	$\frac{a \alpha}{2} L$	$\frac{a \alpha}{3} L$	$\frac{\alpha(2a+b)}{6} L$
β	$\frac{a \beta}{2} L$	$\frac{a \beta}{6} L$	$\frac{\beta(a+2b)}{6} L$
α β	$\frac{a(\alpha+\beta)}{2} L$	$\frac{a(2\alpha+\beta)}{6} L$	$\left[\frac{a(2\alpha+\beta)}{6} + \frac{b(\alpha+2\beta)}{6} \right] L$
γ	$\frac{2 a \gamma}{3} L$	$\frac{a \gamma}{3} L$	$\frac{(a+b)\gamma}{3} L$

QUADRO 17. INTEGRAIS DE PRODUTO DE DUAS FUNÇÕES.

A tabela com as integrais de produto de duas funções foi empregada para determinar o deslocamento vertical em B. Apenas nos trechos que envolver diagrama não nulo, estas são apresentadas. Inicia-se com o diagrama de esforço cortante, depois com a contribuição de momento fletor.

$$\delta_B = \frac{\chi}{GA} \left[\underbrace{\left[\text{Diagrama 1} \right]}_{l=2,6m}^{-16,5} + \underbrace{\left[\text{Diagrama 2} \right]}_{l=1,0m}^{-31,5} \right] + \frac{1}{EI} \left[\underbrace{\left[\text{Diagrama 3} \right]}_{l=2,6m}^{-42,9} \right] + \underbrace{\left[\text{Diagrama 4} \right]}_{l=1,0m}^{-42,9} \left[\text{Diagrama 5} \right]^{-74,4} \left[\text{Diagrama 6} \right]^{-2,6} \left[\text{Diagrama 7} \right]^{-3}$$

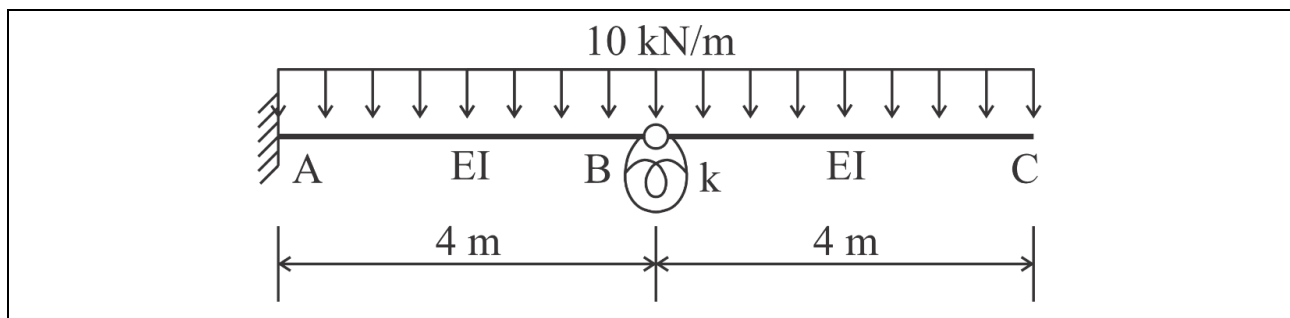
$$\delta_B = \frac{\chi}{GA} [(-1 \cdot -16,5 \cdot 3,6) + (-1 \cdot -31,5 \cdot 1,0)] + \frac{1}{EI} \left\{ (-2,6 \cdot -42,9 \cdot \frac{2,6}{3}) + \left[\left(\frac{-2,6 \cdot (2 \cdot -42,9 - 74,4)}{6} \right) + \left(\frac{-3,6 \cdot (-42,9 + 2 \cdot -74,4)}{6} \right) \right] \cdot 1,0 \right\}$$

$$\delta_B = \frac{\chi \cdot 74,4}{GA} + \frac{281,108}{EI} = 0,1786 + 84,3324 = 84,51 \text{ mm}$$

QUADRO 18. CÁLCULO DO DESLOCAMENTO VERTICAL NO PONTO B.

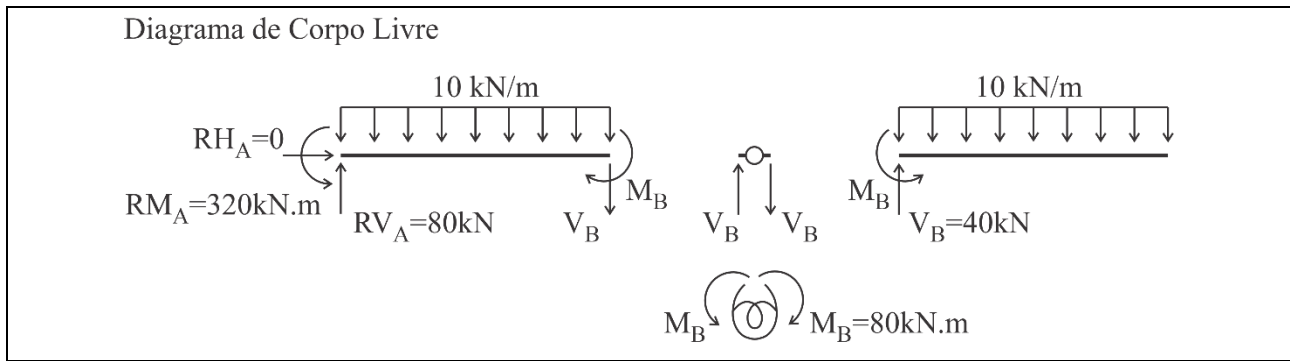
4.1.2 Primeiro exemplo complementar

Considere a viga apresentada abaixo, em que se deseja conhecer o deslocamento vertical em C, considerado positivo para baixo. O estado de deslocamentos é provido pelos diagramas de esforços solicitantes associados às propriedades geométricas da seção transversal e propriedades físicas do material constituinte, sendo estas: $EI = 21.000 \text{ kN.m}^2$ e $k = 5.000 \text{ kN.m/rad}$.



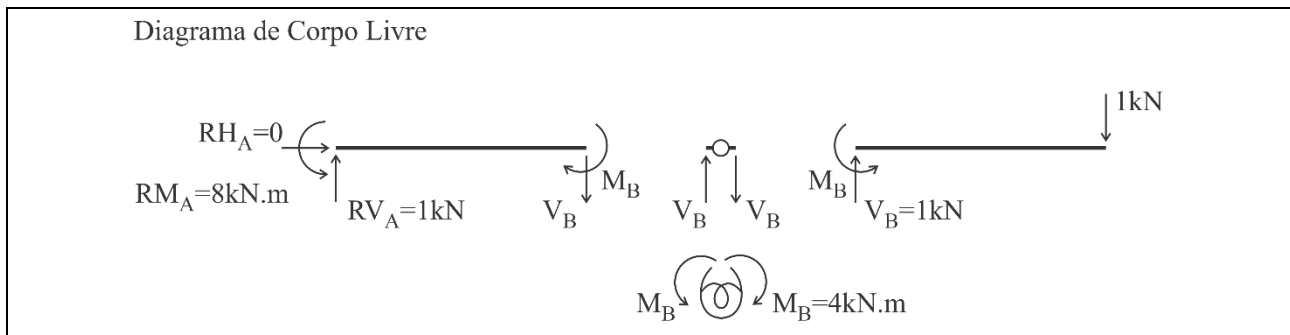
QUADRO 19. EXEMPLO COMPLEMENTAR – VIGA COM MOLA RELATIVA DE GIRO.

O estado de deslocamentos é dado pelas ações atuantes na estrutura. Para facilitar sua obtenção e destacar as ações e reações – inclusive as internas –, desenha-se o Diagrama de Corpo Livre. No caso da rótula, transfere-se esforço horizontal (desconsiderado pela ausência de ações) e esforço vertical. A mola de giro, por sua vez, garante continuidade de momento.



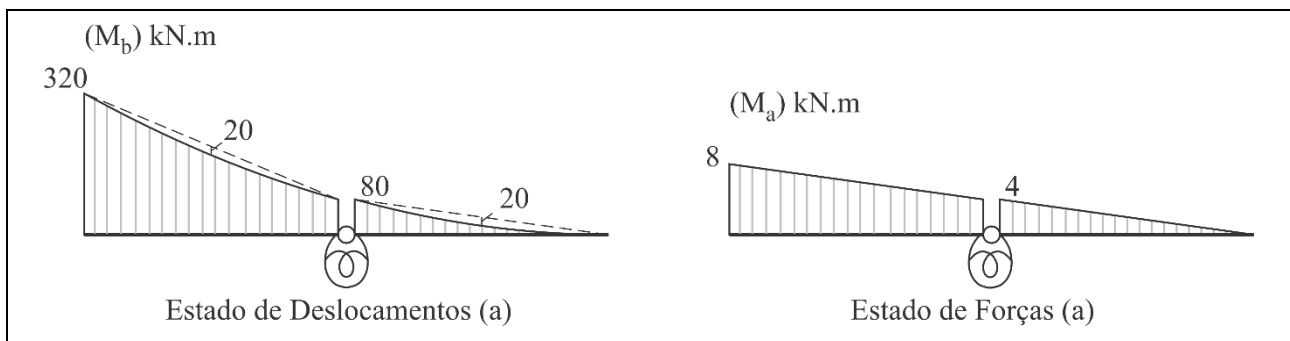
QUADRO 20. DIAGRAMA DE CORPO LIVRE DO ESTADO DE DESLOCAMENTOS (B).

O estado de forças é proposto conforme o deslocamento que se deseja obter, impondo-se uma força unitária na direção e sentido arbitrado positivo.



QUADRO 21. DIAGRAMA DE CORPO LIVRE DO ESTADO DE FORÇAS ARBITRADO (A).

Para obtenção do deslocamento em C, relacionam-se os diagramas de esforços solicitantes por meio da equação (4.3). Em elementos sujeitos a causa física carregamento, a principal contribuição de deslocamento, em geral, é dada pelo Momento Fletor, portanto é usual desconsiderar o Esforço Cortante, como segue:



QUADRO 22. DIAGRAMA DE ESFORÇOS SOLICITANTES.

Emprega-se a tabela de integrais de produto de duas funções para obter o deslocamento vertical em C a partir da contribuição do momento fletor e do esforço na mola de giro.

$$\delta_{VC} = \frac{1}{EI} \left[\underbrace{\begin{array}{c} 320 \quad 80 \quad 8 \\ \cdot \\ l=4,0m \end{array}} + \underbrace{\begin{array}{c} \gamma \quad -20 \quad 8 \\ \cdot \\ l=4,0m \end{array}} + \underbrace{\begin{array}{c} 80 \quad 4 \\ \cdot \\ l=4,0m \end{array}} + \underbrace{\begin{array}{c} \gamma \quad -20 \quad 4 \\ \cdot \\ l=4,0m \end{array}} \right] + \frac{1}{k} \left[\begin{array}{c} 80 \quad 4 \\ \cdot \end{array} \right]$$

$$\delta_{VC} = \frac{1}{21.000} \left\{ \frac{4}{6} [320(2.8 + 4) + 80(8 + 2.4)] - \frac{4}{3} 20(8 + 4) + \frac{4}{3} 80.4 - \frac{4}{3} 20.4 \right\}$$

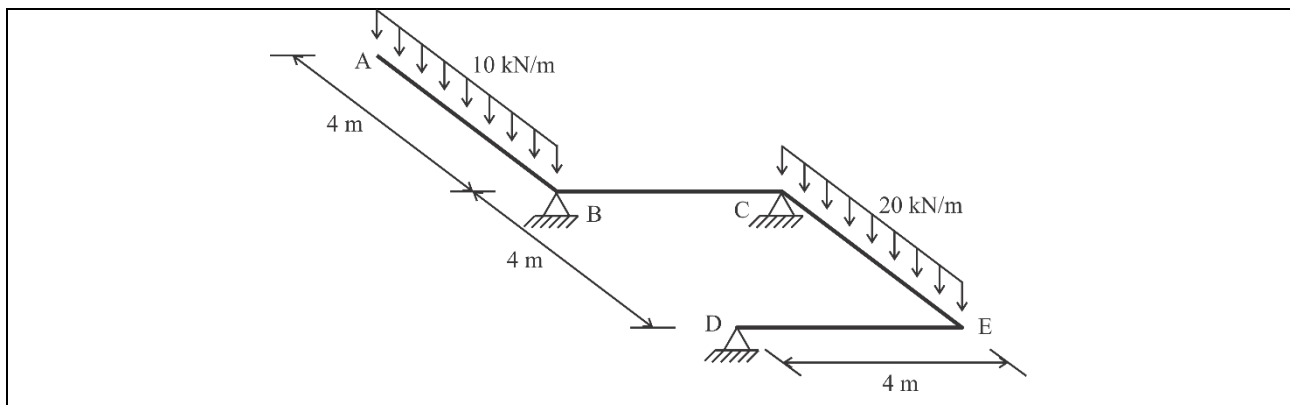
$$+ \frac{1}{5.000} [80.4]$$

$$\delta_{VC} = 0,30781 \text{ m} = 30,781 \text{ cm}$$

QUADRO 23. CÁLCULO DO DESLOCAMENTO VERTICAL DO PONTO C.

4.1.3 Segundo exemplo complementar

Neste exemplo, deseja-se encontrar o deslocamento vertical do ponto A em uma grelha isostática, considerado positivo para baixo, sendo dados $EI = 21.000 \text{ kN.m}^2$ e $GJ_t = 10.000 \text{ kN.m}^2$.



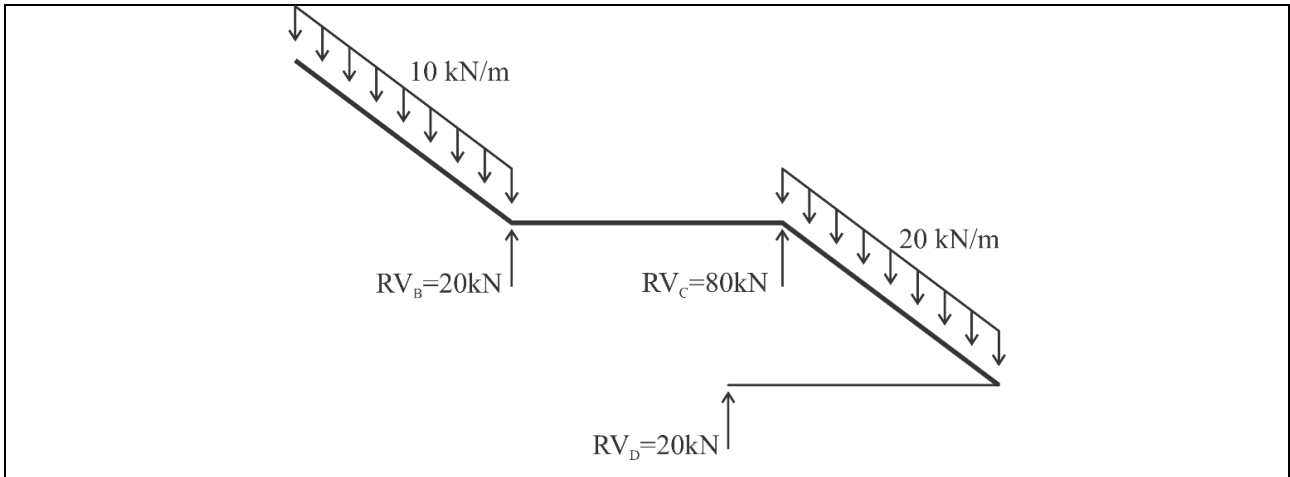
QUADRO 24. EXEMPLO COMPLEMENTAR – GRELHA ISOSTÁTICA.

Neste caso, deve-se observar que os esforços solicitantes associados à estrutura são esforço cortante $V^{(a)}$, momento fletor $M^{(a)}$ e momento torçor $T^{(a)}$, e devem ser empregados ao contabilizar o trabalho decorrente das ações internas na equação (4.1), na seguinte forma:

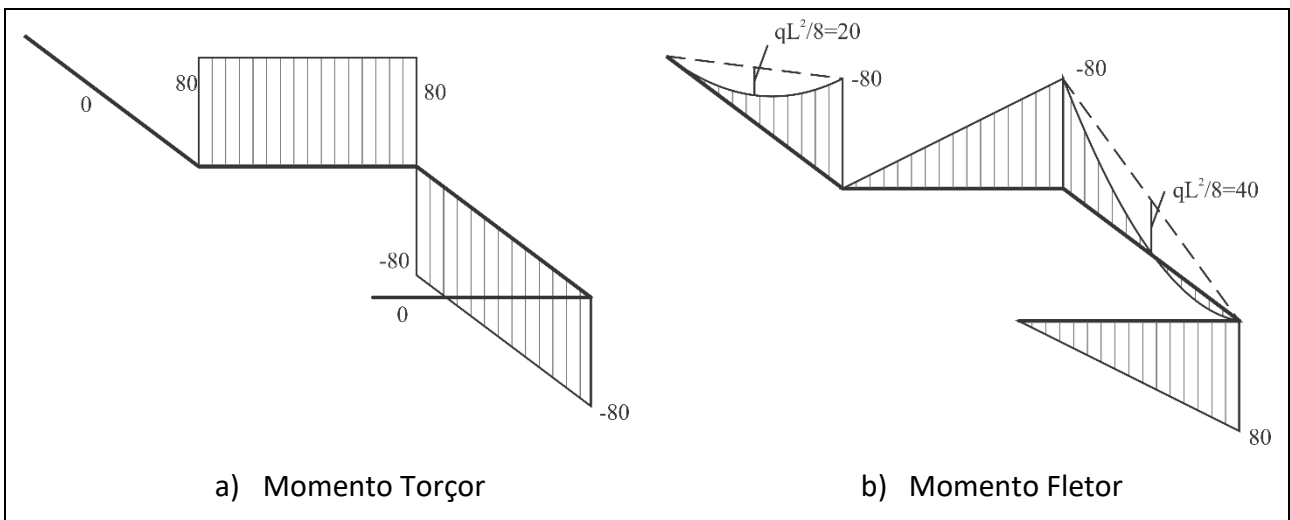
$$1. \delta^{(b)} = \int V^{(a)} dv^{(b)} + \int M^{(a)} d\phi^{(b)} + \int T^{(a)} d\varphi^{(b)} \quad (4.12)$$

em que $d\varphi^{(b)}$ é a variação angular entre seções, associada à distorção, determinada de acordo com a cinemática adotadas e com as causas físicas às quais encontram-se submetidos os elementos da estrutura no estado de deslocamentos (b). Novamente a contribuição do esforço cortante será desprezada, pois sua contribuição ao deslocamento é consideravelmente menor que as demais parcelas neste exemplo.

Os diagramas de esforços associados ao estado de deslocamentos são obtidos a partir do Diagrama de Corpo Livre:

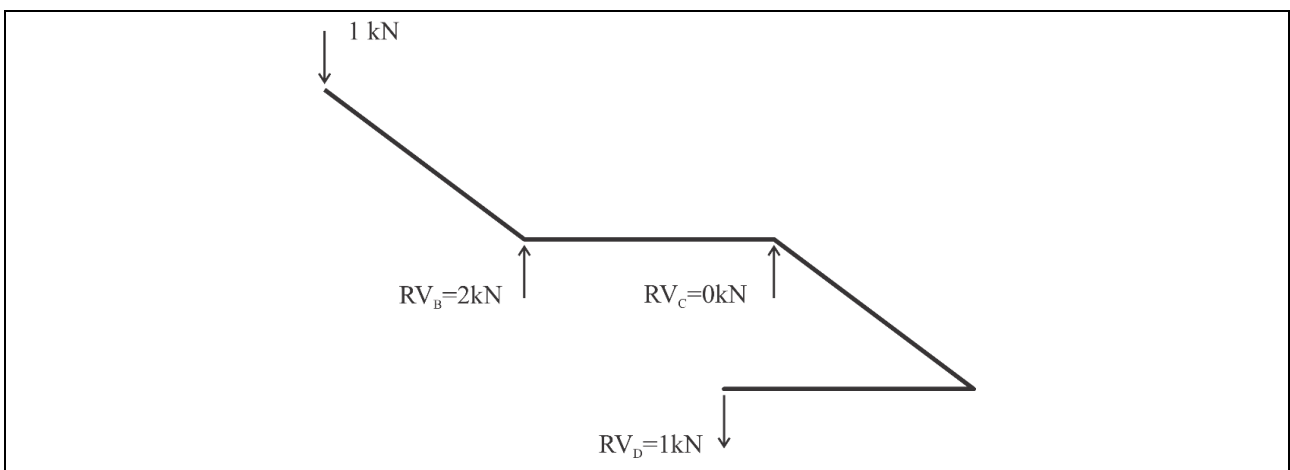


QUADRO 25. DIAGRAMA DE CORPO LIVRE – GRELHA ISOSTÁTICA.

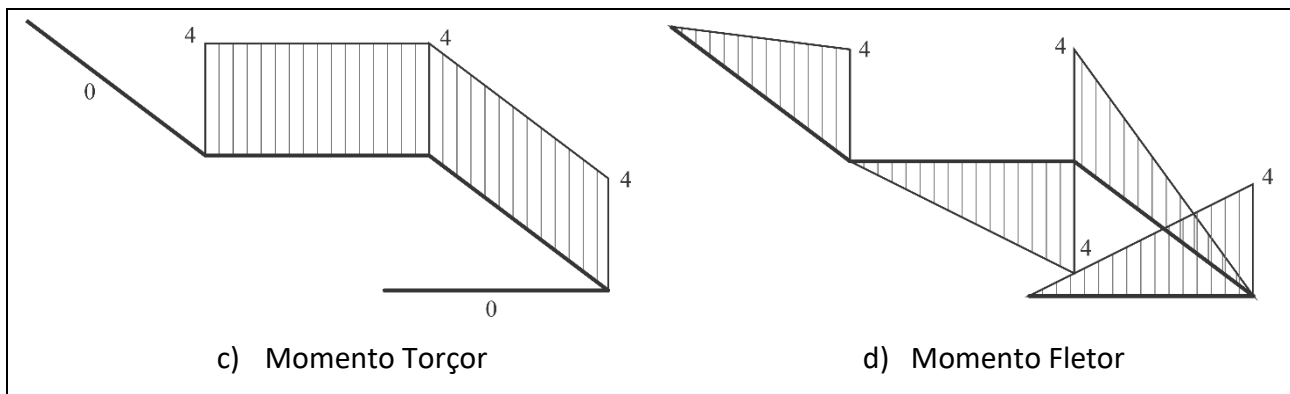


QUADRO 26. DIAGRAMAS PARA ESTADO DE DESLOCAMENTOS (B) – GRELHA ISOSTÁTICA.

O estado de forças, criado com o propósito de obter o deslocamento vertical em A, é dado pela adoção de uma força unitária de sentido vertical para baixo no ponto A, e os respectivos diagramas de esforços.



QUADRO 27. DIAGRAMA DE CORPO LIVRE – GRELHA ISOSTÁTICA.



QUADRO 28. DIAGRAMA PARA ESTADO DE FORÇAS (A) – GRELHA ISOSTÁTICA

Emprega-se novamente a tabela de integrais de produto de duas funções para obter o deslocamento vertical em A, a partir da contribuição do momento fletor e do momento torçor.

$$\begin{aligned}
 \delta_{VA} = \frac{1}{EI} & \left[\underbrace{\int_0^4 \left(\frac{4-x}{4} \right) \left(\frac{4-x}{4} \right) dx}_{l=4,0m} + \underbrace{\int_0^4 \left(\frac{4-x}{4} \right) \left(\frac{4-x}{4} \right) dx}_{l=4,0m} + \underbrace{\int_0^4 \left(\frac{4-x}{4} \right) \left(\frac{4-x}{4} \right) dx}_{l=4,0m} \right. \\
 & \left. + \underbrace{\int_0^4 \left(\frac{4-x}{4} \right) \left(\frac{4-x}{4} \right) dx}_{l=4,0m} + \underbrace{\int_0^4 \left(\frac{4-x}{4} \right) \left(\frac{4-x}{4} \right) dx}_{l=4,0m} + \underbrace{\int_0^4 \left(\frac{4-x}{4} \right) \left(\frac{4-x}{4} \right) dx}_{l=4,0m} \right] \\
 & + \frac{1}{GJ_t} \left[\underbrace{\int_0^4 \left(\frac{4-x}{4} \right) \left(\frac{4-x}{4} \right) dx}_{l=4,0m} + \underbrace{\int_0^4 \left(\frac{4-x}{4} \right) \left(\frac{4-x}{4} \right) dx}_{l=4,0m} \right] \\
 \delta_{VA} = \frac{1}{21.000} & \left\{ \frac{4}{3} 80 \cdot 4 - \frac{4}{3} 20 \cdot 4 - \frac{4}{3} 80 \cdot 4 + \frac{4}{3} 80 \cdot 4 - \frac{4}{3} 40 \cdot 4 - \frac{4}{3} 80 \cdot 4 \right\} \\
 & + \frac{1}{10.000} [-4 \cdot 80 \cdot 4 + 4 \cdot 80 \cdot 4] \\
 \delta_{VA} = \frac{-320}{21.000} & = -0,01524 \text{ m} = -1,524 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

QUADRO 29. CÁLCULO DO DESLOCAMENTO VERTICAL DO PONTO A.

4.2 Seleção de equação de equilíbrio em estruturas isostáticas

O Princípio dos Deslocamentos Virtuais pode ser aplicado para a determinação de esforços solicitantes internos e reações de apoio em estruturas isostáticas, recaindo na solução de uma única equação com uma incógnita. Para tanto, cria-se um estado de forças real removendo-se o vínculo associado à reação ou esforço que se deseja determinar, substituindo-se pela correspondente reação ou esforço. A estrutura isostática em equilíbrio se torna uma cadeia cinemática com um grau de deslocabilidade.

Sobre tal cadeia cinemática, impõem-se um estado de deslocamentos virtual, convenientemente criado e sem incluir deformações – deslocamento de corpo rígido –, constituído de um deslocamento unitário na direção da reação ou esforço que se deseja determinar. O deslocamento, porém, é imposto em sentido contrário ao arbitrado positivo, gerando

deslocamentos proporcionais a este no restante da estrutura, passíveis de serem determinados por relações trigonométricas. Tal processo é ilustrado na Figura 29.

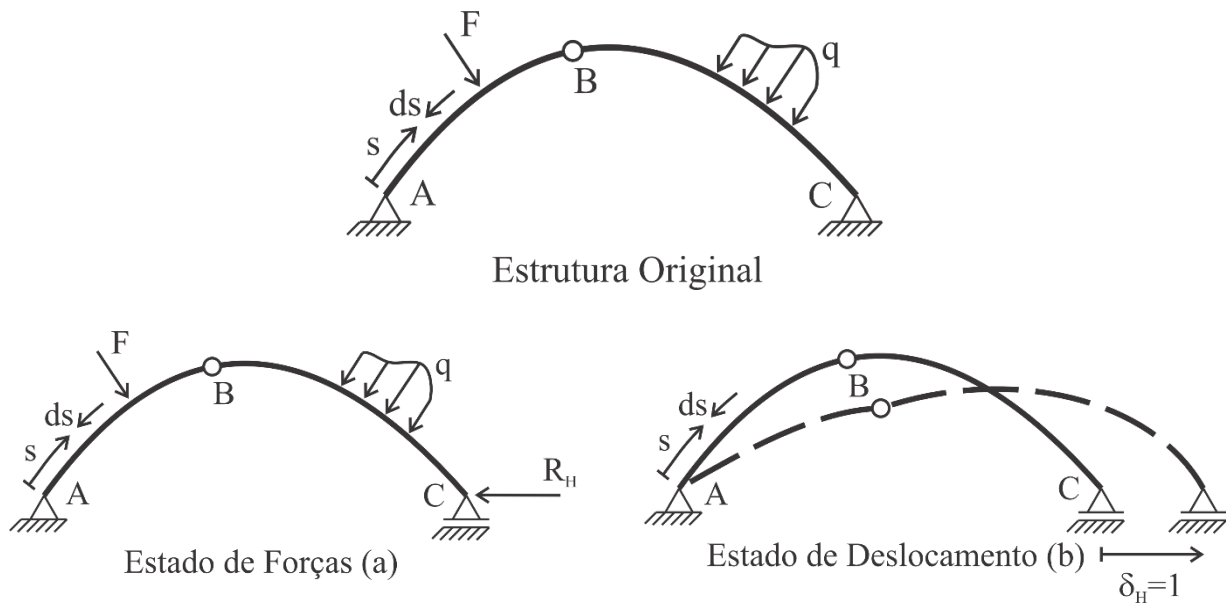


FIGURA 29. CÁLCULO DE REAÇÃO OU ESFORÇO EM ESTRUTURA ISOSTÁTICA.

Impondo-se o estado de deslocamentos virtual (b), de corpo rígido, ao estado de forças real (a), tem-se que:

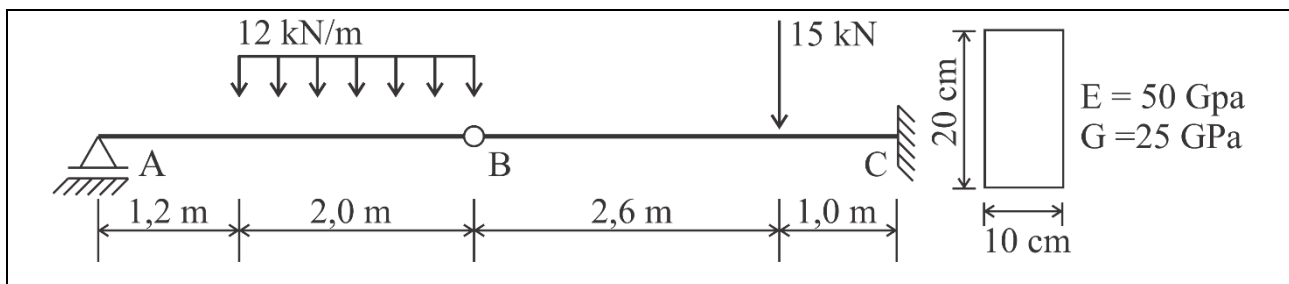
$$\sum T_{ext} = 0 \quad (4.13)$$

$$-1 \cdot R_H + \sum F_i^{(a)} \delta_i^{(b)} + \sum \int q_j^{(a)} \delta_j^{(b)} ds = 0 \quad (4.14)$$

Ou seja, a aplicação do Princípio dos Deslocamentos Virtuais para determinação de esforços e reações em estruturas isostáticas transforma um problema eminentemente estático em um problema geométrico de cálculo de deslocamentos infinitesimais sobre uma cadeia cinemática com um grau de deslocabilidade.

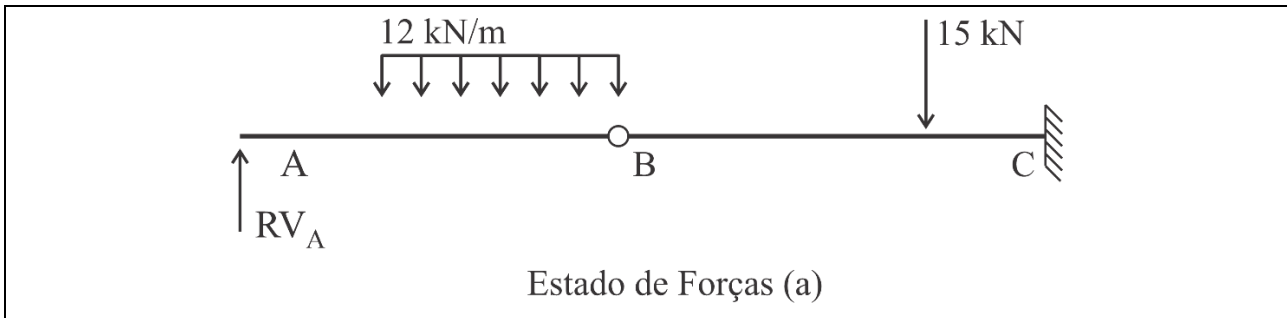
4.2.1 Exemplo de cálculo de reação

Considere a viga apresentada abaixo, em que se deseja conhecer a reação vertical em A.



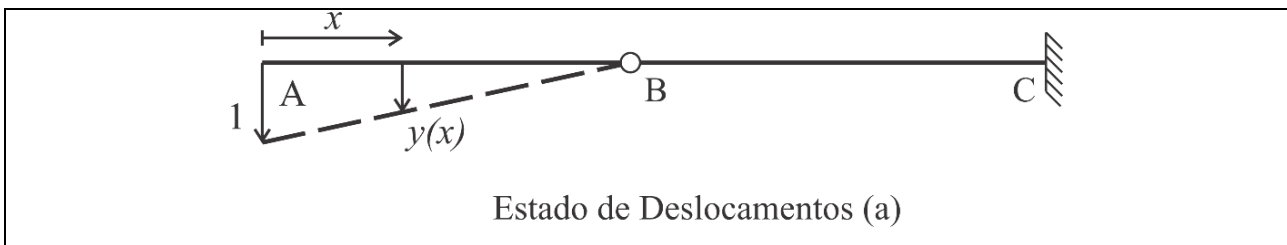
QUADRO 30. EXEMPLO DE CÁLCULO DE REAÇÃO DE APOIO POR PTV.

O estado de forças decorre da remoção do vínculo associado ao esforço que se deseja conhecer e a substituição por um esforço correspondente. A estrutura, antes isostática, se torna uma cadeia cinemática com um grau de liberdade, porém ainda em equilíbrio:



QUADRO 31. CADEIA CINEMÁTICA EM EQUILÍBRIO.

O estado de deslocamentos é dado pela imposição de um deslocamento unitário contrário ao sentido do esforço imposto:



QUADRO 32. CADEIA CINEMÁTICA COM DESLOCAMENTO IMPOSTO.

A reação é dada pela imposição do estado de deslocamentos arbitrado ao estado de forças, resultando em:

$$-1 \cdot R_{V_A} + \int_{1,2}^{3,2} 12 \frac{3,2 - x}{3,2} dx = 0 \rightarrow R_{V_A} = 7,50 \text{ kN}$$

QUADRO 33. CÁLCULO DA REAÇÃO DE APOIO POR PTV.

A coordenada x , neste caso, foi tomada a partir do ponto A. Não há nenhuma obrigatoriedade neste sentido.

4.3 Teorema de reciprocidade de Betti



O Teorema de Betti estabelece que, sendo dois estados quaisquer (1) e (2) sobre uma mesma estrutura, provocados por causas físicas distintas, em equilíbrio e cujos deslocamentos e deformações respeitam as condições de continuidade e vinculação da estrutura, o trabalho externo das forças externas de (1) sobre os deslocamentos de (2) é igual ao trabalho externo das forças externas de (2) sobre os deslocamentos de (1), ou seja:

$$T_{(1)(2)} = T_{(2)(1)} \quad (4.15)$$

Sejam, por exemplo, os estados (1) e (2) apresentados na Figura 30, atuantes sobre a mesma estrutura, submetidos por simplicidade apenas às ações indicadas. Considere ainda deslocamentos elementares definidos segundo a resistência dos materiais (lineares), conforme os esforços solicitantes.

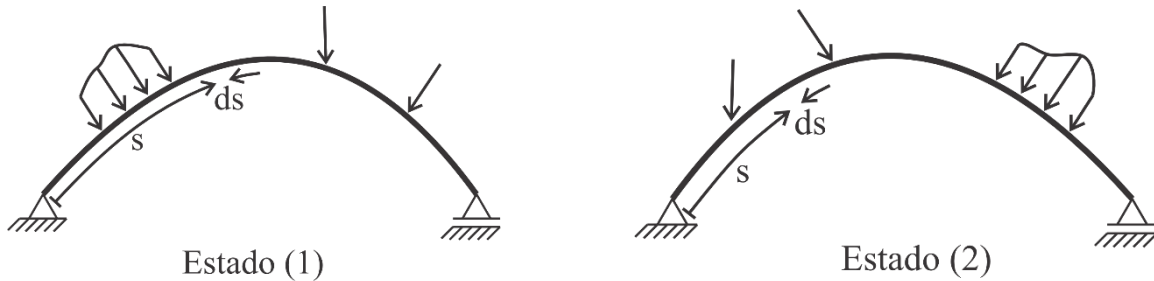


FIGURA 30. TEOREMA DE BETTI.

O trabalho externo das forças de (1) sobre os deslocamentos de (2) é dado por:

$$\begin{aligned} T_{(1)(2)} &= \int N^{(1)} du^{(2)} + \int V^{(1)} dv^{(2)} + \int M^{(1)} d\phi^{(2)} = \\ &= \int N^{(1)} \frac{N^{(2)}}{EA} ds + \int V^{(1)} \frac{V^{(2)}}{GA} \chi ds + \int M^{(1)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds \end{aligned} \quad (4.16)$$

Já o trabalho externo das forças de (2) sobre os deslocamentos de (1) é dado por:

$$\begin{aligned} T_{(2)(1)} &= \int N^{(2)} du^{(1)} + \int V^{(2)} dv^{(1)} + \int M^{(2)} d\phi^{(1)} = \\ &= \int \frac{N^{(2)} N^{(1)}}{EA} ds + \int \frac{V^{(2)} V^{(1)}}{GA} \chi ds + \int \frac{M^{(2)} M^{(1)}}{EI} ds \end{aligned} \quad (4.17)$$

Da igualdade dos termos a direita das equações (4.16) e (4.17) fica comprovada a hipótese do teorema, estabelecida na equação (4.15).

4.4 Teorema de Maxwell

De forma semelhante ao Teorema de Betti, o Teorema de Maxwell relaciona os deslocamentos em pontos distintos de dois estados (1) e (2) que atuam sobre a mesma estrutura, cada qual sujeito a apenas uma ação unitária – força ou momento.

Sejam, então, os estados (1) e (2) apresentados na Figura 31, atuantes sobre a mesma estrutura, submetidos à ação indicada.

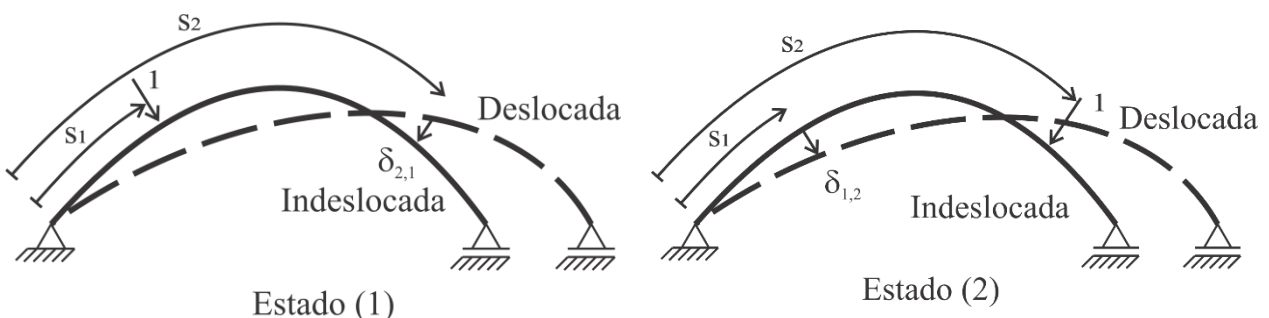


FIGURA 31. TEOREMA DE MAXWELL.



O Teorema de Maxwell estabelece que o deslocamento $\delta_{2,1}$ do estado (1) na direção e sentido da força unitária aplicada no estado (2) é igual ao deslocamento $\delta_{1,2}$ do estado (2) na direção e sentido da força unitária aplicada no estado (1):

$$T_{(1)(2)} = T_{(2)(1)} \rightarrow 1 \cdot \delta_{2,1} = 1 \cdot \delta_{1,2} \rightarrow \delta_{2,1} = \delta_{1,2} \quad (4.18)$$

Isto implica na simetria dos sistemas de equações de métodos de resolução de estruturas baseados no Princípio dos Trabalhos Virtuais.

4.5 Aplicações do PTV

O Princípio dos Trabalhos Virtuais tem outras aplicações além das inicialmente aqui apresentadas. Sua generalidade permite, por exemplo, obter Linhas de Influência de cargas móveis, obter equações adicionais para resolução de estruturas hiperestáticas – o que resulta nos Processos dos Esforços e dos Deslocamentos, além de servir de base para outras formulações mais complexas.

As Linhas de Influência, assim como os processos para resolução de estruturas hiperestáticas são temas centrais para a Estática das Estruturas. Estes serão abordados no próximo livro, porém não podem ser elucidados sem a base apresentada neste livro.

Como discente, é dever buscar exercícios que empreguem os conhecimentos básicos aqui apresentados para complementar seu estudo. Desta forma, a Estática das Estruturas se torna apenas a construção de processos e métodos a partir de desenvolvimentos anteriores.

Nos vemos no Livro 2.

Carrazedo & Paccola.

Capítulo 5 - Bibliografias Complementares

Neste capítulo você vai ver:

- Complemente seu estudo – Encontre referências a livros que podem te auxiliar nos estudos, com detalhes das formulações desenvolvidas.

ALMEIDA, Maria Cascão Ferreira. Estruturas isostáticas. Oficina de Textos, 2009.

MACHADO JUNIOR, Eloy Ferraz. Introdução à isostática. São Carlos: EESC-USP, 1999.

MARTHA, Luiz Fernando. Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos. Rio de Janeiro, ELSEVIER, 2010.

SÁLES, José Jairo; *et alli*. Sistemas estruturais: teoria e exemplos. São Carlos: SET/EESC/USP, 2005.

SUSSEKIND, José Carlos. Curso de análise estrutural, vol. I. Rio de Janeiro, GLOBO, 1974.

