

# Processamento de Sinais

Prof. Carlos Dias Maciel

Departamento de Eng. Elétrica e Computação

Escola de Engenharia de São Carlos

Universidade de São Paulo

---

revisão 1.0

DOI: 10.11606/9786586954180

EESC - USP

São Carlos

2022

## Universidade de São Paulo

Reitor –Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

Vice-Reitora –Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

## Escola de Engenharia de São Carlos

Diretor–Prof.Dr. Edson Cezar Wendland

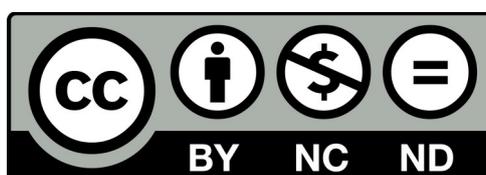
Vice-diretor –Prof.Dr. Denis Vinicius Coury

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP

M152p	Maciel, Carlos Dias
	Processamento de sinais / Carlos Dias Maciel. --
	São Carlos : EESC/USP, 2022.
	[284]p.
	ISBN 978-65-86954-18-0
	DOI 10.11606/9786586954180
	1. Processamento de sinais. 2. Sinais e sistemas.
	3.Processamento digital de sinais. I. Título.
	CDD 621.380433

Elaborado por Elena Luzia Palloni – CRB 8/4464

Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e autoria e respeitando a Licença *Creative Commons* indicada



## Dedicatória

Dedico esse texto a minha esposa **Ivonete** e meus filhos (Maísa e Luigi) pela paciência que sempre tiveram comigo.

Aos meus alunos dos últimos 30 anos, sendo 23 anos ensinando processamento de sinais, onde sempre tive em vista responder suas dúvidas sempre da melhor forma possível.

## Audiência

Esse texto visa aos alunos dos cursos de *Sinais e Sistemas*, 4o. semestre e *Processamento Digital de sinais*, 5o. semestre, dos cursos de eng. Elétrica ênfase em eletrônica e eng. Computação da **Escola de Engenharia de São Carlos**. Esses cursos têm a carga horária de 4 aulas/semanas durante 15 semanas na disciplina de Sinais e Sistemas . Já na disciplina de Processamento de Sinais tem carga horária de 2 aulas/semana durante 15 semanas. O conteúdo apresentado neste livro cobre toda ementa das duas disciplinas. Registrei no livro muitas justificativas que não faziam parte da dinâmica de sala de aula.

O material proposto se apresente na primeira versão e tem muitos pontos para serem melhorados. Todas as contribuições são bem-vindas. Os comentários devem ser encaminhados para o e-mail [cdmaciel@gmail.com](mailto:cdmaciel@gmail.com) com o campo de subject: livro PDS.

# Lista de Figuras

1.1	Exemplo de sinais: (a) ensaio de temperatura em uma micro-turbina (b) fotografia (c) Coleta de sinal de eletroencefalografia (d) exemplo de sinal de eletroencefalografia. . . . .	5
1.2	Exemplos de sistemas (a) o amplificador de áudio recebe um sinal elétrico e converte em ondas sonoras (b) o amortecedor do carro recebe as oscilações da estrada e reduz o deslocamento vertical do motorista/passageiros. . . . .	5
1.3	Operações com sinais onde $x(t)$ é azul e $y(t)$ é vermelho (a) escala (b) deslocamento (c) inversão temporal (d) compressão e expansão. . . . .	7
1.4	Gráfico com os passos intermediários para o Ex. 1. . . . .	8
1.5	Gráfico com os passos intermediários para o Ex. 2. . . . .	9
1.6	Exemplo de sinais (a) par e (b) impar. . . . .	10
1.7	Exemplo dos sinais (a) periódico (b) <i>quasi</i> -periódico gerado a partir da combinação de outros dois sinais periódicos (c) sinal de eletrocardiologia com comportamento quase-periódico. . . .	12
1.8	Tipos de sinais: contínuos (linha azul contínua), em tempo discreto (o vermelho) e digitais (x marrom). . . . .	13
1.9	Onda triangular para o Ex. 3. . . . .	14
1.10	Exponencial complexa. Em vermelho é a curva $e^{j\omega_0 t}$ , em azul é $\cos(\omega_0 t)$ , em verde é $j \sin(\omega_0 t)$ e em preto é $\cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$ . . . .	17

1.11	Funções elementares (a) cossenóide amortecida (b) função de grau (c) representação gráfica da função impulso. . . . .	19
1.12	Sinal pulso $p_\tau(t)$ com área unitária e a função impulso $\delta(t)$ . . .	20
1.13	Representação de um sinal (a) contínuo e outro (b) amostrado, observa-se que no caso contínuo a variável $t$ possui dimensional de tempo e a variável $n$ é adimensional pois representa <i>amostra</i> . 22	22
1.14	Circuito e diagrama de blocos do exemplo 8. . . . .	24
1.15	Modelo caixa preta associando $x(t)$ (ou $x[n]$ ) e $y(t)$ (ou $y[n]$ ) .	24
1.16	Exemplo mostrando como as classes hipoteticamente estariam distribuídas sobre o universo de todas as funções possíveis que associam $x(t) - x[n]$ e $y(t) - y[n]$ . . . . .	25
1.17	Exercício 10 . . . . .	33
1.18	Exercício 11 . . . . .	34
1.19	Exercício 12 . . . . .	34
1.20	Exercício 17 . . . . .	35
1.21	Execício 18 . . . . .	35
2.1	Circuito para o exemplo 23. . . . .	41
2.2	Gráfico dos sinais $x(\tau)$ e $h(t - \tau)$ . . . . .	42
2.3	Gráfico dos sinais $x(\tau)$ e $h(t - \tau)$ para dois valores, (a) $t = 0.5$ e (b) ( $t = 4$ ). . . . .	43
2.4	Resposta para o ex. 2.1 com $RC = 1$ . . . . .	43
2.5	Sistemas (a) série ( $h_1(t)$ e $h_2(t)$ ) e sistema equivalente $h(t)$ . . .	44
2.6	Interpretação para operação de convolução.(a) função pulso (b) aproximação de uma função qualquer com uma sucessão de pulsos (c) resposta do sistema ao pulso (d) resposta do sistema a sucessão de pulsos. . . . .	47
2.7	Resposta de um sistema LIT para uma entrada $x(t) = \delta(t)$ e resposta $y(t) = h(t)$ . . . . .	49

2.8	A entrada de um sistema LIT com uma função degrau tem com saída a função $s(t)$ e, sendo derivada obtém-se a função $h(t)$ . Ao se entrar com uma função quadrada com média zero, a função $s(t)$ fica alternando entre $s(t)$ e $-s(t)$ . Derivando essa resposta tem-se que a resposta impulsiva também vai alternar como $h(t)$ e $-h(t)$ . . . . .	50
2.9	Circuito para exemplo da determinação experimental da resposta ao impulso. . . . .	50
2.10	Resposta ao degrau para o circuito da Fig. 2.5. . . . .	51
2.11	Circuito de segunda ordem para a estimativa da resposta ao impulso. . . . .	51
2.12	Resposta ao impulso para o circuito da Fig.2.5. . . . .	52
2.13	Equipamento para a avaliação de peças cerâmicas sujeitas a fratura. . . . .	52
2.14	Resposta ao impulso da peça cerâmica apresentada da Fig. 2.13.	53
2.15	Figura do exercício 7. . . . .	54
2.16	Figura do exercício 9. . . . .	54
2.17	Figura do exercício 11. . . . .	55
2.18	Figura do exercício 16. . . . .	56
3.1	As figuras da esquerda são as respostas no tempo e as da direita o plano $\mathbb{C}$ com a região de convergência em cinza. A primeira linha corresponde a uma função lateral direita, a segunda linha uma função lateral esquerda e a última uma função bilateral.	60
3.2	Exemplos de diferentes computadores analógicos (a) Carburador automotivo (b) Computador analógico (c) Detalhe do computador analógico e sua interface (d) Régua de cálculo. . .	75
3.3	Elementos básicos de um diagrama em bloco. . . . .	80
3.4	Tipos de associações (a) paralelo (b) série. . . . .	81
3.5	Sistema com retro-alimentação . . . . .	81

3.6	Exercício 6 . . . . .	89
3.7	Exercício 9. . . . .	90
3.8	Exercício 10. . . . .	90
3.9	Exercício 11 . . . . .	90
3.10	Exercício 12. . . . .	91
3.11	Exercício 13. . . . .	91
4.1	Resposta no tempo e frequência para o Exemplo 45 e $a = 1$ . A escala do espectro de amplitude foi multiplicada por 50. . . . .	96
4.2	Resposta de frequência do pulso com duração $\tau_0 = 1$ . . . . .	97
4.3	Diagramas de polos e zeros no plano $\mathcal{S}$ . . . . .	101
4.4	Diagramas de polos e zeros no plano $\mathcal{S}$ e na reta $j\omega$ . . . . .	102
4.5	Diagrama de Bode para o módulo (superior esquerda e inferior) e fase (superior direita) do ex. 47. Na figura superior esquerda é apresentada as retas assintotas para os polos e zeros. . . . .	104
4.6	Diagrama de Bode para o módulo e fase para um polo complexo em função do $\zeta$ . . . . .	105
4.7	Diagramas de polos e zeros no ( $\mathcal{S}$ ) e na reta $j\omega$ . . . . .	106
4.8	Exemplos da função quadrada representada como somas de senos e cossenos. . . . .	113
4.9	Esquerda: Relação entre as funções $x(t)$ , $s(t)$ e $x(t)s(t)$ . Direita: amostras $x[n]$ a partir do sinal $x(t)s(t)$ . . . . .	120
4.10	Exemplo de conversão AD onde as amostras não guardam semelhança com o sinal original. . . . .	121
4.11	Representação espectral do sinal amostrado $x_s(t)$ . . . . .	122
4.12	Representação espectral do sinal amostrado $x_s(t)$ onde $\Omega_S - \Omega_{max} > \Omega_{max}$ ou $\Omega_S > 2\Omega_{max}$ . . . . .	123
4.13	Circuitos para o exercício 2. . . . .	133

4.14	Diagramas de Bode para o exercício 3 . . . . .	134
4.15	Figura do exercício 4g. . . . .	134
4.16	Figura do exercício 11 . . . . .	136
5.1	O sinal (a) Nightingale.wav e o trecho (linhas verticais em preto) usado para calcular a envoltória. (b) mostra o sinal normalizado (azul) e a sua envoltória (laranja). (c) Espectro de potência do sinal de envoltória e suas repetições em $k2.940Hz$ , $k$ inteiro. . . . .	141
5.2	Gráfico que apresenta a solução do problema 64 com $a = 0.95$ . O gráfico azul representa o módulo de $X(e^{j\omega})$ e a curva laranja é a sua fase. . . . .	143
5.3	Gráfico do ex. 65, em azul é o módulo da transformada de Fourier e laranja é a fase. Foram adotados $A = 1$ , $M = 5$ e no total foram simuladas 30 amostras e o eixo horizontal é $[0, 2\pi]$ . . . . .	144
5.4	Gráfico para o ex. 68. (a) apresenta o sinal de entrada $x[n]$ em azul e a saída $y[n]$ em vermelho. (b) apresenta a resposta de módulo (azul) e fase (vermelha) para $H(e^{j\omega})$ . . . . .	148
5.5	FFT de $x[n]$ com $N = 8$ e, $G[k]$ e $H[k]$ com tamanho 4. . . . .	153
5.6	Último nível do algoritmo FFT. . . . .	154
5.7	Diagrama completo com todos os sub-blocos do algoritmo FFT. . . . .	155
7.1	Respostas de frequência típica para os diferentes tipos de filtros: passa-baixa, passa-alta, passa-banda e rejeita-banda. . . . .	184
7.2	Resposta de frequência de um circuito RC Exemplo. . . . .	186
7.3	Representa os diferentes parâmetros que compõem a especificação de uma filtro passa-baixa. . . . .	186
7.4	Ex. 87 onde se mostra as teclas de discagem e as frequências que a representam. . . . .	187
7.5	Resposta de frequência típica para a família de filtros clássicos. . . . .	188
7.6	Função de aproximação Butterworth para diferentes valores de $n$ . . . . .	190

7.7	Resposta do filtro Butterworth para $n$ variando de 1 a 4. Observa-se que a atenuação em $\omega_n = 1$ tem atenuação de $\frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (linear) e $-3\text{dB}$ na escala logarítmica. . . . .	192
7.8	Posição dos polos para um filtro Butterworth de 6a. ordem. . . . .	194
7.9	Funções de aproximação de diferentes ordens para a família Chebyshev tipo 1. . . . .	195
7.10	Funções de ganho de diferentes ordens para a família Chebyshev. Observa-se que a atenuação em $\omega_n = 1$ tem atenuação de $\frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (linear) e $-3\text{dB}$ na escala logarítmica. . . . .	196
7.11	Localização dos polos para um filtro Chebyshev de ordem 6. . . . .	197
7.12	Variações ne $n$ e $\epsilon$ na resposta de ganho dos filtros Chebyshev . . . . .	198
7.13	Respostas do filtro Chebyshev tipo 2 para $n = 2, 3, 4$ . . . . .	199
7.14	Resposta do ganho do filtro para o ex. 89 . . . . .	201
7.15	Comparação entre o ganho de um filtro Butterworth e Chebyshev de mesma ordem. . . . .	202
7.16	Desnormalização do passa-baixa para um novo passa-baixa e para o passa-alta. . . . .	203
7.17	Desnormalização do filtro passa-baixa em um filtro passa-banda	204
7.18	Transformação do filtro passa-baixa em rejeita-banda. . . . .	204
7.19	Gráficos de $ H(z) $ e $h[n]$ do Exemplo 90. . . . .	206
7.20	Diagrama em bloco do Exemplo 90. . . . .	206
7.21	Mapeamento do plano S no plano Z para o caso da aproximação das derivadas. . . . .	208
7.22	Resposta de frequência do Exemplo 91. A esquerda é a resposta analógica, no centro é a versão digital com $T = 0.1$ e a direita com $T = 0.5$ . . . . .	209

7.23	Resposta de frequência do Exemplo 92. A esquerda é a resposta analógica, no centro é a versão digital com $T = 0.1$ e a direita com $T = 0.5$ . . . . .	210
7.24	Gráficos do mapeamento do plano S no plano Z para o caso da transformação bilinear. . . . .	212
7.25	Relação entre $\Omega$ e $\omega$ . . . . .	213
7.26	Resposta de frequência do Exemplo 90. . . . .	214
7.27	Exemplo de $h[n]$ onde possuem diferentes tipos de simetria. . . . .	216
7.28	Efeito do janelamento. (a) Convolução das funções $H_d(e^{j\omega})$ e $W(e^{j\omega})$ (b) Resposta final da resposta de frequência $H(e^{j\omega})$ . . . . .	217
7.29	Resposta da janela <b>retangular</b> com $N = 51$ e o seu espectro de amplitude a direita. . . . .	218
7.30	Resposta da janela <b>Bartlett</b> com $N = 51$ e o seu espectro de amplitude a direita. . . . .	219
7.31	Resposta da janela <b>Hamming</b> com $N = 51$ e o seu espectro de amplitude a direita. . . . .	219
7.32	Resposta da janela <b>Hann</b> com $N = 51$ e o seu espectro de amplitude a direita. . . . .	220
7.33	Resposta da janela <b>Cosseno</b> com $N = 51$ e o seu espectro de amplitude a direita. . . . .	221
7.34	Resposta da janela <b>Blackman</b> com $N = 51$ e o seu espectro de amplitude a direita. . . . .	222
7.35	Resposta para o exercício 94 (a) $M = 51$ (b) $M = 19$ . . . . .	223
7.36	Comparação de diferentes janela. . . . .	223
7.37	Figura referente ao exercício 36. . . . .	229
7.38	Figura referente ao exercício 43. . . . .	230



# Lista de Tabelas

3.1	Alguns pares de transformada de Laplace . . . . .	70
4.1	Regras para traçar o Diagrama de Bode . . . . .	108
7.1	Parâmetros de comparação entre algumas janelas. . . . .	224



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Conceito de sinais e sistemas . . . . .	3
1.2	Operações com sinais . . . . .	4
1.3	Classificação dos sinais . . . . .	10
1.4	Energia e potência média . . . . .	13
1.5	Sinais fundamentais . . . . .	16
1.6	Sinais em tempo discreto . . . . .	22
1.7	Sistemas . . . . .	23
1.8	Sistemas Discretos . . . . .	29
1.9	Exercícios Propostos . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo</b>	<b>39</b>
2.1	A operação de convolução . . . . .	40
2.1.1	Tempo discreto . . . . .	43
2.2	Propriedades da operação de convolução . . . . .	44
2.3	Interpretação e cálculo da convolução . . . . .	47
2.4	Propriedades sistemas LTI . . . . .	48
2.5	Estimativa da resposta ao impulso . . . . .	49

2.6	Exercícios propostos . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Transformada de Laplace</b>	<b>57</b>
3.1	Região de convergência (ROC) . . . . .	58
3.2	Propriedades da ROC . . . . .	60
3.3	Propriedades da transformada de Laplace . . . . .	62
3.4	Transformada de Laplace inversa . . . . .	67
3.5	Transformada de Laplace de sinais típicos . . . . .	67
3.6	Representação de sistemas LTI pela transformada de Laplace .	69
3.7	Sistemas LTI descritos por EDO . . . . .	73
3.8	Diagramas de bloco . . . . .	80
3.9	Transformada Unilateral de Laplace . . . . .	83
3.10	Resolvendo EDO com o uso da transformada Unilateral Laplace	85
3.11	Exercícios propostos . . . . .	87
<b>4</b>	<b>A Transformada de Fourier: tempo contínuo</b>	<b>93</b>
4.1	Definição e interpretação . . . . .	94
4.2	Propriedades . . . . .	98
4.2.1	Aplicações . . . . .	99
4.3	O Diagrama de Bode . . . . .	99
4.3.1	Equacionamento . . . . .	100
4.4	Transformada de Fourier de Funções Especiais . . . . .	107
4.5	A série de Fourier . . . . .	113
4.5.1	Formulação . . . . .	113
4.5.2	Propriedades . . . . .	115

4.5.3	Interpretação: relação entre Série de Fourier e Transformada de Fourier . . . . .	116
4.5.4	O limite da série de Fourier . . . . .	117
4.6	Atraso de fase e de grupo . . . . .	118
4.7	O Teorema da Amostragem . . . . .	119
4.8	Função <i>Trem de Impulso</i> . . . . .	125
4.9	Exercícios propostos . . . . .	131
<b>5</b>	<b>A Transformada de Fourier: tempo discreto</b>	<b>139</b>
5.1	Conceitos iniciais - a DTFT . . . . .	139
5.2	Densidade espectral de energia ou potência . . . . .	143
5.3	Propriedades da Transformada de Fourier Discreta . . . . .	145
5.3.1	Propriedades de simetria . . . . .	145
5.3.2	Propriedades e teoremas gerais . . . . .	146
5.4	A Transformada Discreta de Fourier - TDF . . . . .	147
5.4.1	Propriedades . . . . .	150
5.4.2	Convolução periódica . . . . .	150
5.5	O algoritmo FFT - <i>Fast Fourier Transform</i> . . . . .	152
5.6	Exercícios . . . . .	152
<b>6</b>	<b>A Transformada Z</b>	<b>157</b>
6.1	Função de transferência de sistemas LTI . . . . .	159
6.2	Mapeamento entre o plano- $\mathcal{S}$ e o plano- $\mathcal{Z}$ . . . . .	160
6.3	Região de Convergência . . . . .	160
6.4	Zeros e Poles da Transformada Z . . . . .	162

6.5	Propriedades da ROC . . . . .	163
6.6	Propriedades da Transformada Z . . . . .	166
6.7	Transformada Z de sinais típicos . . . . .	170
6.8	Análise de sistemas LTI com o uso da transformada Z . . . . .	171
6.9	Sistemas LTI descritos por equações de recorrência . . . . .	173
6.10	Determinação da Transformada de Fourier a partir do diagrama de Polos-Zeros . . . . .	175
6.10.1	Sistemas de primeira ordem . . . . .	175
6.10.2	Sistemas de segunda ordem . . . . .	176
6.11	Diagramas de Bloco . . . . .	178
<b>7</b>	<b>Noções de Filtros:</b>	
	<b>tempo contínuo e discreto</b>	<b>183</b>
7.1	Os filtros em tempo contínuo . . . . .	187
7.2	Desenvolvimento teórico . . . . .	189
7.3	Transformação de Frequência . . . . .	202
7.4	Os filtros em tempo discreto . . . . .	205
7.4.1	Arquitetura geral e implementação . . . . .	205
7.4.2	Os filtros IIR . . . . .	205
7.5	Os filtros FIR . . . . .	214
7.6	Exercícios propostos . . . . .	224

# Prefácio

A principal motivação para reunir esse material foram as constantes discussões com os colegas e alunos quanto às possíveis técnicas para analisar os sinais resultantes de experimentos. A ideia inicial deste trabalho era fazer um livro separado em duas partes. A primeira com toda a fundamentação teórica necessária para se entender as técnicas mais atuais em processamento de sinais. A segunda parte é sobre modelagem probabilística de sinais e sistemas. O tempo gasto para fazer tudo ficou muito acima do esperado e achei melhor separar o material em dois volumes diferentes onde o primeiro é esse. O segundo está em preparação mas na forma que está já pode ser usado pelos alunos de graduação. Esse volume visa ao estudo das principais características de sinais e sistemas tanto em tempo contínuo quanto discreto, com o foco de ser um curso de graduação em eng. elétrica ou computação.

Esse material foi resultado dos últimos vinte e três anos ministrando aulas de *Sinais e Sistemas* e *Processamento Digital de Sinais* para a graduação e *Processamento Estístico de Sinais* na pós-graduação da **Universidade de São Paulo - EESC**. Nesse período acompanhei o desenvolvimento dos alunos, quais as suas dificuldades e como poderia melhorar a apresentação das ementas. Também foi fortemente considerado as técnicas de processamento de sinais que usamos em diferentes artigos nos últimos anos.

Esse material foi feito para os nossos alunos do curso de Engenharia Eletrônica e Computação. Esse foi o principal motivo de ter sido feito em português. Não se pretende, até o momento, um público maior.

Neste ponto gostaria de agradecer principalmente os professores **José Carlos Pereira** e **Marcelo Basílio Joaquim** que me receberam no seu grupo de pesquisa em 2003 e muito me ajudaram. Também gostaria de agradecer aos alunos de pós-graduação e peço desculpas se esqueci de alguém. Tão importante quanto foram os muitos alunos de graduação, as suas palavras de apoio e suas críticas.

Esse texto ainda tem muito trabalho para ser feito, alguns gráficos precisam ser revistos e o texto também. Em linhas gerais o material está completo para ser usado pelos alunos de graduação e, a medida que sejam enviadas as críticas e sugestões, farei a sua revisão.

São Carlos, novembro de 2022

Carlos Maciel

# Capítulo 1

## Introdução

O termo *Sinais e Sistemas* é usado de forma genérica para descrever os sinais que nos cercam (p.ex voz, rádio & televisão, telefonia, etc) e as diferentes formas de analisá-los. Essa abordagem esta cada vez mais difundida dentro da engenharia e os conceitos introduzidos nesta disciplina serão utilizados em circuitos elétricos, telecomunicações, controle e muitas outras.

### 1.1 Conceito de sinais e sistemas

O conceito de *senal* depende muito do contexto de uso. No nosso caso é dentro do contexto de engenharia, em especial elétrica e computação. Sinais<sup>1</sup> podem ser descritos por:

1. um "objeto" usado para transmitir ou transmitir informações além do alcance da voz humana;
2. o som ou imagem transmitida em telegrafia, telefonia, rádio, radar, ou televisão;
3. uma quantidade detectável ou física (como a tensão, corrente, a força do campo magnético, etc), através da qual as mensagens ou informação pode ser transmitida;

---

<sup>1</sup><http://www.merriam-webster.com/dictionary/signal>,  
[https://en.wikibooks.org/wiki/Signals\\_and\\_Systems/Definition\\_of\\_Signals\\_and\\_Systems](https://en.wikibooks.org/wiki/Signals_and_Systems/Definition_of_Signals_and_Systems)

4. Um sinal é uma função de variáveis independentes que transportam as informações;
5. Um sinal é uma fonte de informação, geralmente uma quantidade física que varia em função do tempo, espaço, temperatura como qualquer variável independente;
6. Um sinal é uma grandeza física que varia com o tempo, espaço ou qualquer outra variável independente na qual uma informação pode ser transmitida.

**Sinal:** é uma função (matemática) que contém informação sobre o estado ou comportamento de um "sistema", natural ou não.

Exemplo de sinal: sinal de circuito elétrico pode representar uma tensão variável no tempo medido através de um resistor, fala, fotografia.

Um sinal, Fig. 1.1, pode ser representado como uma função  $x(t)$  de uma variável independente  $t$ , que geralmente é o tempo. Diferentes sinais possuem diferentes variáveis livre, p.ex. imagem onde se tem duas variáveis livre que representam posição, imagem(x,y) onde, neste caso, x representa as linhas e y as colunas da image. Sinais podem ser multidimensionais, p.ex. filme que possui uma sucessão de imagens no tempo, filme(x,y,t).

**Sistemas:** é qualquer conjunto físico (p.ex. *hardware*) ou não (*software*) de componentes que recebe um sinal e produz outro sinal, a resposta, Fig. 1.2. Em termos de engenharia, a entrada é geralmente algum sinal  $x(t)$ , e a saída é outro sinal  $y(t)$ . As dimensionais dos sinais são as mais variadas possíveis, p.ex. tensão, corrente, força mecânica, temperatura, etc. Um sistema pode operar com sinais com uma dimensional e responder com outra. P.ex. deslocamento do *pedal do acelerador* resulta na variação de velocidade do carro .

## 1.2 Operações com sinais

A ideia dessas operações é utilizar a abordagem matemática de *função composta*,  $t \rightarrow f(t) \rightarrow g(f(t))$ . Dessa forma essas operações podem ser combinadas em novas funções ou realizar operações mais complexas.

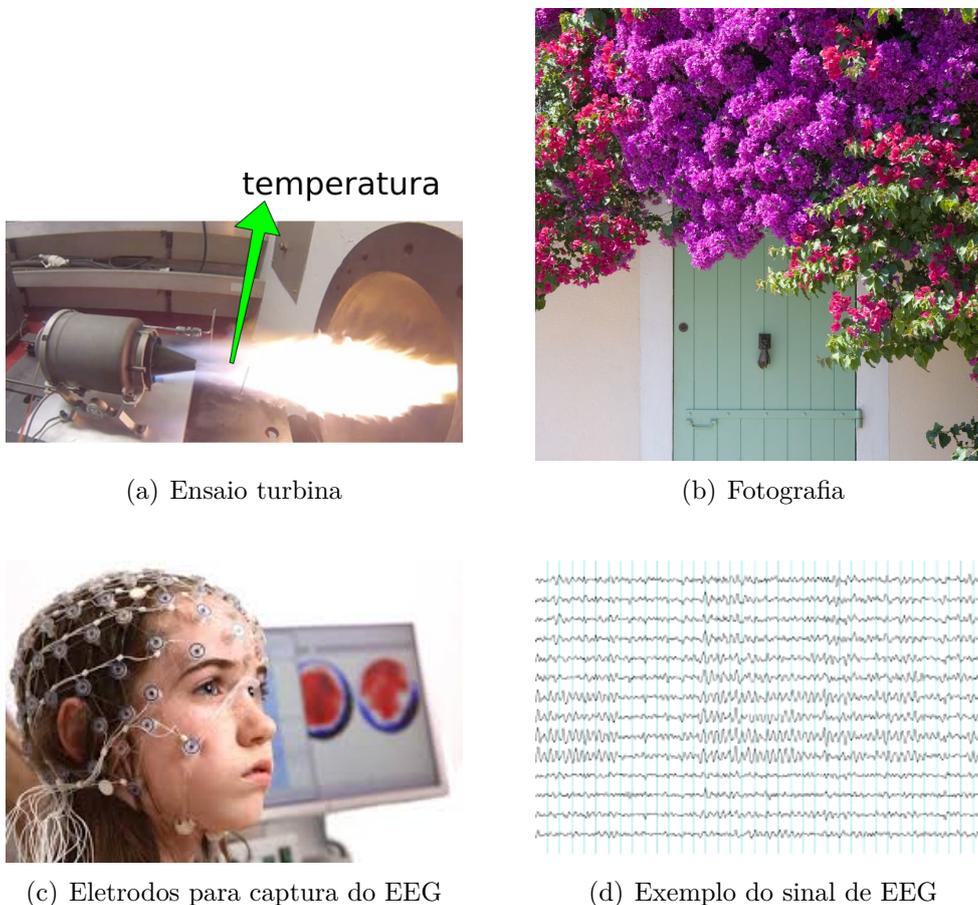


Figura 1.1: Exemplo de sinais: (a) ensaio de temperatura em uma micro-turbina (b) fotografia (c) Coleta de sinal de eletroencefalografia (d) exemplo de sinal de eletroencefalografia.

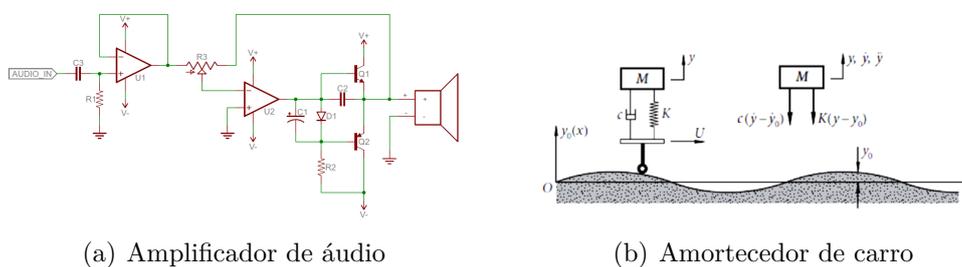


Figura 1.2: Exemplos de sistemas (a) o amplificador de áudio recebe um sinal elétrico e converte em ondas sonoras (b) o amortecedor do carro recebe as oscilações da estrada e reduz o deslocamento vertical do motorista/passageiros.

## 1. Escala da amplitude

$$y(t) = ax(t) \quad (1.1)$$

onde:  $a > 1$  representa um aumento no sinal e  $0 < a < 1$  representa uma redução no sinal

## 2. Deslocamento no tempo

$$y(t) = x(t - t_0) \quad (1.2)$$

onde:

$t_0 > 0$  representa um atraso no tempo

$t_0 < 0$  representa um avanço no tempo

São sinais idênticos quanto à forma mas deslocados no tempo.

## 3. Reversão do tempo

$$y(t) = x(-t). \quad (1.3)$$

É obtido refletindo  $x(t)$  em torno do eixo vertical.

## 4. Compressão e expansão

$$y(t) = x(at), \quad a > 0 \quad (1.4)$$

É obtido fazendo-se uma mudança linear na variável independente. se  $a > 1$  - o sinal é comprimido se  $a < 1$  - o sinal é expandido.

Na Fig. 1.3 tem-se as diferentes operações listadas operado sobre o sinal  $x(t) = e^{-0,2t} \sin(t)u(t)$  em azul. Em vermelho tem-se a resposta  $y(t)$  para as operações escala ( $y(t) = 2x(t)$ ), atraso ( $y(t) = x(t - 2)$ ), inversão temporal ( $y(t) = x(-t)$ ), compressão ( $y(t) = x(2t)$ ).

**Exemplo 1 :** Dada a função  $x(t)$  dada pela Fig. 1.4, encontre

$$y(t) = \frac{1}{2}x(3t + 1)$$

*solução:*

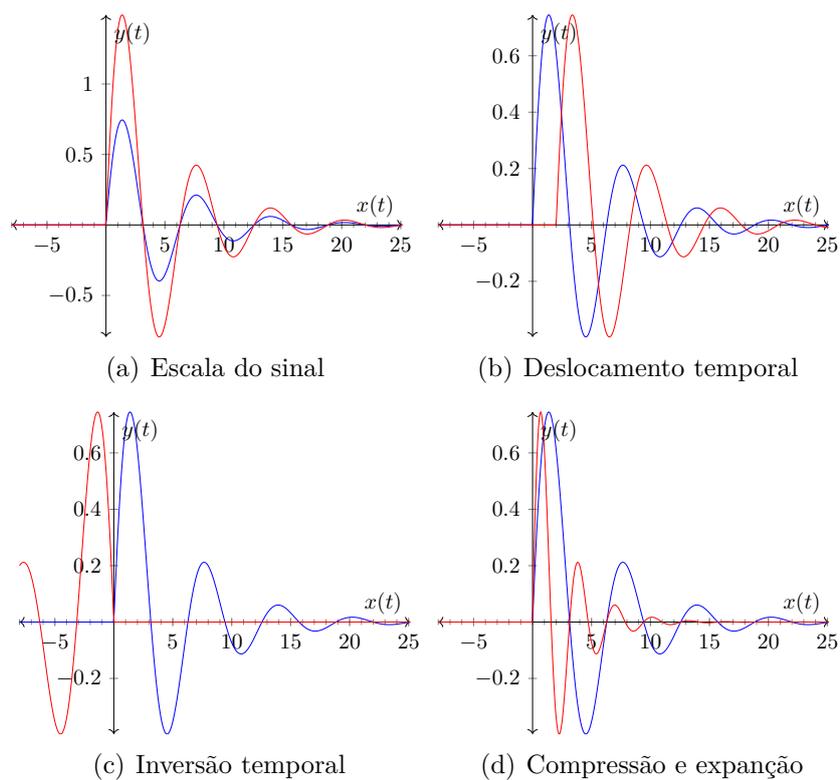


Figura 1.3: Operações com sinais onde  $x(t)$  é azul e  $y(t)$  é vermelho (a) escala (b) deslocamento (c) inversão temporal (d) compressão e expansão.

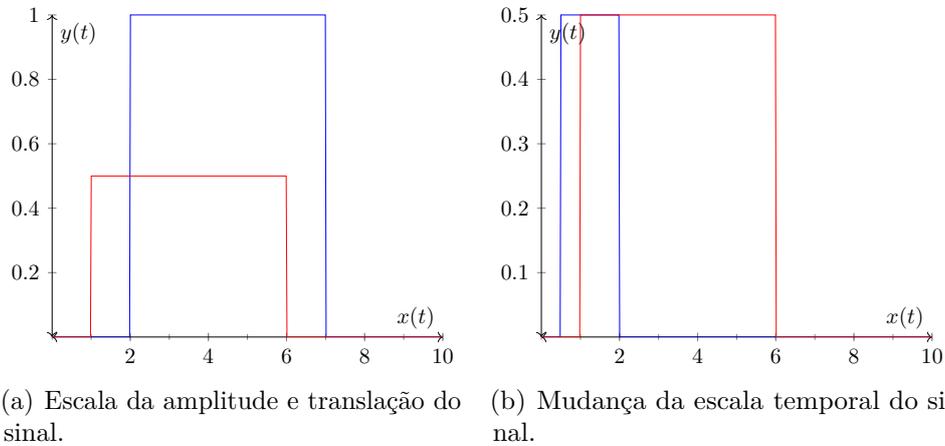


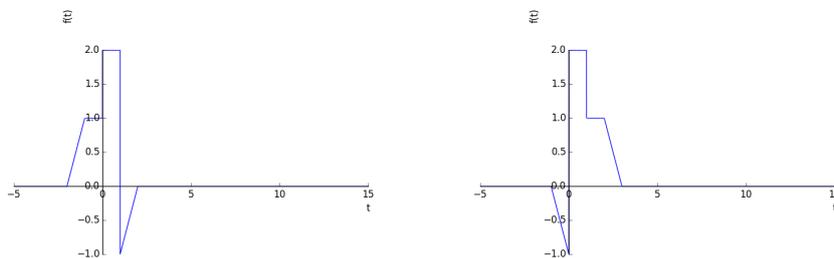
Figura 1.4: Gráfico com os passos intermediários para o Ex. 1.

Na Fig. 1.4(a) foi feita a operação de escala para meio e em seguida o deslocamento de um. Na etapa posterior (b) houve a compressão da escala temporal.

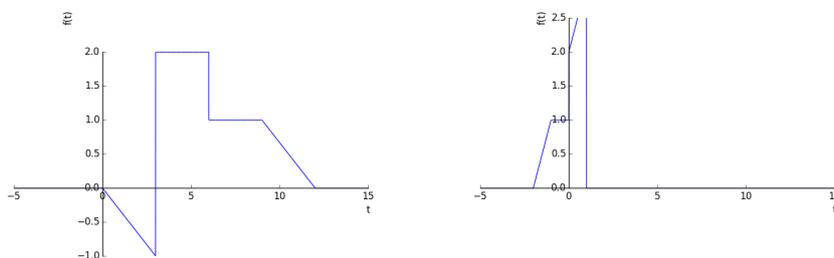
**Exemplo 2 :** Um sinal contínuo  $x(t)$  é apresentado na Fig. 1.5. Determine

1.  $x(1 - t)$
2.  $x(2 - t)/3$
3.  $x(t) + x(2 - t)]u(t)$

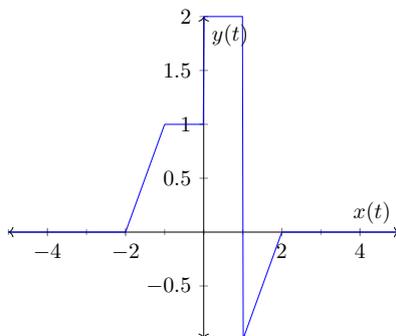
*solução:*



(a) Escala da amplitude e translação do. (b) Mudança da escala temporal do sinal.



(c) Mudança da escala temporal do si- (d) Mudança da escala temporal do si-  
nal. nal.



(e) Mudança da escala temporal do sinal.

Figura 1.5: Gráfico com os passos intermediários para o Ex. 2.

### 1.3 Classificação dos sinais

#### 1. Simetria:

Um sinal é chamado de *par* se ele satisfizer a condição:

$$x(t) = x(-t), \quad (1.5)$$

o sinal  $x(t)$  é igual a reflexão em torno do eixo-y.

Um sinal é chamado de *ímpar* se satisfizer a condição:

$$x(t) = -x(-t) \quad (1.6)$$

o sinal é igual a sua reflexão em torno da origem.

Um sinal qualquer pode ser decomposto na sua parte par,

$$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)), \quad (1.7)$$

e na sua parte ímpar,

$$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)), \quad (1.8)$$

de tal forma que:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t). \quad (1.9)$$

Na Fig. 1.6 é apresentado um exemplo de sinal par e outro de sinal ímpar.

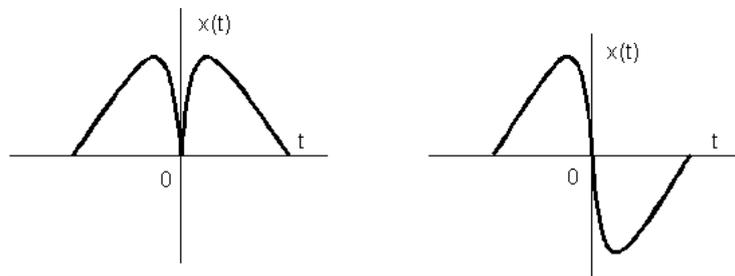


Figura 1.6: Exemplo de sinais (a) par e (b) ímpar.

#### 2. Periodicidade

Um sinal é chamado de *periódico* se existir  $T > 0 \in \mathbb{R}$  tal que:

$$x(t) = x(t + T), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Essa condição será válida para:  $\pm T, \pm 2T, \pm 3T, \dots$ . O menor valor desse deslocamento,  $T_0$ , é conhecido como período fundamental. A frequência fundamental,  $f_0 = \frac{1}{T_0}$  corresponde a ciclos por segundo ou hertz [Hz].

Para  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$  radianos por segundo [rad/s], pois tem-se um ciclo completo em  $2\pi$  radianos.

Um sinal *quase-periódico* (do inglês *almost*) é um sinal cuja condição é  $x(t) \approx x(t + T)$  tanto aproximando  $T$  por um valor médio (neste caso diz-se que o sinal tem *jitter*) quanto aproximando o próprio sinal  $x(t)$ . Esses sinais são comuns em ecos de sinais de ultrassom propagando em um meio regular (como o fígado ou músculo) ou o sinal de eletrocardiograma.

Um sinal *quasi-periódico* (do inglês *quasi*) é um sinal obtido pela composição com outros sinais periódicos. A soma de dois sinais periódicos só resulta em um terceiro sinal periódico se a razão entre os períodos pertencer ao conjunto dos números Racionais,  $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$ .

Na Fig. 1.3 apresenta alguns exemplos de sinais com comportamento periódico ou quasi (quase)-periódicos. Os sinais *quase-periódicos* não são periódicos mas apenas possuem uma semelhança com sinais periódicos. Os sinais *quasi-periódicos* são periódicos.

---

<sup>2</sup>Considerando que  $x_1(t) = x_1(t + T_1)$ ,  $x_2(t) = x_2(t + T_2)$  e que  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  para que  $x(t)$  seja periódica os sinais devem obedecer a seguinte condição:  $MT_1 = NT_2 \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{N}{M} \in \mathbb{Q}$  ja que  $M$  e  $N$  são inteiros.

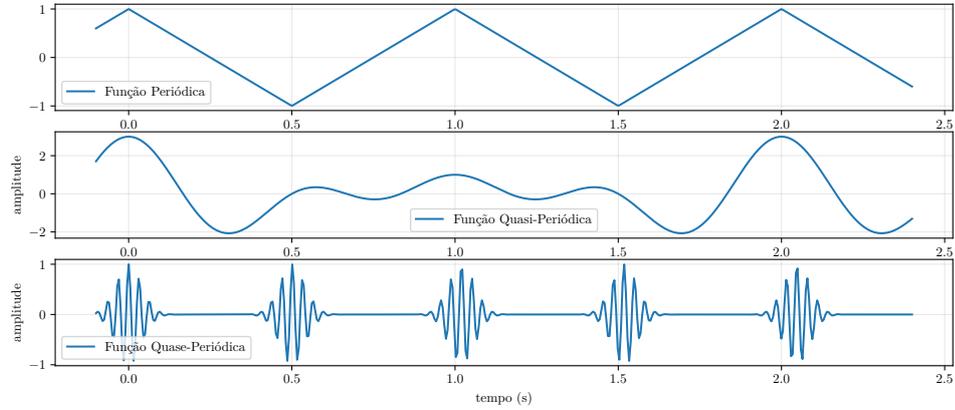


Figura 1.7: Exemplo dos sinais (a) periódico (b) *quasi*-periódico gerado a partir da combinação de outros dois sinais periódicos (c) sinal de eletrocardiologia com comportamento quase-periódico.

### 3. Duração

Um sinal é dito de *duração finita* se  $x(t) = 0$  para  $t > t_M$  e  $t < t_N$ . Caso contrário, o sinal será dito infinito.

### 4. Tempo-discreto ou contínuo

Se a variável livre  $t$  é contínua<sup>3</sup>.  $x(t)$  é um sinal de tempo contínuo, e, se  $t$  é uma variável discreta, definidos apenas para valores discretos de  $t$ , então  $x(t)$  é um sinal em tempo discreto. Um sinal de tempo discreto é muitas vezes identificada como uma sequência de números, indicado por  $x[n]$ , onde  $n$  é um número inteiro. Neste texto será adotada a nomenclatura onde as variáveis livres entre  $(.)$  são contínuas e entre  $[.]$  são discretas. Sinais digitais são sinais cuja variável livre é discreta e também assumem valores discretos, Fig. 1.8. Quando as amostras  $x[n] \in \mathbf{R}$  o sinal é conhecido como *sinal em tempo discreto* mas quando as amostras  $x[n]$  pertencem a um conjunto finito esse sinal é conhecido com *digital*. A conversão de  $x(t)$  para  $x[n]$  é conhecido como **amostragem** e é realizada por dispositivos conhecidos como conversores analógicos-digitais. Esses dispositivos fornecem o sinal  $x[n]$  em um

<sup>3</sup>O tempo contínuo tem, entre dois valores quaisquer, um número infinito de pontos. A variável  $t$  assume valores ao longo de toda a reta numérica real ( $\mathbb{R}$ ) ou, dependendo do contexto, sobre algum subconjunto dela, como os reais não negativos.

conjunto finito de valores, processo de **quantização**, normalmente função de tensão de referência e um número finito de bits.

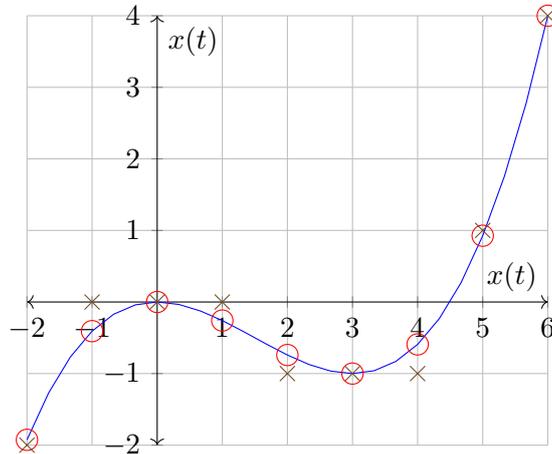


Figura 1.8: Tipos de sinais: contínuos (linha azul contínua), em tempo discreto (o vermelho) e digitais (x marrom).

## 1.4 Energia e potência média

A definição de *potência instantânea* em um resistor (caso onde a tensão é Real) é definida como:

$$p_{inst}(t) = v(t)i(t) = \frac{v^2(t)}{R} = Ri^2(t). \quad (1.11)$$

A potência instantânea de um sinal em relação a um resistor de 1 ohm é igual a  $p_{inst}(t) = x^2(t)$ , onde  $x(t)$  é a tensão sobre o resistor. Mesmo considerando que  $R = 1$  a dimensional do resistor não desapareceu da potência instantânea.

A definição de *energia* do sinal é:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} p_{inst}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt \quad (1.12)$$

e a potência média de um sinal é:

$$P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt \quad (1.13)$$

Para o caso de um *sinhal periódico*, os limites da integral se reduzem ao período  $T_o$ ,  $P_m = \frac{1}{T_o} \int_{(T_o)} x^2(t) dt$ .

A *tensão média quadrática* é a raiz quadrada da potência média, ou o seu *valor eficaz*. Os sinais são ditos de energia se  $0 < E < \infty$  e sinais de potência são sinais onde  $0 < P_m < \infty$ .

Alguns cuidados fundamentais:

1. sinais periódicos não possuem energia pois a integral eq. 1.12 não converge;
2. a eq. 1.12 e eq. 1.13 são válidas para sinais  $x(t)$  Reais. Caso  $x(t)$  seja complexo a potência instantânea será  $p_{inst} = x^*(t)x(t) = |x(t)|^2$ .

**Exemplo 3 :** Considere a onda triangular na Fig. 3. Pede-se:

1. A frequência fundamental em Hz e rad/s
2. A potência média ( $R=1\Omega$ )
3. O valor rms.

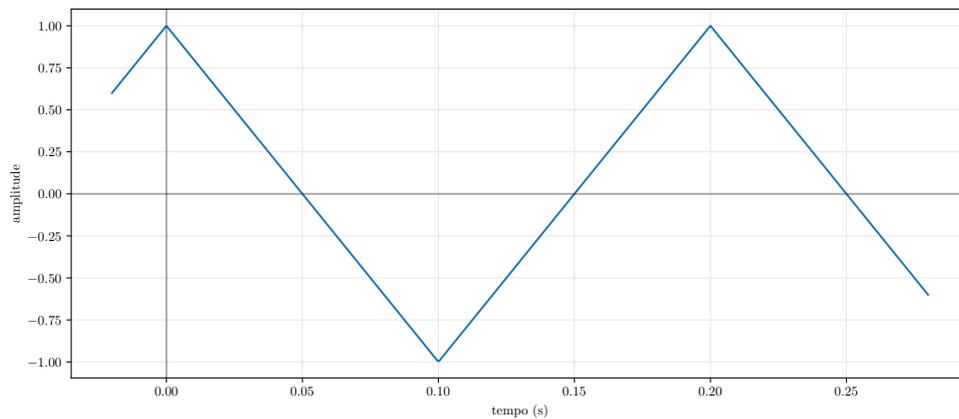


Figura 1.9: Onda triangular para o Ex. 3.

*solução:*

1. Período:  $T_0 = 0.2$  s,  $f_0 = \frac{1}{T_0} = 5$  Hz e  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 10\pi$  rad/s

2.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 x_1^2(t) dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} x_2^2(t) dt \\ &= \frac{1}{3} \text{W} \end{aligned}$$

onde  $x_1(t) = 1 + 20t$  e  $x_2(t) = 1 - 20t$

3.  $v_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{3}} v_{RMS}$

**Exemplo 4 :** Calcule a potência média e o valor RMS do sinal  $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$ , sabendo que  $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$   
solução

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x^2(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{T_0} A^2 \cos^2(\omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{T_0} A^2 \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega_0 t)) dt = \frac{A^2}{2T_0} \left( \int_{-T_0}^{T_0} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-T_0}^{T_0} \cos(2\omega_0 t) dt \right) \\ &= \frac{A^2}{2T_0} \left( t \Big|_{-T_0/2}^{T_0/2} + \frac{1}{2\omega_0} \sin(2\omega_0 t) \Big|_{-T_0/2}^{T_0/2} \right) \\ &= \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

$$V_{RMS} = A \frac{\sqrt{2}}{2} v_{RMS}$$

**Exemplo 5 :** Determine o período fundamental do sinal  $x(t) = 2 \cos(10t + 1) - \sin(4t - 1)$   
solução: Como o sinal  $x(t)$  é composto por dois sinais periódicos,

deve-se determinar  $T_1$  e  $T_2$  de cada componente.

$$\begin{aligned}\cos(10t + 1) &\rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \therefore T_1 = \frac{\pi}{5} \text{ s} \\ \sin(4t - 1) &\rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \therefore T_2 = \frac{\pi}{2} \text{ s}\end{aligned}$$

Sendo  $T_0 = k_1 T_1 = k_2 T_2 \therefore \frac{k_1}{k_2} = \frac{5}{2}$ . Fazendo  $k_1 = 5$  e  $k_2 = 2$  tem-se que  $T_0 = \pi$ .

## 1.5 Sinais fundamentais

**Sinais exponenciais** são da forma  $x(t) = Ce^{st}$  onde  $C$  e  $s = \sigma + j\omega$  são geralmente complexos. Sinais exponenciais complexos com  $\sigma = 0$  são periódicos,

$$x(t + T_0) = Ce^{j\omega_o(t+T_0)} = Ce^{j\omega_o t} e^{j\omega_o T_0} = Ce^{j\omega_o t} = x(t) \quad (1.14)$$

Sinais com  $\sigma \neq 0$  não são periódicos.

**Sinais senoidais** são da forma  $s(t) = A \sin(\omega_o t + \phi)$  onde  $A$  é a amplitude,  $\omega_o$  é a frequência em [rad/s] e  $\phi$  é o ângulo de fase em radianos.

A **Relação de Euler** associa a exponencial complexa com a função dos sinais senoidais,

$$e^{j\omega_o t} = \cos(\omega_o t) + j \sin(\omega_o t) \quad (1.15)$$

$$\cos(\omega_o t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}) \quad (1.16)$$

$$\sin(\omega_o t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_o t} - e^{-j\omega_o t}) \quad (1.17)$$

$$(1.18)$$

**Sinais senoidais amortecidos** são da forma  $x(t) = Ae^{-at} \sin(\omega_o t + \phi)$  e também podem ser expressos a partir das exponenciais complexas, Fig. 1.11(a).

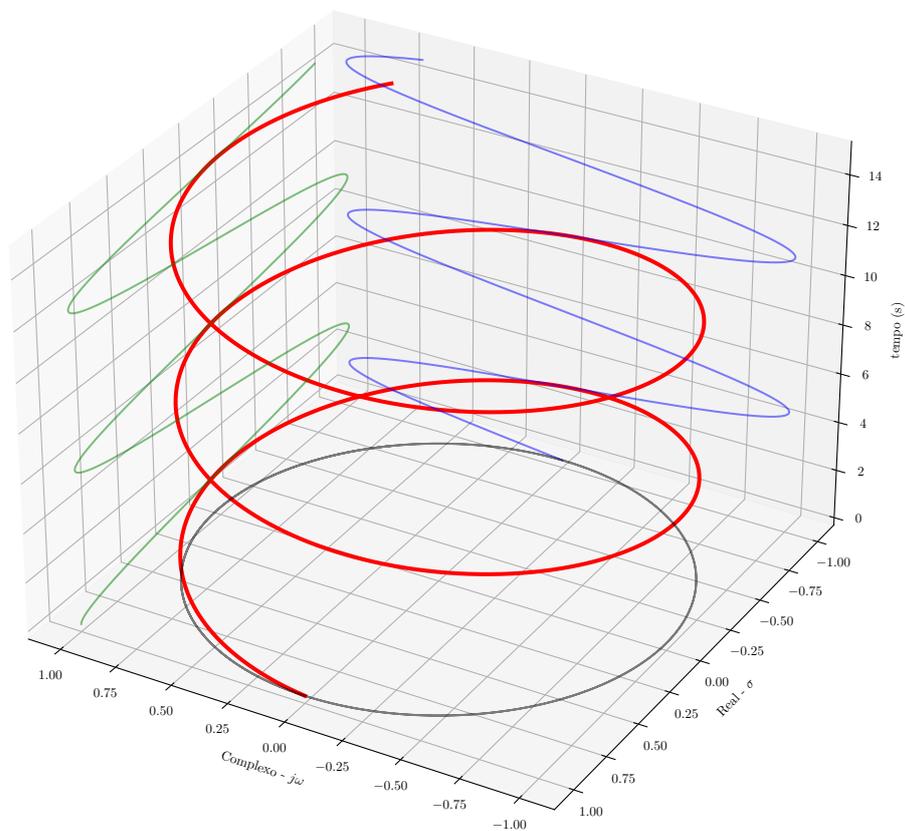


Figura 1.10: Exponencial complexa. Em vermelho é a curva  $e^{j\omega_0 t}$ , em azul é  $\cos(\omega_0 t)$ , em verde é  $j \sin(\omega_0 t)$  e em preto é  $\cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$ .

O sinal **degrau unitário**, Fig. 1.11(b), é dado por

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

A função **impulso unitário**, Fig. 1.11(c), é definida como:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \end{cases} \quad (1.20)$$

Observa-se que o gráfico é apenas uma representação da função impulso pois essa função não é definida em zero.

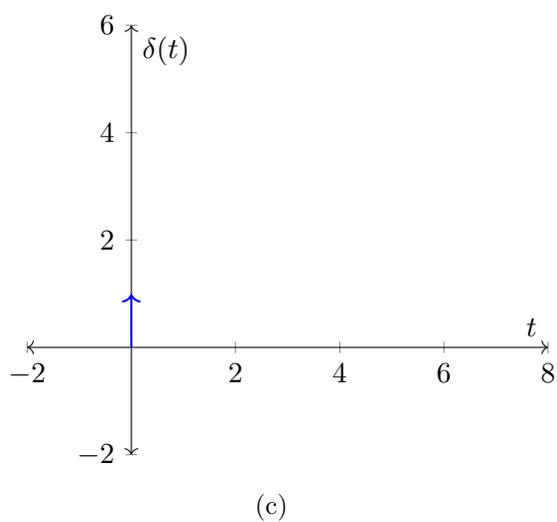
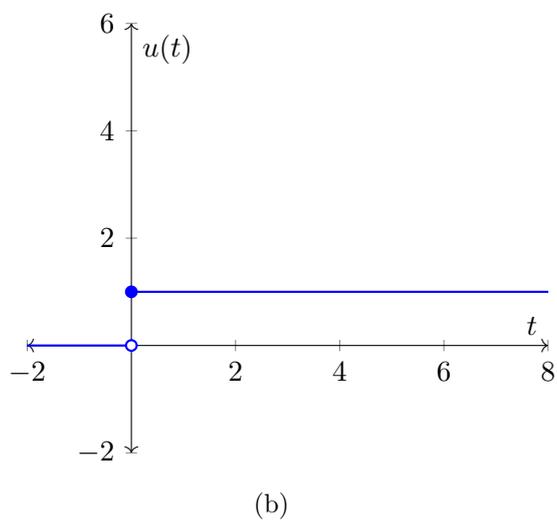
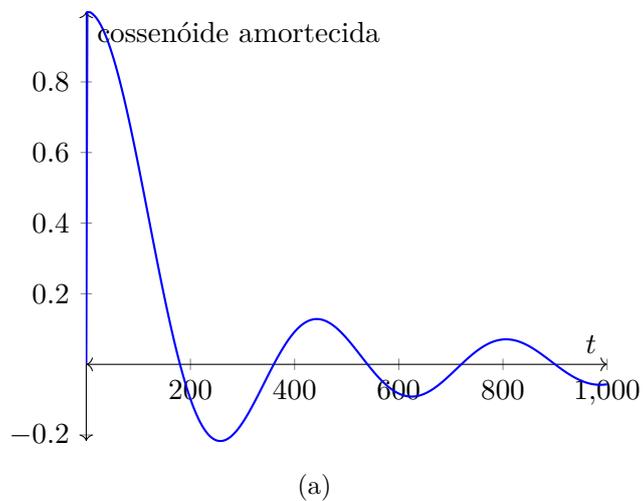


Figura 1.11: Funções elementares (a) cossenóide amortecida (b) função degrau (c) representação gráfica da função impulso.

Uma interpretação para a função  $\delta(t)$  é apresentada na Fig. 1.12

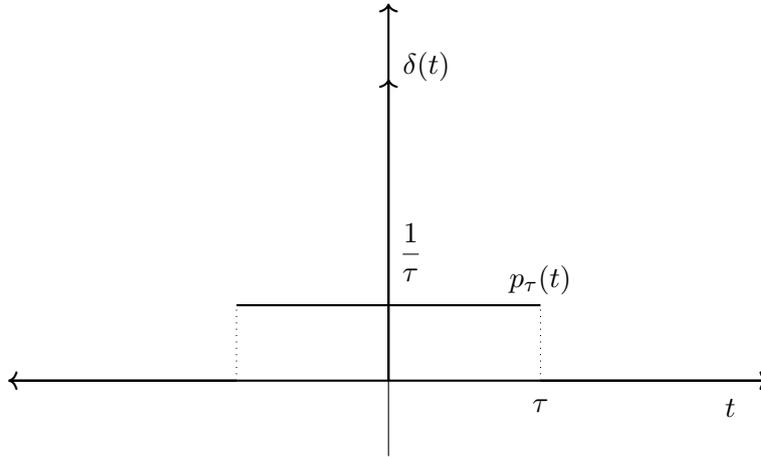


Figura 1.12: Sinal pulso  $p_\tau(t)$  com área unitária e a função impulso  $\delta(t)$ .

A área do retângulo é sempre 1 e quando  $\tau \rightarrow 0$  o sinal  $p_\tau(t) \rightarrow \delta(t)$ . Algumas propriedades da função impulso:

1. a função impulso é par:  $\delta(t) = \delta(-t)$ , por definição;
2. mudança de escala:  $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$
3.  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$
4.  $x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)\delta(t - t_0)$ , por definição;
5.  $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau)d\tau$

Um sinal importante é conhecido como *trem de impulso* e é definido como

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0). \quad (1.21)$$

$$^4 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\frac{a}{a}dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)d(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$^5 \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{t_0-} x(t)\delta(t-t_0)dt}_{=0, \text{ por definição}} + \underbrace{\int_{t_0-}^{t_0+} x(t)\delta(t-t_0)dt}_{=x(t_0), x(t) \text{ é contínua em } t_0} + \underbrace{\int_{t_0+}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt}_{=0, \text{ por definição}}$$

<sup>6</sup> $t < 0 \rightarrow \int = 0$  e  $t \geq 0$  a manipulação é muito parecida com o item 2.

Observa-se que  $\delta_{T_0}(t)$  é periódica com período  $T_0$ . Essa função será melhor estudada na seção 4.8.

**Exemplo 6 :** Considere o sinal  $x(t) = \delta(t + 2) - \delta(t - 2)$ .  
Calcule a energia para o sinal  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$ .

*solução:*

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t \delta(\tau + 2)d\tau - \int_{-\infty}^t \delta(\tau - 2)d\tau$$

Fazendo a troca de variáveis  $m = \tau + 2 \therefore dm = d\tau$  e  $n = \tau - 2 \therefore dn = d\tau$ ,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t+2} \delta(m)dm - \int_{-\infty}^{t-2} \delta(n)dn = u(t+2) - u(t-2)$$

$$E_C = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)dt = \int_{-2}^2 1^2 dt = t|_{-2}^2 = 4$$

**Exemplo 7 :** Determine a a energia ou potência média dos seguintes sinais:

1.  $x(t) = e^{-2t}u(t)$
2.  $x(t) = e^{j(2t+\pi/4)}$
3.  $x(t) = \cos(t)$

*solução:*

1.

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2t}u(t))^2 dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = -\frac{1}{4}e^{-4t}|_0^{\infty} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. Como o sinal é periódico e complexo, tem-se:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |e^{j(2t+\pi/4)}|^2 dt$$

Como:  $|e^{j\theta}| = 1$ ,  $P_x = 1$ .

3. Como o sinal é periódico, tem-se:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} t \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{8\pi} \int_0^{4\pi} \cos(v) dv = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## 1.6 Sinais em tempo discreto

Os sinais em tempo contínuo  $x(t)$  são convertidos em sinais em tempo discreto  $x[n]$  por

$$x[n] = x(t) \Big|_{t=nT} \quad (1.22)$$

onde  $T$  é conhecido como o período de amostragem e  $\frac{1}{T}$  é conhecida como frequência de amostragem.

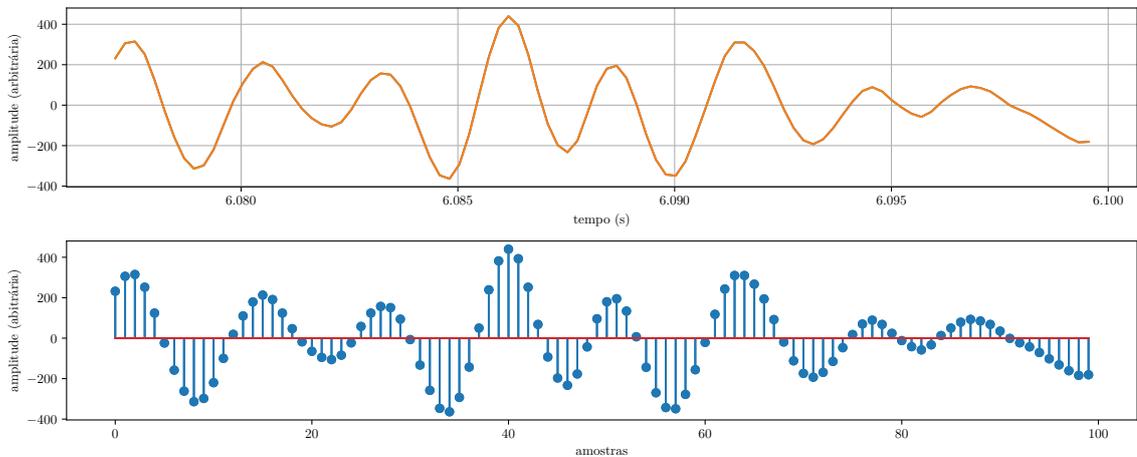


Figura 1.13: Representação de um sinal (a) contínuo e outro (b) amostrado, observa-se que no caso contínuo a variável  $t$  possui dimensional de tempo e a variável  $n$  é adimensional pois representa *amostra*.

Na prática essa operação é realizada por um conversor analógico-digital e que vai inclusive quantizar as amplitudes das amostras.

A soma entre sinais em tempo discreto é definida amostra por amostra,  $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$ . A multiplicação de  $x[n]$  por uma constante  $\alpha$  é definida pela multiplicação de todos os elementos de  $x[n]$  por  $\alpha$ .

O deslocamento temporal  $y[n] = x[n - n_0]$  é dita atrasada se  $n_0 > 0$  e ocorrerá um avanço se  $n_0 < 0$ ,  $n_0$  é um valor inteiro. A reversão temporal ocorrerá quando  $y[n] = x[-n]$ .

O sinal degrau unitário é definido por  $u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases}$  e o sinal

impulso unitário é  $\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$

## 1.7 Sistemas

Um sistema é um "dispositivo" que processa um sinal aplicado em sua entrada ( $x(t)$ ) gerando um sinal de saída ( $y(t)$ ). É um processo (ou conjunto de interconexões de operações) que resulta numa transformação de um sinal.

Admitindo  $F\{\cdot\}$  um operador que denota a transformação e podem ser usadas indistintamente as seguintes notações:

$$y(t) = F\{x(t)\} \quad (1.23)$$

$$x(t) \rightarrow F\{\cdot\} \rightarrow y(t) \quad (1.24)$$

$$x(t) \xrightarrow{F} y(t) \quad (1.25)$$

Normalmente procura-se estudar os sistemas a partir do conhecimento de como esta organizado internamente e pelo conhecimento de alguns elementos. Normalmente esse é o caso no estudo de circuitos elétricos. São definidos elementos  $R, L, C$ , fontes (controladas ou não) e quais as leis que permitem analisar como esses componentes são conectados, *Leis de Kirchoff*.

Poderia também ser discutido o caso de combinações de diferentes funções matemáticas para associar a entrada e saída do sistema sob estudo. Outra abordagem poderia ser o caso de interconexão série e paralelo de diferentes blocos para cumprir esse papel.

**Exemplo 8 :** Circuito RC paralelo alimentado por uma fonte de corrente

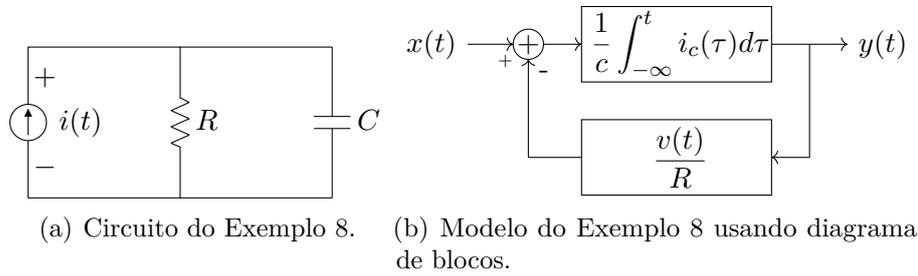


Figura 1.14: Circuito e diagrama de blocos do exemplo 8.

$$\begin{aligned}
 i(t) = x(t) &= i_C(t) + i_R \therefore i_C(t) = i(t) - i_R(t) \\
 v(t) = y(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau \\
 i_R(t) &= \frac{v(t)}{R} = \frac{y(t)}{R}
 \end{aligned}$$

Normalmente adota-se o modelo da forma de *caixa preto* ou *black-box*. Esse modelo é apresentado na Fig. 1.15. Em geral, um sistema em tempo contínuo opera sobre a variável  $(t)$  e um sistema em tempo discreto opera sobre  $[n]$ .

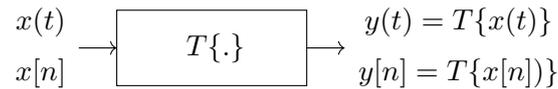


Figura 1.15: Modelo caixa preta associando  $x(t)$  (ou  $x[n]$ ) e  $y(t)$  (ou  $y[n]$ ) .

Conhecendo a estrutura interna do sistema e sua constituição permitiria estimar a saída a partir da entrada. O problema é quando essa descrição (constituição e estrutura) é desconhecida. A questão central é:

"o que se pode afirmar sobre esse sistema?"

"como posso determinar a sua saída a partir da entrada?"

"Será que existem afirmações gerais sobre esse sistema?"

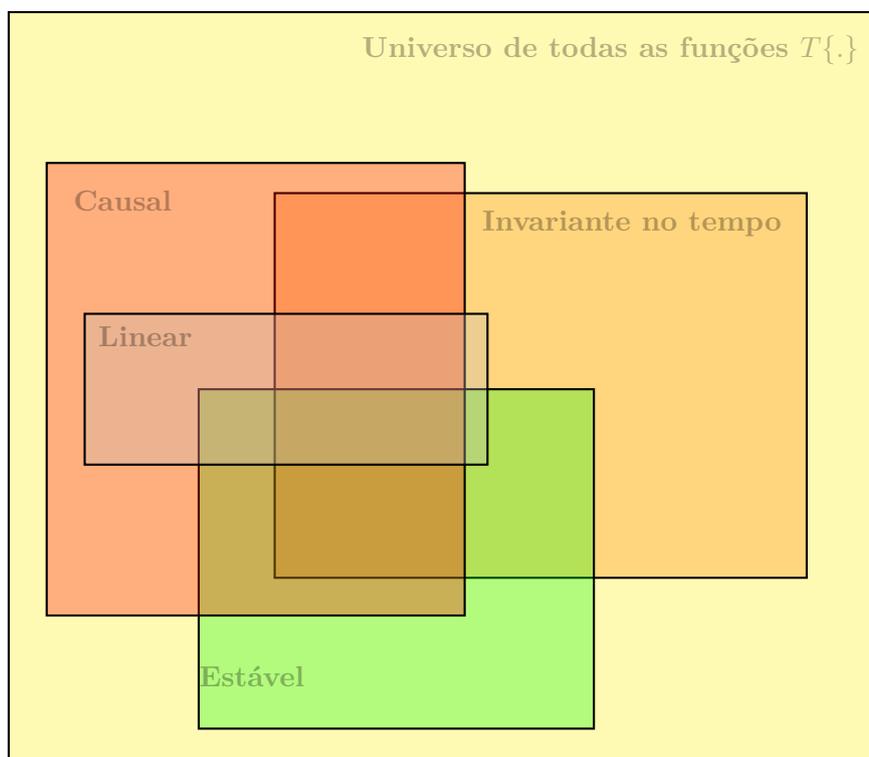


Figura 1.16: Exemplo mostrando como as classes hipoteticamente estariam distribuídas sobre o universo de todas as funções possíveis que associam  $x(t) - x[n]$  e  $y(t) - y[n]$ .

Muito pouco poderá ser dito sobre o sistema se não foram feitas suposições sobre o seu comportamento. E, para estimar a saída do sistema, deverá ser realizada uma análise para cada possível sinal de entrada.

Assim, procurar-se-á dividir o conjunto de todos os sistemas que associam  $x(t)$  com  $y(t)$  em classes e depois escolher quais classes serão necessárias, Fig. 1.16.

### 1. Estabilidade

A *estabilidade* é um dos principais conceitos ligados ao projeto de sistemas. Existem diversos conceitos de estabilidade mas será adotado o mais simples: *BIBO - bounded input bound output*. Esse conceito diz respeito a um sistema gerar uma saída limitada para um sinal de

entrada limitado.

$$|x(t)| < M \rightarrow |y(t)| = |F\{x(t)\}| < N \quad (1.26)$$

## 2. Invariância no tempo

A *invariância no tempo* afirma que se um sistema, independente de quando, tem a mesma resposta para a mesma entrada.

$$\text{Se } y(t) = F\{x(t)\} \therefore y(t - t_0) = F\{x(t - t_0)\} \quad (1.27)$$

## 3. Causalidade

Um sistema *causal* é um sistema cuja saída no tempo  $t_0$  usou apenas informações  $t \leq t_0$  de  $x(t)$ . Caso não seja causal implica que para conhecer a sua resposta em  $t_0$  deveriam ser conhecidas o futuro de  $x(t)$ .

## 4. Linearidade

Um sistema é *linear* se forem cumpridas duas condições: escala e sobreposição.

(a) escala: se  $y(t) = F\{x(t)\}$  então  $ay(t) = F\{ax(t)\}$

(b) sobreposição: se  $y_1(t) = F\{x_1(t)\}$  e  $y_2(t) = F\{x_2(t)\}$  então  $y_1(t) + y_2(t) = F\{x_1(t) + x_2(t)\}$

**Exemplo 9 :** Considerando o sistema  $y(t) = tx(t)$ , determine se ele é estável, invariante no tempo, causal ou linear.

*solução:*

### 1. estabilidade:

$|y(t)| = |tx(t)| = |t||x(t)|$  onde  $|x(t)|$  é limitada (por construção) e  $|t|$  não é limitado;

### 2. causalidade:

$\forall t_0$  tem-se  $y(t_0) = T_0 x(t_0)$  que não depende de nenhum valor  $t > t_0$  em  $x(t)$

### 3. invariância no tempo:

$$\begin{aligned} x_1(t) = x(t - t_0) &\rightarrow y_1(t) = tx(t - t_0) \\ y_2(t) = y(t - t_0) &\rightarrow y_2(t) = (t - t_0)x(t - t_0) \end{aligned}$$

como  $y_1(t) \neq y_2(t)$  o sistema é variante no tempo.

4. linearidade:

$$\begin{aligned}x(t) &= a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \\y(t) &= t(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)) = a_1tx_1(t) + a_2tx_2(t) \\ &= a_1y_1(t) + a_2y_2(t)\end{aligned}$$

o sistema é linear

**Exemplo 10 :** Considerando o sistema  $y(t) = e^{x(t)}$ , determine se ele é estável, invariante no tempo, causal ou linear.

*solução:*

1. estabilidade:

$|y(t)| = |e^{x(t)}|$  como  $|x(t)| < x_{MAX}$  então  $|y(t)| = |e^{x_{MAX}}|$  que é limitado. O sistema é estável.

2. causalidade:

O sistema é causal pois depende apenas do tempo presente.

3. invariância no tempo:

$$\begin{aligned}x_1(t) = x(t - t_0) &\rightarrow y_1(t) = e^{x(t-t_0)} \\y_2(t) = y(t - t_0) &\rightarrow y_2(t) = e^{x(t-t_0)}\end{aligned}$$

Como  $y_1(t) = y_2(t)$  o sistema é invariante no tempo.

4. linearidade:

$$\begin{aligned}x(t) &= a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \\y(t) &= e^{a_1x_1(t)+a_2x_2(t)} = e^{a_1x_1(t)}e^{a_2x_2(t)} \\ &= a_1y_1(t)a_2y_2(t)\end{aligned}$$

O sistema não é linear pois não passa no teste da sobreposição.

**Exemplo 11 :** Verifique se os sistemas abaixo atendem às propriedades especificadas:

1.  $y(t) = \sin |x(t)|$  é invariante no tempo?

*solução:*

$$\begin{aligned}x_1(t) = x(t - t_0) &\rightarrow y_1(t) = \sin(|x(t - t_0)|) \\ y_2(t) = y(t - t_0) &\rightarrow y_2(t) = \sin(|x(t - t_0)|)\end{aligned}$$

como  $y_1(t) = y_2(t)$  o sistema é invariante no tempo.

2.  $y(t) = x^2(t)$  é linear?

*solução:*

$$\begin{aligned}x(t) &= a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \\ y(t) &= (a_1x_1(t) + a_2x_2(t))^2 = a_1^2x_1^2(t) + a_2^2x_2^2(t) + 2a_1x_1(t)a_2x_2(t) \\ &= a_1^2y_1(t) + a_2^2y_2(t) + 2a_1x_1(t)a_2x_2(t)\end{aligned}$$

Não passa no teste da sobre posição nem da escala.

3.  $y(t) = x(2t)$  é invariante no tempo?

*solução:*

$$\begin{aligned}x_1(t) = x(t - t_0) &\rightarrow y_1(t) = x(2(t - t_0)) = x(2t - 2t_0) \\ y_2(t) = y(t - t_0) &\rightarrow y_2(t) = x(2t - t_0)\end{aligned}$$

Como  $y_1(t) \neq y_2(t)$  o sistema é variante no tempo.

4.  $y(t) = 3x(t) + 2$  é linear?

*solução:*

$$\begin{aligned}x(t) &= a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \\ y(t) &= 3(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)) + 2 = 3a_1x_1(t) + 3a_2x_2(t) + 2\end{aligned}$$

Como o termo constante aparece apenas uma vez não tem como reagrupa-lo para recompor a função  $y(t)$ . O sistema não é linear.

**Exemplo 12 :** Considere um sistema com entrada  $x(t)$  e saída

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT). \text{ Determine:}$$

1. Esse sistema é linear e invariante no tempo?
2. Sendo  $x(t) = \cos(2\pi t)$ , como é  $y(t)$  para  $T = 1/2$ .

3. Sendo  $x(t) = e^t \cos(2\pi t)$ , ache  $y(t)$  com  $T = 1/4$

*solução:*

**Exemplo 13 :** Considere o sistemas da Fig. 13(a), sendo que a operação de raiz quadrada produz um valor positivo. Encontre:

1. uma relação entre  $x(t)$  e  $y(t)$
2. se o sistema é linear
3. se o sistema é invariante no tempo
4. Qual a resposta de  $y(t)$  se  $x(t)$  for dado pela Fig. 13(b)

*solução:*

**Exemplo 14 :** Verifique a veracidade das afirmações abaixo e justifique a resposta.

1. A interconexão em série de dois sistemas lineares e invariantes no tempo resulta em um sistema com as mesmas propriedades.
2. A interconexão em série de dois sistemas não-lineares resulta em um sistema não-linear.

*solução:* Sendo o primeiro sistema  $T_1\{\cdot\}$  e  $T_2\{\cdot\}$  o segundo,  $y(t) = T_1\{x(t)\}$  e  $z(t) = T_2\{y(t)\}$ .

linearidade/escala	$ay(t) = T_1\{ax(t)\}$ e $az(t) = T_2\{ay(t)\}$
linearidade/sobreposição	$y_1(t) + y_2(t) = T_1\{x_1(t) + x_2(t)\}$ e $z_1(t) + z_2(t) = T_2\{y_1(t) + y_2(t)\}$
invariância no tempo	$y(t - t_0) = T_1\{x(t - t_0)\}$ e $z(t - t_0) = T_2\{y(t - t_0)\}$

## 1.8 Sistemas Discretos

Um sistema em tempo discreto é um operador matemático ou transformação  $T\{\cdot\}$  que opera em um sinal de entrada  $x[n]$  transformando-o em outro sinal  $y[n]$ ,  $T\{x[n]\} = y[n]$  ou  $x[n] \rightarrow^T y[n]$

**Exemplo 15 :** A função acumulador é dada por:  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ . Desenvolvendo  $y[n]$  tem-se:  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n] \rightarrow y[n] = y[n-1] + x[n]$ . A equação acima justifica o termo *acumulador* pois a saída depende do valor presente na entrada  $x[n]$  e do valor anterior da saída  $y[n-1]$ . Observe que a resposta depende das condições iniciais do sistema.

Considerando o sinal  $x[n] = nu[n]$

1. Se  $y[-1] = 0$  então  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n ku[k] = \sum_0^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. Se  $y[-1] = 1$  então  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n ku[k] = y[-1] + \sum_0^n k = \frac{n(n+1) + 2}{2}$

A saída depende de  $y[-1]$  e é conhecida como *condições iniciais*. Se as condições iniciais são nulas o sistema é dito *estar em repouso*.

Classes dos sistemas:

1. Linear:  $T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} = ay_1[n] + by_2[n]$ .  
Onde  $y_1[n] = T\{x_1[n]\}$  e  $y_2[n] = T\{x_2[n]\}$ .
2. Invariante no tempo:  $y[n] = T\{x[n]\} \rightarrow T\{x[n - n_d]\} = y[n - n_d]$
3. Causal: a saída  $y[n_0]$  depende apenas de valores  $n \leq n_0$  da entrada.
4. Estável: um sistema repouso é chamado de estável  $|x[n]| \leq Bx < \infty \rightarrow |y[n]| \leq By < \infty$

**Exemplo 16 :** Mostre que  $y[n] = nx[n]$  é linear. *solução:*

$$\begin{aligned} y[n] &= T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = n(ax_1[n] + bx_2[n]) \\ &= nax_1[n] + nbx_2[n] = ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned}$$

o sistemas é linear.

**Exemplo 17 :** Mostre que o sistema acumulador é linear.

*solução:* Sabendo que  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ , substituindo  $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$  tem-se que:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^n ax_1[n] + bx_2[n] = \sum_{k=-\infty}^n ax_1[n] + \sum_{k=-\infty}^n bx_2[n] \\ &= ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned}$$

**Exemplo 18 :** O sistema  $y[n] = x^2[n]$  não é linear. *solução:*

$$y[n] = (ax_1[n] + bx_2[n])^2 \neq ay_1[n] + by_2[n]$$

**Exemplo 19 :** Seja o sistema diferenciador definido por:  $y[n] = x[n] - x[n-1]$ . Mostre se o diferenciador é um sistemas invariante ao deslocamento. *solução:*

$$\begin{aligned} y[n - n_d] &= x[n - n_d] - x[n - n_d - 1] \text{ e } T\{x[n - n_d]\} = x[n - n_d] - \\ x[n - n_d - 1] &= y[n - n_d] \end{aligned}$$

**Exemplo 20 :** Seja o sistema compressor definido por  $y[n] = x[Mn]$ . Determine se o sistema compressor é invariante no tempo. *solução:*

$$y[n - n_d] = x[Mn - n_d] \text{ e } T\{x[n - n_d]\} = nx[n - n_d] \neq y[n - n_d].$$

O sistema é variante no tempo.

**Exemplo 21 :** sistemas causais:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] - x[n-1] \\ y[n] &= \sum_{k=-\infty}^n x[k] \\ y[n] &= ax[n] \end{aligned}$$

sistemas não-causais:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + x[n+1] \\ y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n+1} x[k] \\ y[n] &= x[2n] \end{aligned}$$

**Exemplo 22 :** O acumulador é um sistema instável. *solução:* Basta mostrar um contra-exemplo. Seja  $x[n] = u[n]$ . Esse sinal é limitado,  $|x[n]| \leq 1, \forall n$ . Qualquer que seja o limite estipulado para o limite de  $y[n]$  sempre existirá um valor de  $n$  cujo somatório será maior do que esse limite.

## 1.9 Exercícios Propostos

1. Mostre que

(a)  $|Ae^{j\theta}| = |A|$

(b)  $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$

(c)  $e^{\pm jk\pi} = \cos(k\pi) = (-1)^k$

2. Determine a energia ou potência média para os seguintes sinais:

(a)  $y(t) = e^{-at}u(t)$

(b)  $x(t) = \frac{1}{2}(\cos(\omega t) + 1), \quad \frac{-\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}$

3. Desenhe a forma de onda para:

(a)  $y(t) = u(t) - u(t - 2)$

(b)  $y(t) = u(t + 1) - 2u(t) + u(t - 1)$

4. Determine se cada um dos sinais abaixo são periódicos. Caso seja periódico determine o período.

(a)  $x(t) = 2 \cos(3t + \frac{\pi}{4})$

(b)  $x(t) = je^{10t + \frac{\pi}{2}}$

(c)  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3n)^2}$

5. Mostre que:

(a)  $|Ae^{j\theta}| = |A|$

(b)  $e^{j\pi/2} = j$

(c)  $e^{\pm jk\pi} = \cos(k\pi) = (-1)^k$

(d)  $\cos(\theta) = \frac{1}{2}[e^{j\theta} + e^{-j\theta}]$  e que  $\sin(\theta) = \frac{1}{2j}[e^{j\theta} - e^{-j\theta}]$

6. Desenhe  $z = Ae^{j\theta}$  no plano cartesiano e mostre que  $z = A \cos(\theta) + jA \sin(\theta)$
7. Prove o teorema de Moivre:  $[\cos(\theta) + j \sin(\theta)]^n = \cos(n\theta) + j \sin(n\theta)$
8. Admitindo que  $z = Ae^{j\theta}$  determine e desenhe no plano cartesiano:
- $z_1 = Ae^{j(\theta \pm \pi)}$
  - $z_2 = Ae^{j(\theta \pm 2\pi)}$
  - $z_3 = Ae^{j(\theta \pm \pi/2)}$
  - $z_4 = A$
9. Sendo  $z = Ae^{j\theta}$ ,  $z_1$  e  $z_2$  números complexos, mostre que:
- $z + z^* = 2\mathcal{R}\{z\}$
  - $z - z^* = 2\mathcal{I}\{z\}$
  - $zz^* = A^2$
  - $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
  - $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
  - $|z| = |z^*| = A$
10. Para o pulso retangular mostrado na Fig. 1.17 determine  $x(2t + 3)$ .

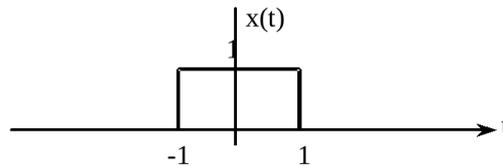


Figura 1.17: Exercício 10

11. Um sinal contínuo no tempo é mostrado na Fig. 1.18. Desenhe com escalas cada um dos seguintes sinais:
- $x(t - 2)$
  - $x(1 - t)$
  - $x(2t + 2)$
  - $x(2 - t/3)$
  - $x(2t)$

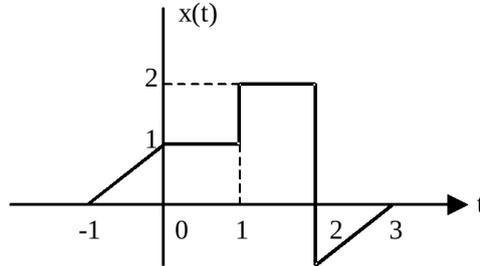
(f)  $x(t/3)$ 

Figura 1.18: Exercício 11

12. Considere o pulso triangular mostrado na Fig.1.19. Esboce cada um dos seguintes sinais:

(a)  $x(t - 1) + x(t) + x(t + 1)$

(b)  $x(t - 2) + x(t) + x(t + 2)$

(c)  $x(3t - 2)$

(d)  $x(2(t - 2))$

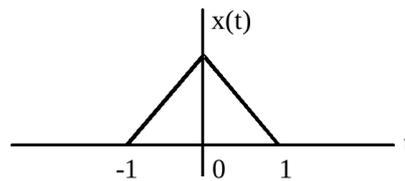


Figura 1.19: Exercício 12

13. Desenhe a forma de onda dos seguintes sinais:

(a)  $u(t) - u(t - 2)$

(b)  $u(t + 1) - 2u(t) + u(t - 1)$

(c)  $-u(t + 3) + 2u(t + 1) - 2u(t - 1) + u(t - 3)$

14. Mostre que o produto de dois *sinais pares* ou de dois *sinais ímpares* resulta em um *senal par*. Mostre também que o produto de um *senal par* por um *senal ímpar* é um *senal ímpar*.

15. Mostre que:

(a) Se  $x(t)$  é ímpar então:  $\int_{-a}^a x(t)dt = 0$

(b) Se  $x(t)$  é par então:  $\int_{-a}^a x(t)dt = 2 \int_0^a x(t)dt$

16. Mostre que  $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$ .

17. Determine a integral  $\int_{-\varepsilon}^t \Delta(\tau)d\tau$ ,  $\varepsilon > 0$  para as funções apresentadas na Fig. 1.20 (a) e (b).

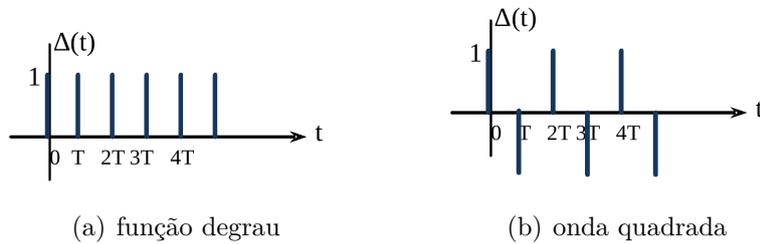
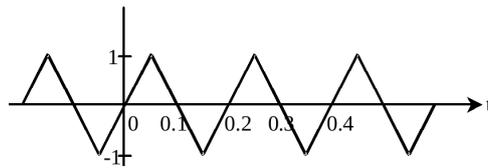


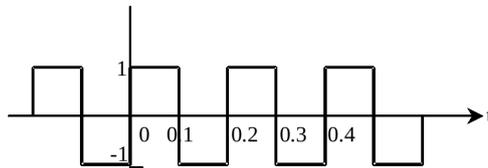
Figura 1.20: Exercício 17

18. Considere os sinais mostrados na Fig. 1.21. Pede-se:

- Frequência fundamental em Hz e rad/s,
- Potência média,
- Valor rms da amplitude.



(a) Legenda1



(b) Legenda2

Figura 1.21: Exercício 18

19. Sejam  $x(t)$  e  $y(t)$  dois sinais periódicos com períodos  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente. Sob que condições o sinal soma  $x(t) + y(t)$  é periódico? E se ele é periódico, qual é o seu período fundamental?
20. Determine se ou não cada um dos sinais abaixo é periódico. Para os periódicos determine o período fundamental.
- (a)  $x(t) = 2 \cos(3t + \pi/4)$
  - (b)  $x(t) = \sin(\frac{5\pi}{7}t^2)$
  - (c)  $x(t) = \sin^2(t - \pi/6)$
  - (d)  $x(t) = \cos(2\pi t)u(t)$
  - (e)  $x(t) = 2 \cos(10t + 1) - \sin(4t - 1)$
  - (f)  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3n)^2}$
  - (g)  $x(t) = je^{j(10t+\pi/2)}$
21. Calcule a energia ou então a potência dos seguintes sinais:
- (a)  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$ , em que:  $x(t) = \delta(t + 2) - \delta(t - 2)$
  - (b)  $x(t) = e^{-2t}u(t)$
  - (c)  $x(t) = Ae^{-t/\tau}u(t)$
  - (d)  $x(t) = e^{j(2t+\pi/4)}$
  - (e)  $x(t) = \cos(t)$
22. Considere que:  $x(t) = \delta(t + 2) - \delta(t - 2)$ . Calcule o valor da energia para o seguinte sinal:  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$
23. O sinal senoidal  $x(t) = 2 \cos(300t + \pi/6)$  é aplicado a um dispositivo de lei quadrática tal que:  $y(t) = x^2(t)$ .
- (a) Mostre que a saída do dispositivo consiste de um componente dc mais um componente senoidal,
  - (b) Determine o valor do componente dc,
  - (c) Determine a frequência e a amplitude do componente senoidal,
  - (d) Valor de pico de  $y(t)$ ,
  - (e) Valor rms de  $y(t)$  (eficaz).

24. Determine se os sistemas abaixo são: sem memória, invariante no tempo, linear, causal e estável.
- (a)  $y(t) = x(t - 2) + x(2 - t)$
  - (b)  $y(t) = x(t) \cos(3t)$
  - (c)  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$
  - (d)  $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau) d\tau$
  - (e)  $y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$
  - (f)  $y(t) = x(\sin(t))$
  - (g)  $y(t) = t^2 x(t - 1)$
25. Seja um sistema cuja relação entre entrada e saída é dada por:  $y(t) = at + b$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes. Pergunta-se:
- (a) O sistema é linear? justifique.
  - (b) Para que condições de  $a$  e  $b$  o sistema é linear?

### Sinais e sistemas discretos no tempo

1. Considere a seqüência  $x(n) = (5 - n)[u(n) - -u(n - 5)]$ . Desenhe:
2.  $y[n] = x[n - 2]$
3.  $y[n] = x(3 - n)$
4.  $y[n] = x(2n - 2)$
5. Um sinal discreto é definido por:  $x[n] = \begin{cases} \frac{1}{|n| + 1}, & \text{se } |n| < 3, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$  Determine a seqüência  $x[n]$  e desenhe o sinal.
  - (a) Desenhe o sinal  $x[n - 2]$
  - (b) Desenhe o sinal  $x[n + 2]$
  - (c) Desenhe o sinal  $x[n]u[n]$ .
6. Desenhe as seguintes seqüências:

- (a)  $x[n] = \cos(\pi n/2)$
- (b)  $x[n] = \cos(\pi n/6)$
- (c)  $x[n] = u[n] - u[n - 5]$
- (d)  $x[n] = 0.5^2 u[n]$
- (e)  $x(n) = 2^n u[n]$

7. Para os itens (a) e (b) do exercício anterior, admitindo  $T = 0.001$ , determine os sinais contínuos no tempo que geraram as sequências.
8. Expresse a sequência abaixo em função de funções degrau unitário

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ 2 & \text{se } n = 1, \\ 3 & \text{se } n = 2, \\ 0 & \text{c.c..} \end{cases} \quad (1.28)$$

9. Para cada um dos sinais abaixo, esboce  $x[n]$  e determine  $E_x$  ou  $P_x$  e  $M_x$ .

(a)  $e^{-\pi n/2} u[n]$

(b)  $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\pi(n - 6k)/6) - u[n - 6k - 3]$

## Capítulo 2

# Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

O estudo sobre os sistemas lineares e invariantes no tempo (LTI) procura determinar as suas propriedades e a resposta dessa classe de sistemas para um sinal de entrada  $x(t)$  genérico. Essas propriedades e discussões são equivalentes no tempo contínuo e discreto. Para preservar os aspectos didáticos do texto será apresentado apenas para o tempo contínuo e no final de cada seção serão apresentadas as formulas para o domínio discreto.

A linearidade significa que vale o princípio da sobreposição e o de escala: se  $y_1(t) = T\{x_1(t)\}$  e  $y_2 = T\{x_2(t)\}$  então  $T\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$ , onde  $a_1$  e  $a_2$  são constantes. Essa ideia pode ser generalizada para um número arbitrário (finito) de entradas:  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ,

$$\sum_{(k)} c_k y_k(t) = T\left\{\sum_{(k)} c_k x_k(t)\right\}. \quad (2.1)$$

Sistema invariante no tempo significa que se um sistema arbitrário tem uma saída para uma determinada entrada, o adiar ou atrasar essa entrada em  $T$  segundos, a saída será idêntica exceto que a saída será adiada ou atrasada do mesmo  $T$  segundos, ou seja

$$y(t) = T\{x(t)\} \rightarrow y(t - T) = T\{x(t - T)\} \quad (2.2)$$

Os principais resultados do estudo dos sistemas LTI são:

1. esses sistemas podem ser caracterizados completamente por uma única função chamada de *resposta ao impulso do sistema*, e
2. a sua resposta à uma entrada arbitrária é completamente determinada a partir do conhecimento da resposta ao impulso do sistema.

Esse método de análise é exclusivo no domínio do tempo e os mesmos resultados são obtidos para sinais e sistemas em tempo discreto.

## 2.1 A operação de convolução

Para a determinação da resposta de um sistema LIT consideram-se que:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau, \quad (2.3)$$

$$h(t) \stackrel{\text{def}}{=} T\{x(t) = \delta(t)\} \quad (2.4)$$

O sinal  $h(t)$  é conhecido como *resposta ao impulso do sistema*.

Sendo  $y(t) = T\{x(t)\}$  e usando a eq. 2.3 tem-se:

$$\begin{aligned} y(t) &= T\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)T\{\delta(t - \tau)\}d\tau, \quad T\{\cdot\} \text{ é linear em } t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad T\{\cdot\} \text{ é invariante no tempo} \end{aligned}$$

O comportamento de uma sistema  $T\{\cdot\}$  linear e invariante no tempo com uma entrada arbitrária  $x(t)$  é completamente descrito pela eq. 2.5,

$$y(t) = x(t) * h(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2.5)$$

Esse resultado indica que a resposta de qualquer sistema LTI pode ser determinada pelo conhecimento de uma resposta particular do sistema,  $h(t)$ . É importante observar que esse resultado tem que ser usado com cuidado pois:

1. todo os sistemas (LTI ou não) possuem uma *resposta ao impulso* e,

2. a operação de convolução sempre poderá ser feita dado dois sinais quaisquer.

O resultado da *integral de convolução* será igual a resposta do sistema quando o sistema for LTI. Caso não seja LTI nada poderá ser afirmado.

**Exemplo 23 :** Um exemplo simples de sistema LTI é o sistema mostrado na Fig. 2.1 cuja resposta ao impulso é dada por:

$$h(t) = e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

A sua resposta ao sinal  $x(t) = u(t) - u(t - 1)$ .

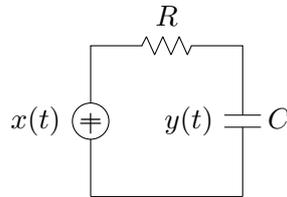


Figura 2.1: Circuito para o exemplo 23.

*solução:*

Observe que a integral na eq. 2.5 é realizada em  $\tau$  e que  $t$  é um parâmetro para o sinal  $h(t)$ . Dessa forma,  $x(t) \rightarrow x(\tau)$  e  $h(t) \rightarrow h(\tau)$ . A função  $h(t - \tau)$  é apresentada na Fig. 2.2 d.

42CAPÍTULO 2. SISTEMAS LINEARES E INVARIANTES NO TEMPO

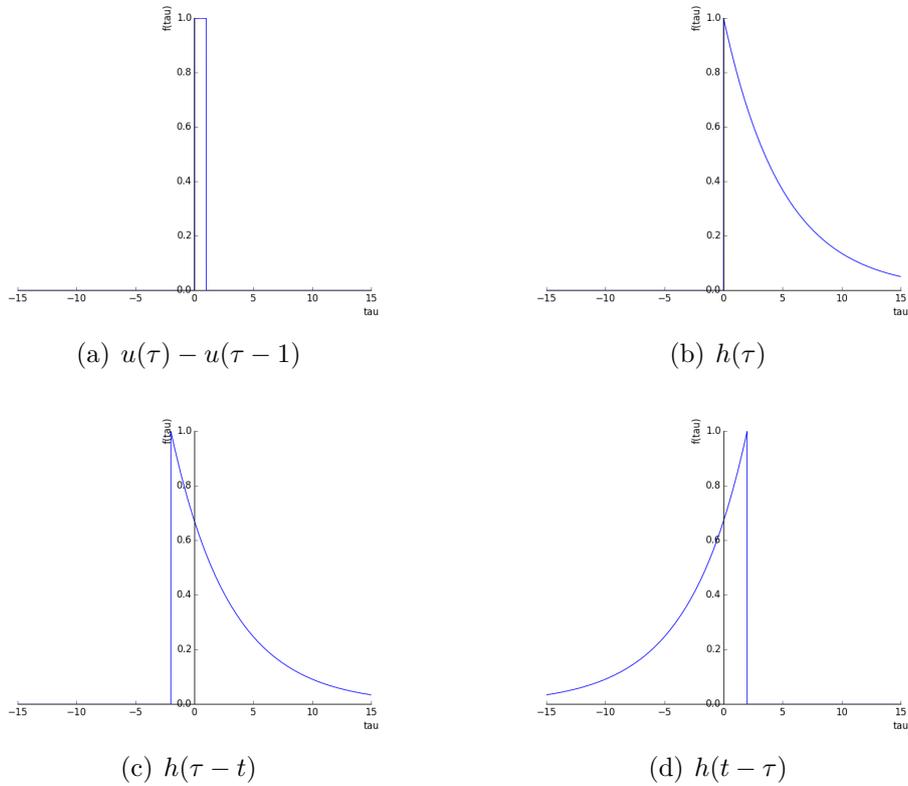


Figura 2.2: Gráfico dos sinais  $x(\tau)$  e  $h(t - \tau)$ .

Para  $t < 0$  o produto dos sinais  $x(\tau)$  e  $h(t - \tau)$  é zero. Observe que  $h(t - \tau)$  é zero para  $\tau > t$  e  $x(\tau)$  é zero  $\tau < 0$  e  $\tau > 1$ .

No intervalo  $0 \leq \tau < 1$ ,  $h(t - \tau)$  esta percorrendo  $x(\tau)$  e a região cujo produto diferirá de zero é  $[0, t[$  e, sendo assim, esses são os limites de integração.

Quando  $t \geq 1$  o produto entre  $x(\tau)$  e  $h(t - \tau)$  diferirá de zero apenas em  $0 \leq \tau \leq 1$ , suporte de  $x(\tau)$ . Os limites de interação para esse intervalo será  $[0, 1]$ .

$$\begin{aligned}
 t < 0 \quad \therefore \quad y(t) &= \int_{-\infty}^0 0 d\tau = 0 \\
 0 \leq t < 1 \quad \therefore \quad y(t) &= \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{RC}} d\tau = RC(1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \text{ Fig. 2.3(a)} \\
 t \geq 1 \quad \therefore \quad y(t) &= \int_0^1 e^{-\frac{t-\tau}{RC}} d\tau = RCe^{-\frac{t}{RC}} (e^{\frac{1}{RC}} - 1), \text{ Fig. 2.3(b)}
 \end{aligned}$$

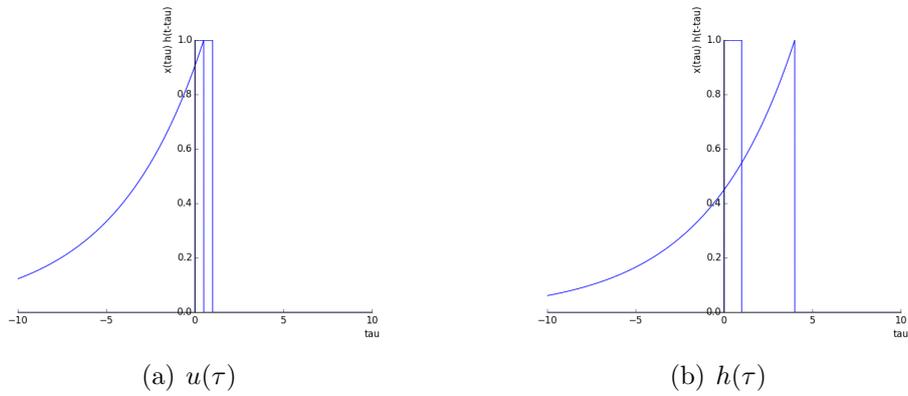


Figura 2.3: Gráfico dos sinais  $x(\tau)$  e  $h(t - \tau)$  para dois valores, (a)  $t = 0.5$  e (b) ( $t = 4$ ).

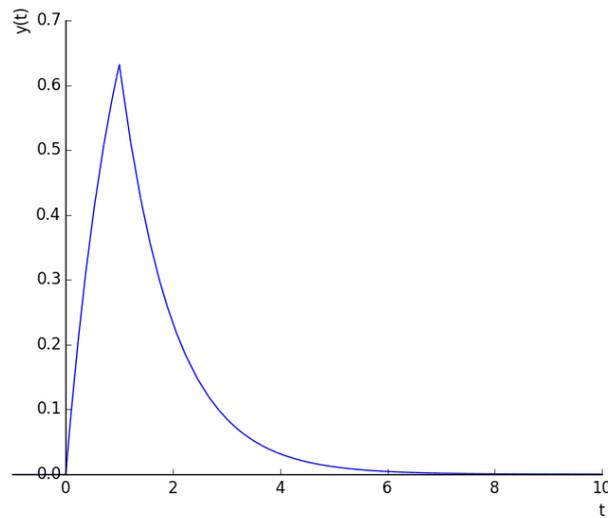


Figura 2.4: Resposta para o ex. 2.1 com  $RC = 1$ .

### 2.1.1 Tempo discreto

Para sistemas em tempo discreto as equações são equivalentes e a operação de convolução passa a ser:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \stackrel{\text{def}}{=} x[n] * h[n] \quad (2.6)$$

onde  $h[n] = T\{x[n] = \delta[n]\}$ , resposta ao impulso do sistema.

## 2.2 Propriedades da operação de convolução

As representações usando diagramas de blocos serão mais detalhadas na seção 3.8.

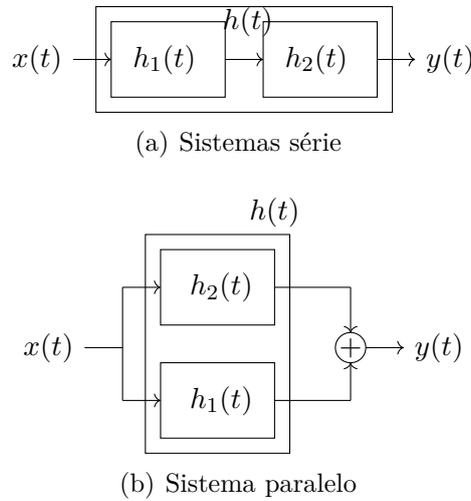


Figura 2.5: Sistemas (a) série ( $h_1(t)$  e  $h_2(t)$ ) e sistema equivalente  $h(t)$ .

**associatividade:**

$$y(t) = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} [x(t) * y(t)] * z(t) &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_{xy}) y(t - \tau_{xy}) (-d\lambda) \right] * z(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_{xy}) y(\tau_{yz} - \tau_{xy}) d\tau_{xy} \right] z(t - \tau_{yz}) d\tau_{yz} \\ x(t) * [y(t) * z(t)] &= x(t) * \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau_{yz}) z(t - \tau_{yz}) \tau_{yz} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_{xy}) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau_{yz}) z(t - \tau_{xy} - \tau_{yz}) d\tau_{yz} \right] d\tau_{xy} \end{aligned}$$

Fazendo a troca  $\lambda = \tau_{xy} + \tau_{yz}$ ,  $d\lambda = d\tau_{xy}$ , na eq. ?? e  $\eta = \lambda - \tau_{yz}$ ,  $d\eta = -d\tau_{yz}$ , na eq. ??:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_{xy}) y(\tau_{yz} - \tau_{xy}) d\tau_{xy} \right] z(t - \tau_{yz}) d\tau_{yz} &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\eta) y(\lambda - \eta) z(t - \lambda) d\lambda d\eta \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_{xy}) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau_{yz}) z(t - \tau_{xy} - \tau_{yz}) d\tau_{yz} \right] d\tau_{xy} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\eta) y(\lambda - \eta) z(t - \lambda) d\lambda d\eta \end{aligned}$$

**comutatividade:**

$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t) \quad (2.8)$$

fazendo a substituição de  $\lambda = t - \tau$ ,

$$\begin{aligned} x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) (-d\lambda) \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) (d\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda = h(t) * x(t) \end{aligned}$$

Assim as integrais são iguais e vale a propriedade de associação.

**distributividade:**

$$[x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)] = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) [h_1(t - \tau) + h_2(t - \tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_1(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_2(t - \tau) d\tau \\ &= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \end{aligned}$$

**derivada:**

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ \frac{d}{dt}y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\frac{d}{dt}h(t - \tau)d\tau = x(t) * \frac{d}{dt}h(t) \\ &= \frac{d}{dt}x(t) * h(t) \end{aligned}$$

**integral:**

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ \int_{-\infty}^{\infty} y(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau}_{\text{área de x}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)dt}_{\text{área de h}} \end{aligned}$$

A integral da convolução é igual ao produto das integrais.

**escala:**  $y(t) = x(t) * h(t)$  e  $z(t) = x(at) * h(at)$ ,  $a > 0$  então:

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(a\tau)h(a(t - \tau))d\tau \\ \lambda &= a\tau, \end{aligned}$$

**Resposta ao degrau unitário:** é a resposta para a entrada  $u(t)$  e esta relacionada com  $h(t)$ .

$$\begin{aligned} \text{Seja: } s(t) &= h(t) * u(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t h(\tau)u(t - \tau)d\tau \int_{t^+}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \end{aligned}$$

como:  $u(t - \tau) = 1$ ,  $t \geq \tau$

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau \leftrightarrow h(t) = \frac{d}{dt}s(t)$$

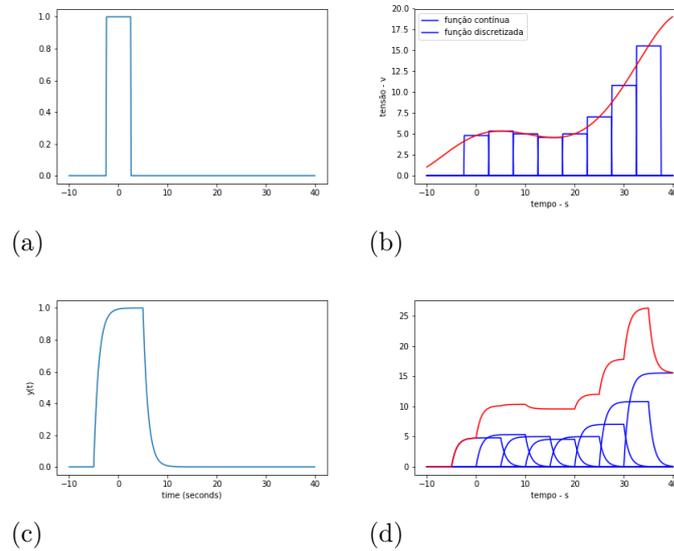


Figura 2.6: Interpretação para operação de convolução. (a) função pulso (b) aproximação de uma função qualquer com uma sucessão de pulsos (c) resposta do sistema ao pulso (d) resposta do sistema a sucessão de pulsos.

## 2.3 Interpretação e cálculo da convolução

A operação de convolução traduz o efeito de se realizar uma medida de um sinal  $x(t)$  porém o instrumento de medida não é perfeito e possui uma resposta ao impulso dada por  $h(t)$ . Na Fig. 2.6<sup>1</sup> o sinal  $x(t)$  está aproximado por uma sucessão de funções pulso ( $p_\tau(t_0) = u(t_0) - u(t_0 - \tau)$ ) ponderado pelo valor  $x(t_0)$ . Observa-se que sendo conhecido apenas uma resposta ao  $p_\tau(t_0)$  como sendo  $g(t)$  tem-se que:

1. o sistema é linear então pelo princípio da sobreposição vale que a resposta será a combinação de todas as entradas e serão escaladas por  $x(t_0)$ , princípio da escala;
2. o sistema é invariante no tempo, logo a mesma resposta vale para qualquer  $t_0$ .

Desta forma, a resposta final do sistema será dado por  $y(t) = \sum_{(k)} g(t -$

<sup>1</sup>Fig. 2.6 Livro.ipynb

$k)x(k)$ , no limite  $\tau \rightarrow 0$  esse somatório converge para a operação de convolução.

Algoritmo para o cálculo da convolução

1. expresse cada função em termos da variável livre  $\tau$ ;
2. espelhe uma das funções:  $g(\tau) \rightarrow g(-\tau)$ . Normalmente se escolhe a função que seja mais fácil de manipular;
3. faça um deslocamento de  $t$ ,  $g(t - \tau)$  irá se deslocar ao longo do eixo  $\tau$ .
4. comece  $t$  no  $-\infty$  e o desloque até  $+\infty$ . Sempre que as duas funções se interceptarem, encontre a integral do seu produto. Em outras palavras, calcule uma soma ponderada de  $f(\tau)$  com os pesos  $g(-\tau)$  a medida que  $t$  varia;
5. a forma de onda resultante é a convolução das duas funções  $f(t)$  and  $g(t)$ ;
6. se  $f(t)$  é um impulso unitário, o resultado será apenas a  $g(t)$ , que é chamada de *resposta ao impulso*,  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) g(t - \tau) d\tau = g(t)$

## 2.4 Propriedades sistemas LTI

### Causalidade

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \\
 &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} h(\tau)x(t - \tau)d\tau}_{\tau < 0 \rightarrow t - \tau > t} + \underbrace{\int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau}_{\tau \geq 0 \rightarrow t \geq t - \tau}
 \end{aligned}$$

A primeira integral é não-causal e a segunda é causal. Como se deseja que a resposta seja causal espera-se que no intervalo não-causal  $h(\tau)$  seja igual a zero.

Desta forma, a condição para que um sistema LTI é que

$$h(t) = 0, \quad t < 0 \quad (2.10)$$

### Estabilidade

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau \\ &\leq M_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau \end{aligned}$$

Por construção espera-se que  $x(t) < M_x, \forall t$ . Para que o produto dos termos da eq. 2.11 seja finito espera-se que  $h(t)$  seja absolutamente somável.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty \quad (2.11)$$

## 2.5 Estimativa da resposta ao impulso

Essa estimativa é feita com uso da propriedade da resposta ao degrau. A Fig. 2.5 mostra a definição da resposta ao impulso. A Fig. 2.5 mostra o uso da combinação da resposta ao degrau e de um circuito diferenciador para a obtenção do  $h(t)$ .

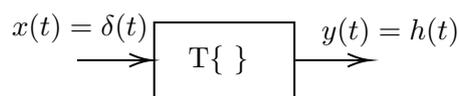


Figura 2.7: Resposta de um sistema LIT para uma entrada  $x(t) = \delta(t)$  e resposta  $y(t) = h(t)$ .

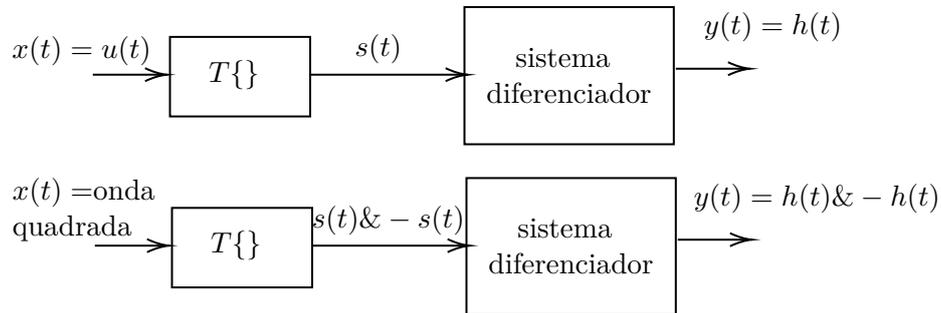


Figura 2.8: A entrada de um sistema LIT com uma função degrau tem com saída a função  $s(t)$  e, sendo derivada obtém-se a função  $h(t)$ . Ao se entrar com uma função quadrada com média zero, a função  $s(t)$  fica alternando entre  $s(t)$  e  $-s(t)$ . Derivando essa resposta tem-se que a resposta impulsiva também vai alternar como  $h(t)$  e  $-h(t)$ .

A Fig. 2.5 mostra um circuito simples de primeira ordem para exemplificar a estimativa da resposta ao impulso. Na Fig. 2.5 tem-se um conjunto de excitações de funções quadradas com períodos diferentes. Observa-se que quanto maior o período mais a resposta vai para zero. Os casos onde o período é muito curto, tem-se que a resposta não chega no zero.

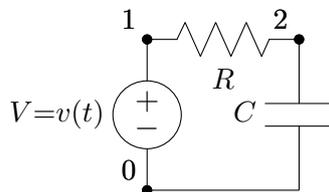


Figura 2.9: Circuito para exemplo da determinação experimental da resposta ao impulso.

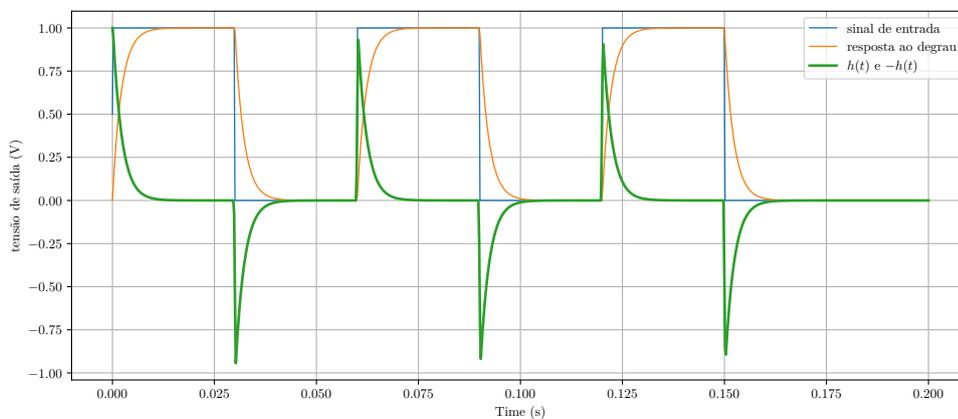


Figura 2.10: Resposta ao degrau para o circuito da Fig. 2.5.

A partir dos sinais da resposta do sistema da Fig. 2.5 é aplicado um diferenciador para a obtenção da resposta ao impulso,  $h(t)$ , mostrado na Fig. 2.5, gráfico na cor verde.

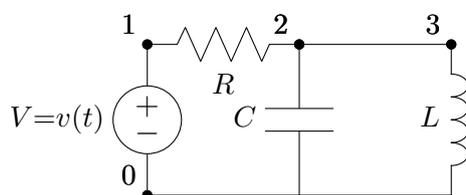


Figura 2.11: Circuito de segunda ordem para a estimativa da resposta ao impulso.

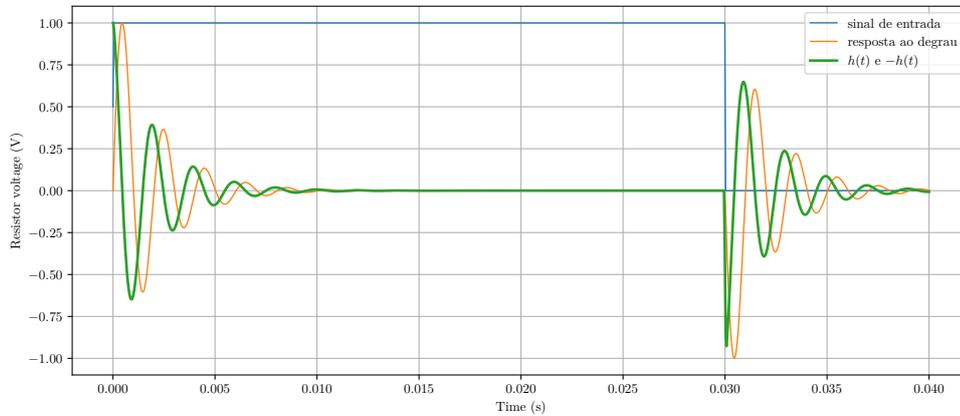


Figura 2.12: Resposta ao impulso para o circuito da Fig.2.5.

No exemplo anterior, a *resposta ao impulso* foi determinada a partir da resposta ao degrau unitário e diferenciando o seu sinal. Em alguns casos, a *resposta ao impulso* pode ser estimada diretamente por um sinal que se assemelhe a um *impulso*. Na Fig. 2.13 é apresentado um sistema mecânico onde se planeja determinar a resposta ao impulso coletada por um microfone e a excitação imitando um impulso feita por um martetele elétrico posicionado na parte de baixo da placa cerâmica. A partir da resposta ao impulso pode-se avaliar se existe ou não fratura na peça cerâmica.

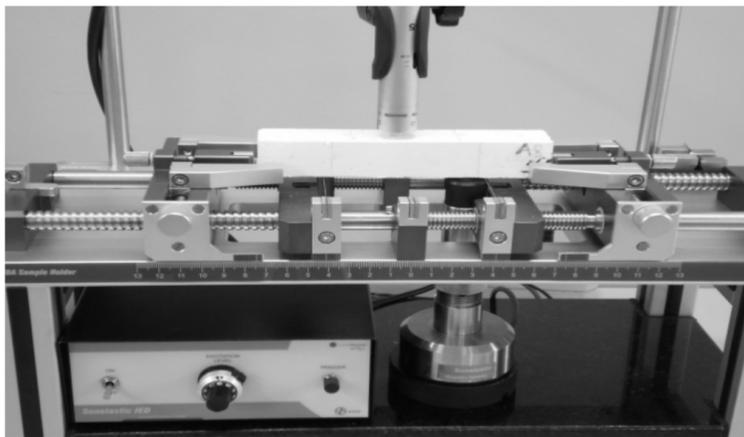


Figura 2.13: Equipamento para a avaliação de peças cerâmicas sujeitas a fratura.

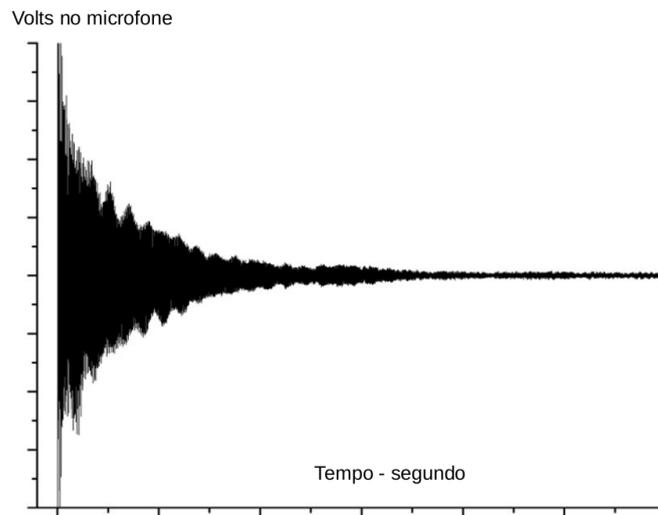


Figura 2.14: Resposta ao impulso da peça cerâmica apresentada da Fig. 2.13.

## 2.6 Exercícios propostos

1. Determine a integral de convolução entre os seguintes sinais:

(a)  $x(t) = e^{-at}u(t), a > 0$  e  $h(t) = Au(t)$

(b)  $x_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$  e  $x_2(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 2, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

(c)  $x(t) = e^{at}u(t), a > 0$  e  $h(t) = Au(t)$

(d)  $x(t) = \begin{cases} t+1 & 0 \leq t < 1, \\ -t & 1 \leq t < 2, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$  e  $h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1)$

(e)  $x(t) = u(t-3) - u(t-5)$  e  $h(t) = e^{-3t}u(t)$

(f)  $x(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 2, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$  e  $h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

2. Mostre que se  $y(t) = x(t) * h(t)$  então  $y(-t) = x(-t) * h(-t)$

3. Mostre que se  $x(t) = 0, t > T_1$  e  $h(t) = 0, t > T_2$  então  $y(t) = 0, t > T_1 + T_2$ .

4. Considere os seguintes sistemas LTI em que  $h(T)$  é a resposta ao impulso. Determine se eles são estáveis ou causais. Justifique a resposta.

54CAPÍTULO 2. SISTEMAS LINEARES E INVARIANTES NO TEMPO

- (a)  $h(t) = e^{-2t}u(t - 1)$
- (b)  $h(t) = e^{-2t}u(1 - t)$
- (c)  $h(t) = e^{-2|t|}$
- (d)  $h(t) = te^{-t}u(t)$
- (e)  $h(t) = 3\delta(t)$
- (f)  $h(t) = \cos(\pi t)u(t)$

5. Considere o sistema formado por dois sistemas em paralelo com respostas ao impulso:  $h_1(t) = e^{-t}u(t)$  e  $h_2(t) = 5e^{-5t}u(t - 1)$ . Determine:
- (a) Encontre a resposta ao impulso do sistema equivalente,
  - (b) O sistema equivalente é estável?
6. Considere o sistema formado por dois sistemas em cascata, com respostas ao impulso:  $h_1(t) = u(t - 1)$  e  $h_2(t) = e^{-2t}u(t)$
- (a) Encontre a resposta ao impulso do sistema total,
  - (b) O sistema é estável?
7. Encontre a resposta natural do circuito RL mostrado na Fig. 2.15 em que  $x(t)$  é uma tensão de entrada e  $y(t)$  é a corrente de saída. Admita  $y(0) = 1$ .

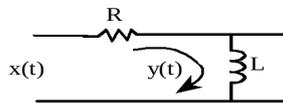


Figura 2.15: Figura do exercício 7.

8. Para o exercício 7 encontre a resposta particular e a resposta total admitindo:
- (a)  $x(t) = e^{\beta t}u(t)$  e  $y(0) = 1$
  - (b)  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$  e  $y(0) = 0$
9. Encontre a resposta do circuito RC mostrado Fig 2.16, admitindo:  $x(t) = u(t)$  e  $y(0) = -1V$ .

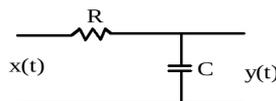


Figura 2.16: Figura do exercício 9.

10. Considere um sistema LTI, causal, cuja entrada  $x(t)$  e saída  $y(t)$  são relacionadas pela seguinte equação diferencial:  $\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t)$
- (a) Se  $x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t)$ , qual é  $y(t)$ ?
- (b) Determine a saída  $y(t)$  para a entrada  $x_1(t) = e^{-t} \cos(3t)u(t)$ . Sugestão: utilize o resultado da parte (a), notando que  $Re[x(t)] = x_1(t)$
11. Considere o circuito RLC mostrado na Fig. 2.17:

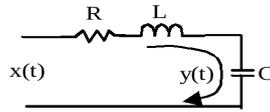


Figura 2.17: Figura do exercício 11.

- (a) determine a resposta natural,
- (b) admitindo  $y(0) = 1$  e  $\frac{d}{dt}y(0) = 0$  determine a resposta natural para os seguintes valores de R, L e C:  $R = 0, L = C = 1$ ,  $R = L = C = 1$  e  $R = 2, L = C = 1$
12. Resolva as seguintes equações diferenciais homogêneas:
- (a)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$
- (b)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1$
- (c)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$
- (d)  $\frac{d^3}{dt^3}y(t) + \frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$  e  $y''(0) = -2$
- (e)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + 5y(t) = 0, y(0) = 1$  e  $y'(0) = 1$
13. Determine e esboce as soluções das seguintes equações diferenciais:
- (a)  $\frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t), x(t) = u(t)$  e  $y(0) = -1$
- (b)  $\frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = 2x(t), x(t) = u(t)$  e  $y(0) = -1$

14. Determine o diagrama de blocos (forma direta II) dos seguintes sistemas LTI:

(a)  $4\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) = x(t) - 3\frac{d^2}{dt^2}x(t)$

(b)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t)$

(c)  $\frac{d^4}{dt^4}y(t) = x(t) - 2\frac{d}{dt}x(t)$

(d)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t) + 3\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$

15. Calcule a resposta ao degrau para os seguintes sistemas LTI:

(a)  $h(t) = e^{-|t|}$

(b)  $h(t) = -\delta(t+1) + \delta(t) - \delta(t-1)$

(c)  $h(t) = \cos(\pi t)[u(t+3) - u(t-3)]$

16. Escreva a equação diferencial que relaciona a saída  $y(t)$  com a entrada  $x(t)$  para o sistema representado pelo diagrama de blocos, Fig. 2.18. Determine também a resposta em frequência e a resposta ao impulso do sistema.

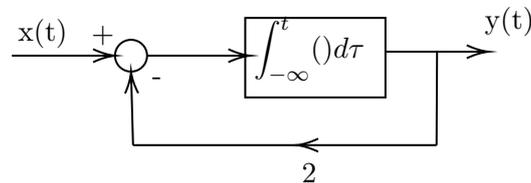


Figura 2.18: Figura do exercício 16.

## Capítulo 3

# Transformada de Laplace

A partir da equação da integral de convolução eq. 2.5 tem-se que a saída  $y(t)$  de um sistema LIT com entrada  $x(t)$  é dado por:

$y(t) = T\{x(t)\} = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$  onde  $h(t)$  é a resposta ao impulso do sistemas. Em particular, se a entrada é uma exponencial complexa  $x(t) = e^{st}$ , onde  $s = \sigma + j\omega$ , então a saída do sistema será:

$$\begin{aligned} y(t) &= T\{e^{st}\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{st}H(s) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Esse resultados mostra que as funções  $x(t) = e^{st}$  são as auto-funções<sup>1</sup> de quaisquer sistemas LIT e que transformação o sinal  $x(t)$  em  $y(t)$ , cujo auto-valores são definidos como:  $H(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$ . Esse resultado é definido como a *Transformada de Laplace* da resposta ao impulso do sistema.

A Transformada de Laplace de um sinal qualquer é definida como:

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad (3.2)$$

A transformada de Laplace é muito utilizada para analisar e caracterizar

---

<sup>1</sup>Linear Algebra, Kenneth Hoffman, Ray Kunze, 1971; ISBN-13: 978-0135367971

sistemas LTI em especial determinar a *função de transferência* do sistema, causalidade e estabilidade.

### 3.1 Região de convergência (ROC)

A existência da transformada de Laplace  $X(s)$  de um sinal  $x(t)$  depende da variável complexa  $s$  assim como do sinal  $x(t)$ . A região do plano complexo  $s \in \mathcal{S}$  tal que a integral da transformada de Laplace converge forma a *região de convergência (ROC)*.  $X(s)$  existe se somente se  $s$  está na ROC.

$$\begin{aligned} |X(s)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-st}| dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}| dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| \underbrace{|e^{j\omega t}|}_{=1} dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt \leq \infty \end{aligned}$$

A ROC é determinada de tal forma que  $x(t)e^{-\sigma t}$  seja absolutamente somável.

**Exemplo 24 :** Determine a transformada de Laplace de  $x(t) = e^{-at}u(t)$ .

*solução*

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{a+s} e^{-(a+s)t} \Big|_0^{\infty} = \left( \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(a+s)t} - 1 \right) \frac{-1}{a+s} \end{aligned}$$

Para que essa integral convirja, é necessário que  $\mathcal{R}\{a+s\} = a+\sigma > 0 \therefore \sigma > -a$  e a transformada de Laplace será:  $X(s) = \frac{1}{s+a}$ .

**Exemplo 25 :** Determine a transformada de Laplace para  $x(t) = -e^{-at}u(-t)$ .

*solução:*

$$\begin{aligned} X(s) &= - \int_{-\infty}^0 e^{-at} e^{-st} dt \\ &= - \int_{-\infty}^0 e^{-(a+\sigma+j\omega)t} dt \\ &= \frac{-1}{a + \sigma + j\omega} e^{-(a+\sigma+j\omega)t} \Big|_{-\infty}^0 \end{aligned}$$

Esse resultado é válido somente quando  $a + \sigma < 0$  ou  $\sigma < -a$  e, neste caso, a transformada de Laplace será  $X(s) = \frac{1}{a + s}$ .

**Exemplo 26 :** Determine a transformada de Laplace de  $x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$ .

*solução:*  $X(s)$  será a soma das seguintes transformadas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-at}u(t)] &= \frac{1}{s + a}, \quad (\sigma > -a), \\ \mathcal{L}[e^{at}u(-t)] &= \frac{-1}{s - a}, \quad (\sigma < a) \end{aligned}$$

se  $a > 0$ , ou seja  $x(t)$  cai quando  $|t| \rightarrow \infty$ , a interseção das regiões de convergência será a região  $-a < \sigma < a$ , e a resposta será dada por:  $\mathcal{L}[x(t)] = \frac{1}{s + a} - \frac{1}{s - a} = \frac{-2a}{s^2 - a^2}$ . Entretanto, se  $a < 0$ , ou seja  $x(t)$  cresce sem limite quando  $|t| \rightarrow \infty$ , a interseção das duas ROC será um conjunto vazio e a transformada de Laplace não existe.

Neste ponto adota-se que  $x(t)$  será de ordem exponencial, ou seja, existe uma constante  $a$ , um valor positivo  $t_0$  e  $M$  tal que  $|x(t)| < Me^{at}, \forall t > t_0$  e  $x(t)$  seja definido. Essa condição é necessária para exista a transformada de Laplace. Sinais da forma  $x(t) = e^{t^2}$  não possuem transformada de Laplace, porém todas as funções polinomiais possuem.

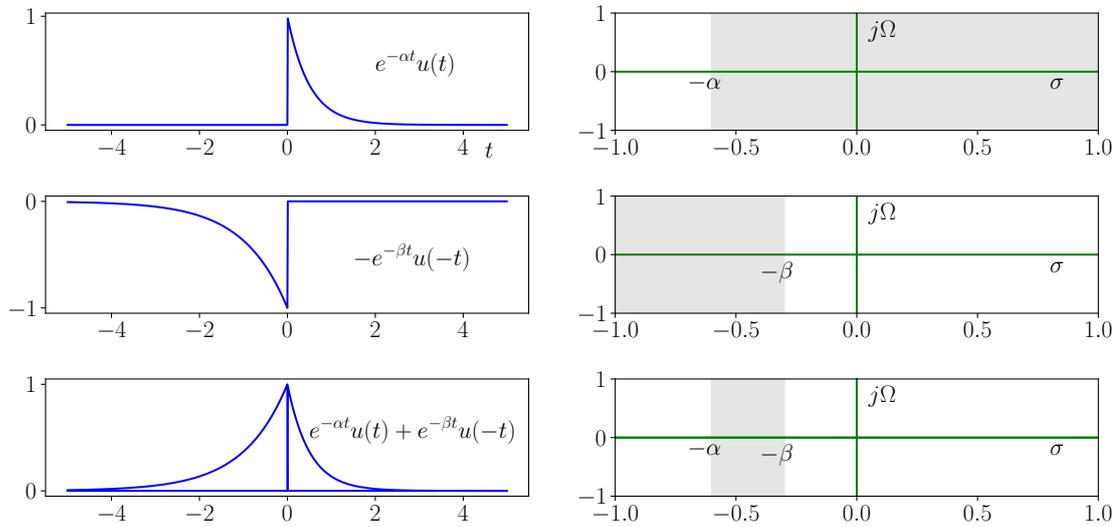


Figura 3.1: As figuras da esquerda são as respostas no tempo e as da direita o plano  $\mathbb{C}$  com a região de convergência em cinza. A primeira linha corresponde a uma função lateral direita, a segunda linha uma função lateral esquerda e a última uma função bilateral.

## 3.2 Propriedades da ROC

A existência da transformada de Laplace  $X(s)$  de um dado sinal  $x(t)$  depende se sua integral converge, o que dependerá de  $x(t)$  e também de  $\sigma$ . Sinais  $x(t)$  com *duração finita* ( $x(t) \neq 0, t_0 < t < t_1$ ) terão sempre transformada de Laplace.

Sinais *laterais direitos* ( $x(t) = x(t)u(t - t_0)$ ) possui duração infinita para  $t > t_0$ . Neste caso o sinal  $x(t)e^{-\sigma t}$  será absolutamente somável se  $\sigma > 0$ . Sinais laterais esquerdos ( $x(t) = x(t)u(t_0 - t)$ ) terão duração infinita para  $t < t_0$ , e valores  $\sigma < 0$  farão  $x(t)e^{-\sigma t}$  ser absolutamente somável.

Consolidando esses resultados, a ROC possui as seguintes propriedades:

1. Se  $x(t)$  é absolutamente somável e de duração finita então a ROC de  $X(s)$  é todos o plano  $\mathcal{S}$ ;
2. Se  $x(t)$  é um sinal lateral direito e  $\mathcal{R}\{s\} = \sigma_0$  está na ROC, então

qualquer  $s$  a direita de  $\sigma_0$  (i.e.,  $\mathcal{R}\{s\} > \sigma_0$ ) está também na ROC. Neste caso, a ROC é um semi-plano lateral direito, Fig. 3.1 primeira linha;

3. Se  $x(t)$  é um sinal lateral esquerdo com  $\mathcal{R}\{s\} = \sigma_0$  na ROC, então qualquer  $s$  a esquerda de  $\sigma_0$  (i.e.,  $\mathcal{R}\{s\} < \sigma_0$ ) estará também na ROC. Neste caso, a ROC é um semi-plano lateral esquerdo, Fig. 3.1 segunda linha;
4. Se  $x(t)$  é bilateral, então a ROC é a interseção de dois semi-planos e neste caso poderá corresponder a uma faixa ou um conjunto vazio, Fig. 3.1 terceira linha;
5. A ROC deve ser conexa.

**Exemplo 27 :** Determine a transformada de Laplace para um sinal bilateral da seguinte forma:  $x(t) = e^{-b|t|}$ .

*solução:* Adotando  $|x(t)| = \begin{cases} -x(t) & \text{se } x(t) < 0, \\ x(t) & \text{se } x(t) \geq 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[e^{-b|t|}] \\ &= \mathcal{L}[e^{-bt}u(t)] + \mathcal{L}[e^{bt}u(-t)] \end{aligned}$$

A transformada de Laplace poderá ser obtida a partir dos exemplos anteriores.  $\mathcal{L}[e^{-bt}u(t)] = \frac{1}{s+b}$ ,  $Re[s] > -b$  e seja  $b = -a$  tem-se  $\mathcal{L}[e^{bt}u(-t)] = \mathcal{L}[e^{-at}u(-t)] = -\frac{1}{s+a} = -\frac{1}{s-b}$ ,  $Re[s] < -a = b$ . Combinando os dois resultados, tem-se  $\mathcal{L}[e^{-b|t|}] = \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = \frac{-2b}{s^2 - b^2}$ ;  $-b < Re[s] < b$

Se  $X(s)$  existe ou não dependerá de  $b$ . Se  $b > 0$ ,  $x(t)$  decai exponencialmente com o aumento de  $|t| \rightarrow \infty$ , e a ROC é a faixa entre  $-b$  e  $b$  e,  $X(s)$  existe. Caso  $b < 0$ , i.e.,  $x(t)$  cresce exponencialmente com  $|t| \rightarrow \infty$ , então a ROC será um conjunto vazio e  $X(s)$  não existe.

### 3.3 Propriedades da transformada de Laplace

A transformada de Laplace possui um conjunto de propriedades que são usadas normalmente para facilitar o seu cálculo. Deve se ter um cuidado especial com a ROC. Para essas propriedades será adotado que:  $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ ,  $ROC = R_x$  e  $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ ,  $ROC = R_y$ .

As propriedades que não forem justificadas nessa seção serão justificadas no Cap. Transformada de Fourier, embora a transformada de Fourier seja uma restrição da transformada de Laplace a argumentação poderá ser estendida para o caso mais geral.

1. Linearidade:  $\mathcal{L}\{ax(t) + by(t)\} = aX(s) + bY(s)$ ,  $ROC \supseteq (R_x \cap R_y)$

A ROC da combinação linear de  $x(t)$  e  $y(t)$  deveria ser a intersecção das ROCs individuais  $R_x \cap R_y$  nas quais  $X(s)$  e  $Y(s)$  existem. Embora possa ser observado que em alguns casos (p.ex. *de cancelamentos entre polos e zeros*) a ROC poderá ser maior que  $R_x \cap R_y$ , como mostrado no ex. 28.

**Exemplo 28 :** Seja  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{s+1}$ ,  $Re[s] > -1$ , e

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad Re[s] > -1.$$

Então  $\mathcal{L}\{x(t) - y(t)\} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$ ,  $Re[s] > -2$  A ROC da combinação dos dois sinais é maior que a intersecção das ROC individuais.

2. Deslocamento temporal:  $\mathcal{L}\{x(t - t_0)\} = e^{-t_0s} X(s)$ ,  $ROC = R_x$
3. Deslocamento no domínio de Laplace:  $\mathcal{L}\{e^{s_0t} x(t)\} = X(s - s_0)$ ,  $ROC = R_x + Re[s_0]$  A ROC é deslocada horizontalmente de  $Re[s_0]$ .
4. Escala temporal:  $\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$ ,  $ROC = \frac{R_x}{a}$  A ROC é horizontalmente escalada de  $1/a$ , o qual poderá ser tanto positivo quanto negativo, e nesse caso a transformada de Laplace é invertida horizontalmente.

5. Conjugado:  $\mathcal{L}\{x^*(t)\} = X^*(s^*)$ ,  $ROC = R_x$  **Justificativa:**

$$X^*(s^*) = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-s^*t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}[x^*(t)]$$

6. Convolução:  $\mathcal{L}\{x(t) * y(t)\} = X(s)Y(s)$ ,  $ROC \supseteq (R_x \cap R_y)$  Observe que a ROC da convolução pode ser maior que a intersecção  $R_x$  e  $R_y$ , devido a possibilidade do cancelamento de polos e zeros, similar a propriedade linear.

**Exemplo 29 :** Considere

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \frac{s+1}{s+2}, \quad Re[s] > -2$$

e

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] = \frac{s+2}{s+1}, \quad Re[s] > -1$$

então

$$\mathcal{L}[x(t) * y(t)] = X(s)Y(s) = 1,$$

onde a ROC é todo plano S.

7. Diferenciação no tempo:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = sX(s), \quad ROC \supseteq R_x$$

Pode ser justificado pela diferenciação da inversa da transformada de Laplace:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \frac{d}{dt}e^{st} ds = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} sX(s)e^{st} ds$$

tem-se

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right] = s^n X(s)$$

multiplicando  $X(s)$  por  $s$  pode causar o cancelamento de polos e zeros e, assim a ROC resultante poderá ser maior que  $R_x$ .

**Exemplo 30 :** Dado

$$\mathcal{L}[u(t)] = 1/s, \quad Re[s] > 0$$

tem-se:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}u(t)\right] = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1, \quad \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\delta(t)\right] = s, \quad \mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)\right] = s^n,$$

A ROC é todo o plano- $\mathcal{S}$

### 8. Diferenciação no plano- $\mathcal{S}$

$$\mathcal{L}[tx(t)] = -\frac{d}{ds}X(s), \quad ROC = R_x$$

Pode ser justificado pela diferenciação da transformada de Laplace:

$$\frac{d}{ds}X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (-t)x(t)e^{-st} dt$$

Repetindo

$$\mathcal{L}[t^n x(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} X(s), \quad ROC = R_x$$

### 9. Integração no tempo

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{X(s)}{s}, \quad ROC \supseteq (R_x \cap \{Re[s] > 0\})$$

Pode ser justificado por:

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

e usando a propriedade de convolução tem-se

$$\mathcal{L}[x(t) * u(t)] = X(s) \frac{1}{s}$$

Observe que a ROC de  $\mathcal{L}[u(t)] = 1/s$  é o semi-plano lateral direito  $Re[s] > 0$ , a ROC de  $X(s)/s$  é a intersecção de duas ROCs  $R_x \cap \{Re[s] > 0\}$ , exceto se ocorrer polo e zero cancelamento (quando  $x(t) = d\delta(t)/dt$  com  $X(s) = s$ ) nesse caso a ROC é todo plano- $\mathcal{S}$ .

### Teoremas do valor inicial e final

O valor inicial de um sinal lateral direito,  $x(0) \triangleq \lim_{t \rightarrow 0} x(t)$ , e o valor final,  $x(\infty) \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  (se existir) pode ser determinado pela transformada de Laplace  $X(s)$  com o uso de:

- valor inicial:  $x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$

- valor final:  $x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

Justificativa: como  $x(t) = x(t)u(t) = 0$  (sinal lateral direito) para  $t < 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{UL}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} dx(t)e^{-st} \\ &= x(t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt = sX(s) - x(0) \end{aligned}$$

- quando  $s \rightarrow 0$ , as equações acima se tornam  $\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dt}x(t)\right] e^{-st}dt = \int_0^{\infty} dx(t) = x(\infty) - x(0) = \lim_{s \rightarrow 0} [sX(s) - x(0)]$  ou seja,  $\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = x(\infty)$
- quando  $s \rightarrow \infty$ , tem-se  $\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dt}x(t)\right] e^{-st}dt = 0 = \lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s) - x(0)]$  ou seja,  $\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0)$

Entretanto, em uma dada função  $x(t)$  o *valor final* não depende na localização dos polos de  $X(s)$  exceto se estiverem na origem. Considere os seguintes casos:

- se os polos estão no semi-plano lateral direito do plano-S,  $x(t)$  irá conter termos cujo crescimento será exponencial e, neste caso, não será limitado,  $x(\infty)$  não existe;
- se existir um par de polos complexos conjugados estiverem sobre o eixo imaginário,  $x(t)$  conterà um termo senoidal e  $x(\infty)$  não será definido;
- se os polos estão no semi-plano lateral esquerdo do plano-S,  $x(t)$  conterà um termo decrescente exponencialmente sem contribuição para o valor final;
- somente quando os polos estão na origem do plano-S,  $x(t)$  irá conter um componente (DC) constante que é o *valor final* do sinal.

Considerando as observações acima, o valor final também pode ser obtido pela expansão em frações parciais de  $X(s)$ :  $X(s) = \sum_{i=0}^n \frac{C_i}{s - p_i} =$

$\frac{C_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{s - p_i}$  onde  $p_i$ 's são os polos e  $p_0 = 0$ . O sinal correspondente no tempo será:  $x(t) = \sum_{i=0}^n C_i e^{p_i t} = C_0 + \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}$ ,  $t > 0$ . Todos os termos exceto o primeiro representam exponenciais crescentes/decrescentes ou senoides. Multiplicando ambos os lados de  $X(s)$  por  $s$  e fazendo  $s \rightarrow 0$ , obtem-se:  $\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ C_0 + \sum_{i=1}^n \frac{sC_i}{s - p_i} \right] = C_0$ . Todos os termos se tornam zero, exceto o primeiro termo  $C_0$ . Se todos os polos  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  estão no semi-plano lateral esquerdo do plano-S, seus sinais no tempo terão um decaimento para zero, deixando apenas o primeiro termo  $C_0$ , o *valor final*  $x(\infty)$ .

**Exemplo 31 :**  $X(s) = \frac{1}{s(s+2)}$  primeiro se encontra  $x(t): x(t) = \mathcal{L}[X(s)] = \mathcal{L} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} \right) \right] = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})u(t)$  Quando  $t \rightarrow \infty$ , tem-se  $x(\infty) = 1/2$ . Aplicando o teorema do *valor final*:  $x(\infty) = sX(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{s+2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$

**Exemplo 32 :**  $X(s) = \frac{1}{s(s-2)}$ . De acordo com o teorema do *valor final* tem-se:  $x(\infty) = sX(s) \Big|_{s=0} = -\frac{1}{2}$ . Entretanto, como a inversa da Transformada de Laplace  $x(t) = \mathcal{L}[X(s)] = \mathcal{L} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s} \right) \right] = \frac{1}{2}[e^{2t} - 1]u(t)$  não é limitada (o primeiro termo cresce exponencialmente), o *valor final* não existe.

O teorema do valor final pode inclusive para determinar o ganho DC do sistema (quociente entre a saída e a entrada) quando o sistema esta em *estado estacionário* e os componenetes dos transientes já decaíram. Normalmente se assume que a entrada é a função degrau unitário  $x(t) = u(t)$ , DC gain =  $\lim_{s \rightarrow 0} \left[ sH(s) \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)$ .

**Exemplo 33 :**

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+10}$$

O ganho DC no *estado estacionário*:  $t \rightarrow \infty$  poderá ser encontrado com  $\lim_{s \rightarrow 0} H(s) = 0.2$

### 3.4 Transformada de Laplace inversa

A fórmula da integral para a transformada inversa de Laplace, é dada pela integral de linha:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} e^{st} X(s) ds, \quad (3.3)$$

onde a integral é feita ao longo da linha vertical paralela ao eixo- $j\omega$ . Na prática, a determinação de da transformada inversa de Laplace para sistemas descritos por EDO é feito usando a técnica das frações parciais.

Condições: Ordem do  $Q(s)$  maior que  $P(s)$ , caso não seja divide-se os polinômios e trabalha-se o quociente.

Se os polos de  $H(s)$  forem distintos então  $X(s) = \sum_{k=1}^N \frac{Ak}{s-p_k}$  em que  $A_k = (s-p_k)X(s)|_{s=p_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , Teorema dos resíduos.

Se ocorrer um polo  $s_p$ , com multiplicidade  $r$ , então são incluídos  $r$  termos na expansão,  $\frac{k_1}{s-s_p}, \frac{k_2}{(s-s_p)^2}, \dots, \frac{k_r}{(s-s_p)^r}$  onde:

$$k_i = \frac{1}{(r-i)!} \frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}} \{(s-s_p)^r X(s)\}_{s=s_p}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.4)$$

Pares de transformadas de Laplace importantes

$$A_k e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{A_k}{s+a}, \quad \sigma > -a \quad (3.5)$$

$$\frac{k_r t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{k_r}{(s+a)^r}, \quad \sigma > -a \quad (3.6)$$

### 3.5 Transformada de Laplace de sinais típicos

1.  $\delta(t), \delta(t-\tau)$   
 $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^0 = 1, \forall s$  utilizando a propriedade do deslocamento temporal, tem-se  $\mathcal{L}[\delta(t-\tau)] = e^{-s\tau} \forall s$

- 2.
- $u(t)$
- ,
- $t u(t)$
- ,
- $t^n u(t)$

Considerando a propriedade de integração no domínio do tempo, tem-se:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}, \text{Re}[s] > 0. \text{Aplicando a diferenciação}$$

no domínio S, tem-se:  $\mathcal{L}[tu(t)] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{1}{s^2}$ ,  $\text{Re}[s] > 0$  e em geral:

$$\mathcal{L}[t^n u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \text{Re}[s] > 0.$$

- 3.
- $e^{-at}u(t)$
- ,
- $te^{-at}u(t)$

Aplicando a propriedade do deslocamento no domínio S tem-se  $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$ ,  $\text{Re}[s] > 0$  tem-se  $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}$ ,  $\text{Re}[s] > -a$ . Apli-

cando a mesma propriedade tem-se  $\mathcal{L}\{t^n u(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ ,  $\text{Re}[s] > 0$  tem-se

$$\mathcal{L}\{t^n e^{-at}u(t)\} = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}, \text{Re}[s] > -a$$

- 4.
- $e^{-j\omega_0 t}u(t)$
- ,
- $\sin(\omega_0 t)u(t)$
- ,
- $\cos(\omega_0 t)u(t)$

substituindo  $a$  nas transformadas conhecidas

$$\mathcal{L}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}[s] > -\text{Re}[a]$$

por  $a = \pm j\omega_0$ , tem-se

$$\mathcal{L}[e^{-j\omega_0 t}u(t)] = \frac{1}{s+j\omega_0} \quad \text{and} \quad \mathcal{L}[e^{j\omega_0 t}u(t)] = \frac{1}{s-j\omega_0} \quad \text{Re}[s] > 0$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega_0 t)u(t)] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0}\right] = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

e

$$\mathcal{L}[\sin(\omega_0 t)u(t)] = \frac{1}{2j}\mathcal{L}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{s+j\omega_0}\right] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

- 5.
- $t \cos(\omega_0 t)u(t)$
- ,
- $t \sin(\omega_0 t)u(t)$

substituindo  $a$  nas transformadas

$$\mathcal{L}[te^{-at}u(t)] = \frac{1}{(s+a)^2}, \quad \text{Re}[s] > -a$$

by  $a = \pm j\omega_0$ , tem-se

$$\mathcal{L}[te^{-j\omega_0 t}u(t)] = \frac{1}{(s+j\omega_0)^2}, \quad \text{and} \quad \mathcal{L}[te^{j\omega_0 t}u(t)] = \frac{1}{(s-j\omega_0)^2}, \quad \text{Re}[s] > -a$$

### 3.6. REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS LTI PELA TRANSFORMADA DE LAPLACE 69

e

$$\mathcal{L}[t \cos(\omega_0 t)u(t)] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[t(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s - j\omega_0)^2} + \frac{1}{(s + j\omega_0)^2}\right] = \frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

e

$$\mathcal{L}[t \sin(\omega_0 t)u(t)] = \frac{1}{2j}\mathcal{L}[t(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{(s - j\omega_0)^2} - \frac{1}{(s + j\omega_0)^2}\right] = \frac{2s\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

6.  $e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t)$ ,  $e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t)$

Aplicado a propriedade do deslocamento no plano-S

$$\mathcal{L}[\cos(\omega_0 t)u(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

e

$$\mathcal{L}[\sin(\omega_0 t)u(t)] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

tem-se

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t)] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$$

e

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t)] = \frac{\omega_0}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$$

O logaritmo de número complexo: para números reais, tem-se a seguinte relação:  $y = \ln(x) \rightarrow x = e^y$  com  $x \in \mathbb{R}^+$  e  $y \in \mathbb{R}$ . Essa relação pode ser usado para estender o logaritmo para o campo complexo:  $w = \ln(z) \rightarrow z = e^w$  com  $w, z \in \mathbb{C}$ . A única condição é  $z \neq 0$ . Desta forma, para se obter uma expressão para  $\ln(z)$ . Escrevendo a forma exponencial de  $z$ ,  $z = \rho e^{i\theta}$ , segue que  $\rho e^{i\theta} = z = e^w = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv}$ , onde  $u$  e  $v$  representam a parte real e imaginária de  $\ln(z)$ . Dessa forma,  $u$  e  $v$  são:  $|z| = \rho = e^u \rightarrow u = \ln|z|$  e  $e^{i\theta} = e^{iv} \rightarrow v = \arg(z)$ , e  $\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z)$ . Note que o logaritmo complexo assume infinitos valores, dado que  $\arg(z)$  contém todos os números da forma  $\theta + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 3.6 Representação de sistemas LTI pela transformada de Laplace

Considerando a propriedade de convolução, os sistemas LTI podem se re-escritos como:

$$y(t) = h(t) * x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = H(s)X(s) \quad (3.7)$$

Tabela 3.1: Alguns pares de transformada de Laplace

Função	$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$	$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$	Região de convergência
impulso unitário	$\delta(t)$	1	$\forall s$
impulso atrasado	$\delta(t - \tau)$	$e^{-s\tau}$	$\forall s$
degrau unitário	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re(s) > 0$
rampa	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\Re(s) > 0$
	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\Re(s) > 0$
degrau unitário atrasado	$u(t - \tau)$	$\frac{1}{s} e^{-\tau s}$	$\Re(s) > 0$
exponencial	$e^{-\alpha t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\Re(s) > -\alpha$
exponencial bilateral	$e^{-\alpha t }$	$2 \frac{\alpha}{\alpha^2 - s^2}$	$-\alpha < \Re(s) < \alpha$
exponential	$(1 - e^{-\alpha t}) \cdot u(t)$	$\frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$	$\Re(s) > 0$
seno	$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\Re(s) > 0$
cosseno	$\cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\Re(s) > 0$
seno hiperbolico	$\sinh(\alpha t) \cdot u(t)$	$\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$	$\Re(s) >  \alpha $
cosseno hiperbolico	$\cosh(\alpha t) \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$	$\Re(s) >  \alpha $
seno amortecido	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$\Re(s) > -\alpha$
cosseno amortecido	$e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$\Re(s) > -\alpha$
logaritmo natural	$\ln(t)u(t)$	$-\frac{1}{s}(\ln(s) - \gamma)$	$\Re(s) > 0$

### 3.6. REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS LTI PELA TRANSFORMADA DE LAPLACE 71

Se um sistemas LTI puder ser re-escrito por uma equação diferencial com coeficientes constantes relacionando a sua entrada e saída, a transformada de Laplace converte a equação diferencial em uma equação algébrica, propriedades da diferenciação e integração:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right] = s^n X(s) \quad (3.8)$$

Um sistemas LTI é *causal* se a sua saída em  $y(t_0)$  depende somente na entrada atual ou o seu passado ( $t \leq t_0$ ) de  $x(t)$ . Considerando que o sistema tem condições iniciais nulas  $y(t) \Big|_{t < 0} = 0$ , sua resposta  $y(t) = h(t)$  ao impulso  $x(t) = \delta(t)$  em  $t = 0$  com condições nulas em  $t < 0$ , i.e.,  $h(t) = h(t)u(t)$ . Sua resposta a uma entrada geral  $x(t)$  é :

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

Se um sistema LTI é causal, então a ROC de  $H(s)$  é o semi-plano lateral direito. Em particular, se  $H(s)$  é um quociente de polinômios  $H(s) = N(s)/D(s)$ , então o sistema é causal se somente se sua ROC é a direita do do polo mais a direita

#### Exemplo 34 :

Dado  $h(t) = \delta(t \pm 1)$  de um sistema LTI, encontre  $H(s)$ :

$$H(s) = \mathcal{L}[\delta(t \pm 1)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t \pm 1)e^{-st} dt = e^{\pm s}$$

Devem ser considerados os dois casos:

- quando  $h(t) = \delta(t+1)$ ,  $H(s) = e^s$  pode ser considerado como um caso especial polynomial (expansão em séries de Taylor):

$$X(s) = e^s = 1 + s + \frac{1}{2}s^2 + \dots + \frac{1}{n!}s^n + \dots$$

Como o polinômio do numerador tem ordem infinita, maior que do a ordem do denominador (zero), existe um polo em  $s = \infty$  e a ROC não é o plano lateral direito,  $h(t)$  não é causal.

- Quando  $h(t) = \delta(t - 1)$ , tem-se:

$$H(s) = e^{-s} = \frac{1}{e^s} = \frac{1}{1 + s + \frac{1}{2}s^2 + \dots + \frac{1}{n!}s^n + \dots}$$

Como a ordem do polinômio do denominador é infinita, maior do que a ordem do numerador (zero), não existe nenhum polo em  $s = \infty$  e a ROC é um plano lateral direito e  $h(t)$  é causal.

Um sistemas LTI é *estável* se sua resposta é limitada para uma entrada limitada para todo  $t$ :

$$\text{if } |x(t)| < B_x \text{ then } |y(t)| < \infty$$

Como a saída do sistema LTI é relacionado pela convolução, tem-se:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau < \infty$$

e

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t - \tau)|d\tau < B_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$$

o que é necessário:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$$

Se a resposta ao impulso  $h(t)$  de um sistema LTI é absolutamente somavel então o sistema é estável. Combinando as duas propriedades, tem-se:

Um sistema LTI causal com função de transferência  $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$  é estável se somente se todos os polos de  $H(s)$  estão no semi-plano lateral esquerdo do plano- $\mathcal{S}$ , ou seja, a parte real dos polos é negativa  $Re[s_p] < 0, \forall s_p$

**Exemplo 35 :** Seja a função LTI dada por

$$H(s) = \frac{1}{a + s}$$

, sem especificar a ROC. Essa  $H(s)$  poderia ser a transformada de uma das duas possibilidades dos sinais  $h(t)$ .

	$a > 0$	$a < 0$
$Re[s] > -a$ $h(t) = e^{-at}u(t)$	eixo- $j\omega$ na ROC causal, estável	eixo- $j\omega$ fora da ROC, causal, instável
$Re[s] < -a$ $h(t) = -e^{-at}u(-t)$	eixo- $j\omega$ na ROC não-causal, instável	eixo- $j\omega$ fora da ROC, não-causal, estável

**Exemplo 36 :** Seja a função de transferência LTI  $H(s) = \frac{e^{s\tau}}{s+1}$ ,  $Re[s] > -1$ . Essa é uma versão com deslocamento temporal de  $\mathcal{L}[e^{-t}u(t)] = 1/(s+1)$ , cuja resposta ao impulso é:  $h(t) = e^{-(t+\tau)}u(t+\tau)$  se  $\tau > 0$ , então  $h(t) \neq 0$  durante o intervalo  $-\tau < t < 0$ , o sistema não é causal, embora sua ROC seja o semi-plano lateral direito. Esse exemplo serve como um contra-exemplo mostrando que não é verdade que qualquer semi-plano lateral direito corresponde a um sistema causal, enquanto que todos os sistemas causais possuem ROCs como semi-planos laterais direitos. Entretanto, se  $X(s)$  é racional, então o sistema é causal se e somente se sua ROC é um semi-plano lateral direito.

Agora  $H(s)$  poderá ainda ser considerado como uma função racional em  $s$  com o numerador um polinômio de ordem  $M = \infty$ , qual é maior do que o grau do polinômio do denominador  $N = 1$ , ou seja,  $H(s)$  possui um polo em  $s = \infty$ , ou seja, sua ROC não pode ser um semi-plano lateral direita, e, o sistema não será causal. Por outro lado, se  $\tau < 0$ , então esse polinômio aparecerá no denominador, não existirá nenhum polo em  $s = \infty$ , a ROC será um semi-plano lateral direito e o sistema será causal.

### 3.7 Sistemas LTI descritos por EDO

Um computador analógico é um tipo de computador que utiliza os sinais contínuos dos fenômenos físicos, como grandezas elétricas, mecânicas ou hidráulicas, para modelar o problema a ser resolvido, já os computadores digitais usam sinais digitais. Como um computador analógico não sofre com o erro causado pela quantização. Em vez disso, os resultados de computadores analógicos estão sujeitos a erros causados por ruído eletrônico.

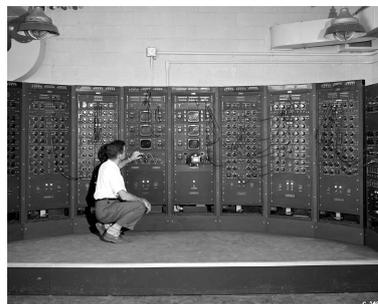
Computadores analógicos foram amplamente utilizados em aplicações científicas e industriais, onde os computadores digitais da época não tinham desempenho suficiente. Computadores analógicos podem ter uma ampla gama de complexidade. Réguas de cálculo ou nomogramas, Fig. 3.2(d) são os mais simples, enquanto computadores de controle de armas de fogo navais e grandes computadores híbridos (digitais e analógicos) estavam entre os mais complicados.

O advento da computação digital tornou os computadores analógicos mais simples obsoletos desde as décadas de 1950/60, embora os computadores analógicos continuassem sendo usados em algumas aplicações específicas, como o computador de vôo em aeronaves, e para ensinar sistemas de controle nas universidades. Aplicações mais complexas, como o radar de abertura sintética, permaneceram no domínio da computação analógica até a década de 1980. Os carburadores dos automóveis foram usados até a década de 1980/90, Fig. 3.2(a).

A programação dos computadores analógicos era feita pela interconexão (Fig. 3.2(b) e (c)) dos blocos integradores, somadores ou multiplicadores (implementados por operacionais) e os sistemas eram modelados como uma EDO.



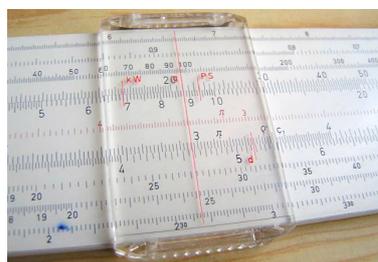
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.2: Exemplos de diferentes computadores analógicos (a) Carburador automotivo (b) Computador analógico (c) Detalhe do computador analógico e sua interface (d) Régua de cálculo.

Um sistema LTI possui a seguinte relação entre entrada e saída no tempo:  $y(t) = x(t) * h(t)$  e no domínio de Laplace:  $Y(s) = X(s)H(s)$ , assim  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ . Um sistema LTI descrito por uma EDO tem a seguinte forma:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \quad (3.9)$$

então aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados, tem-se uma equação algébrica em  $s$

$$Y(s) \left[ \sum_{k=0}^N a_k s^k \right] = X(s) \left[ \sum_{k=0}^M b_k s^k \right] \quad (3.10)$$

e sua função de transferência é um quociente de polinômios

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (3.11)$$

$$= \frac{b_M \prod_{k=1}^M (s - s_{z_k})}{a_N \prod_{k=1}^N (s - s_{p_k})} \quad (3.12)$$

$$= K \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.13)$$

onde  $K = b_M/a_N$  é um constante e  $s_{z_k}$ , ( $k = 1, 2, \dots, M$ ) são conhecidos como os *zeros* de  $H(s)$  (raízes do polinômio  $N(s)$ ) e  $s_{p_k}$ , ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) são conhecido como *polos* de  $H(s)$  (raízes do denominador do polinômio  $D(s)$ ). A EDO sozinha não especifica completamente a relação entre  $x(t)$  e  $y(t)$ , e informações adicionais, como as condições iniciais, devem ser fornecidas.

**Exemplo 37 :** Um circuito consistindo de um indutor  $L$  e um resistor  $R$  com tensão de entrada  $x(t) = v(t)$  aplicada aos dois elementos em série, é descrito pela EDO:

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace nessa equação, tem-se

$$V(s) = V_R(s) + V_L(s) = RI(s) + LsI(s) = (R + sL)I(s)$$

- se a saída for a corrente  $i(t)$  através do circuito RL, então o quociente entre a entrada  $V(s)$  e a saída  $I(s)$  é definida como a condutância do circuito:

$$H_I(s) = G(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{R + sL} = \frac{1}{L} \frac{1}{s + 1/\tau}$$

onde  $\tau = L/R$  e  $G(s) = 1/Z(s)$  é a impedância do circuito. A resposta temporal, tem-se:

$$h_I(t) = \frac{1}{L} e^{-t/\tau} u(t)$$

- se a saída for a tensão através do resistor  $v_R(t)$ , então a função de transferência do sistema é

$$H_R(s) = \frac{V_R(s)}{V(s)} = \frac{R}{R + sL} = \frac{R/L}{R/L + s} = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}$$

onde  $\tau \triangleq L/R > 0$ . Cujas resposta ao impulso é  $h_R(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$ .

- se a saída for a tensão através do indutor  $v_L(t)$  então a função de transferência é

$$H_L(s) = \frac{V_L(s)}{V(s)} = \frac{sL}{R + sL} = \frac{s}{1/\tau + s} = 1 - \frac{1/\tau}{s + 1/\tau} = 1 - H_R(s)$$

com resposta ao impulso dada por:  $h_L(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t)$

Como as ROCs de ambos  $H_R(s)$  e  $H_L(s)$  são os mesmos semiplanos à direita do único polo  $s_p = -1/\tau$  no lado negativo do eixo-Real, o eixo  $j\omega$  está contido na FOC e a resposta de frequência existe:

$$H_R(j\omega) = H_R(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1/\tau}{j\omega + 1/\tau}, \quad H_L(j\omega) = H_R(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{j\omega}{j\omega + 1/\tau}$$

**Exemplo 38 :** Uma tensão  $v(t)$  é aplicada como entrada em um resistor  $R$ , um capacitor  $C$  e um indutor  $L$  são conectados em série. De acordo com as Leis de Kirchhoff, o sistema pode ser descrito pela equação diferencial no domínio temporal:

$$v(t) = v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = L \frac{d}{dt} i(t) + R i(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

ou pelo conjunto de equações algébricas no domínio de Laplace:

$$V(s) = V_L(s) + V_R(s) + V_C(s) = [sL + R + \frac{1}{sC}]I(s)$$

se a corrente  $i(t)$  através do circuito é a saída, a função de transferência do sistema será:

$$H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = sL + R + \frac{1}{sC} = Z(s)$$

que corresponde a impedância total equivalente

$$Z_L(s) = sL, \quad Z_R(s) = R, \quad Z_C(s) = \frac{1}{sC}$$

Se a saída é a tensão através dos três elementos ( $V_L$ ,  $V_R$ , or  $V_C$ ), a função de transferência  $H(s)$  pode ser facilmente obtida pelo divisor de tensão:

- saída de tensão através do capacitor  $v_C(t)$

$$H_C(s) = \frac{1/sC}{Ls + R + 1/sC} = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}$$

- saída é a tensão através do resistor  $v_R(t)$

$$H_R(s) = \frac{R}{Ls + R + 1/sC} = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}$$

- saída é a tensão através do indutor  $v_L(t)$

$$H_L(s) = \frac{sL}{Ls + R + 1/sC} = \frac{s^2}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}$$

se for definido

$$\zeta \triangleq \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \omega_n \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

o denominador comum da função de transferência na forma padrão (canônica)

$$s^2 + (R/L)s + (1/LC) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s - p_1)(s - p_2)$$

com duas raízes

$$p_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n = (-\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n$$

e a função de transferência acima podem ser escritas como:

- saída em C:

$$H_C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

com dois polos  $p_1, p_2$  e sem zeros;

- saída em R:

$$H_R(s) = \frac{2\zeta\omega_n s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

com dois polos  $p_1, p_2$  e um zeros na origem;

- saída em L:

$$H_L(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

com dois polos  $p_1, p_2$  e dois zeros repetidos na origem.

**Exemplo 39 :** Identificação de sistemas: encontre  $h(t)$  e  $H(s)$  do sistema LTI, sabendo que a entrada é  $x(t)$  e a saída  $y(t)$ :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-3t}u(t) \\ y(t) = h(t) * x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \end{cases}$$

No domínio-S, a entrada e saída são relacionadas por:

$$X(s) = \frac{1}{s+3}, \quad R_X : \operatorname{Re}[s] > -3$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad R_Y : \operatorname{Re}[s] > -1$$

A função de transferência pode ser obtida por:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

O sistema  $H(s)$  possui dois polos  $p_1 = -1$  e  $p_2 = -2$  cuja ROC podem ser de três formas possíveis:

- $R_H : \operatorname{Re}[s] < -2$ ,  $h(t)$  é lateral esquerda (não-causal, instável);
- $R_H : -2 < \operatorname{Re}[s] < -1$ ,  $h(t)$  bilateral (não-causal, instável);
- $R_H : \operatorname{Re}[s] > -1$ ,  $h(t)$  é lateral direita (causal, estável).

Deve-se determinar qual das ROCs é verdadeira para  $H(s)$ . Como as ROC de um produto é a intersecção dos intervalos das ROCs dos fatores (sem o cancelamento de polos-zeros):

$$Y(s) = H(s)X(s), \quad R_Y = R_H \cap R_X$$

ROC de  $H(s)$  deverá ser a terceira opção acima e ter-se-á:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right] = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

A equação de  $H(s)$  poderá ser escrita como:

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = X(s)(s + 3)$$

Cuja inversa é um sistema de equações diferenciais com coeficientes constantes dado por:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 3x(t)$$

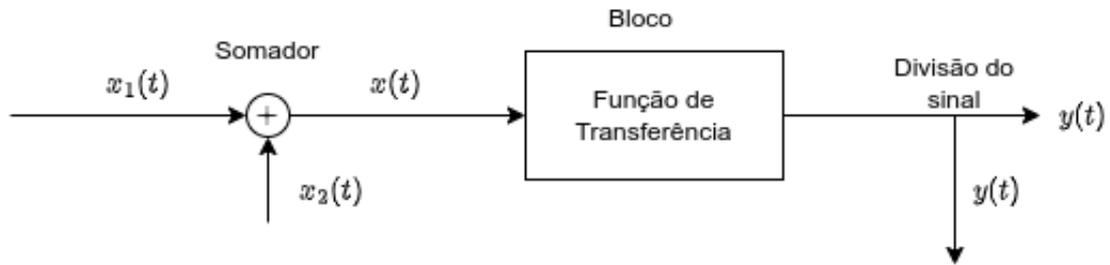


Figura 3.3: Elementos básicos de um diagrama em bloco.

### 3.8 Diagramas de bloco

Um *diagrama de blocos* de um sistema é uma representação gráfica das transformações realizadas por cada um dos componentes sobre os sinais do sistema. O diagrama de blocos fornece uma visão geral do sistema. Embora as transformações possam ser representadas no tempo, é mais comum de fazê-las no domínio de Laplace. A transformada de Laplace converte muitas das operações no tempo como a diferenciação, integração, convolução e outras em operações algébricas no domínio-S. Mais ainda, o comportamento de uma sistema complexo composto da interconexões de diferentes sub-sistemas LTI pode ser facilmente analisado no domínio-S. Primeiro será considerado alguns sistemas LTI interconectados simples.

- **elementos básicos:** (Fig. 3.3) possui os seguintes elementos, a esquerda o elemento de soma (círculo) onde  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ , observe o sinais, + ou -, junto das setas que entram no círculo. O bloco que relaciona  $x(t)$  com  $y(t)$ ,  $y(t) = h(t) * x(t)$  ou  $Y(s) = H(s)X(s)$ . Já na bifurcação da saída tem-se que os sinais são iguais a  $y(t)$ .
- **combinação paralela:** (Fig. 3.4(a)) se uma sistema é composto de dois sistemas LTI com resposta ao impulso  $h(t)$  e  $g(t)$  respectivamente conectados em paralelo.

$$y(t) = h(t) * x(t) + g(t) * x(t) = [h(t) + g(t)] * x(t) = h_{eq}(t) * x(t)$$

onde  $h(t)$  é a resposta ao impulso total:

$$h_{eq}(t) = h(t) + g(t), \quad \text{ou} \quad H_{eq}(s) = H(s) + G(s)$$

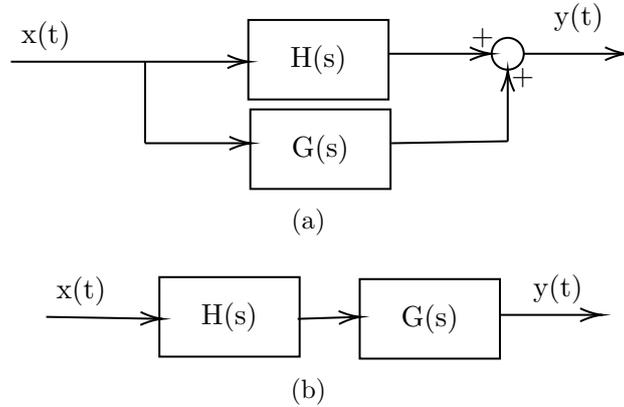


Figura 3.4: Tipos de associações (a) paralelo (b) série.

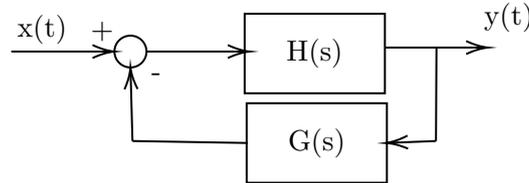


Figura 3.5: Sistema com retro-alimentação

- **combinação série:** (Fig. 3.4(b)) se o sistema é composto de dois sistemas LTI com respostas ao impulso  $h(t)$  e  $g(t)$  conectados em série.

$$y(t) = g(t) * [h(t) * x(t)] = [g(t) * h(t)] * x(t) = h_{eq}(t) * x(t)$$

onde  $h(t)$  é a resposta ao impulso total:

$$h_{eq}(t) = h(t) * g(t) = g(t) * h(t), \quad \text{ou} \quad H_{eq}(s) = H(s)G(s) = G(s)H(s)$$

- **Sistemas com realimentação:**

Sistemas com realimentação são sistemas composto por sub-sistemas LTI, Fig. 3.5, com  $h(t)$  na ligação direta de  $x(t)$  para  $y(t)$  e uma outra ligação  $g(t)$  que liga de  $y(t)$  para  $x(t)$ , a sua saída  $y(t)$  pode ser implicitamente determinada no domínio temporal

$$y(t) = h(t) * e(t) = h(t) * [x(t) + g(t) * y(t)]$$

ou

$$Y(s) = H(s)E(s) = H(s)[X(s) + G(s)Y(s)].$$

Enquanto a equação no tempo seja mais difícil de se resolver a equação no domínio de Laplace:  $Y(s)[1 - H(s)G(s)] = H(s)X(s)$  e a função de transferência poderá ser obtida por

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 - H(s)G(s)} = \frac{H(s)}{1 + [-G(s)H(s)]}$$

A realimentação poderá ser positiva ou negativa. Neste caso, existirá um sinal negativo em frente de  $g(t)$  e  $G(s)$  do caminho da realimentação tal que  $e(t) = x(t) - g(t) * y(t)$  e

$$H_{eq}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

**Exemplo 40 :** Seja um sistema de primeira ordem  $\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = x(t)$  descrito no domínio-S pela sua função de transferência:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s + 3} = \frac{1/s}{1 + 3/s}$$

Comparando o  $H(s)$  com a função de transferência do sistema de realimentação, pode ser observado que o sistema de primeira ordem pode ser representado como um sistema de realimentação com  $H(s) = 1/s$  (um integrador implementado por amplificador operacional) no caminho direto, e  $G(s) = 3$  (o coeficiente de realimentação) no caminho negativo reverso.

**Exemplo 41 :** Considere um sistema de segunda ordem cuja função de transferência é

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s + 1} \frac{1}{s + 2} = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

Essas três expressões para  $H(s)$  correspondem a três diferentes diagramas de blocos. As duas últimas expressões são respectivamente as formas *cascata* e *paralelas* compostas de dois sub-sistemas, e elas podem ser facilmente implementadas como:

Alternativamente, a primeira expressão, uma forma *direta*, poderá também ser utilizada. Para tanto, dever-se-á considerar a forma geral  $H(s) = Y(s)/X(s) = 1/(s^2 + as + b)$ , ou seja,

$$s^2Y(s) + asY(s) + bY(s) = X(s), \quad \text{ou} \quad s^2Y(s) = X(s) - asY(s) - bY(s)$$

dado que  $s^2Y(s)$ , pode-se primeiro obter  $sY(s)$  com o uso de um integrador  $1/s$ , e então obter a saída  $Y(s)$  a partir de  $sY(s)$  com o uso de outro integrador  $1/s$ . Visto que esse sistema pode ser representado como um sistema de realimentação com dois caminhos reversos negativos com  $a = 3$  de  $sY(s)$  e  $b = 2$  de  $Y(s)$ .

**Exemplo 42 :** Um sistema de segunda ordem cuja função de transferência é

$$H(s) = \frac{cs^2 + ds + e}{s^2 + as + b} = \frac{1}{s^2 + as + b}(cs^2 + ds + e)$$

. Esse sistema pode ser representado como a cascata de dois sistemas

$$Z(s) = H_1(s)X(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}X(s)$$

e

$$Y(s) = H_2(s)Z(s) = (cs^2 + ds + e)Z(s)$$

O primeiro sistema  $H_1(s)$  pode ser implementado com o uso de dois integradores com os caminhos reversos mostrados no exemplo anterior. E o segundo sistema é uma combinação linear de  $s^2Z(s)$ ,  $sZ(s)$  e  $Z(s)$ , todos estão disponíveis no caminho direto do primeiro sistema. O comportamento total do sistema poderá ser descrito por:

O diagrama de bloco desse exemplo poderá ser generalizado para representar qualquer sistema que seja representado por uma função racional de polinômios:

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (M \leq N)$$

se  $M > N$ ,  $H(s)$  pode ser separado em vários termos (por divisão longa) a qual poderá ser individualmente implementada e então combinada para gerar a saída  $Y(s)$ .

## 3.9 Transformada Unilateral de Laplace

A transformada de Laplace apresentada até então é conhecida como *bilateral* pois pode ser aplicada em sinais laterais esquerdos e laterais direito. Já a transformada de Laplace *unilateral* de um sinal arbitrário  $x(t)$  é definido como

$$\mathcal{UL}[x(t)] = X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)u(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Essa definição sempre assume que  $x(t) = 0$  para  $t < 0$ . Quando a transformada unilateral de Laplace é aplicada para se encontrar a função de transferência  $H(s) = \mathcal{UL}\{h(t)\}$  de um sistema LTI, é sempre considerado que o sistema é causal. E, a ROC é sempre o semi-plano lateral direito.

Pela definição, a transformada unilateral de Laplace de qualquer sinal  $x(t) = x(t)u(t)$  é idêntica a sua transformada bilateral. Entretanto, quando  $x(t) \neq x(t)u(t)$ , as duas transformadas são diferentes.

A transformada Unilateral de Laplace compartilha muitas das propriedades da transformada bilateral.

$$\mathcal{UL}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = \mathcal{UL}[x'(t)] = sX(s) - x(0^-)$$

**Prova:**

$$\begin{aligned} \mathcal{UL}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] &= \int_{0^-}^{\infty} x'(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} d[x(t)] = x(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t)d(e^{-st}) \\ &= -x(0^-) + s \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = sX(s) - x(0^-) \end{aligned}$$

Pode-se expandir esse resultado para derivadas de ordem superiores

$$\mathcal{UL}[x''(t)] = s\mathcal{UL}[x'(t)] - x'(0^-) = s^2X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

e no caso geral

$$\mathcal{UL}[x^{(n)}(t)] = s^n X(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k x^{(n-1-k)}(0^-)$$

**Exemplo 43 :** Considere seguinte sistema de segunda ordem descrito pela EDO:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) = 2u(t)$$

com condições iniciais:

$$y(0^-) = y_0 = 3, \quad y'(0^-) = y_1 = -5$$

### 3.10. RESOLVENDO EDO COM O USO DA TRANSFORMADA UNILATERAL LAPLACE 85

Aplicando a transformada unilateral Laplace em ambos os lados, tem-se:

$$s^2Y(s) - sy_0 - y_1 + 3sY(s) - 3y_0 + 2Y(s) = \frac{2}{s}, \quad \text{or} \quad [s^2 + 3s + 2]Y(s) = \frac{2}{s} + y_0(s+3) + y_1$$

resolvendo para  $Y(s)$ :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{y_0(s+3)}{(s+1)(s+2)} + \frac{y_1}{(s+1)(s+2)} + \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{3(s+3)}{(s+1)(s+2)} - \frac{5}{(s+1)(s+2)} + \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

Os dois primeiros termos são a solução homogênea (resposta do transiente) e o último termo é a solução particular (resposta estacionária). No domínio temporal a resposta é:

$$\begin{aligned} y_h(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{3(s+3)}{(s+1)(s+2)} - \frac{5}{(s+1)(s+2)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{6}{s+1} - \frac{3}{s+2} - \frac{5}{s+1} + \frac{5}{s+2} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \right] = [e^{-t} + 2e^{-2t}]u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \right] \\ &= [1 - 2e^{-t} + e^{-2t}]u(t) \end{aligned}$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = [1 - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t)$$

## 3.10 Resolvendo EDO com o uso da transformada Unilateral Laplace

Devido a propriedade de diferenciação, a transformada unilateral de Laplace é uma ferramenta poderosa para resolver EDO com condições iniciais. Observe-se que nesse caso o sistema com as condições iniciais fará que com a resposta seja diferente de zero mesmo quando a entrada é zero, solução homogênea.

O sistema tem em sua entrada uma função degrau e, neste caso, essa excitação determinará a resposta particular do sistema. A função particular é sempre da forma  $e^{st}$  com  $s \in \mathbb{C}$ ; podendo representar os casos de excitação constante (como no caso do exemplo), funções exponenciais crescentes ou decrescentes e funções senoidais.

**Exemplo 44 :** Um sistema é descrito pela EDO

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) = \alpha u(t)$$

com condições iniciais  $y(0^-) = \beta$  e  $y'(0^-) = \gamma$ . Para determinar  $y(t)$ , primeiro se aplica a transformada unilateral de Laplace na equação diferencial

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - \beta s - \gamma + 3sY(s) - 3\beta + 2Y(s) &= \\ = (s^2 + 3s + 2)Y(s) - \beta s - \gamma - 3\beta &= \\ = \alpha/s & \end{aligned}$$

que poderá ser resolvida para  $Y(s)$  algebricamente

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)} + \frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)} + \frac{\gamma}{(s+1)(s+2)} \\ &= Y_p(s) + Y_h(s). \end{aligned}$$

Essa é a solução geral de EDO e é composta de duas partes:

- **a solução homogênea (entrada zero)** causada pela condição inicial diferente de zero ( $y(0) \neq 0$ ,  $y'(0) \neq 0$ ) com  $x(t) = 0$  (uma equação diferencial é homogênea se sua entrada é zero):

$$Y_h(s) = \frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)} + \frac{\gamma}{(s+1)(s+2)}$$

- **uma resposta particular causada por condições iniciais nulas** ( $y(0) = y'(0) = 0$ ),  $x(t) \neq 0$ :

$$Y_p(s) = \frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}$$

Dado valores específicos de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  como  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$  e  $\gamma = -5$ ,  $Y(s)$  pode ser expandido por frações parciais:

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_p(s) + Y_h(s) \\ &= \frac{2}{s(s+1)(s+2)} + \frac{3(s+3)}{(s+1)(s+2)} - \frac{5}{(s+1)(s+2)} \\ &= \left[ \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \right] + \left[ \frac{6}{s+1} - \frac{3}{s+2} \right] + \left[ \frac{5}{s+2} - \frac{5}{s+1} \right] \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \end{aligned}$$

Finalmente, a transformada inversa de Laplace de  $Y(s)$  da uma resposta no tempo dada por  $y(t) = \mathcal{U}\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = [1 - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t)$ . A solução particular com a condição inicial nula (causada pela entrada  $x(t) = 2u(t)$ ) é  $y(t) = \mathcal{U}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}\right] = [1 - 2e^{-t} + e^{-2t}]u(t)$  que é diferente da saída com condições iniciais não-nulas.

Se for aplicada a transformação bilateral de Laplace na mesma equação diferencial, é obtido

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = (s^2 + 3s + 2)Y(s) = \alpha/s$$

que pode ser resolvido para  $Y(s) = \frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}$ . Essa é a solução particular acima com condição inicial nula. A partir disso observa-se que a transformada bilateral de Laplace pode apenas resolver equações com condições iniciais nulas. Quando existir um condição inicial não-nula deverá ser usada a transformada unilateral de Laplace.

### 3.11 Exercícios propostos

- Determine a transformada de Laplace e a região de convergência dos seguintes sinais:

- $x(t) = e^{at}u(t), \quad a > 0$
- $x(t) = -e^{at}u(-t) \quad a > 0$
- $x(t) = e^{-a|t|} \quad a > 0$
- $x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+) \quad a > 0$
- $x(t) = A \cos(\omega_0)t u(t)$  e  $A \sin(\omega_0)t u(t)$
- $x(t) = A \cos(\omega_0 + \varphi_0)t u(t)$  e  $A \sin(\omega_0 + \varphi_0)t u(t)$
- $x(t) = e^{-at} \cos(\omega_0t + \varphi_0)u(t)$
- $x(t) = tu(t)$
- $x(t) = u(t - 5)$
- $x(t) = t^n u(t)$

- Determine a transformada de Laplace dos seguintes sinais:

(a)  $x(t) = te^{-at}u(t) \quad a > 0$

(b)  $x(t) = \frac{t^2}{2}e^{-at}u(t) \quad a > 0$

(c) Baseando-se nos itens a e b, determine também a transformada de Laplace do seguinte sinal:  $x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \quad a > 0$

3. Dado que  $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2s}{s^2 - 2}$ , determine a transformada de Laplace de:

(a)  $x(2t)$

(b)  $x(t - 2)$

(c)  $2 \frac{d}{dt}x(t)$

(d)  $\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$

4. Determine a transformada de Laplace inversa de:

(a)  $X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \sigma > 0$

(b)  $X(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$

(c)  $X(s) = \frac{1}{s^2 + 8s + 16}$

(d)  $X(s) = \frac{2s^2 + 3}{s^3 + s^2 - 2}$

(e)  $X(s) = \frac{-5s - 7}{(s + 1)(s - 1)(s + 2)}$

(f)  $X(s) = \frac{s}{(s^2 + 9)(s^2 + 3)}$

(g)  $X(s) = \frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)^2}$

(h)  $X(s) = \frac{s^2 + s - 2}{s^3 + 3s^2 + 5s + 3}$

(i)  $X(s) = \frac{(s + 2)^3}{s^4}$

5. Dada a Transformada de Laplace  $X(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s - 1)^2}$ :

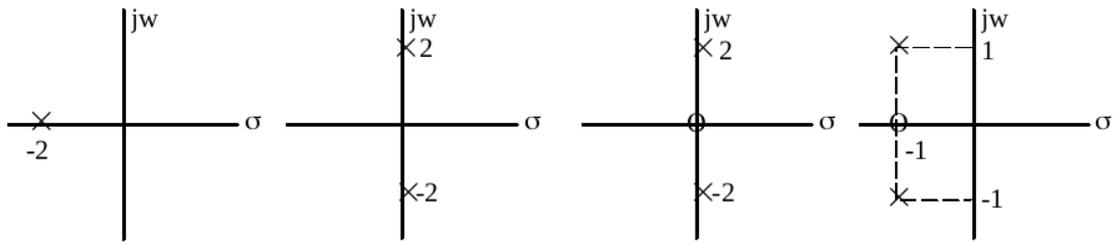


Figura 3.6: Exercício 6

- (a) Desenhe todas as regiões de convergência possíveis,
  - (b) Assinale as condições causais, não-causais e bilaterais,
  - (c) Assinale as regiões estáveis e não-estáveis,
  - (d) Forneça a resposta temporal para cada um dos casos.
6. Sabendo que os quatro diagramas de zero-polos, Fig. 3.6, correspondem a sinais causais, determine o correspondente sinal no domínio do tempo para cada um deles.
  7. Considere um sistema LTI com resposta ao impulso:  $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$ . Determine o sinal na saída do sistema quando se aplica na entrada o seguinte sinal:  $x(t) = tu(t)$
  8. Considere um sistema com  $M$  zeros e  $M$  polos tais que:  $c_k = \alpha_k + j\beta_k$  e  $p_k = -\alpha_k + j\beta_k$ . As localizações deles são simétricas em torno do eixo  $j\omega$ . Pede-se:
    - (a) Mostre que  $|H(\omega)| = 1$  (sistema passa-tudo).
    - (b) Determine e esboce a resposta de fase e de amplitude para um par zero-polo tal que:  $X(s) = \frac{s - \alpha}{s + \alpha}$
  9. Um sistema de controle possui um caminho direto com dois elementos,  $K$  e  $\frac{1}{s+1}$ , como mostrado na Fig. 3.7. Se for incluído um caminho reverso,  $s$ , qual o sistema equivalente de  $R(s)$  para  $Y(s)$ ? Sendo  $K \in \mathbb{R}$  determine quais de valores de  $K$  fazem o sistema ficar estável.

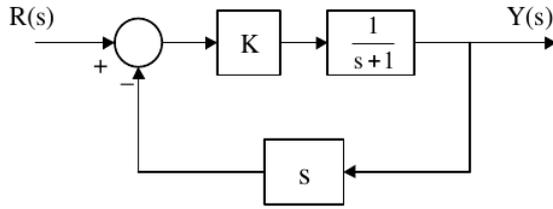


Figura 3.7: Exercício 9.

10. Determine a função de transferência entre  $R(s)$  para  $Y(s)$  do sistema mostrado na Fig. 3.8.

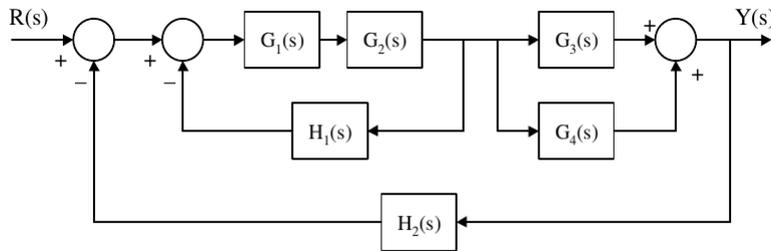


Figura 3.8: Exercício 10.

11. Determine a função de transferência entre  $R(s)$  para  $Y(s)$  do sistema mostrado na Fig. 3.9.

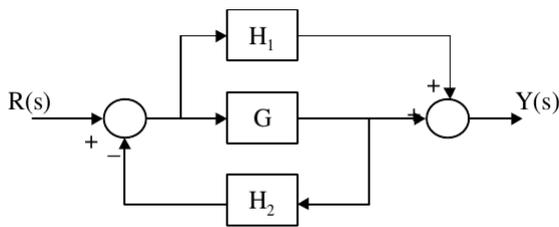


Figura 3.9: Exercício 11

12. Determine a função de transferência entre  $R(s)$  e  $D(s)$  para  $Y(s)$  do sistema mostrado na Fig. 3.10. Como poderia ser resolvido esse problema usando a linearidade?

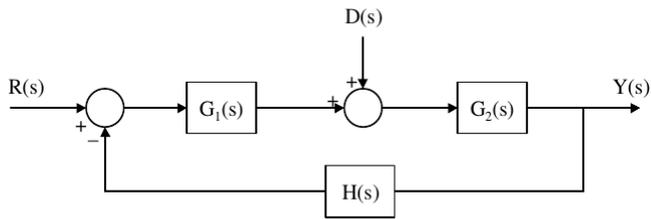


Figura 3.10: Exercício 12.

13. Determine a função de transferência entre  $R(s)$ ,  $D_1(s)$  e  $D_2(s)$  para  $Y(s)$  do sistema mostrado na Fig. 3.11.

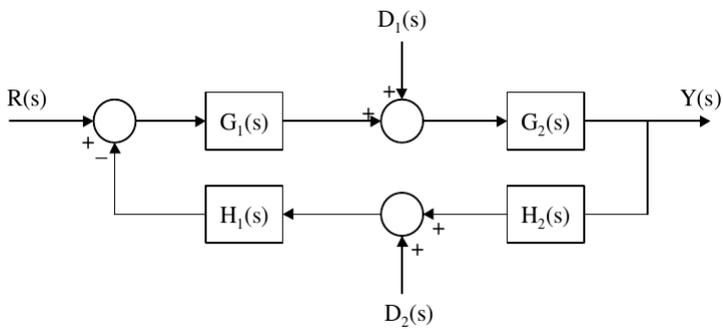


Figura 3.11: Exercício 13.



## Capítulo 4

# A Transformada de Fourier: tempo contínuo

A transformada de Fourier é uma transformada que expressa uma função em termos de funções de base senoidais, como a soma ou integral de funções senoidais multiplicadas por coeficientes complexos. A transformada de Fourier pode ser vista como um caso particular da transformada Laplace quando  $s = j\omega$ . As transformadas são operadores lineares e são invertíveis. A transformada inversa tem quase a mesma forma que a transformada direta mas normalmente é calculado com o uso de frações parciais ou computacionalmente usando o algoritmo FFT.

As transformadas contínuas e discretas de Fourier têm muitas aplicações nas engenharias em disciplinas como processamento de sinal, processamento de imagem, estatística, criptografia, acústica, oceanografia, sismologia, óptica e outras áreas. Nos campos relacionados com o processamento de sinal, a transformada de Fourier é tipicamente utilizada para decompor um sinal nas suas componentes em frequência ou na estimativa da densidade espectral de potência.

As funções de base senoidal são funções de diferenciação, o que implica que esta representação transforma equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes em equações algébricas ordinárias. Através do teorema da convolução, as transformadas tornam a complicada operação de convolução em multiplicações simples.

Esse capítulo apresenta os principais resultados da Transformada de Fourier para sinais em tempo contínuo e no Capítulo 5 é feito um paralelo

para sinais discretos, apresentando as principais diferenças.

## 4.1 Definição e interpretação

A Transformada de Fourier pode ser interpretada a partir da Transformada de Laplace e, pode também ser derivada a partir do limite da série de Fourier, seção 4.60,

$$X(\omega) = X(s)\Big|_{s=j\omega} \quad (4.1)$$

O par de transformadas de Fourier, em  $\omega$  radianos/s, para sinais contínuos são:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4.2)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (4.3)$$

$$(4.4)$$

ou para o caso de sinais em tempo discretos,

$$X_{2\pi}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (4.5)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X_{2\pi}(\omega)e^{j\omega n} d\omega \quad (4.6)$$

$$(4.7)$$

onde  $X_{2\pi}(\omega)$  significa que o espectro de  $X(\omega)$  é repetido em  $2\pi = \omega_s$ . A abordagem discreta será apresentada no Capítulo 5.

Como  $X(j\omega)$  é complexo a sua representação normalmente é feita como:  $X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\angle X(j\omega)}$ . O gráfico  $|X(j\omega)| \times \omega$  é conhecido como espectro de amplitude e o gráfico  $\angle X(j\omega) \times \omega$  é conhecido com espectro de fase. O termo espectro diz respeito a uma medida em função do seu comprimento de onda ou frequência.

A condição de existência da Transformada de Fourier é que o sinal  $x(t)$  seja de energia ou potência finita. Deve atender as condições de Dirichlet,

- número finito de descontinuidades;
- número finito de máximos e mínimos;
- absolutamente somável,  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

Um sinal periódico não é absolutamente somável e, a princípio, não possui transformada de Fourier. A série e a transformada de Fourier são relacionadas pelas função impulso, a ser discutido na seção 4.5.

**Exemplo 45 :** Determine a Transformada de Fourier para a função  $x(t) = e^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$

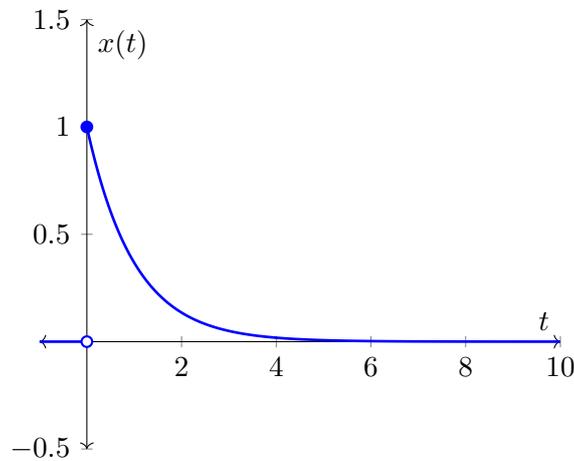
*Solução:*

A solução pode ser obtida pela integração (definição) com a  $X(f) = \frac{1}{a + 2j\pi f}$  ou  $X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$ ,  $2\pi f = \omega$ .

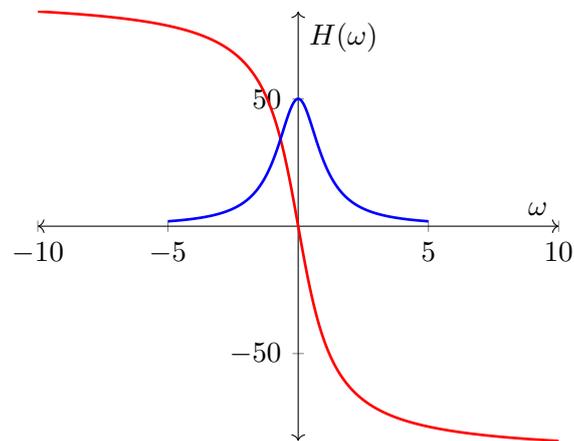
Fazendo as contas,

$$\begin{aligned}
 X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-(j\omega+a)t} dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{j\omega + a} e^{-(j\omega+a)t} \right|_0^T \\
 &= \frac{1}{j\omega + a}
 \end{aligned}$$

A Fig. 4.1 apresenta os gráficos assumindo que  $a = 1$ . Em (a) tem-se o sinal  $x(t)$ , em (b) o gráfico do  $|X(j\omega)|$  e em (c) tem-se o gráfico de  $\angle X(j\omega)$ . Para a representação de  $X(j\omega)$  na forma gráfica adota-se o módulo e fase. O módulo é dado por  $|X(j\omega)| = \frac{1}{\omega^2 + a^2}$  e  $\angle X(j\omega) = -\arctan \omega/a$ .



(a) Resposta no tempo.



(b) Espectro de amplitude (azul) e fase (vermelho).

Figura 4.1: Resposta no tempo e frequência para o Exemplo 45 e  $a = 1$ . A escala do espectro de amplitude foi multiplicada por 50.

**Exemplo 46 :** Determine a Transformada de Fourier para a função  $x(t) = ret(t/\tau) = u(t + \tau) - u(t - \tau)$

*Solução:*

A solução pode ser obtida pela integração (definição) e o seu resultado é  $\tau \text{sinc}(\tau\omega)$  onde  $\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta}$ <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>A função  $\text{sinc}(x)$  não normalizada é definida como  $\frac{\sin(x)}{x}$  e a normalizada  $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ . A normalização é devido  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi$

Fazendo as contas,

$$\begin{aligned}
 X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt \\
 &= -\frac{1}{j\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-\tau}^{\tau} \\
 &= \frac{1}{j\omega} (-e^{-i\omega\tau} + e^{i\omega\tau}) \\
 &= \frac{1}{j\omega} 2j \sin(\omega\tau) \\
 &= \tau \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} = \tau \text{sinc}(\omega\tau)
 \end{aligned}$$

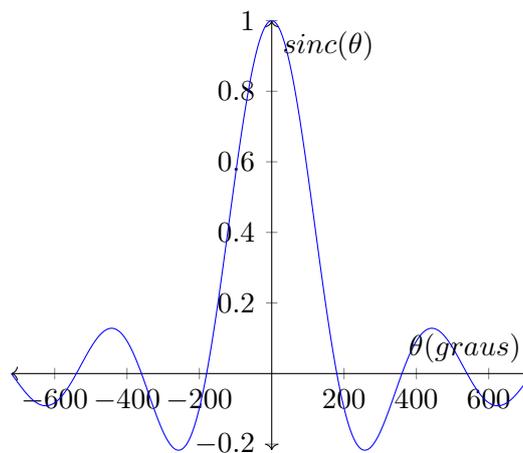


Figura 4.2: Resposta de frequência do pulso com duração  $\tau_0 = 1$

## 4.2 Propriedades

As propriedades a seguir são provadas na seção 4.4.

**Linearidade:**

$$\mathcal{F}\{ax_1(t)+bx_2(t)\} = a\mathcal{F}\{x_1(t)\} + b\mathcal{F}\{x_2(t)\} = aX_1(\omega) + bX_2(\omega) \quad a, b \in \mathbb{C} \quad (4.8)$$

**Escala:**

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad a \in \mathbb{C} \quad (4.9)$$

**Deslocamento:**

$$\text{tempo} \quad \mathcal{F}\{x(t-a)\} = e^{-j\omega a}X(\omega) \quad a \in \mathbb{C} \quad (4.10)$$

$$\text{frequência} \quad \mathcal{F}\{e^{jat}x(t)\} = X(\omega-a) \quad a \in \mathbb{C} \quad (4.11)$$

**Modulação:**

$$\mathcal{F}\{x(t)\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}[X(\omega-\omega_0) + X(\omega+\omega_0)] \quad \omega_0 \in \mathbb{R} \quad (4.12)$$

**Transformada da derivada:**

$$\mathcal{F}\{x'(t)\} = (j\omega)X(\omega) \quad (4.13)$$

$$\mathcal{F}\{x^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n X(\omega) \quad n \in \mathbf{N} \quad (4.14)$$

onde  $x^{(n)}$  indica uma derivada de ordem  $n$  de  $x(t)$ .

**Convolução:**

$$\mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(\omega)X_2(\omega) \quad (4.15)$$

$$\mathcal{F}\{x_1(t)x_2(t)\} = X_1(\omega) * X_2(\omega) \quad (4.16)$$

onde  $*$  denota a operação de convolução.

**Teorema de Parseval:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (4.17)$$

### 4.2.1 Aplicações

Aplicação 1: As antenas para comunicação precisam ter um comprimento de  $\frac{\lambda}{4}$  a  $\frac{\lambda}{10}$  do sinal transmitido para desempenharem a sua função. Caso fosse transmitida a voz (300 Hz até 3400 Hz) captada diretamente do microfone a antena deveria ter  $c = \lambda f$ ,  $\lambda \approx 10^5 m$  ou equivalente ao comprimento de 10 km no melhor caso. Para resolver esse problema e interpretando a Prop. 4.2 deslocando a banda de frequência da voz para uma frequência bem mais alta, essa operação é conhecida como modulação.

Aplicação 2: A prop. 4.2 é basicamente utilizada na conversão de EDO em um sistemas de equação lineares em frequência.

Aplicação 3: A prop. 4.2 é utilizada em SLIT cuja resposta é a convolução entre  $h(t)$  e  $x(t)$ . No domínio da frequência a resposta será simplificada em  $H(\omega)X(\omega)$ .

Aplicação 4: A prop. 4.2 diz que a energia (ou potência média) pode ser calcula tanto no tempo quanto na frequência. Algumas normas com a de *Qualidade de Energia* recomenda que o cálculo seja feito em frequência. Em linhas gerais deve-se efetuar esse cálculo onde seja mais fácil.

## 4.3 O Diagrama de Bode

O diagrama de Bode é o gráfico da resposta de frequência de um sistema. Essa resposta geralmente é apresentada como a combinação de uma gráfico de amplitude e outro da fase. Ambas os gráficos apresentam o eixo horizontal proporcional ao logaritmo da frequência. A determinação da resposta de frequência sem esse recurso e sem o uso dos recursos computacionais modernos era um trabalho muito tedioso e difícil com o uso de régua de cálculos e calculadoras mecânicas.

Para contornar esses problemas, o engenheiro H. W. Bode, quando trabalhava nos Laboratórios Bell (Estados Unidos) na década de 1930, com o projeto de amplificadores de telefonia, desenvolveu o método gráfico usado até hoje. Os princípios desenvolvidos por Bode foram amplamente aplicados aos problemas de controle e projeto de circuitos eletrônicos. O diagrama de Bode é um exemplo de análise de sistemas no domínio da frequência. O diagrama de Bode para, um sistema linear e invariante no tempo, com a função de

transferência  $H(s)$  são os gráficos da função  $|H(s = j\omega)|$  por  $\omega$  e  $\angle H(s = j\omega)$  por  $\omega$  em gráficos  $\log \times \log$ .

### 4.3.1 Equacionamento

Primeiro será desenvolvido as equações para o diagrama de Bode para a amplitude e posteriormente para a fase.

Normalmente o desenho do espectro de amplitude,  $|H(\omega)|$

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H(s) \Big|_{s=j\omega} \\ &= |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Para a análise de  $|H(\omega)|$  tem-se:

$$|H(s)| = \frac{|P(s)|}{|Q(s)|} = \frac{|\sum_{n=0}^M a_n s^n|}{|\sum_{n=0}^N b_n s^n|} \quad (4.19)$$

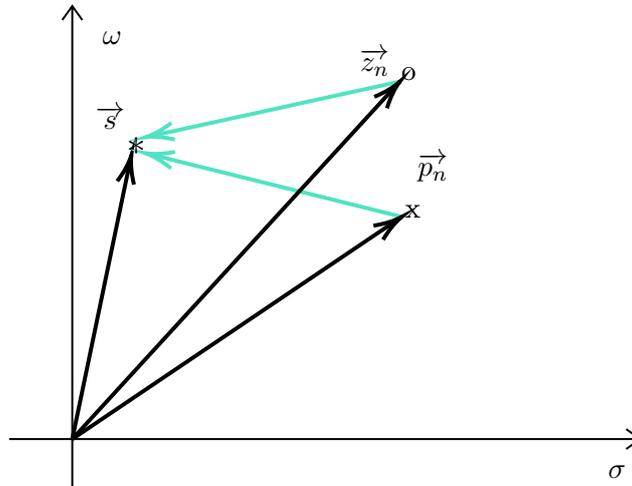
$$= \frac{|\prod_{n=1}^M (s - z_n)|}{|\prod_{n=1}^N (s - p_n)|} = \frac{\prod_{n=1}^M |s - z_n|}{\prod_{n=1}^N |s - p_n|} \quad (4.20)$$

onde  $z_n$  são as raízes do polinômio  $P(s)$  e são conhecidos como zeros de  $H(s)$  e  $p_n$  são as raízes do polinômio  $Q(s)$  e são conhecidos como polos de  $H(s)$ .

Interpretando o termo  $|s - z_n|$  e  $|s - p_n|$  observa-se que representam o módulo dos vetores  $\vec{s} - \vec{z}_n$  e  $\vec{s} - \vec{p}_n$ . Ambos os vetores são representados no plano complexo  $\mathcal{S}$ .

Nesse contexto,  $|H(s)|$  pode ser determinado a partir do produto dos comprimentos dos vetores  $\vec{s} - \vec{z}_n$  dividido pelo comprimento dos vetores  $\vec{s} - \vec{p}_n$ . No caso particular onde  $s = j\omega_0$  os vetores de frequência  $\omega_0$  se encontram sobre a reta imaginária  $j\omega$  do plano complexo  $\mathcal{S}$ .

Para simplificar as contas determina-se  $|H(j\omega)|$  em escala logarítmica,  $|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$ .

Figura 4.3: Diagramas de polos e zeros no plano  $\mathcal{S}$ .

$$|H(j\omega)|_{dB} = \sum_{n=1}^M |j\omega - z_n|_{dB} - \sum_{n=1}^N |j\omega - p_n|_{dB} \quad (4.21)$$

$$= \sum_{n=1}^M |z_n|_{dB} \left| \frac{j\omega}{z_n} - 1 \right|_{dB} - \sum_{n=1}^N |p_n|_{dB} \left| \frac{j\omega}{p_n} - 1 \right|_{dB} \quad (4.22)$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^M |z_n|_{dB} - \sum_{n=1}^N |p_n|_{dB}}_{\text{Não depende da frequência}} + \underbrace{\sum_{n=1}^M \left| \frac{j\omega}{z_n} - 1 \right|_{dB} - \sum_{n=1}^N \left| \frac{j\omega}{p_n} - 1 \right|_{dB}}_{\text{Depende da frequência}} \quad (4.23)$$

Observa-se que as parcelas dos somatórios, eq. 4.21, contribuem para  $|H(j\omega)|$  são adicionados nos termos com zeros e subtraídos nos termos com polos. Na eq. 4.23 observa-se que os termos são compostos por termos que não dependem da frequência e termos que dependem da frequência.

Para simplificar a análise posterior será considerado que:

$$|H(j\omega)|_{dB} = |k|_{dB} + \sum_{n=1}^Q \left| \frac{j\omega}{q} - 1 \right|_{dB}, \quad q \in \mathcal{S} \quad (4.24)$$

$|k|_{dB} = \sum_{n=1}^M |z_n|_{dB} - \sum_{n=1}^N |p_n|_{dB}$  e quando  $q$  é zero de  $H(s)$  a contribuição é positiva e negativa quando  $q$  é polo.

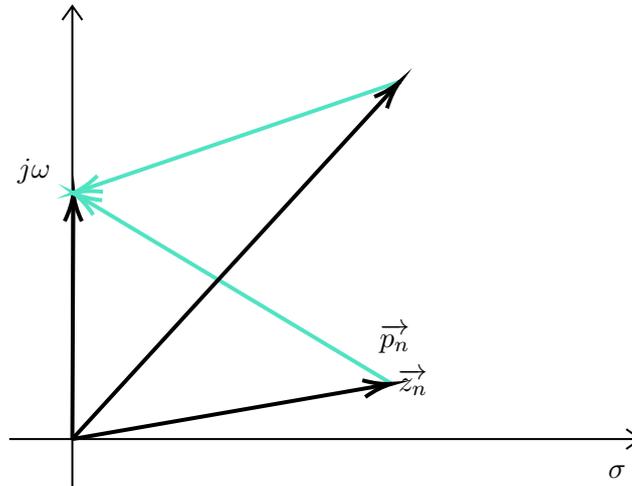


Figura 4.4: Diagramas de polos e zeros no plano  $\mathcal{S}$  e na reta  $j\omega$ .

Analisando os termos

$$\Delta_Q = \left| \frac{j\omega}{q} - 1 \right|_{dB} = 20 \log_{10} \left| \frac{j\omega}{q} - 1 \right| \quad (4.25)$$

Considerando  $q \in \mathcal{S}$ , então  $q$  pode ser de duas formas:

1.  $q \in \mathcal{R}$ , compondo apenas termos de 1ª ordem;
2.  $q \in \mathcal{C}$  e neste caso deve-se ter também  $q^*$  pois os coeficientes de  $P(s)$  e  $Q(s)$  são Reais. Neste caso os termos serão de 2ª ordem.

Analisando primeiramente os termos  $q$  Reais. Neste caso será analisado  $|\Delta_Q|$  para dois casos:  $|\omega| \ll |q|$  e  $|\omega| \gg |q|$ .

No caso

$$|\omega| \ll |q| \therefore \Delta_Q = \frac{\omega}{q} \approx 0 \Rightarrow 20 \log_{10} \left| \frac{j\omega}{q} - 1 \right| \approx 20 \log_{10} |1| \approx 0 \quad (4.26)$$

e no caso

$$|\omega| \gg |q| \therefore \frac{\omega}{q} \gg 1 \Rightarrow \underbrace{\Delta_Q}_Y = 20 \log_{10} \left| \frac{j\omega}{q} - 1 \right| \approx 20 \log_{10} \left| \frac{j\omega}{q} \right| \quad (4.27)$$

$$\approx \underbrace{20}_{M} \underbrace{\log_{10} |\omega|}_X - \underbrace{20 \log_{10} |q|}_H \quad (4.28)$$

Quando  $|\omega| \ll |q|$  a contribuição de  $q$  (independente de ser polo ou zero) para a resposta total  $|H(\omega)|$  é zero. Quando  $|\omega| \gg |q|$  a contribuição de  $q$  para a resposta total  $|H(\omega)|$  é uma reta com coeficiente angular  $+20$  para os zeros e  $-20$  em um gráfico  $\Delta_Q$  (que é logarítimo) por  $|\omega|_{dB}$ . Essas retas são conhecidas com as assíntotas geradas pelos polos e zeros. E, a resposta total  $|H(\omega)|$  é um somatório de efeitos com  $|k|_{dB}$  mais as contribuições dos zeros menos as contribuições dos polos.

Para refinar essas aproximações são considerados os casos onde:

1.  $|\frac{\omega}{q}| = \frac{1}{2}$   $\therefore \Delta_Q = 1dB$  para zeros e  $\Delta_Q = -1dB$  para polos;
2.  $|\frac{\omega}{q}| = 1$   $\therefore \Delta_Q = 3dB$  para zero e  $\Delta_Q = -3dB$  para polos;
3.  $|\frac{\omega}{q}| = 2$   $\therefore \Delta_Q = 6dB$  para zeros e  $\Delta_Q = -6dB$  para polos.

#### Exemplo 47 :

Desenhe o Diagrama de Bode para a função de transferência:

$$H(s) = 1000 \frac{(s + 1)}{(s + 10)(s + 100)} \quad (4.29)$$

Passo 1: reescreva a função de transferência na forma apropriada. Coloque os polos e zeros em evidência, determine  $|k|$ .

$$H(s) = \frac{1000}{10 \cdot 100} \frac{(\frac{s}{1} + 1)}{(\frac{s}{10} + 1)(\frac{s}{100} + 1)} \quad (4.30)$$

Passo 2: Identifique na função de transferência as suas partes constituintes. A função de transferência neste exemplo é constituída de 4 componentes:

1. a constante  $|k| = 1$ ;
2. um polo em  $s = -10$
3. um polo em  $s = -100$
4. um zeros em  $s = -1$

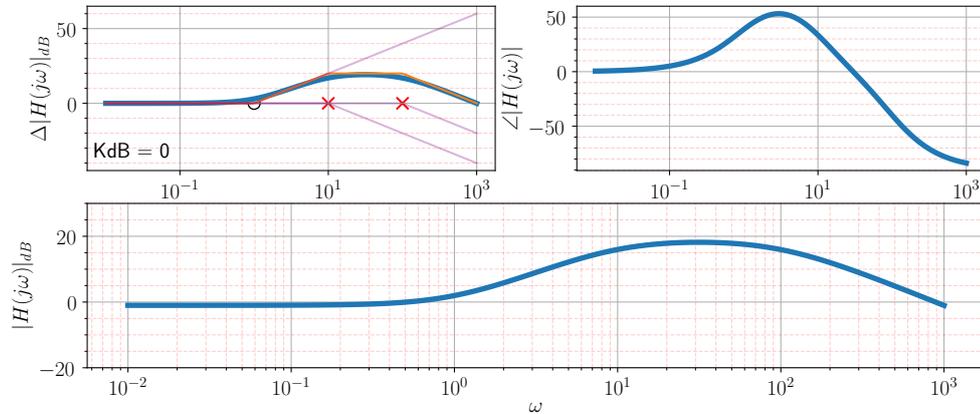


Figura 4.5: Diagrama de Bode para o módulo (superior esquerda e inferior) e fase (superior direita) do ex. 47. Na figura superior esquerda é apresentada as retas assintotas para os polos e zeros.

Passo 3: Desenha cada componente do diagrama de Bode. Isso é feito como descrito a seguir.

A constante  $|k|$  é a constante igual a 0. Todos os polos e zeros tem a sua esquerda o valor de zero. A partir da posição de cada zero (neste exemplo 10 e 100) possuem as retas descendentes com um inclinação de  $-20dB/decada$ . O zero em 1 possui coeficiente angular de  $20dB/decada$  (para cima).

Para o segundo caso quando os termos  $q$  são complexos esses deverão compor os termos de 2º grau pois  $q$  e  $q^*$  farão parte dos polos ou zeros. Para o desenvolvimento a seguir serão adotados apenas os casos com polos pois o desenvolvimento para zeros é equivalente. Os polos adotados são:  $-\alpha \pm j\beta$ .

$$H(s) = \frac{k}{(s - q)(s - q^*)} = \frac{k}{(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)} \quad (4.31)$$

$$= \frac{k}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2} \quad (4.32)$$

fazendo  $\omega_n^2 = \alpha^2 + \beta^2$  e  $\zeta\omega_n = \alpha$  tem-se

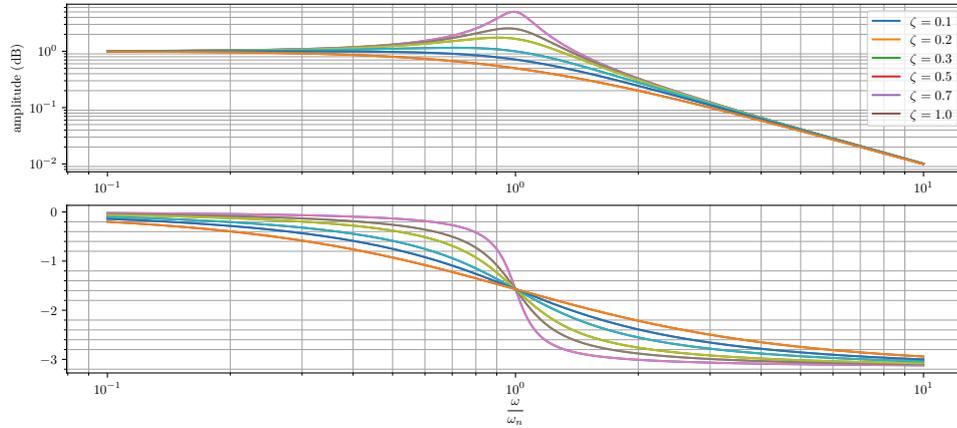


Figura 4.6: Diagrama de Bode para o módulo e fase para um polo complexo em função do  $\zeta$ .

$$H(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.33)$$

$$= \frac{k/\omega_n}{1 + (s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n)} \quad (4.34)$$

fazendo  $s = j\omega$  e  $k_0 = k/\omega_n$  (resposta DC) e  $u = \omega/\omega_n$  (frequência normalizada),

$$H(j\omega) = \frac{k_0}{1 - u^2 + j2\zeta u} \quad (4.35)$$

$$|H(u)|_{dB} = 20 \log_{10} k_0 - 20 \log_{10} |(1 - u^2) + j2\zeta u| \quad (4.36)$$

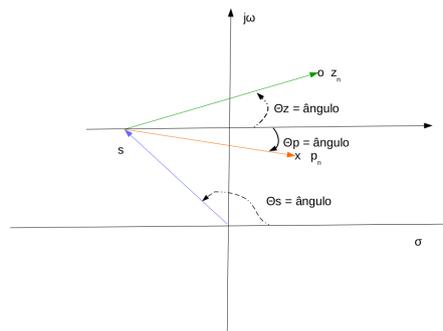
Para o estudo do Diagrama de Bode Fase o desenvolvimento teórico será feito a partir da eq. 4.18 e 4.20.

Para a análise de  $\angle H(\omega)$  tem-se:

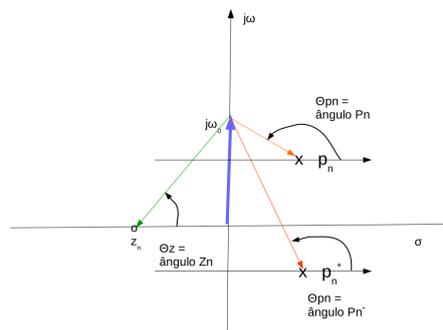
$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$H(s) = \frac{\prod_{n=1}^M (s - z_n)}{\prod_{n=1}^N (s - p_n)} = \frac{\prod_{n=1}^M |s - z_n| e^{j\angle s - z_n}}{\prod_{n=1}^N |s - p_n| e^{j\angle s - p_n}}$$

Na Fig. 4.3.1 apresenta a resposta, módulo e fase, para um sistema composto de um polo complexo em função de  $\zeta$ .



(a) Vetores polos e zeros em (S).



(b) Angulos para os polos e zeros.

Figura 4.7: Diagramas de polos e zeros no (S) e na reta  $j\omega$ .

$$\angle H(s) = \sum_{n=1}^M \angle(s - z_n) - \sum_{n=1}^N \angle(s - p_n) \quad (4.37)$$

$$\angle H(j\omega) = \sum_{n=1}^M \angle(j\omega - z_n) - \sum_{n=1}^N \angle(j\omega - p_n) \quad (4.38)$$

A composição do  $\angle H(j\omega)$  é feita individualmente pelos polos e zeros. Os ângulos  $\angle(j\omega - z_n)$  referentes aos zeros são somados e os ângulos  $\angle(j\omega - p_n)$  referentes aos polos são subtraídos. Observe na Fig.4.3.1.

Quando  $\omega = 0$  e os polos ou zeros Reais se encontram no semi-plano lateral direito de  $\mathcal{S}$ . Os ângulos serão de 180 graus ou  $\pi$ . Já estando no semi-plano lateral esquerdo de  $\mathcal{S}$  os ângulos serão de 0 graus.

Quando  $\omega$  é igual ao módulo dos polos ou zeros Reais e se encontram no semi-plano lateral direito de  $\mathcal{S}$ . Os ângulos serão de 135 graus. Já estando no semi-plano lateral esquerdo de  $\mathcal{S}$  os ângulos serão de 45 graus.

Quando  $\omega \rightarrow \infty$  os polos ou zeros Reais os ângulos serão de 90 graus.

## 4.4 Transformada de Fourier de Funções Especiais

Seja o par de transformadas  $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$

**Transformada de Fourier da função derivada,**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x'(t)\} &= (j\omega)X(j\omega) \\ &= (j\omega)\mathcal{F}\{x(t)\} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Condição:  $x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \pm\infty$

*Justificativa*

$$\mathcal{F}\{x'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4.40)$$

$$= x(t)e^{-j\omega t}|_{-\infty}^{\infty} + (j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt \quad (4.41)$$

$$= (j\omega)X(j\omega) \quad (4.42)$$

Tabela 4.1: Regras para traçar o Diagrama de Bode

Parcela	módulo	fase
Constante: K	$20 \log_{10}( K )$	K > 0: $0^\circ$ K < 0: $\pm 180^\circ$
Polo na origem	-20 dB/decada passando por 0 dB em $\omega = 1$	-90°
Integrador	+20 dB/decada passando por 0 dB at $\omega = 1$	+90°
Zero na origem		
Diferenciador		
Polo Real	Desenhe a assintota de baixa frequência com 0 dB Desenhe a assintota de alta frequência com -20 dB/decada Conecte com linhas em $\omega_0$	Desenhe a assintota de baixa frequência com 0° Desenhe a assintota de alta frequência com -90° Conecte com uma linha reta ligando de $0,1\omega_0$ até $10\omega_0$
Zero Real	Desenhe a assintota de baixa frequência com 0 dB Desenhe a assintota de alta frequência com +20 dB/decada Conecte com linhas em $\omega_0$	Desenhe as assintotas de baixa frequência com $0^\circ$ Desenhe as assintotas de alta frequência com $+90^\circ$ Conecte com uma linha reta ligando de $0,1\omega_0$ até $10\omega_0$
Polos conjugados complexos	Desenhe a assintota de baixa frequência com 0 dB Desenhe a assintota de alta frequência com -40 dB/decada Se $\zeta < 0,5$ então desenhe um pico em $\omega_0$ com amplitude $ H(j\omega_0)  = -20 \log_{10}(2\zeta)$ , caso contrário não desenhe o pico Conecte as linhas	Desenhe a assintota de baixa frequência com $0^\circ$ Desenhe a assintota de alta frequência com $-180^\circ$ Conecte com uma linha reta ligando de $0,1\omega_0$ até $10\omega_0$
Zeros conjugados complexos	Desenhe a assintota de baixa frequência com 0 dB Desenhe a assintota de alta frequência com +40 dB/decada Se $\zeta < 0,5$ então desenhe um pico em $\omega_0$ com amplitude $ H(j\omega_0)  = +20 \log_{10}(2\zeta)$ , caso contrário não desenhe o pico Conecte as linhas	Desenhe a assintota de baixa frequência com $0^\circ$ Desenhe a assintota de alta frequência com $+180^\circ$ Conecte com uma linha reta ligando de $0,1\omega_0$ até $10\omega_0$

De forma recorrente:

$$\mathcal{F}\{x^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n X(j\omega) \quad (4.43)$$

**Transformada de Fourier da integral da função**

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega}X(j\omega) \quad (4.44)$$

Condição:  $\omega \neq 0$  e  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = X(0) = 0$

*Justificativa*

Seja  $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau \therefore \Phi'(t) = x(t)$

$$\mathcal{F}\{\Phi'(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad (4.45)$$

$$= (j\omega)\Phi(j\omega) \therefore \quad (4.46)$$

$$\mathcal{F}\{\Phi(t)\} = \frac{1}{j\omega}X(j\omega) \quad (4.47)$$

**Dualidade tempo-frequência**

$$\mathcal{F}\{-jtx(t)\} = \frac{d}{d\omega}X(j\omega) \quad (4.48)$$

*Justificativa*

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \quad (4.49)$$

$$\frac{d}{d\omega}X(j\omega) = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \quad (4.50)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d}{d\omega} \{e^{-j\omega t}\} dt \quad (4.51)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(-jt)e^{-j\omega t}dt \quad (4.52)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{(-jt)x(t)\}e^{-j\omega t}dt \quad (4.53)$$

$$= \mathcal{F}\{(-jt)x(t)\} \quad (4.54)$$

**Dualidade convolução e multiplicação**

Seja  $\mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(j\omega)X_2(j\omega)$

*Justificativa:*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &\quad \text{Usando a Prop. 4.4 } \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega\tau} X_2(j\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[ X_2(j\omega)e^{-j\omega\tau} \right] d\tau \\ &= X_2(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= X_2(j\omega)X_1(j\omega) = X_1(j\omega)X_2(j\omega)\end{aligned}$$

De forma equivalente:  $\mathcal{F}^{-1}\{X_1(j\omega) * X_2(j\omega)\} = x_1(t)x_2(t)$

A seguir serão calculadas a Transformada de Fourier para algumas funções especiais.

**Transformada de Fourier da função impulso,  $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$**

*Justificativa:*

$x(t) = x(t) * \delta(t) \therefore X(j\omega) = X(j\omega)\mathcal{F}\{\delta(t)\} \quad \therefore \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$  e,  
 $\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \delta(t)$ .

**Mostre que  $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$**

*Justifica*

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}\{1\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1e^{j\omega t} d\omega$$

**Mostre que  $\delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega t) d\omega$**

*justificativa*

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\cos(\omega t)}_{\text{par}} + j \underbrace{\sin(\omega t)}_{\text{impar}} d\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega t) d\omega
\end{aligned} \tag{4.55}$$

**Determine que  $\mathcal{F}\{x(t)\}, x(t) = 1$**

*Justificativa*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{1\} &= \int_{-\infty}^{\infty} 1e^{-j\omega t} dt = 2\pi \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(-\omega)t} dt}_{\delta(-\omega)} \\
&= 2\pi\delta(-\omega)
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Como a função  $\delta(t)$  é par,  $\delta(t) = \delta(-t)$ . Logo  $\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$

**Determine a  $\mathcal{F}\{x(t)e^{j\omega_0 t}\}$**

*justificativa*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{x(t)e^{j\omega_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\
&= X(j(\omega - \omega_0))
\end{aligned}$$

**Determine a  $\mathcal{F}\{x(t) \cos(\omega_0 t)\}$**

*justificativa*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{x(t) \cos(\omega_0 t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \underbrace{\left[ \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \right]}_{\text{Relação de Euler}} e^{-j\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2}X(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2}X(j(\omega + \omega_0))
\end{aligned}$$

**Determine**  $\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\}$

*justificativa*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{1\} &= 2\pi\delta(\omega) \\ \mathcal{F}\{x(t)e^{j\omega_0 t}\} &= X(j(\omega - \omega_0))\end{aligned}\tag{4.57}$$

Combinando as duas equações, tem-se:  $\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

**Determine a  $\mathcal{F}$**  para  $\cos(\omega_0 t)$  e  $\sin(\omega_0 t)$

*Justificativa*

$$\begin{aligned}\cos(\omega_0 t) &= \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \\ \mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} &= \frac{1}{2}(\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} + \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}\}) \\ &= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)\end{aligned}\tag{4.58}$$

De forma equivalente,

$$\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

**Teorema de Parseval<sup>2</sup>**

O teorema de Parseval é comumente escrito como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega\tag{4.59}$$

onde  $X(\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$  representa a transformada de Fourier continua de  $x(t)$  e  $\Omega$  representa o componente da frequência (em *rad/s*) de  $x(t)$ .

A sua interpretação é que a energia total (o mesmo pode ser mostrado para a potência média de  $x(t)$ ) do sinal contido na forma de onda  $x(t)$  é igual ao total da energia do forma de onda da transformada de Fourier  $X(\Omega)$ .

---

<sup>2</sup>[https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_de\\_Parseval](https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Parseval)

## 4.5 A série de Fourier

Em matemática, uma série de Fourier é uma forma de representar uma função periódica como a soma de ondas senoidais simples. Mais formalmente, decompõe-se qualquer função periódica ou sinal periódico para a soma infinita de funções oscilantes simples, ou seja, senos e cossenos (ou, equivalentemente, exponenciais complexas).

Esse caso da decomposição seria igual a transformada de Fourier exceto pela condição de que a função periódica não é absolutamente somável. Neste caso, espera-se que as funções sejam absolutamente somáveis apenas sobre o período.

### 4.5.1 Formulação

O sinal  $x(t)$  como uma combinação de sinais pode ser escrita da seguinte forma:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.60)$$

Observa-se que  $x(t)$  deve ser periódico com período  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . Os termos  $a_k$  são os coeficientes da série (complexos),  $k = 0$  termo constante ou DC,  $k = 1$  primeiro harmônico,  $k = 2$  segundo harmônico e assim sucessivo.

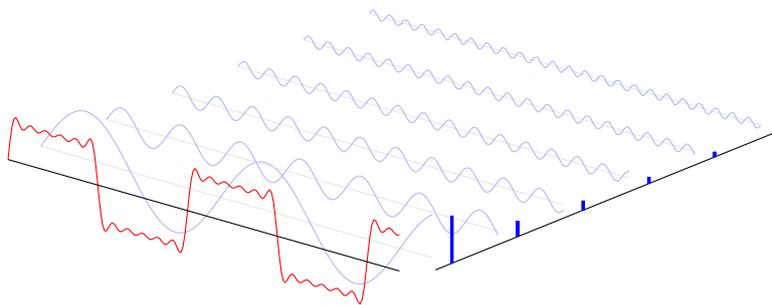


Figura 4.8: Exemplos da função quadrada representada como somas de senos e cossenos.

Determinação dos coeficientes da série de Fourier. Multiplicando a eq. 4.60 em ambos os lados por  $e^{-jn\omega_0 t}$  tem-se:

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} \quad (4.61)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t} \quad (4.62)$$

E, integrando sobre o período  $T_0$  tem-se:

$$\int_{(T_0)} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_{(T_0)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \quad (4.63)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{(T_0)} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \quad (4.64)$$

Observando que

$$\int_{(T_0)} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq n, \\ T_0, & \text{se } k = n. \end{cases} \quad (4.65)$$

ou seja,

$$e^{jk\omega_0 t} = \begin{cases} \rightarrow \text{funções ortogonais} \\ T_0, \end{cases} \quad \text{base para funções periódicas.} \quad (4.66)$$

Manipulando as equações acima, tem-se

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \text{equação de análise} \quad (4.67)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{equação de síntese} \quad (4.68)$$

A convergência da série é garantida se as condições de Dirichlet forem satisfeitas sobre o período:

1.  $x(t)$  é um sinal absolutamente somável sobre  $T_0$
2. Apresenta um número finito de descontinuidades sobre o período
3. Apresenta um número finito de máximos e mínimos sobre o período.

No caso de funções descontínuas, essa aproximação será feita pelo valor médio de cada descontinuidade.

Como os termos  $a_k$  são complexos, em muitas bibliografias, se adota a notação por funções trigonométricas:

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k), \quad \text{ou} \quad (4.69)$$

$$= A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(k\omega_0 t) + jC_k \sin(k\omega_0 t) \quad (4.70)$$

onde

$$B_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad (4.71)$$

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \quad (4.72)$$

### 4.5.2 Propriedades

As propriedades da Série de Fourier são idênticas a Transformada de Fourier e Laplace.

**Linearidade** Sejam dois sinais  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  com período  $T_0$  e frequência  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  tais que:  $\mathcal{SF}\{x_1(t)\} = a_k$  e  $\mathcal{SF}\{x_2(t)\} = b_k$  então  $\mathcal{SF}\{x(t)\} = Aa_k + Bb_k$  onde  $x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$

**Deslocamento temporal** Seja  $y(t) = x(t - t_d) \therefore \mathcal{SF}\{y(t)\} = b_k = e^{-jk\omega_0 t_d} a_k$ .

**Reversão temporal** Seja  $y(t) = x(-t) \therefore \mathcal{SF}\{y(t)\} = a_{-k}$ .

**Compressão/expansão** Seja  $y(t) = x(\alpha t) \therefore y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\alpha\omega_0 t}$

**Operações sobre os sinais**

$$1. x(t) = x_1(t)x_2(t) \therefore c_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_k b_{k-l}$$

$$2. y(t) = x(t)^* \therefore b_k = a_{-k}^*$$

$$3. \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = b_k = \frac{1}{ik\omega_0} a_k$$

$$4. y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \therefore b_k = jk\omega_0 a_k$$

### Relação de Parseval

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \quad (4.73)$$

O gráfico de  $a_k a_k^* = |a_k|^2 \cdot k$  é conhecido por *Densidade Espectral de Potência*.

### Sinais reais e periódicos

1. Sinal par então  $a_k$  são reais
2. Sinal ímpar então  $a_k$  são ímpares

### 4.5.3 Interpretação: relação entre Série de Fourier e Transformada de Fourier

Apesar da transformada e da série de Fourier serem muito parecidas, a Transformada de Fourier pode ser interpretada como o limite de  $T_0$  (período fundamental) quando tende para infinito. Observe que a condição de aplicação da Transformada de Fourier é que  $x(t)$  seja absolutamente somável sobre todo intervalo de definição da  $x$ . No caso de funções periódicas esse condição não é atendida.

retornando a eq. 4.60 e aplicando a Transformada de Fourier tem-se:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathcal{F}\{e^{jk\omega_0 t}\} \quad (4.74)$$

Usando a propriedade P. 4.4 tem-se:

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi \delta(\omega - k\omega_0) \quad (4.75)$$

Os termos  $a_k$  são os pesos dos impulsos nas posições  $k\omega_0$  conhecidos como harmônicos.

A análise de um sinal periódico no tempo faz com que a sua representação em frequência seja discreta, ocorrendo em posições fixas  $k\omega_0$  no espaço dos sinais.

#### 4.5.4 O limite da série de Fourier

Seja  $x_T(t)$  uma função periódica com período  $T$  e seja  $x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t)$ . Reescrevendo  $x_T(t)$  a partir da sua Série de Fourier, tem-se:

$$\begin{aligned} x_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} \\ a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (4.76)$$

onde  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  ou  $\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ , substituindo na eq. 4.76, tem-se

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(x) e^{-jn\omega_0 x} dx \right] e^{jn\omega_0 t} \quad (4.77)$$

substituindo  $\frac{1}{T}$  por  $\frac{\omega_0}{2\pi}$

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} x_T(x) e^{-jn\omega_0 x} dx \right] \omega_0 e^{jn\omega_0 t} \quad (4.78)$$

Fazendo  $T \rightarrow \infty \therefore \omega_0 \rightarrow 0 \equiv d\omega$ ,  $k\omega_0 \rightarrow \omega$  e  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[ \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega x} dx \right]}_{X(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega \quad (4.79)$$

Par de Transformadas de Fourier

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \tag{4.80}$$

## 4.6 Atraso de fase e de grupo

A resposta de fase de um filtro  $\Theta(\omega)$  fornece o deslocamento de fase que uma senoide tem para uma dos componentes senoidais da entrada. Muitas vezes é mais importante considerar o atraso de fase<sup>3</sup>.

O atraso de fase de um filtro LTI<sup>4</sup>  $H(z)$  com resposta de fase  $\Theta(\omega)$  é definido por

$$P(\omega) = -\frac{\Theta(\omega)}{\omega} \tag{4.81}$$

O atraso de fase fornece o atraso em segundos em cada componente senoidal aplicado na entrada do filtro. Por exemplo, no filtro  $y[n] = x[n] + x[n-1]$ , a resposta de fase é  $\Theta(\omega) = -\omega \frac{T}{2}$  que corresponde ao atraso de fase de  $\frac{T}{2}$  o qual é meia amostra.

De forma geral, se a entrada do filtro com resposta em frequência  $H(e^{j\omega}) = G(\omega)e^{j\Theta(\omega)}$  é  $x[n] = \cos(\omega nT)$ , então a saída é  $y[n] = G(\omega) \cos(\omega nT + \Theta(\omega)) = G(\omega) \cos(\omega(nT - P(\omega)))$  e pode ser visto que o atraso de fase expressa a resposta de fase como um atraso temporal.

Em se trabalhando com o atraso de fase, devem ser tomados todos os cuidados para que os múltiplos de  $2\pi$  sejam incluídos em  $\Theta(\omega)$ . Sendo definido  $\Theta(\omega)$  como o ângulo do complexo obtido pela resposta de frequência  $H(e^{j\omega})$ , e isso não é suficiente para obter uma resposta de fase que pode ser convertida no atraso de tempo real. Descartando os múltiplos de  $2\pi$ , como é feito na definição ângulo complexo, o atraso de fase é modificado por múltiplos

<sup>3</sup>Signal Analysis (1997) Athanasios Papoulis ISBN-13: 978-0070484603

<sup>4</sup><https://technick.net/guides/theory/edft/013/> e <http://www.iowahills.com/B1GroupDelay.html>

períodos das senoides. Sendo que as análises de filtros LTI é feita em senoides sem início ou fim, não se pode (em princípio) distinguir entre o atraso de fase "real" e o atraso de fase sem os períodos da senoide. Por outro lado, é conveniente definir a resposta de fase do filtro como uma função contínua da frequência com a propriedade de  $\Theta(0) = 0$  (para filtro reais). Isso significa que o "unwrapping" da resposta de fase para se obter uma curva de atraso de fase consistente.

Definição. A forma mais comum para a representação de resposta de fase do filtro é chamado de *atraso de grupo*, e é definido por

$$D(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\Theta(\omega) \quad (4.82)$$

Para respostas de fase linear, o atraso de grupo e de fase são idênticas, e podem ser interpretadas como atraso no tempo.

Para qualquer função de fase, o atraso de grupo  $D(\omega)$  pode ser interpretado como o atraso temporal da envoltória da amplitude de uma senoide com frequência  $\omega$  [Papoulis 1977]. A largura de banda da envoltória da amplitude nessa interpretação deve ser restrita ao intervalo de frequência no qual a resposta de fase é aproximadamente linear.

## 4.7 O Teorema da Amostragem

O teorema de amostragem é a base matemática para converter um sinal de tempo contínuo  $x(t)$  em suas amostras  $x[n]$  em tempo discreto. A obtenção da sequência de amostras  $x[n]$  é feita usando a relação abaixo:

$$x[n] = x(t)\Big|_{t=nT_s} = x(nT_s) \quad (4.83)$$

onde  $n \in \mathcal{Z}$ ,  $T_s$  é o período de amostragem (s é de *sampling*) e  $F_s = \frac{1}{T_s}$  é a frequência de amostragem.

Na prática, essa operação é executada por um conversor analógico-digital (AD) que inclui também um quantizador das amplitudes das amostras, especificado em *número de bits*. Um possível diagrama interno geral de AD é apresentado na Fig. 4.7

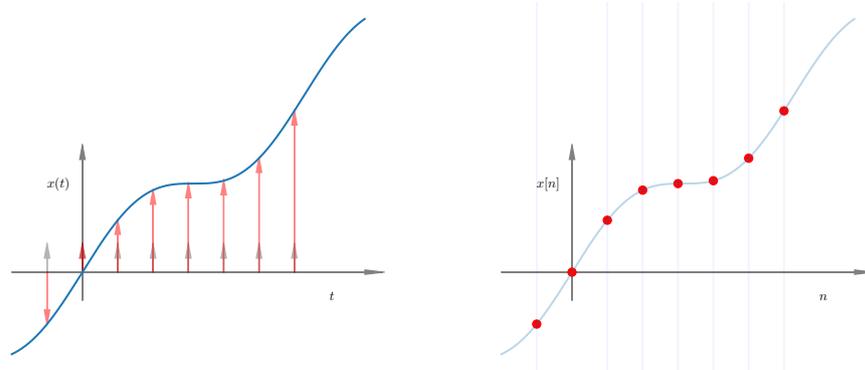


Figura 4.9: Esquerda: Relação entre as funções  $x(t)$ ,  $s(t)$  e  $x(t)s(t)$ . Direita: amostras  $x[n]$  a partir do sinal  $x(t)s(t)$ .

O sinal  $s(t)$  é um trem de impulsos periódicos como:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0). \quad (4.84)$$

O primeiro passo na conversão analógica-digital  $s(t) \cdot x(t)$  é:

$$x_s(t) = x(nT_s) \triangleq x(t)s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_s) \quad (4.85)$$

A conversão, eq. 4.83, garante que  $x(t) \rightarrow x[n]$  mas não a volta  $x[n] \rightarrow x(t)$ . De forma geral, devem ser feitas suposições sobre  $x(t)$  que garanta esse retorno ao sinal original  $x(t)$ . Por exemplo a Fig. 4.7 mostra a conversão onde as amostras obtidas não descrevem o sinal original.

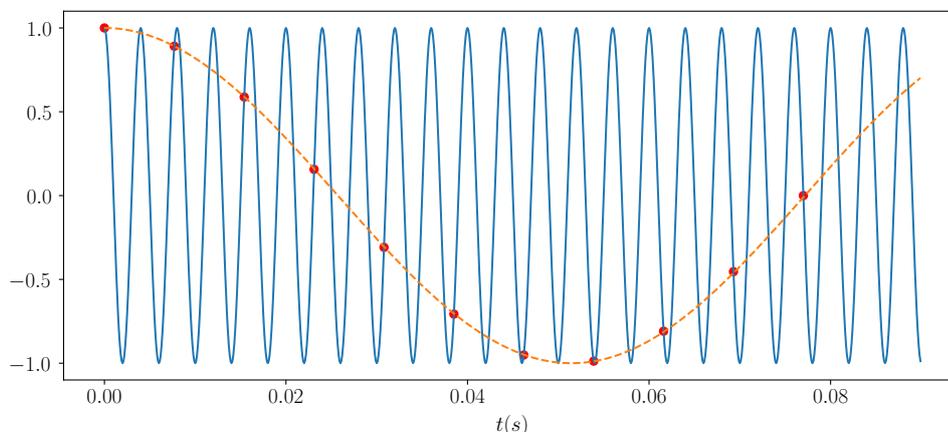


Figura 4.10: Exemplo de conversão AD onde as amostras não guardam semelhança com o sinal original.

Fazendo a transformada de Fourier tem-se:

$$S(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s), \text{ onde } \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \quad (4.86)$$

$$X_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\Omega) * S(j\Omega) \quad (4.87)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega) \quad (4.88)$$

O  $X_s(j\Omega)$  consiste de cópias de  $X(j\Omega)$  espaçadas de  $\Omega_s$ . Essas cópias são sobrepostas como na Fig. 4.7(c). Observa-se que para não haver sobreposição espectral das repetições  $X(j\Omega)$  (quando ocorre isso é conhecido como *aliasing*), Fig. 4.7(d).

122CAPÍTULO 4. A TRANSFORMADA DE FOURIER:TEMPO CONTÍNUO

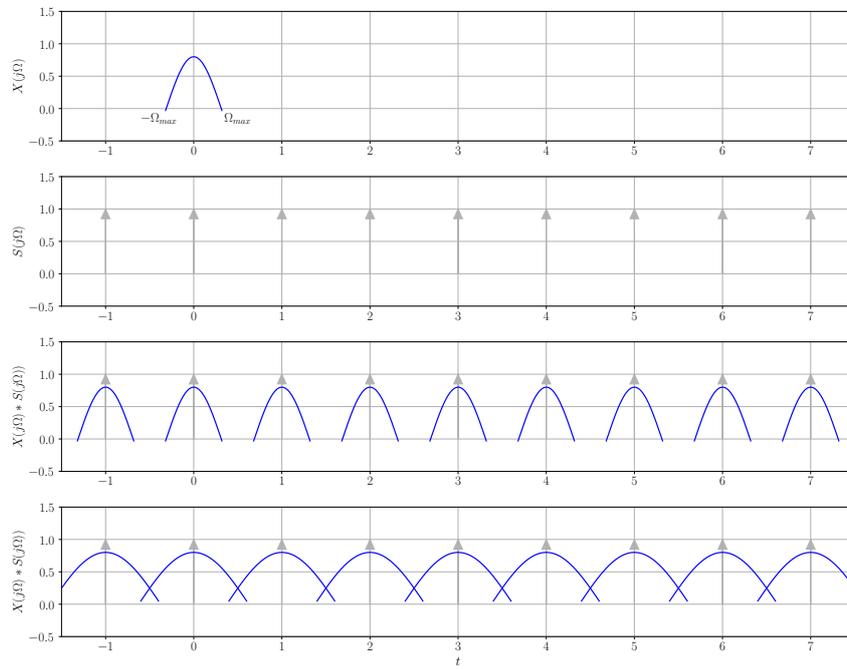


Figura 4.11: Representação espectral do sinal amostrado  $x_s(t)$ .

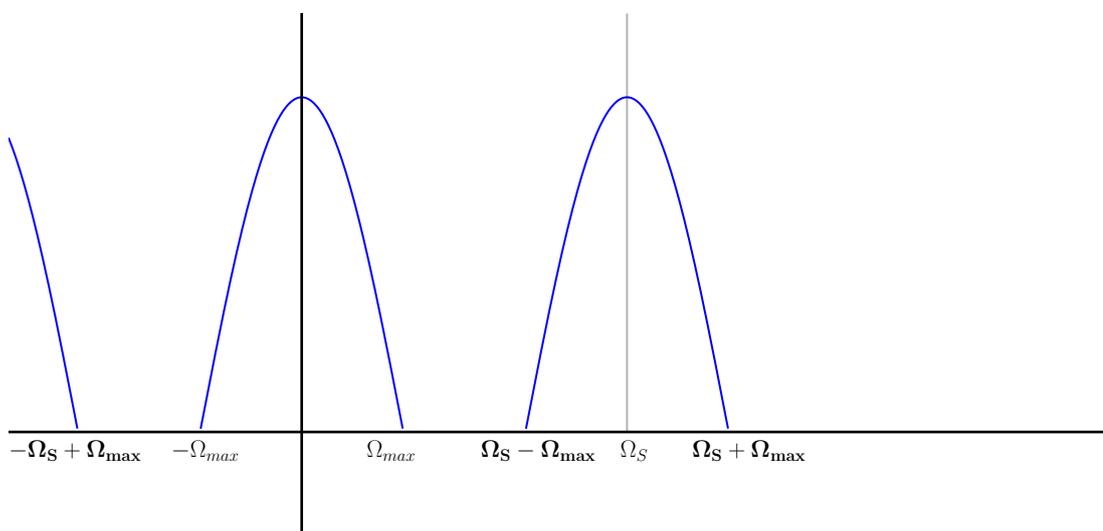


Figura 4.12: Representação espectral do sinal amostrado  $x_s(t)$  onde  $\Omega_S - \Omega_{max} > \Omega_{max}$  ou  $\Omega_S > 2\Omega_{max}$ .

Observa-se que:

1. Se  $X(\Omega) = 0$ ,  $|\Omega| > \Omega_{max}$ , Banda limitada, e
2.  $\Omega_S - \Omega_{max} > \Omega_{max} \quad \therefore \quad \Omega_S > 2\Omega_{max}$

Essas condições são conhecidas como *Teor. de Nyquist* e se forem atendidas o sinal  $X(\Omega)$  poderá ser obtido a partir do sinal  $X_s(\Omega)$  filtrando (removendo) todas as repetições a partir da frequência  $\Omega_c > \frac{\Omega_s}{2}$ . Se a condição não for satisfeita o sinal original não poderá obtido a partir de  $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\}$  e será permanentemente perdido.

A reconstrução do sinal  $x(t)$  a partir de  $x_a(t)$  é dado por:

$$x(t) \leftarrow x_a(t) = x(t)\delta_T(t) \quad (4.89)$$

$$= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (4.90)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \quad (4.91)$$

$$(4.92)$$

Sabendo que  $TF\{\delta_T(t)\} = \omega_0\delta_{\omega_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$

$$TF\{x_a(t)\} = X_a(\omega) = \frac{1}{2\pi}[X(\omega) * \omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)] \quad (4.93)$$

$$= \frac{1}{T}[X(\omega) * \delta_{\omega_0}(\omega)] = \frac{1}{T}[X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)] \quad (4.94)$$

Considerando que:  $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$ , tem-se:

$$X_a(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_0), T < \frac{1}{2f_{max}} \quad (4.95)$$

Como  $X_a(\omega)$  é periódico em  $\frac{1}{T}$ , pode-se escrever a sua série de Fourier

$$X_a(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn2\pi\omega/\omega_0} d\omega \quad (4.96)$$

$$c_n = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} X_a(\omega) e^{-jn2\pi\omega/\omega_0} d\omega \quad (4.97)$$

Como  $X_a(\omega) = X(\omega)$ ,  $-\omega_M < \omega < \omega_M$  e  $\frac{1}{2}\omega_0 > \omega_M$ , tem-se:

$$c_n = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} X(\omega) e^{-jn2\pi\omega/\omega_0} d\omega \quad (4.98)$$

Como  $x(t) = TF^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$  e  $X(\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$ , tem-se:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.99)$$

Fazendo  $t = -nT = -n\frac{2\pi}{\omega_0}$  tem-se:

$$x(-nT) = x\left(-n\frac{2\pi}{\omega_0}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} X(\omega) e^{-jn2\pi\omega/\omega_0} d\omega \quad (4.100)$$

Comparando as eq. 4.98 e 4.100 tem-se:

$$\omega_0 c_n = \int X(\omega) e^{-jn2\pi\omega/\omega_0} d\omega \quad (4.101)$$

$$2\pi x\left(-n\frac{2\pi}{\omega_0}\right) = \int X(\omega) e^{-jn2\pi\omega/\omega_0} d\omega \quad (4.102)$$

$$(4.103)$$

Onde se conclui que

$$2\pi x\left(-n\frac{2\pi}{\omega_0}\right) = \omega_0 c_n \quad (4.104)$$

$$c_n = \frac{2\pi}{\omega_0} x\left(-n\frac{2\pi}{\omega_0}\right) = Tx(-nT) \quad (4.105)$$

Observa-se que as amostras  $c_n$  deverão ser escaladas pela taxa de amostragem  $T$ .

## 4.8 Função *Trem de Impulso*

O Trem de Impulso<sup>5</sup> é uma função (ou função generalizada) obtida a partir de impulso. Em engenharia elétrica, também recebe o nome de *função de amostragem* ou  $\delta_{T_0}(t)$ . É definida como um conjunto infinito de impulsos unitários, espaçados de uma unidade:

<sup>5</sup>[https://pt.wikipedia.org/wiki/Pente\\_de\\_Dirac](https://pt.wikipedia.org/wiki/Pente_de_Dirac)

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k) \quad (4.106)$$

onde  $\delta(t)$  é a função impulso e  $k \in \mathbb{Z}$ .

A distribuição é periódica com  $T = T_0$ . Algumas propriedades são evidentes, a partir da definição:

1.  $\delta_{T_0}(-t) = \delta_{T_0}(t)$
2.  $\delta_{T_0}(t - \frac{1}{2}) = \delta_{T_0}(t + \frac{1}{2})$
3.  $\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \delta_{T_0}(t) dt = 1, n \in \mathbb{Z}$
4.  $\delta_{T_0}(t) = 0, t \notin \mathbb{Z}$

O *trem de impulso* exibe a propriedade de, para qualquer função  $x(t)$ ,

$$\delta_{T_0}(t)x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(t - k) \quad (4.107)$$

Outra propriedade útil está relacionada à convolução:

$$\delta_{T_0}(t) * x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - k) \quad (4.108)$$

A convolução com o *trem de impulso* gera uma sequência em que os valores de  $x(t)$  em determinados instantes são deslocados periodicamente. Se  $x(t) \neq 0$  para  $|t| > 1$ , haverá superposição entre os valores mas, no caso de  $x(t) \neq 0$  apenas para  $|t| < 1$ , a sequência resultante será periódica com período igual a uma unidade.

A Série de Fourier da função na forma exponencial é do tipo:

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi \frac{t}{T}} \quad (4.109)$$

cujos coeficientes de Fourier,  $c_n$  são:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \delta_{T_0T}(t) e^{-2\pi \frac{t}{T}} \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_{T_0T}(t) e^{-2\pi \frac{t}{T}} dx \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-2\pi \frac{t}{T}} dx \\
&= \frac{1}{T} e^{-2\pi \frac{0}{T}} \\
&= \frac{1}{T}.
\end{aligned}$$

Logo, todos os coeficientes são iguais a  $\frac{1}{T}$  e sua representação em Série de Fourier é:

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi}{T}nt} \quad (4.110)$$

e,

$$\Delta_{T_0}(j\Omega) = \Omega_S \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_S) \quad (4.111)$$

## Exercícios Resolvidos

**Exemplo 48 :** Considerando um sistema LIT cuja resposta ao impulso é dada por  $h(t) = e^{-at}u(t)$ . Determine a saída quando é aplicado na entrada o sinal  $x(t) = e^{-bt}u(t)$ .

*solução*

$$\begin{aligned}
 h(t) = e^{-at}u(t) & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} \\
 x(t) = e^{-bt}u(t) & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(\omega) = \frac{1}{b + j\omega} \\
 \therefore Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) & = Y(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} \frac{1}{b + j\omega} \\
 \therefore Y(\omega) & = \frac{A}{a + j\omega} + \frac{B}{b + j\omega} \\
 \therefore A = \frac{1}{b - a} \quad B & = \frac{-1}{b - a} \\
 \therefore y(t) & = \frac{1}{b - a}(e^{-at} - e^{-bt})u(t)
 \end{aligned}$$

**Exemplo 49 :** Um sistema LIT com condições iniciais nulas é descrito pela EDO  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 2x(t)$ . Determine a função de transferência do sistema.

*solução* Aplicado  $\mathcal{F}$  de ambos os lados da EDO tem-se:

$$\begin{aligned}
 (j\omega)^2 Y(\omega) + (j\omega)4Y(\omega) + 3Y(\omega) & = 2(j\omega)X(\omega) + 2X(\omega) \\
 Y(\omega)[(j\omega)^2 + (j\omega)4 + 3] & = X(\omega)[2(j\omega) + 2] \\
 H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} & = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3} = \frac{A}{j\omega + 1} + \frac{B}{j\omega + 3} \\
 \therefore A = \frac{1}{2} \quad B & = \frac{1}{2} \\
 \therefore h(t) & = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)
 \end{aligned} \tag{4.112}$$

**Exemplo 50 :** Considerando o exercício anterior, encontre a saída do sistemas quando  $x(t) = e^{-t}u(t)$

*solução*

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \frac{1}{1+j\omega}, & Y(\omega) &= H(\omega)X(\omega) \\
 Y(\omega) &= \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)} \frac{1}{j\omega+1} = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2(j\omega+3)} \\
 &= \frac{A}{j\omega+1} + \frac{B}{(j\omega+1)^2} + \frac{C}{j\omega+3} \\
 \therefore A &= \frac{1}{4} & B &= \frac{1}{2} & C &= \frac{-1}{4} \\
 Y(\omega) &= \frac{\frac{1}{4}}{j\omega+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega+1)^2} + \frac{\frac{-1}{4}}{j\omega+3} \\
 y(t) &= \frac{1}{4}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}te^{-t}u(t) - \frac{1}{4}e^{-3t}u(t)
 \end{aligned} \tag{4.113}$$

**Exemplo 51 :** Seja um sistema LTI cuja resposta para a entrada  $x(t) = [e^{-t} + e^{-3t}]u(t)$  é  $y(t) = [2e^{-t} - 2e^{-4t}]u(t)$ .

1. Determine  $H(j\omega)$
2. Determine  $h(t)$
3. Ache a equação diferencial que relaciona a entrada e a saída
4. Construa o diagrama de blocos do sistema.

*solução*

1.

$$X(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{3+j\omega} \quad Y(\omega) = \frac{2}{1+j\omega} - \frac{2}{4+j\omega} \tag{4.114}$$

$$\begin{aligned}
 H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} &= \frac{\frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{3+j\omega}}{\frac{2}{1+j\omega} - \frac{2}{4+j\omega}} \\
 &= \frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)} \tag{4.115}
 \end{aligned}$$

2.

$$H(\omega) = \frac{A}{2+j\omega} + \frac{B}{4+j\omega} \therefore A = \frac{3}{2} \quad B = \frac{3}{2} \tag{4.116}$$

Aplicando a transformada inversa:

$$h(t) = \frac{3}{2}(e^{-2t} + e^{-4t})u(t) \quad (4.117)$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} &= \frac{3(3 + j\omega)}{(2 + j\omega)(4 + j\omega)} \\ Y(\omega)(2 + j\omega)(4 + j\omega) &= X(j\omega)3(3 + j\omega) \\ (j\omega)^2 Y(\omega) + 6(j\omega)Y(\omega) + 8Y(\omega) &= 3(j\omega)X(\omega) + 9X(\omega) \\ \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 8y(t) &= 3\frac{d}{dt}x(t) + 9x(t) \end{aligned} \quad (4.118)$$

4. Integrando duas vezes:  $y(t) + 6y'(t) + 9y''(t) = 3x'(t) + 9x''(t)$

**Exemplo 52 :** Sendo a onda quadrada, Fig. ??, possui coeficientes da série de Fourier dados por:

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 t)}{k\pi}. \quad (4.119)$$

Determine a transformada de Fourier sendo  $T_0 = 4\tau$

**Exemplo 53 :** Calcule a transformada de Fourier para a função  $x(t) = \sin(\omega_0 t)$

**Exemplo 54 :** Determine a  $\mathcal{F}$  do sinal

$$x(t) = e^{j10t}, |t| < \tau/2 \quad (4.120)$$

**Exemplo 55 :** Determine a  $\mathcal{F}$  e desenhe o espectro do sinal  $x(t) = s(t) \cos(\omega_0 t)$  e o espectro de  $s(t)$  dado por:

**Exemplo 56 :** Encontre a Transformada Inversa de Fourier para:

$$X(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{-\omega^2 + 5j\omega + 6} \quad (4.121)$$

**Exemplo 57 :** Determine a representação por série de Fourier do sinal  $x(t) = \frac{1}{2} + \sin(\omega_0 t) + 2 \cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$

*solução:*

**Exemplo 58 :** A onda quadrada é definida em um período como:  $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau \\ 0, & \tau < |t| < T_0/2. \end{cases}$  Determine a série de Fourier para  $T_0 = 8\tau$ . *solução:*

**Exemplo 59 :** Encontre a série de Fourier para a onda dente de serra periódica ( $T_0 = 2$ ) e  $x(t) = t, -1 < t < 1$ .

*solução:*

**Exemplo 60 :** Determine a série de Fourier para a onda quadrada com período  $T_0 = 4$  e  $x(t) = \begin{cases} -1, & -2 < t \leq 0 \\ 1, & 0 < t \leq 2. \end{cases}$  *solução:*

**Exemplo 61 :** Supondo as seguintes afirmações sobre  $x(t)$ :

1. ele é real e ímpar
2.  $a_k = 0, |k| > 1$
3.  $\frac{1}{2} \int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$

Determine dois sinais que satisfazem essas condições.

*solução:*

**Exemplo 62 :** Encontre a série de Fourier de  $x(t) = |\cos(\frac{\pi}{2}t)|$ .

*solução:*

## 4.9 Exercícios propostos

1. Desenhe o diagrama de Bode com as suas retas assíntotas para cada uma das funções de transferência abaixo:

$$(a) H(s) = 1000 \frac{s + 0.1a}{(s + a)(s + 1000a)} \text{ com } a = 10^3 \text{ rad/s}$$

$$(b) H(s) = 10 \frac{\frac{s}{10^2} + 1}{\frac{s}{10^5} + 1}$$

$$(c) H(s) = \frac{\omega}{s + \omega} \text{ com } \omega = 10^6 \text{ rad/s}$$

$$(d) H(s) = 10 \frac{\frac{s}{50} + 1}{(\frac{s}{2} + 1)(s + 20)(\frac{s}{80} + 1)}$$

$$(e) H(s) = 10 \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$(f) H(s) = \frac{\frac{s}{5} + 1}{\frac{s^2}{5} + 11s + 20}$$

$$(g) H(s) = \frac{20(s^2 + s + \frac{1}{2})}{s(s + 1)(s + 10)}$$

2. Para cada um dos circuitos apresentados na Fig. 4.13 determine: a função de transferência, o diagrama de polos e zeros, os diagramas de Bode (módulo e fase) e especifique o tipo de filtro.
3. Considere os diagrama de Bode na Fig. 4.14. Determine os polos e zeros e suas funções de transferências.
4. Determine a transformada de Fourier e esboce ao menos o espectro de amplitude dos seguintes sinais:

$$(a) x(t) = A \operatorname{ret}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$(b) x(t) = \delta(t)$$

$$(c) x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$$

$$(d) x(t) = e^{-a|t|} \quad a > 0$$

$$(e) x(t) = te^{-at}u(t) \quad a > 0$$

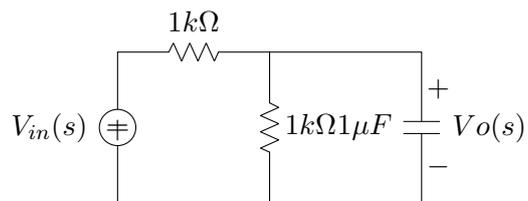
$$(f) |x| = \begin{cases} t & \text{se } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{c.c..} \end{cases}$$

$$(g) x(t) \text{ como na Fig. 4.15:}$$

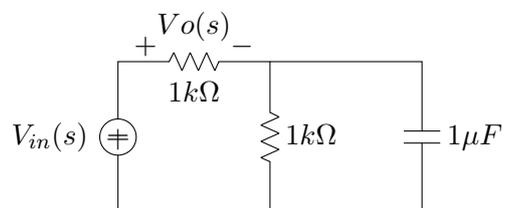
5. Determine a transformada de Fourier inversa das seguintes funções:

$$(a) X(\omega) = A \operatorname{ret}\left(\frac{\omega}{2W}\right)$$

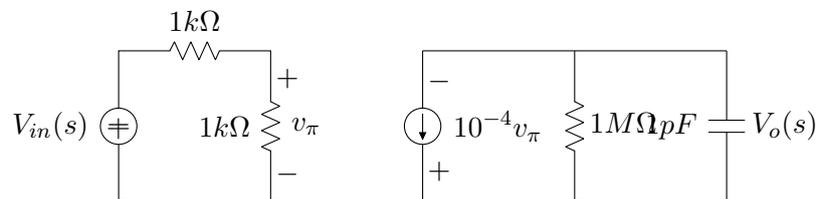
$$(b) X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$



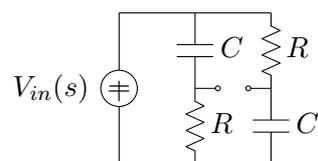
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.13: Circuitos para o exercício 2.

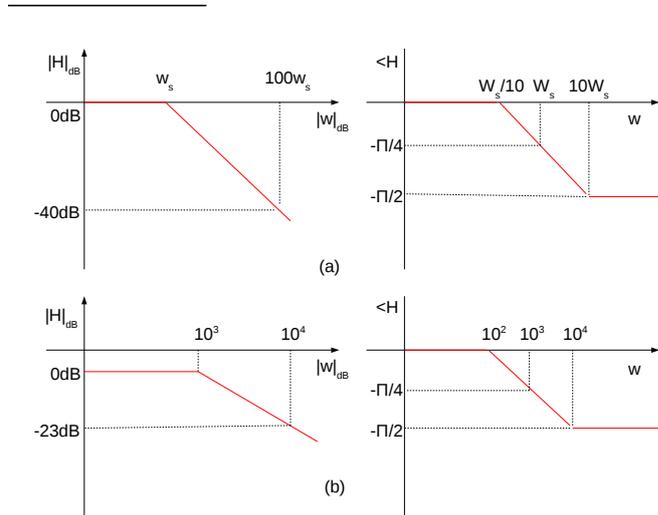


Figura 4.14: Diagramas de Bode para o exercício 3

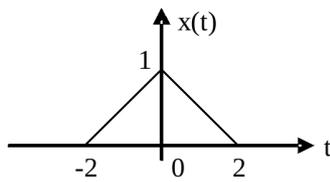


Figura 4.15: Figura do exercício 4g.

$$(c) X(\omega) = \begin{cases} 2 \cos(\omega), & \text{se } |\omega| \leq \pi, \\ 0, & \text{c.c. .} \end{cases}$$

$$(d) X(\omega) = 2 \frac{\sin(3(\omega - 2\pi))}{\omega - 2\pi}$$

$$(e) X(\omega) = e^{j\omega}$$

$$(f) X(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega)^2}, \text{ utilize a propriedade da convolução.}$$

6. Utilize o teorema de Parseval para determinar a seguinte integral:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{|2 + j\omega|^2} d\omega$$

7. Um sistema LTI apresenta a seguinte resposta ao impulso:  $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$ .

(a) Esboce o espectro de amplitude e fase da resposta em frequência (diagrama de Bode: amplitude e fase).

(b) Determine o sinal de saída do sistema quando o sinal de entrada é dado por:  $x(t) = 3e^{-t}u(t)$

8. Suponha um sistema LTI cuja resposta ao impulso é dada por:  $h(t) = e^{-t}u(t)$  e seja  $x(t)$  o sinal de entrada do sistema tal que:  $x(t) = \sum_{k=-3}^3 a_k e^{j(k\pi/4)t}$  em que  $a_k = \frac{1}{|k| + 1}$ . Determine o sinal de saída do sistema. (Faça uma tabela com os valores das amplitudes dos harmônicos da entrada e da saída e interprete os resultados).

9. Utilize a propriedade da convolução para encontrar a transformada de Fourier da seguinte função:  $x(t) = \frac{1}{\pi^2 t^2} \sin^2(t)$

10. Desenhe o diagrama de Bode das seguintes respostas em frequência:

$$(a) H(\omega) = 1 + j\omega/10$$

$$(b) H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/10}$$

$$(c) H(\omega) = \frac{10(1 + j\omega)}{(1 + j\omega/10)(1 + j\omega/100)}$$

11. A Fig. 4.16 representa o diagrama de blocos de um sistema LTI de segunda ordem, o qual se pretende analisá-lo.

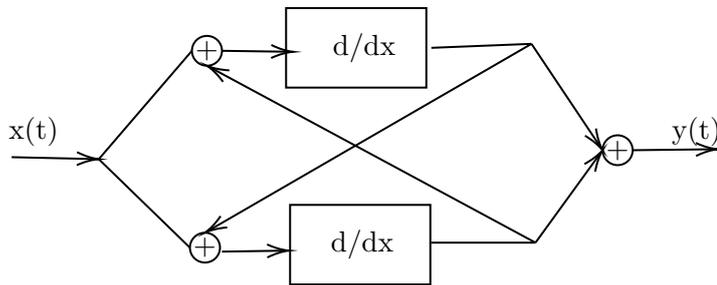


Figura 4.16: Figura do exercício 11

- (a) Escreva a equação diferencial que relaciona a saída  $y(t)$  com a entrada  $x(t)$ .
  - (b) Determine a resposta em frequência  $H(\omega)$  e identifique os seus polos.
  - (c) Determine a resposta ao impulso  $h(t)$ .
  - (d) Desenhe o diagrama de Bode (linear por partes) da resposta em frequência (somente o módulo).
12. Seja  $\Omega_s$  a taxa de Nyquist para um sinal  $x(t)$ . Determine a nova taxa de Nyquist para os sinais  $y(t)$  formados a partir de  $x(t)$ .
    - (a)  $y(t) = 4x(t)$
    - (b)  $\frac{d}{dt}x(t)$
    - (c)  $y(t) = x(4t)$
    - (d)  $y(t) = x^2(t)$
  13. Um sinal de eletrocardiograma (ECG) analógico contém frequências úteis até 100 Hz. Qual a taxa de Nyquist para esse sinal? Suponha que a taxa de amostragem seja 250 Hz, qual a maior frequência que pode ser representada unicamente nesta taxa? Se o sinal acima fosse amostrado em 150 Hz, o que aconteceria?
  14. Um sinal em tempo contínuo  $x(t)$  pode ser recuperado a partir de suas amostras  $x(nT_s)$  com  $T_s = 1$  ms. Qual é a maior frequência do sinal  $x(t)$ ?
  15. Seja  $x(t) = \cos(500\pi t)$ 
    - (a) Determine  $x[n]$  para uma frequência de amostragem igual a 1000 Hz;

- (b) Determine  $x[n]$  para uma frequência de amostragem igual a 200 Hz;
- (c) A partir de  $x[n]$  do item (b) determine o novo sinal no tempo contínuo utilizando a frequência de 200 Hz;
- (d) explique o que aconteceu.
16. Um sinal  $x(t)$  real, com período fundamental  $T_0 = 8$ , apresenta os seguintes coeficientes não nulos para a série exponencial de Fourier:  $a_1 = a_{-1} = 2$  e  $a_3 = a_{-3}^* = j4$ . Determine  $x(t)$  na forma  $\sum_{(k)} A_k \cos(k\omega_0 t)$
17. Para o sinal periódico  $x(t) = 2 + \cos(\frac{2\pi}{3}t) + 4\sin(\frac{5\pi}{8}t)$  determine  $\omega_0$  e os coeficientes  $a_k$  da série de Fourier.
18. Determine a série de Fourier para os seguintes sinais:
- (a)  $x(t) = 2\sin(2\pi t - \pi) + \sin(6\pi t)$
- (b)  $x(t) = \frac{1}{2} + \sin(\omega_0 t) + 2\cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$
- (c)  $x(t) = [1 + \cos(2\pi t)]\cos(10\pi t + \frac{\pi}{4})$
- (d) onda quadrada com período  $T_0$ :  $x(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| < \tau, \\ 0, & \text{/c.c.} \end{cases}$ .
- (e)  $x(t) = A|\cos(2\pi f_0 t)|$
- (f)  $x(t) = A|\sin(2\pi f_0 t)|$
- (g)  $x(t) = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 \geq t < 1, \\ -2, & \text{se } 1 \geq t < 2. \end{cases}$ , periódica.
- (h) onda triangular:  $x(t) = A(1 - \frac{4|t|}{T_0})$ ,  $|t| \leq \frac{T_0}{2}$ , periódica.
- (i) onda dente de serra:  $x(t) = t$ ,  $|t| \leq 1$ , periódica;
- (j)  $x(t) = \begin{cases} \sin(\pi t), & \text{se } 0 \geq t < 2, \\ 0, & \text{se } 2 \geq t \geq 4. \end{cases}$ , periódica
19. Suponha que são dadas as seguintes informações a respeito de  $x(t)$ :
- (a)  $x(t)$  é real e ímpar,
- (b) periódica com  $T_0 = 2$  e apresenta série de Fourier,
- (c)  $a_k = 0$ ,  $|k| > 1$

$$(d) \frac{1}{2} \int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$$

Determine dois sinais que satisfazem as condições acima.

20. Uma técnica para se construir uma fonte dc simples é usar um sinal ac periódico e retificá-lo utilizando um retificador de onda completa. Isto é, colocamos o sinal  $x(t)$  na entrada de um sistema que produz uma saída  $y(t) = |x(t)|$ . Admitindo  $x(t) = \cos(t)$ , pede-se:
- (a) O sistema é linear ou não linear?
  - (b) Desenhe as formas de onda na entrada e na saída.
  - (c) Quais os períodos e frequências fundamentais dos sinais de entrada e de saída.
  - (d) Determine os coeficientes da série de Fourier da saída  $y(t)$ .
  - (e) Qual a amplitude da componente dc do sinal de entrada?
  - (f) Qual a amplitude da componente dc do sinal de saída?
21. Repita o problema anterior admitindo um retificador de meia-onda e compare os resultados.

# Capítulo 5

## A Transformada de Fourier: tempo discreto

A transformada de Fourier discreta é a transformada de Fourier para sinais em tempo discreto. Na seção 4.7 é feita a formulação espectral de um sinal amostrado. Neste caso, o espectro é formado pela repetição do espectro do sinal  $x(t)$  (com banda limitada) e suas cópias deslocadas de  $kFs$ , onde  $Fs = \frac{1}{T}$  é conhecido como frequência de amostragem.

### 5.1 Conceitos iniciais - a DTFT

A DTFT (*discrete-time Fourier transform*) é muito parecida com a TF e suas propriedades são equivalentes. A representação de sistemas LIT em tempo discreto é equivalente ao tempo contínuo e o seu desenvolvimento é feito colocando uma entrada  $x[n] = e^{j\omega n}$  em um sistema cuja resposta ao impulso é  $h[n]$ .

$$\begin{aligned}y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} \\y[n] &= e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\end{aligned}\tag{5.1}$$

Definindo-se  $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega n}$  é chamado de Resposta de Frequência do sistema e  $H(e^{j\omega})$  é a Transformada de Fourier,  $\mathcal{F}\{.\}$ , de  $h[n]$ . Observa-se que essa entrada na forma de exponencial complexa é a mesma que aparece na saída multiplicada por  $H(e^{j\omega})$ , que modifica a sua amplitude e fase.

A propriedade de periodicidade de  $X(e^{j\omega})$ , seção 4.7, ajuda em distinguir entre a DTFT e a transformada de Fourier de  $x(t)$ . Neste caso,  $X(f)$  (ou  $X(j\Omega)$ ), é a transformada contínua de  $x(t)$  com banda limitada e  $X(e^{j\omega})$  se apresenta de forma periódica.

A Fig. 5.1(a) mostra o sinal 'Nightingale.wav'<sup>1</sup> amostrado com uma frequência  $F_s = 44.100Hz$ . Na Fig. 5.1(b) apresenta um trecho de sinal (azul) e a sua envoltória (laranja). O sinal de envoltória foi re-amostrado para  $F_s = 2.940Hz$ . Na Fig. 5.1(c) mostra o módulo da TF para o sinal de envoltória. Observa-se a repetição do espectro de amplitude em  $k2.940Hz$ ,  $k$  inteiro.

**Exemplo 63 :** Determine a resposta de frequência do sistema  $y[n] = x[n - n_d]$ .

*solução*

$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d} e^{j\omega n} \quad (5.2)$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \quad (5.3)$$

$$= \begin{cases} |H(e^{j\omega})| = 1 \\ \angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d \end{cases} \quad (5.4)$$

A principal diferença da resposta de frequência para sinais em tempo contínuo e discreto é a notação  $H(e^{j(\omega+2\pi)}) = H(e^{j\omega})$  sendo a resposta de frequência periódica em  $2\pi = F_s$ . Sendo assim podem ser usadas as seguintes notações para o domínio de frequência

$$\begin{cases} 0 \leq \omega < 2\pi & \text{ou} & 0 \leq f < 1 \\ -\pi < \omega \leq \pi & \text{ou} & -0.5 < f \leq 0.5 \end{cases} \quad (5.5)$$

<sup>1</sup><http://www.orange-freesounds.com/nightingale-sound/>

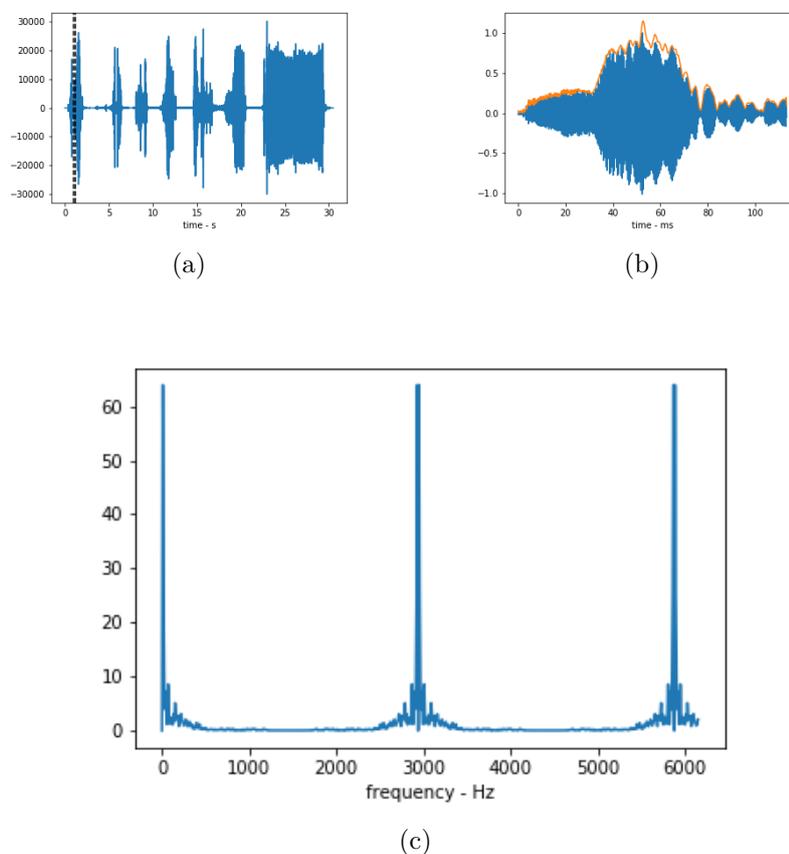


Figura 5.1: O sinal (a) *Nightingale.wav* e o trecho (linhas verticais em preto) usado para calcular a envoltória. (b) mostra o sinal normalizado (azul) e a sua envoltória (laranja). (c) Espectro de potência do sinal de envoltória e suas repetições em  $k2.940Hz$ ,  $k$  inteiro.

Frequências digitais entre  $-\pi$  e  $\pi$  significam que o sistema é representado pelas frequências de tempo contínuo de  $-\Omega_s$  a  $\Omega_s$ , onde  $\Omega_s = 2\pi F_s$ . O par de transformada de Fourier de um sinal  $x[n]$  é definido por:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{i\omega n} d\omega \quad \leftarrow \text{equação de síntese} \quad (5.6)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad \leftarrow \text{equação de análise} \quad (5.7)$$

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} |X(e^{j\omega})| & \text{espectro de amplitude ,} \\ \angle X(e^{j\omega}) & \text{espectro de fase} \end{cases} \quad (5.8)$$

A condição de existência da Transformada de Fourier é:  $X(e^{j\omega}) < \infty, \forall \omega$ , justificativa:

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||e^{-j\omega n}| \quad (5.9)$$

$$|X(e^{j\omega})| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad (5.10)$$

A condição de existência da Transformada de Fourier é que o sinal  $x[n]$  seja *absolutamente somável*,  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$

**Exemplo 64 :** Determine a Transformada de Fourier para  $x[n] = a^n u[n]$

*solução:*

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n \end{aligned}$$

admitindo que  $|ae^{-j\omega}| = |a| < 1^2$  pode-se aplicar a fórmula de somatório dos termos de uma PG infinita<sup>3</sup>,

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Na Fig. 5.2 tem-se a esquerda a representação no tempo para apenas 200 amostras e a direita tem-se o cálculo da DFT com 700 amostras. Observa-se que o espectro é periódico com 200 amostras e  $200 = 2\pi$

---

<sup>2</sup> $|e^{j\omega}| = \sqrt{\cos^2 \omega + \sin^2 \omega} = 1$

<sup>3</sup> $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$

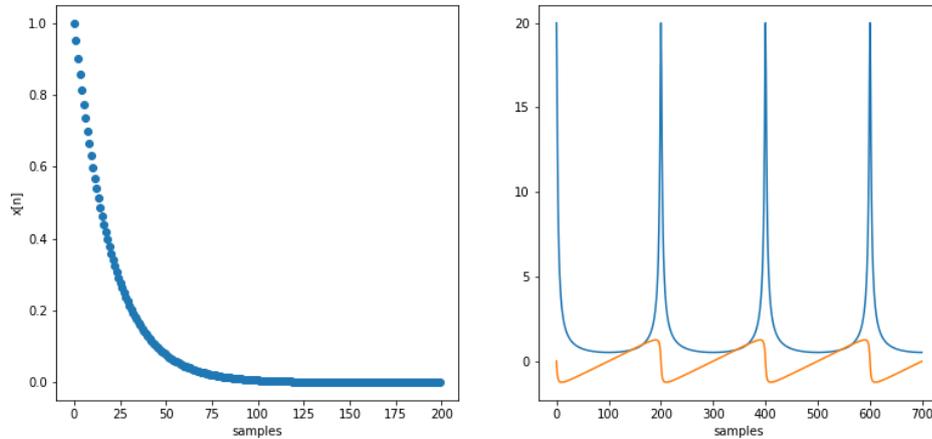


Figura 5.2: Gráfico que apresenta a solução do problema 64 com  $a = 0.95$ . O gráfico azul representa o módulo de  $X(e^{j\omega})$  e a curva laranja é a sua fase.

**Exemplo 65 :** Determine a Transformada de Fourier para

$$x[n] = \begin{cases} A, & 0 \leq n \leq M - 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

*solução:*

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{M-1} A e^{-j\omega n} \\ &= A \frac{1 - e^{-j\omega M}}{1 - e^{-j\omega}} = A e^{-j\omega(M-1)/2} \frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)} \end{aligned}$$

## 5.2 Densidade espectral de energia ou potência

O desenvolvimento abaixo foi feito apenas para sinais com energia finita e pode ser feito de forma equivalente para sinais com potência média finita.

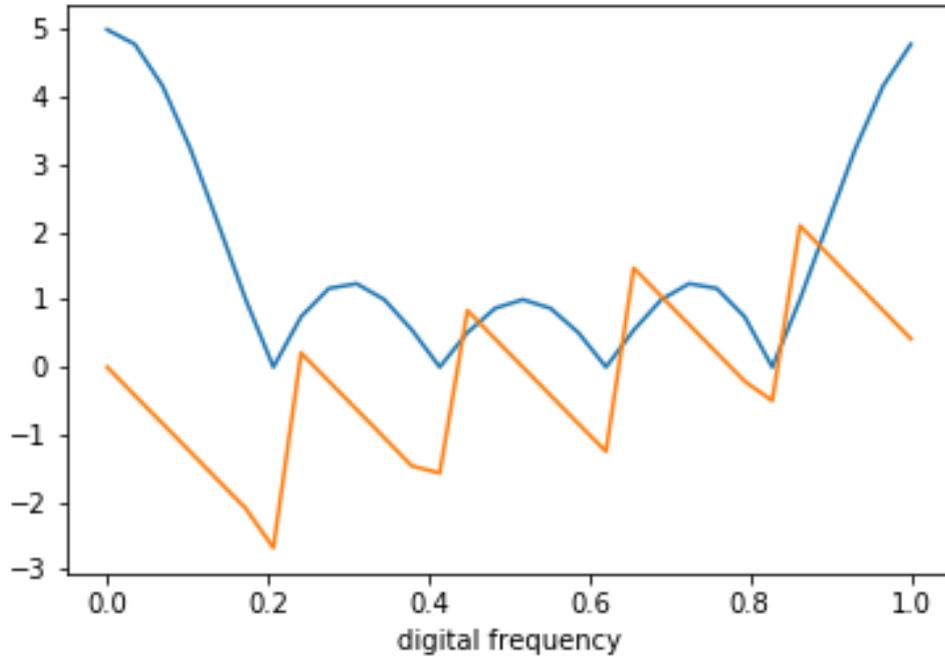


Figura 5.3: Gráfico do ex. 65, em azul é o módulo da transformada de Fourier e laranja é a fase. Foram adotados  $A = 1$ ,  $M = 5$  e no total foram simuladas 30 amostras e o eixo horizontal é  $[0, 2\pi]$ .

$$\begin{aligned}
 E_x &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} d\omega \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega}) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right\} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) d\omega
 \end{aligned}$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (5.11)$$

A quantidade  $|X(e^{j\omega})|^2 = S_x(f)$  é conhecida como densidade espectral

de energia. Quando o sinal possui potência média  $S_x(f)$  fica conhecida como *densidade espectral de potência média* ou simplesmente *densidade espectral de potência*.

**Exemplo 66 :** Determine a energia para o sinal apresentado no ex. 65

*solução:*

$$|X(e^{j\omega})|^2 = \begin{cases} A^2 \left| \frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)} \right|^2, \\ (AM)^2, \quad \omega = 0 \end{cases}$$

## 5.3 Propriedades da Transformada de Fourier Discreta

### 5.3.1 Propriedades de simetria

Sequência conjugada simétrica (Par):

$$x_e[n] = x_e^*[-n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$$

Sequência conjugada antissimétrica (Impar):

$$x_o[n] = x_o^*[-n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$$

Sequências complexas

1.  $x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$
2.  $Re\{x[n]\} \leftrightarrow X_e(e^{-j\omega})$
3.  $Im\{x[n]\} \leftrightarrow X_o(e^{-j\omega})$
4.  $x_e[n] \leftrightarrow X_R(e^{-j\omega})$
5.  $x_o[n] \leftrightarrow jX_I(e^{-j\omega})$

Sequências reais

6.  $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
7.  $X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$
8.  $X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$
9.  $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$
10.  $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$

### 5.3.2 Propriedades e teoremas gerais

1. Linearidade:  $ax[n] + by[n] \leftrightarrow aX(e^{-j\omega}) + bY(e^{-j\omega})$
2. Deslocamento no tempo:  $x[n - n_d] \leftrightarrow e^{-j\omega n_d} X(e^{-j\omega})$
3. Deslocamento em frequência:  $x[n]e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow X(e^{-j(\omega - \omega_0)})$
4. Inversão do tempo:  $x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$
5. Diferenciação:  $nx[n] \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega})$
6. Parseval:  $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$
7. Convolução:  $x[n] * y[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
8. Modulação:

$$\begin{aligned}
 x[n]w[n] &\leftrightarrow X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta \\
 x[n] \cos(\omega_0 n) &\leftrightarrow \frac{1}{2} [X(e^{j(\omega - \omega_0)}) + X(e^{j(\omega + \omega_0)})]
 \end{aligned}$$

**Exemplo 67 :** Determine a Transformada de Fourier de  $x[n] = a^{|n|}$ ,  $|a| < 1$

*solução*

Fazendo  $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$  onde

$$\begin{aligned} x_1[n] = a^n u[n] &\leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \\ x_2[n] = a^{-n} u[n-1] &\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=1}^{\infty} (ae^{j\omega})^n \\ &\rightarrow X_2(e^{j\omega}) = \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} \end{aligned}$$

Combinando as duas transformadas:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= X_1(e^{j\omega}) + X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{-j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} \\ &= X(e^{j\omega}) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2} \end{aligned}$$

**Exemplo 68 :** Função de transferência do filtro de médias móveis:  $y[n] = \frac{1}{3}(x[n+1] + x[n] + x[n-1])$

*solução:*

Usando a propriedade  $x[n-k] = x[n] * \delta[n-k]$  tem-se que a função de transferência é  $h[n] = \frac{1}{3}(\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1])$ . Aplicando-se a Transformada de Fourier,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}(e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos(\omega)$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{3}|1 + 2 \cos(\omega)| \text{ e,}$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega < \frac{2\pi}{3} \\ \pi, & \frac{2\pi}{3} \leq \omega < \pi \end{cases}$$

## 5.4 A Transformada Discreta de Fourier - TDF

A transformada discreta de Fourier é a transformada de Fourier para um sinal ( $x[n]$ ) com comprimento finito  $N$  e, a frequência calculada sobre um conjunto finito de valores, tipicamente feito em computadores. Neste caso,

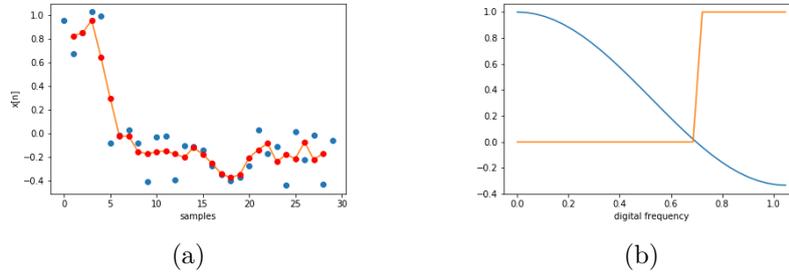


Figura 5.4: Gráfico para o ex. 68. (a) apresenta o sinal de entrada  $x[n]$  em azul e a saída  $y[n]$  em vermelho. (b) apresenta a resposta de módulo (azul) e fase (vermelha) para  $H(e^{j\omega})$ .

como é adotado um conjunto discreto de frequências a *suposição* é que o sinal seja periódico no tempo e  $T = N$ .

Neste caso, as amostras de frequência serão igualmente espaçadas e iguais a  $f_k = \frac{2\pi}{N}$  e transformada de Fourier será calculada sobre esses pontos,  $e_k[n] = e^{j(\frac{2\pi}{N})nk}$ .

A representação em Série Discreta de Fourier de  $x[n]$  é definida como um combinação linear de exponenciais complexas tais que:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (5.12)$$

Calculando os coeficientes  $X(k)$  tem-se:

$$\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (5.13)$$

$$\text{trocando a ordem dos somatórios} \quad (5.14)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right\} \quad (5.15)$$

como:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \begin{cases} 1 & r = mN, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (5.16)$$

Utilizando a eq. 5.16 tem-se:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)nk} \quad (5.17)$$

observe que:

1.  $X[k]$  é periódico com período  $N$
2. é um sequência finita de tamanho  $N$
3. notação  $x[n] \leftrightarrow X[k]$  e,
4.  $e^{-j\frac{2\pi}{N}} = W_N$

**Exemplo 69 :** Determine a Transformada Discreta de Fourier para  $x[n] = u[n] - u[n - 5]$  com período  $N = 10$ .

*solução:*

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^4 W_{10}^{nk} = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k}} \\ &= e^{-j\frac{2\pi}{5}k} \frac{\sin(k\pi/2)}{\sin(k\pi/10)} \\ &= k = 0, 1, 2, \dots, 9 \end{aligned}$$

Observa-se que a transformada de Fourier para esse problema é

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

Admitindo-se que  $\omega_k = 2k\pi/10$ , tem-se:

$$X(\omega_k) = e^{-j\frac{2\pi}{5}k} \frac{\sin(k\pi/2)}{\sin(k\pi/10)}$$

### 5.4.1 Propriedades

1. Linearidade - considere dois sinais  $x_1[n]$  e  $x_2[n]$ , ambos com período  $N$ ,  
 $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow X[k] = aX_1[k] + bX_2[k]$

2. Deslocamento de um sinal:  $x[n + M] \leftrightarrow X[k] = W_N^{-Mk} X[k]$

3. Simetrias

(a)  $x^*[n] \leftrightarrow X^*[-k]$

(b)  $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) \leftrightarrow \text{Re}\{X[k]\}$

(c)  $x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]) \leftrightarrow j\text{Im}\{X[k]\}$

4.  $x[n]$  é real

(a)  $\text{Re}\{X[k]\}$  é par

(b)  $\text{Im}\{X[k]\}$  é ímpar

(c)  $|X[k]|$  é par

(d)  $\angle X[k]$  é ímpar

### 5.4.2 Convolução periódica

Sejam dois sinais periódicos,  $x_1[n]$  e  $x_2[n]$ , com período  $N$ . A convolução de  $x_1[n] * x_2[n]$  é equivalente a transformada discreta inversa de Fourier para  $X_1[k]X_2[k]$ .

$$X_1[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]W_N^{mk} \text{ e } X_2[k] = \sum_{r=0}^{N-1} x_2[r]W_N^{rk}, \text{ então:}$$

$$\begin{aligned} X_1[k]X_2[k] &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} x_1[m]x_2[r]W_N^{m+r}k \\ x_1[n] * x_2[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1[k]X_2[k]W_N^{-nk} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \sum_{r=0}^{N-1} x_2[r] \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m-r)} \right\} \end{aligned}$$

$$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[n-m] \quad (5.18)$$

A eq.5.18 mostra que  $x_1[n] * x_2[n]$  é obtido de um modo similar a convolução de sinais não-periódicos. E,  $x_1[n] * x_2[n]$  é periódica com período  $N$ . Esse tipo de convolução é conhecida como *convolução periódica* ou *circular*.

Considerando um sinal com comprimento finito  $N$ . O par de transformada discreta de Fourier é definido como:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \quad \leftarrow \text{equação de síntese} \quad (5.19)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn} \quad \leftarrow \text{equação de análise} \quad (5.20)$$

observações:

1.  $x[n]$  são amostras em  $nT$
2.  $X[k]$  são calculados em frequências múltiplas de  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{NT}$
3.  $X[k]$  é periódica

**Exemplo 70 :** Determine a TDF para  $x[n] = \{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}$

*solução:*

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^9 x[n]W_{10}^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^4 W_{10}^{nk} \\ &= \frac{1 - W_{10}^{k5}}{1 - W_{10}^k} \end{aligned}$$

## 5.5 O algoritmo FFT -*Fast Fourier Transform*

O algoritmo proposto por Cooley e Tukey (1966) explora as propriedades de simetria da DFT e diminui sensivelmente o número de operações realizadas.

A DFT é dada por  $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  onde  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

Re-escrevendo a DFT por seus termos pares e ímpares (e  $N$  par)

$$\begin{aligned} X[k] &= \underbrace{\sum_{n_0=0}^{\frac{N-1}{2}} x[2n_0]W_N^{(2n_0)k}}_{\text{índices pares}} + \underbrace{\sum_{n_1=0}^{\frac{N-1}{2}} x[2n_1+1]W_N^{(2n_1+1)k}}_{\text{índices ímpares}} \\ &= \sum_{n_0=0}^{\frac{N-1}{2}} x[2n_0]W_N^{(2n_0)k} + W_N^k \sum_{n_1=0}^{\frac{N-1}{2}} x[2n_1+1]W_N^{(2n_1)k} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Considerando a seguinte igualdade:

$$W_N^{2kn} = e^{-\frac{j2\pi 2kn}{N}} = e^{-\frac{j2\pi kn}{N/2}} = W_{N/2}^{kn} \quad (5.22)$$

Desta forma, a DFT pode ser re-escrita apenas por termos  $N/2$

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n_0=0}^{\frac{N-1}{2}} x[2n_0]W_{N/2}^{n_0k} + W_N^k \sum_{n_1=0}^{\frac{N-1}{2}} x[2n_1+1]W_{N/2}^{n_1k} \\ &= G[k] + W_N^k H[k] \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde  $G[k]$  é uma DFT com  $N/2$  pontos realizada sobre as posições pares de  $x[n]$  e  $H[k]$  é uma DFT com  $N/2$  pontos sobre as posições ímpares de  $x[n]$ .

## 5.6 Exercícios

1. Prove a seguinte relação:  $\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi/N(r-k)n} = N(r=k)0cc$

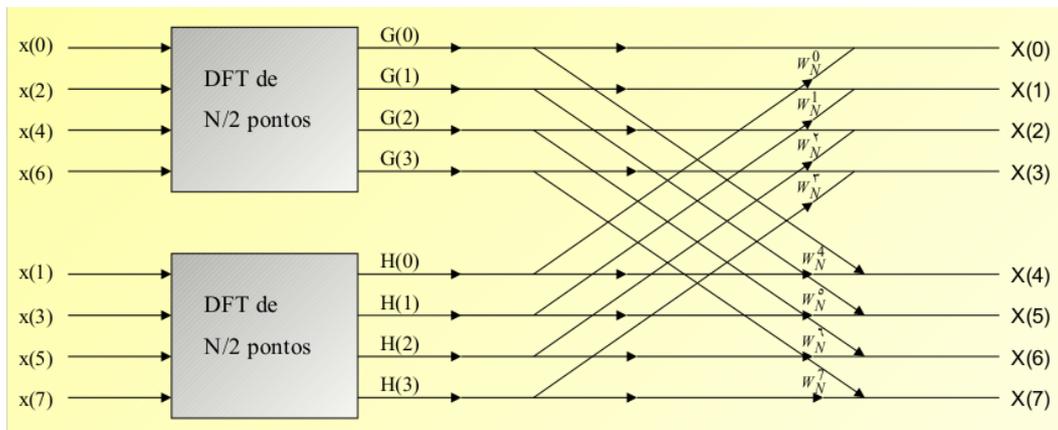


Figura 5.5: FFT de  $x[n]$  com  $N = 8$  e  $G[k]$  e  $H[k]$  com tamanho 4.

2. Calcule a TDF da sequência:  $x(0) = 2; x(1) = 2; x(2) = -2$  e  $x(3) = -2$ .
3. Calcule a TDF inversa, de  $N$  pontos ( $N = 10$ ) de:

$$X[k] = \begin{cases} 1 & k = 0, \\ 2 & k = 3e7 \\ 0 & \text{c.c..} \end{cases}$$

4. Um sinal analógico é amostrado em 10kHz e a TDF de 128 amostras é calculada. Determine o espaçamento de frequência entre as amostras espectrais.
5. Mostre que a resolução espectral de uma TDF de  $N$  amostras de um sinal é melhorada acrescentando zeros (por exemplo  $M$ ) à sequência original, e em seguida calculando a TDF de  $N + M$  pontos. Exemplifique.
6. Encontre a TDF das seguintes sequências. (Considere  $0 \leq n \leq N - 1$  e  $k$  um valor inteiro de índice de frequência):

(a)  $x[n] = \delta[n]$

(b)  $x[n] = \delta[n - n_0]$ , onde  $0 < n_0 < N - 1$

(c)  $x[n] = a^n$ , onde  $a < 1$

(d)  $x[n] = e^{j(2\pi\alpha/N)n}$

(e)  $x[n] = \cos[(2\pi\alpha/N)n]$

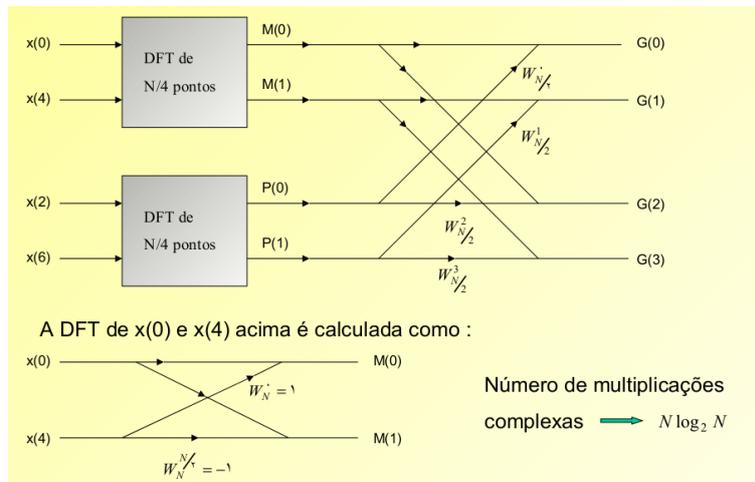


Figura 5.6: Último nível do algoritmo FFT.

(f)

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, \dots, 4 \\ 0 & n > 4. \end{cases}$$

OBS: faça  $N=4, 8$  e  $16$ . Observe as diferenças

7. Exemplo no computador: Obter a TDF de  $x[n] = \cos(2\pi\alpha/N)n$ , onde  $N = 128$  e  $\alpha = 1; 1.5e2$ .

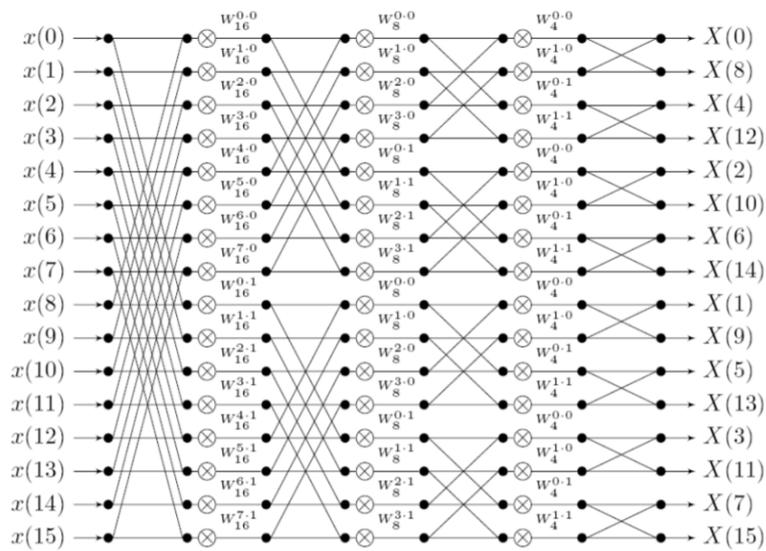


Figura 5.7: Diagrama completo com todos os sub-blocos do algoritmo FFT.



# Capítulo 6

## A Transformada Z

A transformada de Fourier de um sinal em tempo discreto  $x[n]$  é definida como:

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (6.1)$$

considerando que  $x[n]$  seja absolutamente somável:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$ . Existem muitos sinais não absolutamente somáveis que são do interesse da engenharia e neste caso a transformada de Fourier não existe. Para superar essa limitação, pode-se multiplicar o sinal  $x[n]$  por uma função exponencial  $e^{-\sigma n}$  de tal forma que  $x[n]$  seja forçado a ser absolutamente somável para algum valor real do parâmetro  $\sigma$ . Neste caso, a transformada de Fourier discreta fica:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x[n]e^{-\sigma n}\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x[n]e^{-\sigma n}]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-(\sigma+j\omega)n} \quad (6.2) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-sn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z) \end{aligned}$$

O resultado dessa soma é uma função de variável complexa definida como:

$$z = e^s = e^{\sigma+j\omega} \quad (6.3)$$

Essa é a transformada Z do sinal discreto  $x[n]$ :

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (6.4)$$

Dada a transformada Z  $X(z)$ , o sinal original pode ser obtido pela inversa da transformada Z, que pode ser derivada a partir da transformada de Fourier equivalente. Dessa forma, tem-se:

$$X(z) = X(e^{\sigma+j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x[n]e^{-\sigma n}]e^{-j\omega n} = \mathcal{F}[x[n]e^{-\sigma n}] \quad (6.5)$$

e,  $x[n]e^{-\sigma n}$  pode ser obtido pela transformada de Fourier inversa:  $x[n]e^{-\sigma n} = \mathcal{F}^{-1}[X(e^{\sigma+j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{\sigma+j\omega})e^{j\omega n} d\omega$

Multiplicando ambos os lados por  $e^{\sigma n}$ , tem-se:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{\sigma+j\omega})e^{(\sigma+j\omega)n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(z)z^n d\omega \quad (6.6)$$

Para representar a inversa da transformada em termos de  $z$  (ao invés de  $\omega$ ), tem-se

$$dz = d(e^{\sigma+j\omega}) = e^{\sigma} j e^{j\omega} d\omega = jz d\omega, \quad \text{i.e.,} \quad d\omega = \frac{dz}{jz} \quad (6.7)$$

e a transformada Z inversa fica:

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{j2\pi} \oint X(z)z^{n-1} dz \quad (6.8)$$

Observe que a integral com respeito a  $\omega$  varia de 0 a  $2\pi$  se torna uma integral com respeito a  $z = e^{\sigma+j\omega}$  no plano-Z complexo, ao longo de um círculo com raio fixo  $e^{\sigma}$  e variando o ângulo  $\omega$  de 0 a  $2\pi$ . Dessa forma, tem-se o par:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{n-1} dz$$

O par de transformadas Z, direta e inversa, também podem ser representadas como

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$$

Em particular, se  $\sigma = 0$ , ou seja,  $z = e^{j\omega}$ , então a transformada Z representa a transformada de Fourier discreta:

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})$$

Diferente da transformada de Fourier discreta que converte um sinal 1-D  $x[n]$  no tempo em um sinal 1-D complexo  $X(e^{j\omega})$  no domínio da frequência, a transformada Z  $X(z)$  converte o sinal 1D  $x[n]$  para uma função complexa sobre o plano complexo chamado de plano-Z, representado na forma polar pelo raio  $|z| = |e^{\sigma+j\omega}| = e^\sigma$  e ângulo  $\angle z = \angle(e^{\sigma+j\omega}) = \omega$ .

Em particular, quando essa função 2D  $X(z) = X(e^{\sigma+j\omega})$  é calculada ao longo do círculo unitário  $|z| = e^0 = 1$  corresponde a  $\sigma = 0$ , ela se torna 1D periódica  $X(e^{j\omega})$ , a transformada de Fourier discreta de  $x[n]$ . Graficamente, o espectro periódico do sinal pode ser determinado como a seção reta da função 2D  $X(z) = X(e^{\sigma+j\omega})$  ao longo do círculo unitário,  $|z| = e^0$ .

## 6.1 Função de transferência de sistemas LTI

A saída  $y[n]$  de um sistema discreto LTI com entrada  $x[n]$  pode ser obtido pela operação de convolução

$$y[n] = \mathcal{O}[x[n]] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

onde  $h[n]$  é a *resposta ao impulso* do sistema. Em particular, se a entrada é uma exponencial complexa

$$x[n] = z^n = (e^s)^n = e^{sn}$$

então a saída  $y[n]$  será:

$$y[n] = \mathcal{O}[z^n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = H(z)z^n$$

Essa equação representa que exponencial complexa  $x[n] = z^n = e^{sn}$  é uma auto-função de *qualquer* sistema discreto LTI, cujo autovalor é:

$$H(z) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

conhecida como a transformada Z da resposta ao impulso  $h[n]$ , conhecida como função de transferência (ou sistema) do sistema LTI. Em particular, quando  $\sigma = 0$ ,  $z = e^s = e^{j\omega}$ , a função de transferência  $H(z)$  se torna a *resposta de frequência*, a transformada de Fourier da resposta do impulso do sistema.

$$H(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

## 6.2 Mapeamento entre o plano-S e o plano-Z

O plano-S e o plano-Z são relacionados por um *mapeamento* especificado pela função analítica complexa:

$$z = e^s = e^{\sigma + j\omega} = e^{\sigma} e^{j\omega} = r e^{j\omega}$$

onde

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[s] = \sigma \\ \operatorname{Im}[s] = j\omega \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} |z| = r = e^{\sigma} \\ \angle z = \omega \end{cases}$$

O mapeamento é contínuo<sup>1</sup>. Considere o mapeamento das seguintes características:

- A origem  $s = 0$  do plano-S é mapeado em  $z = e^0 = 1$  sobre o eixo Real no plano-Z.
- Cada linha vertical  $\operatorname{Re}[s] = \sigma_0$  no plano-S é mapeado ao círculo de raio  $|z| = e^{\sigma_0}$  centrado na origem do plano-Z. Em particular,
  - a linha vertical  $\operatorname{Re}[s] = \sigma = -\infty$  é mapeada como a origem  $|z| = e^{-\infty} = 0$
  - o eixo imaginário  $\operatorname{Re}[s] = 0$  é mapeado como o círculo unitário  $|z| = e^0 = 1$
  - a linha vertical  $\operatorname{Re}[s] = \sigma = \infty$  é mapeada como o círculo de raio infinito  $|z| = e^{\infty} = \infty$ .

## 6.3 Região de Convergência

A existência da transformada Z  $X(z)$  de um sinal  $x[n]$  dependerá da variável complexa  $z = e^s$  assim como do sinal propriamente dito.  $X(z)$  existirá se e somente se o argumento  $z$  estiver dentro da *região de convergência (ROC)* do

<sup>1</sup>vizinhança de pontos no plano-S são mapeados na vizinhança dos pontos do plano-Z e vice-versa

plano-Z, que é o lugar geométrico dos pontos do plano-Z cuja transformada Z existe. A ROC da transformada Z é determinada por  $|z| = |e^s| = e^\sigma$  (um círculo), a enquanto que a ROC para a transformada de laplace é determinada por  $\sigma = \text{Re}[s]$ , (uma linha vertical). Esse fórmula é sempre necessária

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{para } |x| < 1$$

**Exemplo 71 :** A transformada Z de um sinal lateral direito  $x[n] = a^n u[n]$  é

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

Para que a soma convirja, ou seja, para  $X(z)$  existir, é necessário ter  $|az^{-1}| < 1$ , a ROC é  $|z| > |a|$ . Como um caso especial é quando  $a = 1$ ,  $x[n] = u[n]$  e tem-se

$$\mathcal{Z}[u[n]] = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

**Exemplo 72 :** A transformada Z de um sinal lateral esquerdo  $x[n] = -a^n u[-n-1]$  é:

$$\begin{aligned} X(z) &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}} \end{aligned}$$

Para que o somatório acima convirja é necessário que  $|a^{-1}z| < 1$ , a ROC seja  $|z| < |a|$ . Comparando as duas soluções acima observa-se que a principal diferença é que sinais totalmente diferentes podem possuir a mesma transformada Z mas com diferentes ROCs.

**Exemplo 73 :** Encontre a inversa de uma dada transformada Z para  $X(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1}$ . Comparando essa com a definição de transformada Z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[-2]z^2 + x[-1]z^1 + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2}$$

tem-se

$$x[n] = 4\delta[n + 2] + 2\delta[n] + 3\delta[n - 1]$$

Em geral, pode ser usada a propriedade de deslocamento temporal

$$\mathcal{Z}[\delta[n + n_0]] = z^{n_0}$$

para o inverso de  $X(z)$  dando diretamente a  $x[n]$ .

**Exemplo 74 :** Algumas vezes a inversa da transformada Z de uma dada  $X(z)$  pode ser obtida pela divisão longa.

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

tem-se

$$1 \div (1 - az^{-1}) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots$$

que irá convergir se a ROC é  $|z| > |a|$ ,  $|az^{-1}| < 1$  e tem-se

$$x[n] = a^n u[n]$$

. Alternativamente, a divisão longa também poderá ser feita como:

$$1 \div (-az^{-1} + 1) = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \dots$$

que converge se a ROC é  $|z| < |a|$ ,  $|a^{-1}z| < 1$  e tem-se

$$x[n] = -a^n u[-1 - n]$$

## 6.4 Zeros e Poles da Transformada Z

Todas as transformadas Z dos exemplos anteriores são quocientes de polinômios escritos na variável  $z$  que podem ser escritos na forma geral

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^k}{\sum_{k=0}^N a_k z^k} = \frac{b_M \prod_{k=1}^M (z - z_{z_k})}{a_N \prod_{k=1}^N (z - z_{p_k})}$$

onde  $N(z)$  é o polinômio do numerador is de ordem  $M$  com raízes  $z_{z_k}$ , ( $k = 1, 2, \dots, M$ ), e  $D(z)$  é o polinômio do denominador de ordem  $N$  com raízes  $z_{p_k}$ , ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Em geral, considera-se  $M < N$ . Se não for o caso, realiza-se a divisão dos polinômios.

Os *zeros* e *polos* do quociente  $X(z) = N(z)/D(z)$  são definidos como:

- **Zero:** Cada uma das raízes do numerador  $z_z$  para o qual  $X(z) \Big|_{z=z_z} = X(z_z) = 0$  é um *zero* de  $X(z)$ .

Se a ordem  $D(z)$  for maior que  $N(z)$  (i.e.,  $N > M$ ), então  $X(\infty) = 0$ , i.e., existe um zeros no infinito:

$$\frac{b_1z + b_0}{a_2z^2 + a_1z + a_0} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0$$

- **Polo:** Cada uma das zaízes do denominador do polinômio  $z_p$  para o qual  $X(z) \Big|_{z=z_p} = X(z_p) = \infty$  seja um *polo* de  $X(z)$ .

Se a ordem de  $N(z)$  for maior que a de  $D(z)$  (i.e.,  $M > N$ ), então  $X(\infty) = \infty$ , i.e, existe um polo no infinito:

$$\frac{b_2z^2 + b_1z + b_0}{a_1z + a_0} \Big|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$$

A maior parte do comportamento dos sistemas LTI pode ser obtido graficamente a partir da ROC e dos polos e zeros da função  $H(z)$  no plano- $Z$ .

## 6.5 Propriedades da ROC

A existência da transformada Z  $X(z)$  de uma função  $x[n]$  depende se o somatório da transformação converge ou não:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](e^{\sigma})^{-n}e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]|z|^{-n}e^{-j\omega n} < \infty$$

que depende da duração e magnitude de  $x[n]$  assim como da magnitude  $|z| = r = e^{\sigma}$  (a fase de  $z \angle z = \omega$  não tem efeito sobre a convergência do somatório).

**Sinais laterais direita:**  $x[n] = x[n]u[n - n_0]$  podem ter uma duração infinita para  $n > 0$ , e  $|z| = e^{\sigma} > 1$  tende a atenuar  $x[n]|z|^{-n}$  com  $n \rightarrow \infty$ .

**Sinais laterais esquerda:**  $x[n]u[n_0 - n]$  poderá ter duração infinita para  $n < 0$ , e  $|z| = e^{\sigma} < 1$  tenderá a atenuar  $x[n]|z|^{-n}$  com  $n \rightarrow -\infty$ .

Considerando essas observações, podem ser apresentadas as seguintes propriedades para a ROC:

- Se  $x[n]$  tem duração finita, então a ROC é todo o plano Z (a transformada Z converge, i.e.,  $X(z)$  existe, para qualquer  $z$ ) exceto  $z = 0$  ou  $z = \infty$ ;
- A ROC de  $X(z)$  consiste de um anel centrado na origem do plano Z;
- Se  $x[n]$  é um sinal lateral direito e o círculo  $|z| = r_0$ , então qualquer valor finito de  $|z| > r_0$  está na ROC.
- Se  $x[n]$  é um sinal lateral esquerdo então todos  $0 < |z| < r_0$  estará na ROC;
- Se  $x[n]$  é um sinal bilateral (com duração de menos infinito até mais infinito) então a ROC é uma intersecção de duas ROCs podendo ser um anel ou um conjunto vazio;
- Se  $X(z)$  é um quociente de polinômios, então a ROC não possui nenhum polo (por definição  $X(z) \Big|_{z=z_p} = \infty$ ). A ROC é limitada por polos ou se estende ao infinito;
- Se  $X(z)$  é um quociente racional de um sinal lateral direito  $x[n]$ , então a ROC é a região externa ao polo com maior raio. Se  $x[n] = 0$  para  $n < 0$  (causal), então a ROC inclui  $z = \infty$ ;
- Se  $X(z)$  é um quociente racional de um sinal  $x[n]$ , então a ROC estará na região mais interna ao polo mais interno. Se  $x[n] = 0$  para  $n \geq 0$  (não-causal), então a ROC inclui  $z = 0$ .
- A Transformada de Fourier  $X(e^{j\omega})$  de um sinal  $x[n]$  existirá se a ROC de uma transformada Z  $X(z)$  contém o círculo unitário  $|z| = 1$  or  $z = e^{j\omega}$ .

**Exemplo 75 :**

$$X(z) = \sum_{n=-3}^5 x[n]z^{-n}$$

quando  $z = 0$ ,  $z^{-n} = \infty$  para  $n > 0$ , quando  $z = \infty$ ,  $z^{-n} = \infty$  para  $n < 0$ . Desta forma nem  $z = 0$  ou  $|z| = \infty$  são incluídos na ROC.

**Exemplo 76 :**

$$x[n] = a^{|n|} = a^n u[n] + a^{-n} u[-n - 1]$$

Como a transformada Z é linear,  $X(z)$  é a soma das transformadas de dois termos:

$$\mathcal{Z}[a^n u[n]] = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad (|z| > |a|), \quad \mathcal{Z}[a^{-n} u[-n-1]] = \frac{-1}{1 - a^{-1}z^{-1}}, \quad (|z| < 1/|a|)$$

Se  $|a| < 1$ , i.e.,  $x[n]$  decairá quando  $|n| \rightarrow \infty$ , a intersecção de duas ROCs é  $|a| < |z| < 1/|a|$ , e tem-se:

$$\mathcal{Z}[x[n]] = \frac{1}{1 - az^{-1}} - \frac{1}{1 - a^{-1}z^{-1}} = \frac{a^2 - 1}{a} \frac{z}{(z - a)(z - 1/a)}$$

Entretanto, se  $|a| > 1$ , i.e.,  $x[n]$  crescerá sem limite quando  $|n| \rightarrow \infty$ , a intersecção das ROCs é um conjunto vazio, neste caso a transformada Z não existirá.

**Exemplo 77 :** Dadas a seguintes transformada Z, encontre os sinais correspondentes:

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} = -\frac{1/5}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{6/5}{1 - 2z^{-1}}$$

Os dois polos são  $z_{p_1} = 1/3$  e  $z_{p_2} = 2$ .  $X(z)$  tem três possíveis ROCs associados com três sinais diferentes no tempo  $x[n]$ :

- A região externa ao polo  $z_{p_2} = 2$ , corresponderá ao sinal lateral direito

$$x[n] = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{6}{5}2^n u[n]$$

- A região interna ao polo  $z_{p_1} = 1/3$ , corresponde ao sinal lateral esquerdo

$$x[n] = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] - \frac{6}{5}2^n u[-n-1]$$

- O anel entre os dois polos  $1/3 < |z| < 2$ , corresponde a um sinal bilateral

$$x[n] = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{6}{5}2^n u[-n-1]$$

Observe que a única ROC que inclui o círculo unitário  $|z| = 1$  é a terceira resposta e neste caso  $x[n]$  tem transformada discreta de Fourier transform. Para os demais casos a transformada de Fourier não existe.

## 6.6 Propriedades da Transformada Z

A transformada Z tem um conjunto de propriedades semelhantes a transformada de Fourier (e a transformada de Laplace). A principal diferença é na geometria das ROCs. Serão considerados

$$\mathcal{Z}[x[n]] = X(z) \quad ROC = R_x$$

e

$$\mathcal{Z}[y[n]] = Y(z) \quad ROC = R_y$$

- **Linearidade**

$$\mathcal{Z}[ax[n] + by[n]] = aX(z) + bY(z), \quad ROC \supseteq (R_x \cap R_y)$$

A ROC de uma combinação linear de  $x[n]$  e  $y[n]$  é a intersecção das ROCs  $R_x \cap R_y$  onde tanto  $X(z)$  quanto  $Y(z)$  existe, observe que em alguns casos a ROC de uma combinação linear poderá ser maior que  $R_x \cap R_y$ . Por exemplo, sendo  $x[n] = a^n u[n]$  e  $y[n] = a^n u[n-1]$ , a ROC é  $|z| > |a|$ , mas a ROC da sua diferença  $a^n u[n] - a^n u[n-1] = \delta[n]$  é todo o plano-Z.

- **Deslocamento temporal**

$$\mathcal{Z}[x[n - n_0]] = z^{-n_0} X(z), \quad ROC = R_x$$

**justificativa:**

$$\mathcal{Z}[x[n - n_0]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0] z^{-n}$$

Seja  $m = n - n_0$ ,  $n = m + n_0$  e

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m} z^{-n_0} = z^{-n_0} X(z)$$

A nova ROC é a mesma que a original exceto pela possibilidade de incluir ou remover a origem ou infinito.

- **Escala temporal**

$$\mathcal{Z}[x[n/k]] = X(z^k), \quad ROC = R_x^{1/k}$$

onde  $x[n/k]$  é definido como

$$x[n/k] \triangleq \begin{cases} x[n/k] & \text{se } n \text{ é múltiplo de } k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Exemplo 78 :**

Se  $x[n]$  é um sinal rampa

$n$	1	2	3	4	5	6
$x[n]$	1	2	3	4	5	6

então a versão expandida  $x[n/2]$  é

$n$	1	2	3	4	5	6
$n/2$	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$m$		1		2		3
$x[n/2]$	0	1	0	2	0	3

onde  $m$  é a parte inteira de  $n/k$ .

**justificativa:** A transformada Z desse sinal expandido é

$$\mathcal{Z}[x[n/k]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n/k]z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-km} = X(z^k)$$

Observe a mudança da índice de  $n$  para  $m$  não tem efeito sobre os termos descartados são todos zeros.

- **Convolução**

$$\mathcal{Z}[x[n] * y[n]] = X(z)Y(z), \quad ROC \supseteq (R_x \cap R_y)$$

A ROC da convolução poderá ser maior que a intersecção de  $R_x$  e  $R_y$  devido ao possível cancelamento dos polos e zeros.

- **Diferença temporal**

$$\mathcal{Z}[x[n] - x[n-1]] = (1 - z^{-1})X(z), \quad ROC = R_x$$

**Justificativa:**

$$\mathcal{Z}[x[n] - x[n-1]] = X(z) - z^{-1}X(z) = (1 - z^{-1})X(z) = \frac{z-1}{z}X(z)$$

Observa-se que o zero  $z = 1$  e polo  $z = 0$ , a nova ROC é a mesma que  $R_x$  exceto pela possível retirada de  $z = 0$  causada pela soma do polo ou soma de  $z = 1$  causado pela soma de zero que possa cancelar o polo existente.

- **Soma temporal**

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{k=-\infty}^n x[k]\right] = \frac{1}{1 - z^{-1}}X(z), \quad ROC \supseteq [R_x \cap (|z| > 1)]$$

**Justificativa:** A soma de  $x[n]$  pode ser escrito como a convolução com  $u[n]$ :

$$u[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n-k]x[k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

Aplicando a propriedade de convolução, tem-se

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{k=-\infty}^n x[k]\right] = \mathcal{Z}[u[n] * x[n]] = \frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$$

com  $\mathcal{Z}[u[n]] = 1/(1-z^{-1})$ .

- **Espelhamento temporal**

$$\mathcal{Z}[x[-n]] = X(1/z) \quad ROC = 1/R_x$$

**Justificativa:**

$$\mathcal{Z}[x[-n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\left(\frac{1}{z}\right)^{-m} = X(1/z)$$

onde  $m = -n$ .

- **Escala no domínio Z**

$$\mathcal{Z}[a^n x[n]] = X\left(\frac{z}{a}\right), \quad ROC = |a|R_x$$

**Justificativa:**

$$\mathcal{Z}[a^n x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Em particular, se  $a = e^{j\omega_0}$ , a relação acima se torna

$$\mathcal{Z}[e^{jn\omega_0} x[n]] = X(e^{-j\omega_0} z) \quad ROC = R_x$$

A multiplicação por  $e^{-j\omega_0}$  em  $z$  corresponde a rotação por  $\omega_0$  no plano Z, ou seja, um deslocamento de frequência por  $\omega_0$ . A rotação é tanto horário ( $\omega_0 > 0$ ) quanto trigonométrico ( $\omega_0 < 0$ ). Essa propriedade é essencialmente a mesma que o deslocamento de frequência da Transformada Discreta de Fourier.

- **Conjugado**

$$\mathcal{Z}[x^*[n]] = X^*(z^*), \quad ROC = R_x$$

**Justificativa:** O conjugado complexo da transformada Z de  $x[n]$  é

$$X^*(z) = \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \right]^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n](z^*)^{-n}$$

Substituindo  $z$  por  $z^*$ , obtem-se o resultado desejado.

- **Diferenciação no Domínio Z**

$$\mathcal{Z}[nx[n]] = -z \frac{d}{dz} X(z), \quad ROC = R_x$$

**Justificativa:**

$$\frac{d}{dz} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{d}{dz} (z^{-n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)x[n]z^{-n-1} = \frac{-1}{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n}$$

i.e.,

$$\mathcal{Z}[nx[n]] = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

**Exemplo 79 :** Fazendo a derivada com respeito a  $z$  do lado lateral direito de

$$\mathcal{Z}[a^n u[n]] = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

tem-se

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{1 - az^{-1}} \right] = \frac{-az^{-2}}{(1 - az^{-1})^2}$$

Usando a propriedade de diferenciação

$$\mathcal{Z}[na^n u[n]] = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \quad |z| > |a|$$

Observe que a ROC  $|z| < |a|$ , tem-se

$$\mathcal{Z}[-na^n u[-n-1]] = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \quad |z| < |a|$$

## 6.7 Transformada Z de sinais típicos

- $\delta[n], \delta[n - m]$

$$\mathcal{Z}[\delta[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]z^{-n} = 1 \quad \text{for all } z$$

Usando a propriedade de deslocamento temporal, tem-se

$$\mathcal{Z}[\delta[n - m]] = z^{-m} \quad \text{for all } z$$

- $u[n], a^n u[n], na^n u[n]$

$$\mathcal{Z}[u[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1$$

Usando a propriedade de escala, tem-se

$$\mathcal{Z}[a^n u[n]] = \frac{1}{1 - (z/a)^{-1}} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

Aplicando a propriedade da diferenciação

$$\mathcal{Z}[na^n u[n]] = -z \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{1 - az^{-1}} \right] = -z \frac{-az^{-2}}{(1 - az^{-1})^2} = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \quad |z| > |a|$$

- $e^{\pm jn\omega_0} u[n], \cos[n\omega_0] u[n], \sin[n\omega_0] u[n]$

Usando a propriedade de escala em  $\mathcal{Z}[u[n]] = 1/(1 - z^{-1})$ , tem-se

$$\mathcal{Z}[e^{jn\omega_0} u[n]] = \frac{1}{1 - (e^{j\omega_0} z)^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \quad |z| > 1$$

e similarmente, tem-se

$$\mathcal{Z}[e^{-jn\omega_0} u[n]] = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} \quad |z| > 1$$

E, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\cos(n\omega_0)u[n]] &= \mathcal{Z}\left[\frac{e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0}}{2}u[n]\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}}\right] \\ &= \frac{2 - (e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0})z^{-1}}{2[1 - (e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0})z^{-1} + z^{-2}]} \\ &= \frac{1 - \cos\omega_0 z^{-1}}{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}} \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

Similarmente

$$\mathcal{Z}[\sin(n\omega_0)u[n]] = \frac{\sin\omega_0 z^{-1}}{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}} \quad |z| > 1$$

- $r^n \cos[n\omega_0]u[n]$ ,  $r^n \sin[n\omega_0]u[n]$

Usando a propriedade de escala, tem-se

$$\mathcal{Z}[r^n \cos(n\omega_0)u[n]] = \frac{1 - r \cos\omega_0 z^{-1}}{1 - 2r \cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad |z| > r$$

e

$$\mathcal{Z}[r^n \sin(n\omega_0)u[n]] = \frac{r \sin\omega_0 z^{-1}}{1 - 2r \cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad |z| > r$$

## 6.8 Análise de sistemas LTI com o uso da transformada Z

Usando a propriedade de convolução, a transformada Z se torna um ferramente útil para a análise de sistemas LTI da forma:

$$y[n] = h[n] * x[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) = H(z)X(z)$$

Quando a entrada é  $x[n] = e^{sn} = z^n$  a operação desse sistema sobre a entrada é  $H(z)$  multiplicada a entrada:

$$y[n] = \mathcal{O}[z^n] = h[n] * z^n = H(z)z^n$$

### • Sistemas LTI e causais

Um sistema LTI é *causal* se a sua saída  $y[n]$  depende somente do estado corrente e dos passados de  $x[n]$ . Considerando que inicialmente esta em

repouso  $y[n] \Big|_{n < 0} = 0$ , então a sua resposta  $y[n] = h[n]$  a entrada impulso  $x[n] = \delta[n]$  em  $n = 0$  estará em repouso para  $n < 0$ , i.e.,  $h[n] = h[n]u[n]$ . Sua resposta a entrada geral  $x[n]$  é:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = \sum_{m=0}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

Usando as propriedades de ROC, tem-se que

**Se um sistema LTI é causal (com resposta ao impulso  $h[n] = 0$  for  $n < 0$ ), então a ROC da sua função de transferencia  $H(z)$  é a parte exterior de um círculo incluindo o infinito. Em particular, quando  $H(z)$  é uma função racional, o sistema será causal se somente se a ROC é o exterior círculo definido pelo polo mais externo, e a ordem do numerator não pode ser maior que a ordem do denominator.**

- **Sistemas LTI estáveis**

Um sistema LTI será *estável* se a sua resposta a qualquer entrada limitada também for limitada para qualquer que seja  $n$ ,

$$\text{Se } |x[n]| < B_x \text{ then } |y[n]| < \infty$$

Como a saída de um sistema LTI é relacionado pela convolução, tem-se:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] < \infty$$

and que será limitada se:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]| < \infty$$

Se a resposta ao impulso do sistema  $h[n]$  LTI for absolutamente somável, então o sistema será estável. Essa condição também é necessária. Todos os sistemas estáveis tem a sua resposta impulsiva absolutamente integrável.

- **Sistemas LTI causais e estáveis**

**Um sistema LTI causal com função de transferência racional  $H(z)$  é estável se somente se todos os seus polos estão no interior do círculo unitário no plano Z, i.e., a magnitudes de todos os polos são menores do que 1.**

$$|Re[z_p]| < 1 \quad (\text{for all } z_p)$$

**Exemplo 80 :**

A função de transferência de um sistema LTI é

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

sem a especificação da ROC, o  $H(z)$  poderpa se a transformada Z de um dos possíveis sinais  $h[n]$ .

- Se a ROC é  $|z| > |a|$ , o sistema é causal e  $h[n] = a^n u[n]$ .
  - Se  $|a| < 1$ , i.e., a ROC inclui o círculo unitário, o sistema é estável;

- Se  $|a| > 1$ , i.e., a ROC não contém o círculo unitário, o sistema é instável;
- Se a ROC é  $|z| < |a|$ , o sistema não é causal e  $h[n] = -a^n u[-n - 1]$ .
  - Se  $|a| < 1$ , i.e., A ROC não inclui o círculo unitário na ROC, o sistema é instável;
  - Se  $|a| > 1$ , i.e., A ROC inclui o círculo unitário, o sistema é estável

## 6.9 Sistemas LTI descritos por equações de recorrência

O sistema de diferenças de primeira ordem é definido como

$$dx[n] = x[n+1] - x[n], \quad \text{or} \quad dx[n] = x[n] - x[n-1]$$

O sistema de diferenças de segunda ordem é definido como

$$d^2x[n] = dx[n] - dx[n-1] = x[n] - x[n-1] - x[n-1] + x[n-2] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$$

Em geral, a diferença de  $k^{\text{têxtésima}}$  ordem de diferença envolverá termos  $x[n-k]$ .

Similar a um sistema LTI contínuo descrito por um conjunto de equações diferenciais, o sistema discreto LTI é descrito por um conjunto de equações de recorrência ou equações de diferença finitas:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

onde  $x[n]$  e  $y[n]$  é a entrada e saída discretas respectivamente. Após aplicar a transformada Z em ambos os lados da equação de recorrência, obtém-se a equação no domínio Z  $z$ :

$$Y(z) \left[ \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right] = X(z) \left[ \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right]$$

e sua função de transformada é um quociente de polinômio:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_M}{a_N} \frac{\prod_{k=1}^M (z - z_{z_k})}{\prod_{k=1}^N (z - z_{z_k})} = K \frac{N(z)}{D(z)}$$

onde  $K = b_M/a_N$  é um coeficiente e  $z_{z_k}$ , ( $k = 1, 2, \dots, M$ ) são as raízes do polinômio do numerador e  $z_{p_k}$ , ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) são as raízes do polinômio do denominador. Observa-se que, assim como no caso contínuo, somente as equações de recorrência não especificam completamente a relação entre  $x[n]$  e  $y[n]$  e, informações adicionais devem ser fornecidas. A função de transferência  $H(z)$  não especifica completamente o sistema. O mesmo  $H(z)$  com diferentes ROCs representarão diferentes sistemas podendo ser, no mínimo, causal ou não causal.

**Exemplo 81 :** A entrada e saída de um sistema LTI é descrito por

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1]$$

Observe que sem mais nenhuma informação extra como as condições iniciais, essa equação não especifica  $y[n]$  quando  $x[n]$  é dado. Tomando a transformada Z dessa equação e usando a propriedade do deslocamento temporal, tem-se

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

e a função de transferência é

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)$$

Observe que a causalidade e estabilidade do sistema não poderá ser afirmada se não for indicada a ROC. Considerando as duas possíveis ROCs:

- Se a ROC é  $|z| > 1/2$ , e inclui o círculo unitário o sistema será causal e estável:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

- Se ROC é  $|z| < 1/2$ , não inclui o círculo unitário. O sistema será não causal e instável:

$$h[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[-n]$$

## 6.10 Determinação da Transformada de Fourier a partir do diagrama de Polos-Zeros

Dado um diagrama de polos-zero de  $H(s)$ , pode-se determinar qualitativamente o comportamento do sistema em função de  $\omega$ .

### 6.10.1 Sistemas de primeira ordem

Sistemas de primeira ordem é descrito por

$$y[n] - ay[n - 1] = x[n]$$

Tem resposta ao impulso  $h[n]$  dada por

$$h[n] - ah[n - 1] = \delta[n]$$

com

$$h[n] = a^n u[n]$$

Alternativamente, aplicando a transformada Z da equação de recorrência tem-se

$$Y(z) - az^{-1}Y(z) = (1 - az^{-1})Y(z) = X(z)$$

e a função de transferência considerando ser causal

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

$H(z)$  possui um zero em  $z = 0$  e um polo  $z_p = a$  e a ROC é a região  $|z| > |a|$  externa ao polo. Se  $|a| < 1$ , então o círculo unitário  $|z| = r = 1$  estará incluído na ROC, a transformada de Fourier existe e o sistema é estável. A resposta ao impulso do sistema é

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] = a^n u[n]$$

embora  $h[n]$  seja diferente de uma resposta ao impulso típica do caso contínuo  $h(t) = e^{-t/\tau}u(t)$ , são essencialmente o mesmo de  $h(t)$  e pode ser re-escrito como

$$h(t) = e^{-t/\tau}u(t) = (e^{-1/\tau})^t u(t) = a^t u(t)$$

onde

$$a \triangleq e^{-1/\tau}$$

sendo  $z = e^{j\omega} \in H(z)$ , obtém-se a resposta de frequência do sistema

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a} = \frac{e^{j\omega} - 0}{e^{j\omega} - a} = \frac{u}{v}$$

onde  $u$  e  $v$  são dois vetores no plano Z definido por

$$u \triangleq e^{j\omega} - 0 = e^{j\omega}, \quad v \triangleq e^{j\omega} - a$$

Para qualquer frequência  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  representada por  $z = e^{j\omega}$  no círculo unitário, a magnitude e fase da resposta de frequência

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|u|}{|v|}$$

e

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle u - \angle v$$

que pode ser determinado graficamente no plano Z a medida que a frequência  $\omega$  muda na faixa  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ . Se for considerado que  $0 < a < 1$ , então quando  $\omega = 0$ , o denominador encontra o seu mínimo em  $1 - a$ , e  $|H(e^{j\omega})|$  é maximizado,  $1/(1 - a)$ , e quando  $\omega = \pi$ , o denominador é máximo em  $|(-1 - a)| = 1 + a$ , e  $|H(e^{j\omega})|$  é minimizado,  $1/(1 + a)$ . A fase de  $H(e^{j\omega}) = \angle u - \angle v$  é zero quando  $\omega = 0$  ou  $\omega = \pi$ , e é negativo para  $0 < \omega < \pi$  e positivo para  $-\pi < \omega < 0$ .

### 6.10.2 Sistemas de segunda ordem

Um sistema de segunda ordem em tempo discreto é da seguinte forma

$$y[n] + a_1y[n - 1] + a_2y[n - 2] = x[n]$$

A transformada Z dessa equação de recorrência é

$$Y(z) + a_1z^{-1}Y(z) + a_2z^{-2}Y(z) = (1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2})Y(z) = X(z)$$

e a função de transferência é

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + a_1z + a_2} = \frac{z^2}{(z - z_{p1})(z - z_{p2})}$$

que possui um zero duplo em  $z = 0$  e um par de polos complexos conjugados

$$z_{p1,p2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{j}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{j}{2}\sqrt{4a_2 - a_1^2}$$

## 6.10. DETERMINAÇÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER A PARTIR DO DIAGRAMA D

Define-se

$$a_1 \triangleq -2r \cos\theta, \quad \text{and} \quad a_2 \triangleq r^2 \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

e a função de transferência é

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2r \cos\theta z + r^2}$$

com polos e zeros

$$z_{p_1, p_2} = r(\cos\theta \pm j \sin\theta) = r e^{\pm j\theta}$$

Para o sistema ser causal e estável, tem-se  $|z_p| = r < 1$ . Quando  $0 < \theta < \pi$ ,  $H(z)$  pode ser expresso como

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z^2}{(z - z_{p_1})(z - z_{p_2})} = \frac{1}{(1 - z_{p_1}z^{-1})(1 - z_{p_2}z^{-1})} \\ &= \frac{1}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})} = \frac{A}{1 - re^{j\theta}z^{-1}} + \frac{B}{1 - re^{-j\theta}z^{-1}} \end{aligned}$$

onde

$$A = \frac{e^{j\theta}}{2j \sin\theta}, \quad B = \frac{-e^{-j\theta}}{2j \sin\theta}$$

A resposta ao impulso do sistema pode ser determinada pela transformada Z inversa

$$\begin{aligned} h[n] &= [A(re^{j\theta})^n + B(re^{-j\theta})^n]u[n] = \frac{r^n}{2j \sin\theta} [e^{j\theta(n+1)} - e^{-j\theta(n+1)}]u[n] \\ &= r^n \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} u[n] \end{aligned}$$

quando  $\theta = 0$ ,  $H(z)$  possui um polo duplo em  $z_p = r$  e

$$H(z) = \frac{1}{(1 - rz^{-1})^2}$$

e a nova resposta ao impulso

$$h[n] = (n+1)r^n u[n]$$

quando  $\theta = \pi$ ,  $H(z)$  possui um polo duplo em  $z_p = -r$  e

$$H(z) = \frac{1}{(1 + rz^{-1})^2}$$

e a nova resposta ao impulso

$$h[n] = (n + 1)(-r)^n u[n]$$

Para se determinar o comportamento do sistema em função de  $\omega$  no plano Z, fazendo  $z = e^{j\omega}$  em  $H(z)$  tem-se a resposta de frequência do sistema como

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{-j\omega})} = \frac{(e^{j\omega})^2}{(e^{j\omega} - re^{j\theta})(e^{j\omega} - re^{-j\theta})} = \frac{u^2}{v_1 v_2}$$

onde  $u$ ,  $v_1$  e  $v_2$  são três vetores no plano Z definidos como

$$u \triangleq e^{j\omega} - 0 = e^{j\omega}, \quad v_1 \triangleq e^{j\omega} - re^{j\theta}, \quad v_2 \triangleq e^{j\omega} - re^{-j\theta}$$

Para qualquer frequência  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  e representada por  $z = e^{j\omega}$  no círculo unitário, a magnitude e fase da resposta de frequência representada no plano Z

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|u|^2}{|v_1||v_2|}$$

e

$$\angle H(e^{j\omega}) = 2\angle u - \angle v_1 - \angle v_2$$

quando  $\omega = \pm\pi$ ,  $v_1$  e  $v_2$  são maximizados  $|H(e^{j\omega})|$  é minimizado. Em particular, quando  $r$  está perto de 1,  $|v_1| = 1 - |r|$  é minimizado quando  $\omega = \theta$ , i.e.,  $|H(e^{j\omega})|$  possui um pico.

## 6.11 Diagramas de Bloco

A transformada Z converte as equações de recorrência e convoluções em operações algébrica nos plano Z. Mais ainda, o comportamento de sistemas compostos da interconexão de sistemas LTI também podem ser facilmente analisados no plano Z. Alguns tipos simples de interconexões são apresentados a seguir.

- **Sistemas paralelos:** se um sistema é composto de dois sistemas LTI com resposta ao impulso dadas por  $h_1[n]$  e  $h_2[n]$ , a sua resposta ao impulso equivalente é

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

e no domínio Z

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

- **Sistemas seriais ou em cascata:** se um sistema é composto de dois sistemas LTI com resposta ao impulso  $h_1[n]$  e  $h_2[n]$ , sua resposta equivalente é

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n]$$

e no domínio  $Z$

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = H_2(z)H_1(z)$$

- **Sistemas com realimentação:** se um sistema é composto de sistema LTI com  $h_1[n]$  na ligação direta ( $x[n] \rightarrow y[n]$ ) e outro sistema LTI  $h_2[n]$  no caminho reverso (ou de realimentação,  $y[n] \rightarrow x[n]$ ), sua saída  $y[n]$  pode ser determinado por

$$y[n] = h_1[n] * e[n] = h_1[n] * [x[n] + h_2[n] * y[n]]$$

e no plano  $Z$

$$Y(z) = H_1(z)E(z) = H_1(z)[X(z) + H_2(z)Y(z)]$$

Considerando a dificuldade de resolver essa equação no tempo,  $y[n] = h_1[n] * x[n]$ , tem-se que a resposta no domínio  $Z$  pode ser facilmente obtida por uma equação algébrica no domínio  $Z$  para encontrar  $Y(z)$

$$Y(z)[1 - H_1(z)H_2(z)] = H_1(z)X(z)$$

e a função de transferência é

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)}$$

A saída da realimentação pode ser positiva ou negativa. Para a negativa, existirá um sinal de subtração na frente de  $h_2(n)$  e  $H_2(z)$  do caminho de realimentação é  $e[n] = x[n] - h_2[n] * y[n]$  e

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$

**Exemplo 82 :** A função de transferência de um sistema LTI de primeira ordem

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n], \quad Y(z)[1 - \frac{1}{4}z^{-1}] = X(z)$$

é

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

comparando  $H(z)$  com a função de transferência de um sistema de realimentação, observa-se que o sistema de primeira ordem pode ser representado a partir de um sistema de realimentação como  $H_1(z) = 1$  no caminho direto, e  $H_2(z)$  para o produto de  $1/4$  e  $z^{-1}$  (um elemento de atraso com entrada  $x[n]$  e saída  $y[n] = x[n - 1]$ ) no caminho da realimentação negativa.

**Exemplo 83 :**

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Essa equação pode ser re-escrita como:

$$Y(z) = (1 - 2z^{-1}) \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} X(z) = (1 - 2z^{-1}) W(z)$$

onde

$$W(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} X(z)$$

pode ser obtida da mesma forma que no exemplo anterior. Uma vez que  $W(z)$  e  $W(z)z^{-1}$  são disponíveis,  $Y(z)$  pode ser facilmente determinado como:

**Exemplo 84 :** Considere o sistema de segunda ordem como função de transferência

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{2/3}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1/3}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Essas três expressões para  $H(z)$  correspondem a três diferentes diagramas de bloco. As duas últimas expressões são, respectivamente as representações cascatas e paralelos, ao passo que a primeira é uma representação direta apresentada abaixo. Considerando um sistema geral de segunda ordem como

$$Y(z) + asY(z)z^{-1} + bY(z)z^{-2} = X(z), \quad \text{or} \quad Y(z) = X(z) - aY(z)z^{-1} - bY(z)z^{-2}$$

tem-se que  $Y(z)$  é uma combinação linear das versões atrasadas dele mesmo e da entrada  $X(z)$  que pode ser representado como

um sistema de realimentação com dois caminhos de realimentação,  $-az^{-1}$  e  $-bz^{-2}$ . Nesse sistema em particular,  $a = -1/4$  and  $b = 1/8$ .

**Exemplo 85 :** Um sistema de segunda ordem com função de transferência

$$H(z) = K \frac{1 + cz^{-1} + dz^{-2}}{1 + az^{-1} + bz^{-2}} = \frac{K}{1 + az^{-1} + bz^{-2}} (1 + cz^{-1} + dz^{-2})$$

Esse sistema pode ser representado como as cascata de dois sistemas

$$W(z) = H_1(z)X(z) = \frac{K}{1 + az^{-1} + bz^{-2}}X(z)$$

e

$$Y(z) = H_2(z)W(z) = (1 + cz^{-1} + dz^{-2})W(z)$$

O sistema de primeira ordem  $H_1(z)$  pode ser implementado por dois elementos com elementos de atraso no caminho de realimentação, e o segundo sistema é uma combinação linear de  $W(z)$ ,  $W(z)z^{-1}$  e  $W(z)z^{-2}$ , todos disponíveis no caminho de realimentação de primeira ordem. O diagrama em blocos desse exemplo pode ser generalizado a qualquer sistema representado por quociente de polinômios

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (M \leq N)$$



# Capítulo 7

## Noções de Filtros: tempo contínuo e discreto

Filtros são sistemas LIT especificados e projetados em frequência. Sua função primária é selecionar, com pouca ou nenhuma atenuação determinadas faixas de frequências e rejeitar todas os outros componentes de frequência do sinal de entrada. Em um contexto mais amplo define-se um filtro como um dispositivo que modifica as componentes de frequência de um sinal aplicado em sua entrada e são utilizados onde há necessidade de seleção sinais específicos, redução de ruído ou equalização de sinais.

Os principais requisitos considerados no projeto de filtros:

1. O filtro deve ter uma determinada resposta de frequência;
2. O filtro deve atender a uma resposta de fase ou atraso de grupo;
3. O filtro pode ter restrições sobre resposta ao impulso;
4. O filtro deve ser causal e,
5. O filtro deve ser estável.

Normalmente a *resposta de frequência* é o parâmetro desejada. Em particular, a inclinação e a complexidade da curva de resposta é um fator decisivo para a ordem do filtro e a sua viabilidade de construção. Em filtros mais sofisticados a resposta de frequência pode ser acompanhada de pesos,

para cada uma das frequências, indicando a região mais importante. O maior peso mais importante é a aproximação. Exemplos típicos da resposta de frequência são, Fig. 7:

1. Um filtro passa-baixa é utilizada para cortar sinais de alta frequência indesejadas
2. Um filtro passa-alta passa altas frequências com pouca atenuação
3. Um filtro passa-banda passa por uma gama limitada de frequências
4. Um filtro de rejeita-banda passa frequências acima e abaixo de um determinado intervalo. Um filtro de rejeita-banda muito estreito é conhecido como um filtro notch

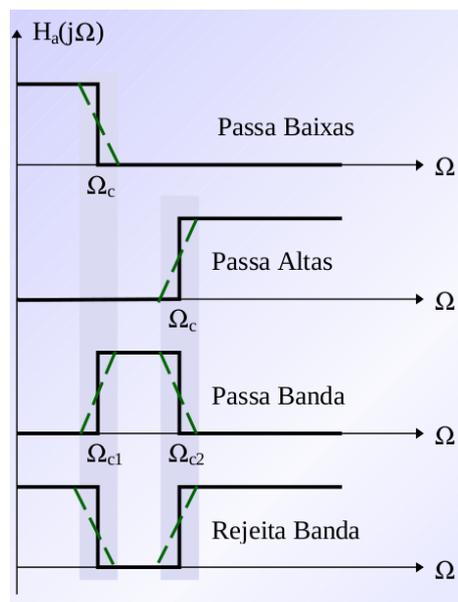


Figura 7.1: Respostas de frequência típica para os diferentes tipos de filtros: passa-baixa, passa-alta, passa-banda e rejeita-banda.

A *Fase e atraso de grupo* de um filtro passa-tudo passa através de todas as frequências inalterados mas muda a fase do sinal. Filtros deste tipo podem ser usadas para equalizar o atraso de grupo. Este filtro é também usado para compensar outros sistemas que deformem a fase.

Em alguns casos, conhecer a *resposta de impulso* permite avaliar como o sistema vai se comportar para respostas ao degrau avaliando o tempo de

estabilização ao longo do tempo. Em alguns casos, pode mesmo ser relevante considerar a resposta de frequência e a resposta ao impulso do filtro, escolhidos independentemente um do outro.

Causalidade, a fim de ser realizável, qualquer filtro dependente do tempo deve ser causal. A abordagem padrão é deixar este requisito até a etapa final. Filtros que não operam em tempo real (por exemplo, para processamento de imagem) podem ser não-causal.

Estabilidade, um filtro estável assegura que cada sinal de entrada limitada produz uma resposta do filtro limitada. Um filtro que não atender a esse requisito pode, em algumas situações revelar inútil ou mesmo prejudicial. Algumas abordagens de projeto podem garantir a estabilidade, os filtros têm de ser cuidadosamente projetados a fim de evitar a instabilidade.

Um dispositivo que atua como filtro é descrito a seguir:

$$x(t) \rightarrow \text{FILTRO}, h(t) \rightarrow y(t) \quad (7.1)$$

Utilizando a transformada de Laplace e Fourier,

$$\begin{aligned} Y(s) = H(s)X(s) &\leftarrow H(s) \text{ é a função de transferência} \\ Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) &\leftarrow H(\omega) \text{ é a resposta de frequência} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Normalmente a resposta de frequência  $|H(\omega)|$  é representada em escala logarítmica,  $|H(\omega)|_{dB}$ , e é chamada de ganho se  $|H(\omega)|_{dB} > 0$  ou perda se  $|H(\omega)|_{dB} < 0$ . Neste caso, denota-se a função de perda como  $A(\omega) = -|H(\omega)|_{dB}$ , a letra  $A$  esta associada a ideia de *atenuação*.

**Exemplo 86 :** Um exemplo de sistema que se comporta como filtro é apresentado na Fig. 7.9

Um filtro possui sempre três regiões distintas: faixa (ou banda) de passagem, faixa (ou banda) de transição e a faixa (ou banda) de rejeição. Para cada uma das faixas especifica-se o quanto de atenuação é aceitável, Fig. 7. Neste caso é considerada a atenuação por que esses sistemas são passivos. Os filtros ativos não serão tratados neste material.

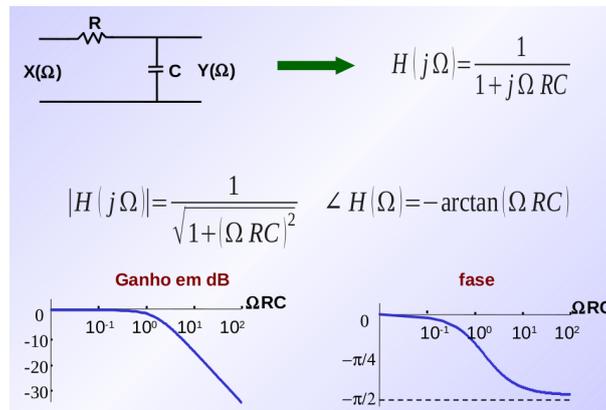


Figura 7.2: Resposta de frequência de um circuito RC Exemplo.

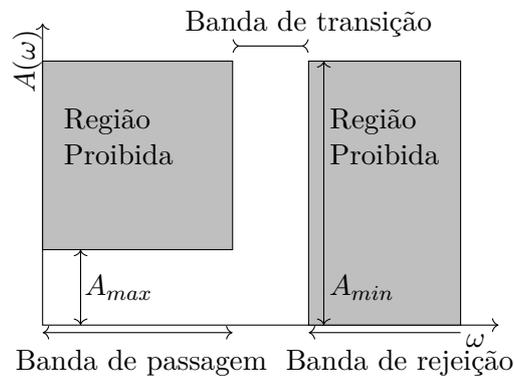


Figura 7.3: Representa os diferentes parâmetros que compõem a especificação de uma filtro passa-baixa.

Os filtros ideais possuem a atenuação plana e não possuem banda de transição. Para a banda de passagem especifica-se a atenuação máxima ( $A_{max}$ ) permitida. Para a banda de rejeição especifica-se a atenuação mínima ( $A_{min}$ ) necessária. Para a banda de transição não se faz especificação quanto a atenuação.

Normalmente, para a especificação dos diferentes tipos de filtro adota-se um modelo de regiões proibidas, Fig. 7 onde a curva de atenuação não pode cruzar.

**Exemplo 87 :** A Fig. 7.4 apresenta um sistema de discagem de telefone por tons. Observa-se que cada tecla pressionada gera duas senoides com frequências diferentes, p.ex. a tecla 1 gera

as senoides com 697 Hz e 1209 Hz simultaneamente. Isso se faz necessário pois a sinalização do telefone deve ocupar a mesma faixa de frequência da voz, de 300 Hz a 3400 Hz. Caso fosse usada apenas uma frequência a voz humana poderia disparar uma nova discagem.

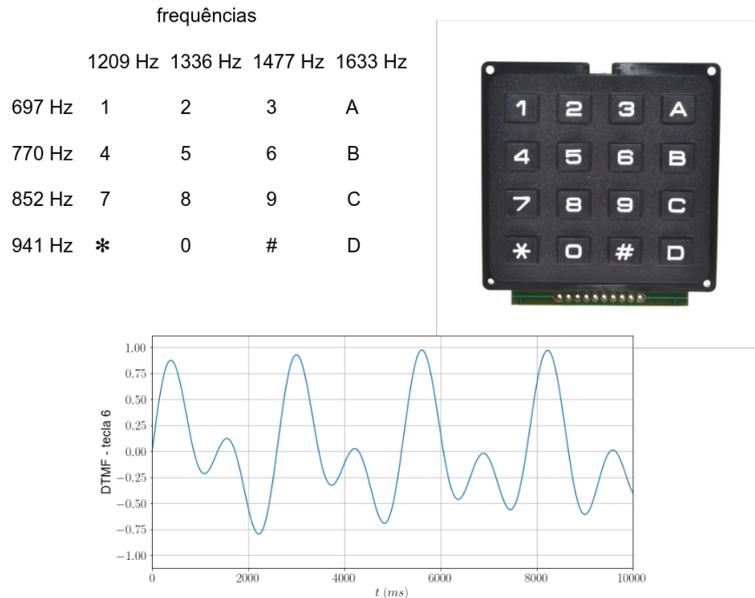


Figura 7.4: Ex. 87 onde se mostra as teclas de discagem e as frequências que a representam.

## 7.1 Os filtros em tempo contínuo

Um sistema LIT descrito por uma EDO tem a sua representação no domínio de Laplace pela função é dada por:

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k s^k}{\sum_{k=0}^N b_k s^k} \quad (7.3)$$

em que  $a_k$  e  $b_k$  são coeficientes constantes e  $N$  é a ordem do filtro. Os valores  $M$  e  $N$  são as quantidades de zeros e polos da função de transferência. O valor de  $N$  define a taxa de atenuação da banda de transição do sistema.

O projeto de filtros se resume em onde do plano  $\mathcal{S}$  estão localizados os polos e zeros do sistema. Atualmente as técnicas de síntese usam algoritmos de otimização multi objetivos para realizar essa tarefa. Por outro lado, as sínteses clássicas usaram desenvolvimentos algébricos para realizar essa tarefa. As principais sínteses clássicas são, Fig. 7.5:

1. família Butterworth
2. família Chebyshev
3. família Caueer ou elípticas
4. família Bessel

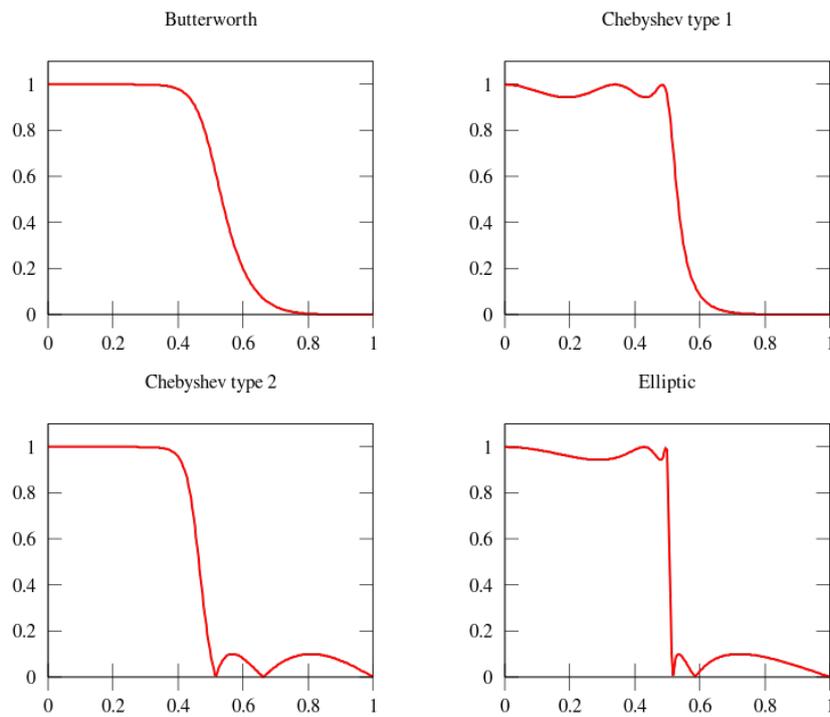


Figura 7.5: Resposta de frequência típica para a família de filtros clássicos.

Os diferentes tipos de filtros podem ser obtidos por substituições algébricas na função de transferência passa-baixa, conhecida com *protótipo passa-baixa*. Essa metodologia inclui a transformação das diferentes especificações na especificação do protótipo passa-baixa.

## 7.2 Desenvolvimento teórico

A função de ganho é dado por:  $Y(s) = H(s)X(s)$  e a função de perda é dado por  $X(s) = H'(s)Y(s)$ . Desta forma a relação entre a função de transferência de ganho e perda é:  $H(s) = \frac{1}{H'(s)}$  e sendo  $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$  a função de perda é  $H'(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$ . Observa-se que existe a troca de polos e zeros quando as funções são adotadas.

Considerando a especificação de um filtro passa-baixa protótipo

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \text{ na banda de passagem} \\ \delta & \text{se } \omega \text{ na banda de rejeição.} \end{cases} \quad (7.4)$$

Observa-se que nada é dito sobre a banda de transição e  $\delta \approx 0$ . Trabalhando-se com a função de atenuação a função de perda pode ser re-escrita como:

$$|H'(\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \text{ na banda de passagem} \\ \Delta & \text{se } \omega \text{ na banda de rejeição.} \end{cases} \quad (7.5)$$

onde  $\Delta = \frac{1}{\delta}$  é um valor muito grande.

A função de perda  $H'(s)$  deveria se aproximar de 1 na banda de passagem e um ser um valor muito grande para a banda de rejeição. Esse tipo de aproximação não é usual e a relação de FeldtKeller, eq. 7.6, relaciona de função de perda com uma função de aproximação com a função de aproximação:

$$|H'(s)|^2 = 1 + |K(s)|^2 \quad (7.6)$$

Essa transformação faz com que

$$|K(\omega)| = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \text{ na banda de passagem} \\ \approx \Delta & \text{se } \omega \text{ na banda de rejeição.} \end{cases} \quad (7.7)$$

A função  $|K(s)|$  tem o valor  $\Delta - 1$  que é também muito grande. As famílias de filtros clássicas são as diferentes famílias polinomiais que podem implementar  $K(s)$ .

### Filtros Butterworth

A família Butterworth adota um polinômio da forma  $y = x^n$ . Onde a banda de passagem é o intervalo de 0 a 1 e quanto maior o  $n$  mais esse polinômio se aproxima da especificação. Em  $x = 1$  o valor da atenuação seria 1 e se insere o valor  $\epsilon$  e a função se torna  $y = \epsilon x^n$ . Observa-se que essa escala representa a escala de frequência normalizada pela frequência de corte do filtro,  $\omega_c$ , Fig. 7.6. Desta forma a função de perda como:

$$K(\omega) = \epsilon \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^n \quad (7.8)$$

$$|H'(\omega)| = \sqrt{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}} \quad (7.9)$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}} \quad (7.10)$$

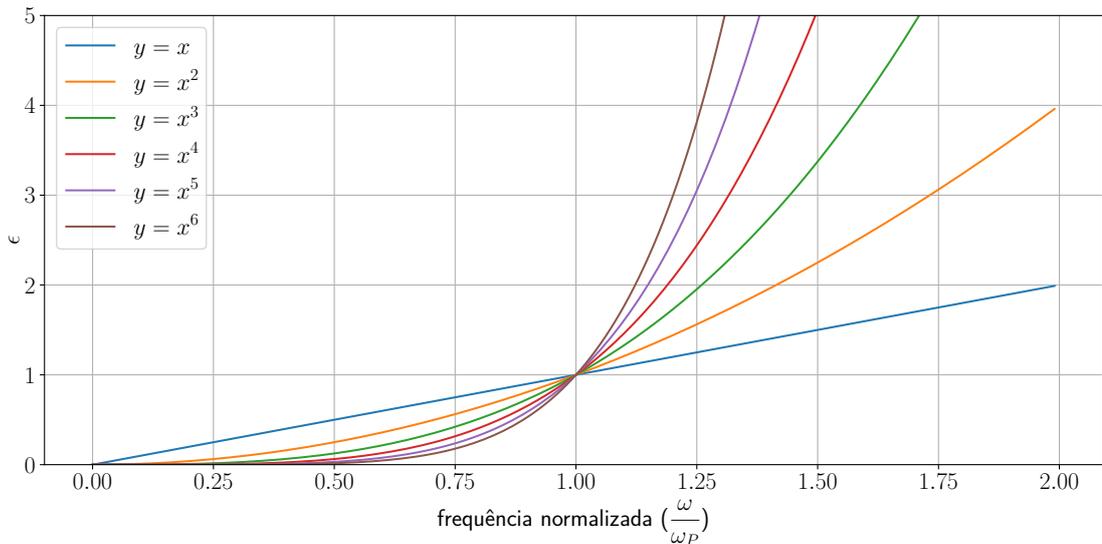


Figura 7.6: Função de aproximação Butterworth para diferentes valores de  $n$

A função de atenuação  $A(\omega)$  é

$$A(\omega) = |H'(\omega)|_{dB} = 10 \log_{10} \left( 1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n} \right) \quad (7.11)$$

Dada as especificações do filtro banda de passagem ( $\omega_c$ ), banda de rejeição ( $\omega_r$ ), atenuação máxima na banda de passagem ( $A_{max}$ ) e a atenuação mínima da banda de rejeição ( $A_{min}$ ) tem-se os seguintes passos de projeto.

$$\omega = \omega_c \rightarrow \text{máxima atenuação na banda de passagem} \quad (7.12)$$

$$A(\omega_c) = 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2) \quad \text{determina-se } \epsilon \quad (7.13)$$

$$\omega = \omega_r \rightarrow \text{mínima atenuação da banda de rejeição} \quad (7.14)$$

$$A(\omega_r) = 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega_r}{\omega_c}\right)^{2n}) \quad \text{determina-se } n \quad (7.15)$$

A ordem  $n$  do filtro é determinado pela atenuação na banda de rejeição  $A_{min}$  e da relação entre  $\frac{\omega_r}{\omega_c}$ . Observa-se que reduzir a banda de transição para zero fazendo  $\omega_c \rightarrow \omega_r$  a ordem do sistema  $n \rightarrow \infty$ , não sendo possível a sua realização. Resolvendo-se a eq. 7.15 obtém-se

$$n \geq \frac{\log_{10} \frac{10^{0.1A_{max}} - 1}{10^{0.1A_{min}} - 1}}{2 \log_{10} \frac{\omega_c}{\omega_r}} \quad (7.16)$$

onde  $A_{max}$  e  $A_{min}$  são expressas em dB.

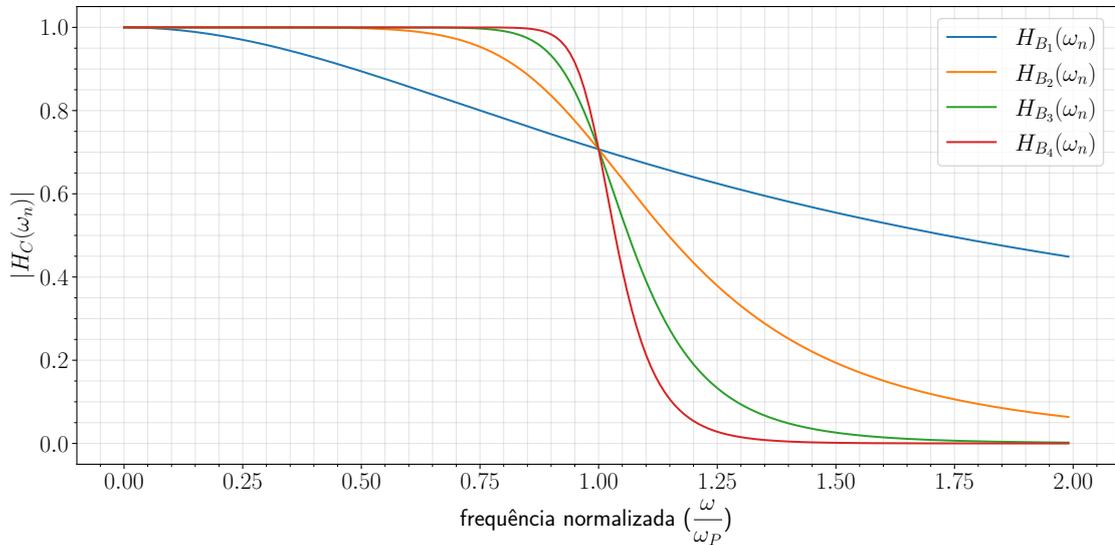


Figura 7.7: Resposta do filtro Butterworth para  $n$  variando de 1 a 4. Observa-se que a atenuação em  $\omega_n = 1$  tem atenuação de  $\frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (linear) e  $-3\text{dB}$  na escala logarítmica.

O filtro Butterworth é conhecido como maximamente plano pois todas as derivadas são iguais a zero na banda de passagem e a sua resposta é monotônica decrescente para a função de ganho e monotônica crescente para a função de perda.

Definindo-se a função de ganho normalizada por  $\epsilon$  e  $\omega_n = \frac{\omega}{\omega_c}$ , tem-se

$$|H(\omega_n)|^2 = \frac{1}{1 + \omega_n^{2n}} \quad (7.17)$$

tem-se

1.  $|H(0)| = 1$ , ganho igual a 1 na início da banda de passagem
2.  $|H(1)| = 0.707$ , ganho no final da banda de passagem

Expandido  $|H(\omega_n)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \omega_n^{2n}}} = 1 - \frac{1}{2}\omega_n^{2n} + \frac{3}{8}\omega_n^{4n} - \dots$  e as derivadas

de  $|H(\omega_n)|$  para  $\omega_n = 0$  são todas nulas,

$$\frac{d^k}{\omega_n^k} |H(\omega_n)|_{\omega_n=0} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, 2n - 1 \quad (7.18)$$

Conforme  $n$  aumenta, a resposta da banda de passagem torna-se mais plana e a atenuação na banda de rejeição torna-se mais acentuada. Para  $\omega_n \gg 1$  ou  $\omega \gg \omega_c$  a função de transferência exibe uma taxa de atenuação correspondente a  $20n$  dB por década ou  $6n$  por oitava. Nesta situação, a resposta assintótica é dada por

$$|H(\omega)| \approx \frac{1}{\omega_n^n} = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^n} \quad (7.19)$$

o que corresponde a uma atenuação  $|A(\omega)| \approx n\omega_n$

A família de filtros Butterworth é uma família só com polos. Usando-se a técnica da continuação analítica, ou seja, a partir de uma especificação apenas na reta  $j\omega$  expande-se a solução para todo o plano  $\mathcal{S}$  recobrimo por círculos usando a expansão de Lorentz.

Fazendo  $s = j\omega \rightarrow -s^2 = \omega^2$  e igualando o denominador a zero na eq. 7.9 determina-se os seus polos

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + |K(\omega_n)|^2} = \frac{1}{1 + \omega_n^{2n}} \quad (7.20)$$

$$-\frac{s^2}{\omega_c^2} = (-1)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{j(2k+1)\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1 \quad (7.21)$$

$$\text{ou } p_k = \omega_c e^{\frac{j\pi}{2}} e^{\frac{j(2k+1)\pi}{2n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

Observa-se que os polos da eq. 7.20 possui  $2n$  polos complexos espalhados sobre o círculo unitário. Para a função  $|H(s)|$  escolhe-se apenas os  $n$  polos localizados no semi-plano lateral esquerdo de  $\mathcal{S}$  para os sistemas serem estáveis e causais. Qual outra escolha de polos levará a um sistema instável, Fig. 7.8.

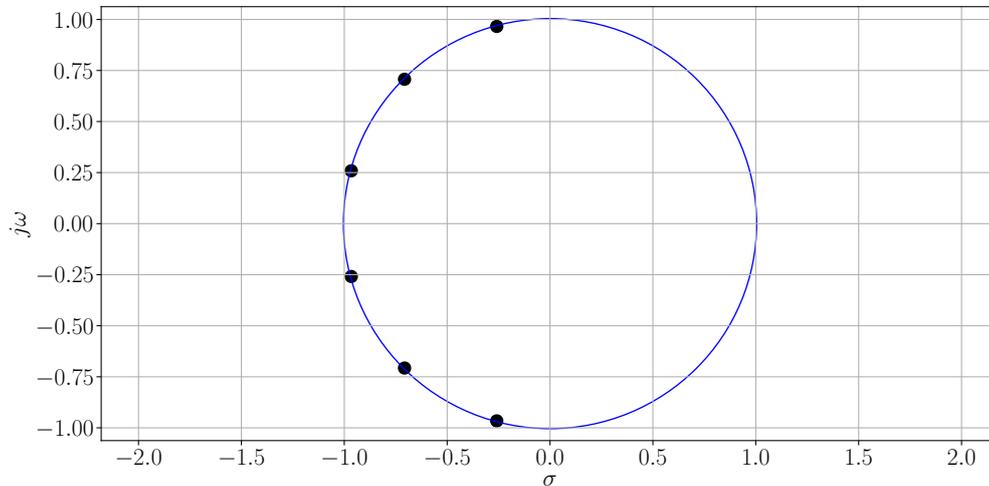


Figura 7.8: Posição dos polos para um filtro Butterworth de 6ª. ordem.

### Filtros Chebyshev

Normalmente a especificação dos filtros é feita por atenuações máxima, na banda de passagem, e mínima na banda de atenuação. Desta forma não existe a necessidade de que as funções de aproximações seja monótonas. A família de filtros Chebyshev introduz uma oscilação na banda de passagem ou na banda de rejeição de forma que a taxa de atenuação dessa família seja maior do que a família Butterworth.

Os filtros Chebyshev são conhecidos como sendo do

1. tipo 1: apresenta oscilação na banda de passagem e é monótono na banda de rejeição;
2. tipo 2: é monótono na banda de passagem e apresenta a oscilação na banda de rejeição.

Neste ponto vamos re-escrever a equação de Feldtkeller, eq. 7.6 como sendo a eq. 7.22. Essa pequena mudança é feita apenas para que as funções de aproximação possuam sempre atenuação igual a 1 em  $\omega_n = 1$ .

$$|H'(s)|^2 = 1 + \epsilon^2 |K(s)|^2 \quad (7.22)$$

A função de aproximação  $K(s)$  é da seguinte forma

$$C_n(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1}(x)) & x \leq 1, \\ \cosh(N \cosh^{-1}(x)) & x > 1. \end{cases} \quad (7.23)$$

A eq.7.23 também pode ser representada como uma equação de recorrência polinomial, eq. 7.24.

$$C_{n+1}(x) = 2xC_n(x) - C_{n-1}(x) \quad (7.24)$$

$$\text{em que: } C_0(x) = 1 \text{ e } C_1(x) = x \quad (7.25)$$

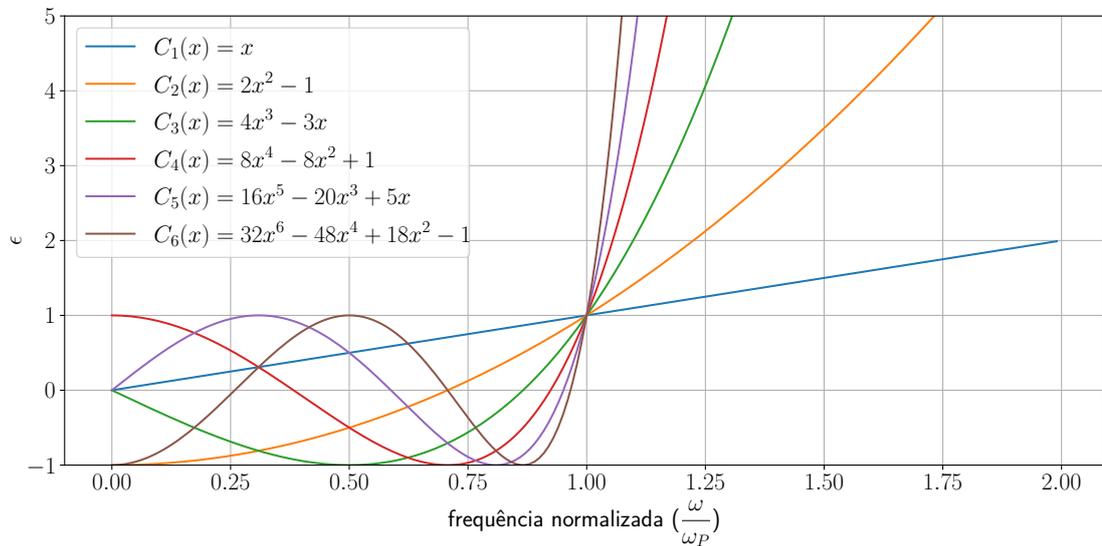


Figura 7.9: Funções de aproximação de diferentes ordens para a família Chebyshev tipo 1.

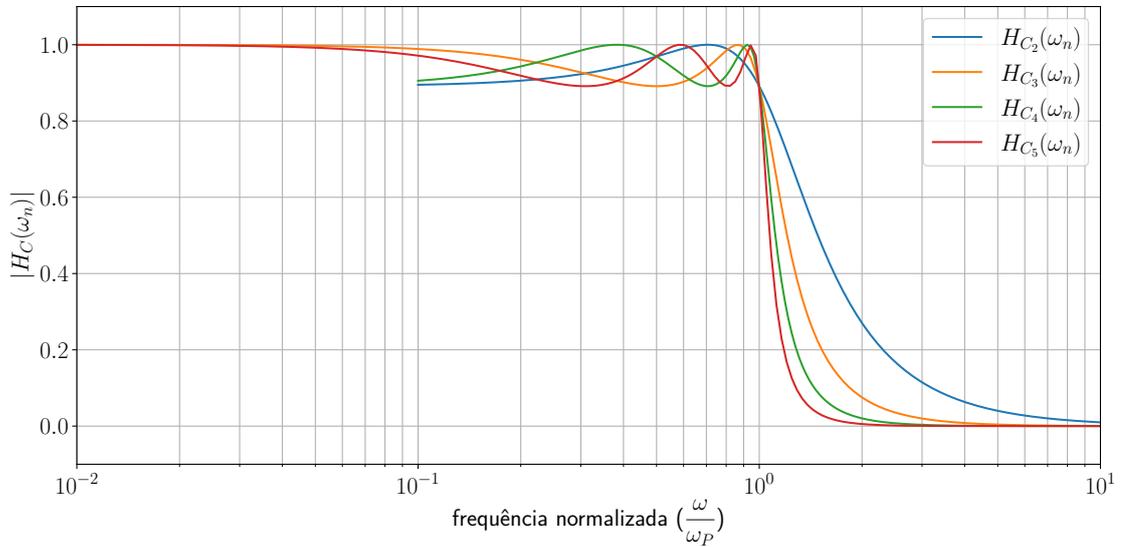


Figura 7.10: Funções de ganho de diferentes ordens para a família Chebyshev. Observa-se que a atenuação em  $\omega_n = 1$  tem atenuação de  $\frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (linear) e  $-3\text{dB}$  na escala logarítmica.

Para  $\omega_n = 0$  tem-se

$$H(0) = \begin{cases} 1 & n \text{ ímpar,} \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} & n \text{ par} \end{cases} \quad (7.26)$$

Isso significa que os filtros de Chebyshev com ordem par irão atenuar quando excitados por um sinal DC. Observe na Fig. 7.10 para  $n = 2$  e  $n = 4$ .

A ondulação em dB na banda de passagem é definida como:

$$r = 10 \log_{10} \left( \frac{H_{max}(\omega) = 1}{H_{min}(\omega)} \right)^2 = 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2) \quad (7.27)$$

$$\epsilon^2 = 10^{\frac{r}{10} - 1} \quad (7.28)$$

$$(7.29)$$

O número de máximos e mínimos presentes na oscilação é função da ordem da aproximação de Chebyshev. Os polos do filtro Chebyshev (tipo 1)

estão localizados em uma elipse cujo eixo maior ( $r_1$ ) e o eixo menor ( $r_2$ ) são dados por:

$$r_1 = \frac{\omega}{2} \left( \beta + \frac{1}{\beta} \right) \quad (7.30)$$

$$r_2 = \frac{\omega}{2} \left( \beta - \frac{1}{\beta} \right) \quad (7.31)$$

O parâmetro  $\beta$  é dado por  $\beta = \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + \epsilon^{-2}}}{\epsilon} \right]^{\frac{1}{n}}$ .

E, os polos estão localizados em:  $p_k = r_2 \cos \psi_k + jr_1 \sin \psi_k$  e  $\psi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{2k+1}{2n}\pi$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , Fig. 7.11

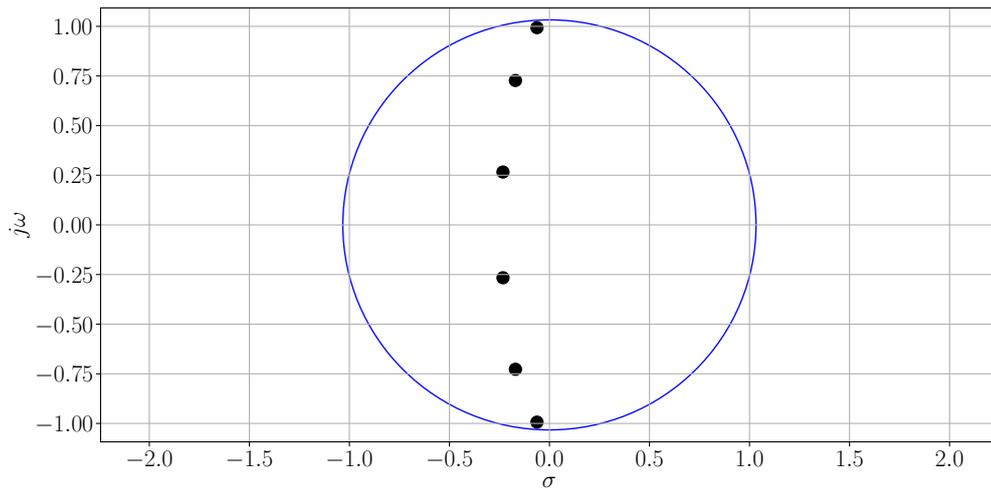


Figura 7.11: Localização dos polos para um filtro Chebyshev de ordem 6.

Para o projeto de filtros Chebyshev são necessários 4 parâmetros:

1. frequências da banda de passagem e de rejeição,  $\Omega_c$  e  $\Omega_r$ ;
2. ondulação (*ripple*),  $\delta$ , ou atenuação máxima da banda de passagem;
3. atenuação mínima na banda de rejeição.

O parâmetro  $\epsilon$  é calculado através da ondulação  $\delta$ :  $\epsilon^2 + 1 = \delta^2$ . A ordem do filtro é determinada através de:

$$n = \frac{\cosh^{-1}\left(\sqrt{\frac{10^{As/10}-1}{10^{r/10}-1}}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} \quad (7.32)$$

A partir dos valores  $n$  e  $\epsilon$  são determinandos os polos do sistema.

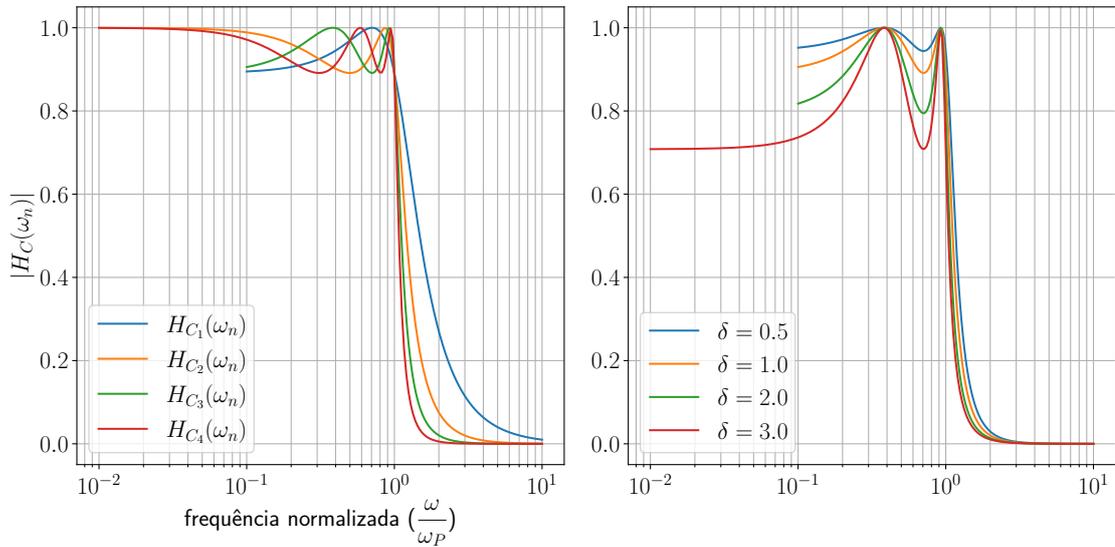


Figura 7.12: Variações na  $n$  e  $\epsilon$  na resposta de ganho dos filtros Chebyshev

**Exemplo 88 :** Determine a função de transferência de um filtro Chebyshev que satisfaça as seguintes especificações: ondulação da banda de passagem  $\delta = 2$  dB,  $\Omega_p = 1000\pi$  rad/s ( $F_p = 500$  Hz),  $\Omega_r = 4000\pi$  Fs = 500 Hz,  $A_s = 40$  dB.

*solução*

$$\epsilon^2 = 10^{r/10} - 1 = 10^{0.2} - 1 = 0.58489$$

$$\delta_s = 10^{40/20} = 10^2$$

$$n = \frac{\log(130.758)}{\log(7.87298)} = 2.36$$

**Chebyshev tipo 2**

O filtro Chebyshev do tipo 2 é conhecido também como Chebyshev inverso. A oscilação presente na banda de passagem do filtro Chebyshev é deslocada para a banda de rejeição. Nesse processo, a banda de passagem  $\Omega_s$  é movimentada para  $\frac{1}{\Omega_s}$  o que transforma a resposta em um passa-alta. Subtraindo o sinal do novo filtro passa-alta obtém-se um passa-baixa cuja oscilação esta na banda de rejeição. O ganho do novo filtro (Chebyshev tipo 2) será:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{\epsilon^2 C_n^2(1/\Omega_n)}{1 + \epsilon^2 C_n^2(1/\Omega_n)} \quad (7.33)$$

onde  $\Omega_n = \Omega/\Omega_s$ ,  $\epsilon$  é o parâmetro que controla a ondulação (*ripple*) na banda de rejeição e  $C_n(x)$  é o polinômio de Chebyshev de ordem  $n$ , Fig. 7.13.

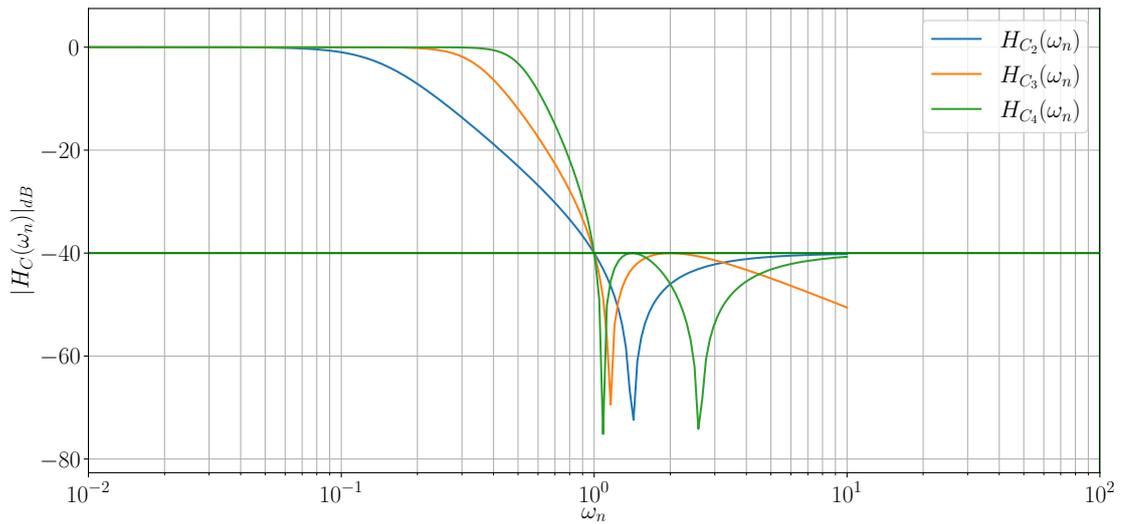


Figura 7.13: Respostas do filtro Chebyshev tipo 2 para  $n = 2, 3, 4$ .

Observa-se que a função do filtro Chebyshev tipo 2 apresenta tanto polos quanto zeros. Os zeros estão localizados no eixo imaginário,

$$z_k = j \frac{1}{\cos \phi_k} \Omega_s \quad (7.34)$$

onde  $\phi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}, k = 0, 1, \dots, n-1$

200CAPÍTULO 7. NOÇÕES DE FILTROS:TEMPO CONTÍNUO E DISCRETO

Os polos são os recíprocos dos filtros Chebyshev tipo 1 e orden  $n$ . Denotando os polos do filtro Chebyshev por  $p'_k = \rho'_k + j\Omega'_k$  onde:  $\rho'_k = \frac{\rho_k}{\sqrt{\rho_k^2 + \Omega_k^2}}\Omega_s$  e  $\Omega'_k = \frac{\Omega_k}{\sqrt{\rho_k^2 + \Omega_k^2}}\Omega_s$ .  $\rho_k$  e  $\Omega_k$  são as partes reais e imaginárias dos polos do filtro Chebyshev tipo 1.

Modo de especificar um filtro Chebyshev do tipo 2:

1. frequencia da banda de passagem,  $\Omega_p$ , e a atenuação máxima permitida nesta banda,  $A_p(\delta_p)$
2. frequencia da banda de rejeição,  $\Omega_s$ , e a atenuação mínima da banda nesta banda,  $A_s(\delta_s)$

O ganho máximo na banda de passagem é admitido ser igual a 1, tal que,  $1/\delta_p < |H(\Omega)| < 1$  para  $0 < \Omega < \Omega_p$ . A ordem do filtro é obtida como o menor inteiro que satisfaça:

$$n \geq \frac{\cosh^{-1}\left(\sqrt{\frac{10^{0.1A_s}-1}{10^{0.1A_p}-1}}\cosh^{-1}\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)}{\cosh^{-1}\left(\sqrt{\frac{10^{0.1A_s}-1}{10^{0.1A_p}-1}}\right)} \quad (7.35)$$

O fator de ondulação é dado por:  $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{0.1A_s} - 1}}$ .

O filtro é projetado pelos seguintes passos:

1. determina-se  $\epsilon$
2. determina-se a ordem do filtro,  $n$
3. determina-se os seus zeros
4. calculam-se os polos do filtro Chebyshev tipo 1. Os seus recíprocos sserão os polos do filtro Chebyshev tipo 2
5. calcula-se a função de transferência  $H(s)$

**Exemplo 89 :** Determine a função de transferência do filtro Chebyshev tipo 2 com a seguinte especificação: atenuação na banda de passagem  $A_s = 0.1dB$ ,  $\Omega_p = 2000\pi$  rad/s ( $F_p = 1000$  Hz) e atenuação mínima na banda de atenuação  $A_s = 20$  dB e  $\Omega_r = 4000\pi$  rad/s ( $F_s = 2000$  Hz).

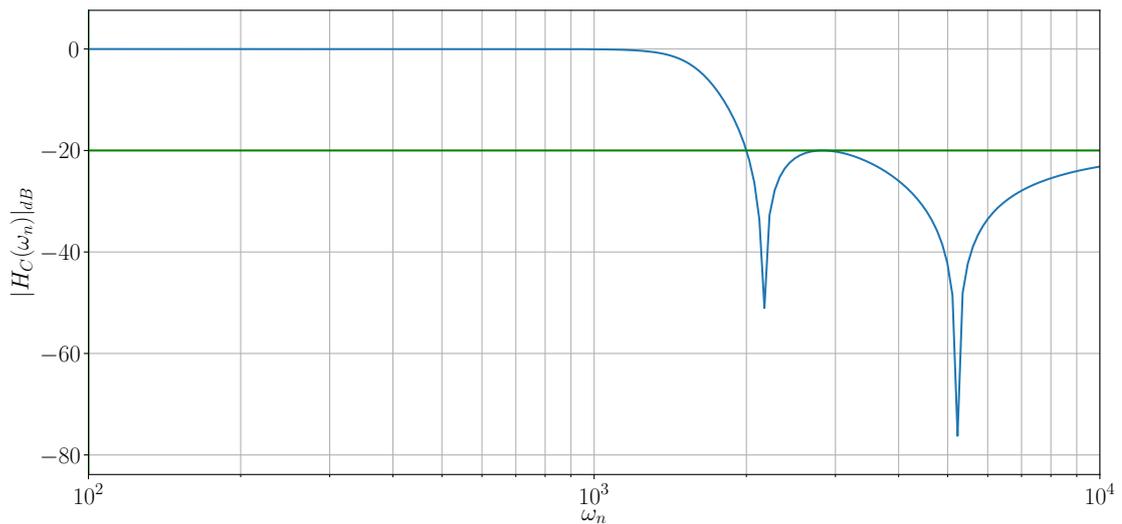


Figura 7.14: Resposta do ganho do filtro para o ex. 89

Comparação entre as respostas de um filtro Butterworth e Chebyshev tipo 1, Fig. 7.15, com a mesma ordem. Observa-se que a taxa de atenuação no filtro Chebyshev é maior do que no filtro Butterworth.

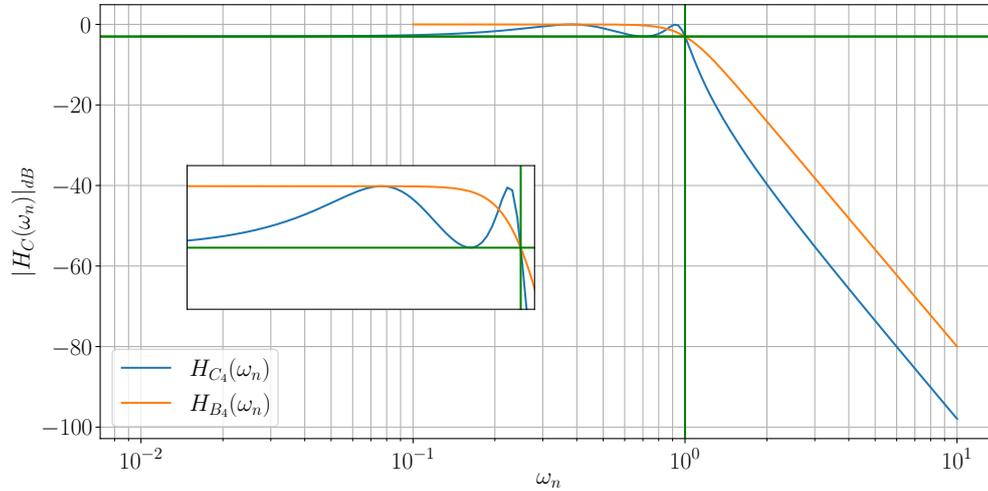


Figura 7.15: Comparação entre o ganho de um filtro Butterworth e Chebyshev de mesma ordem.

### 7.3 Transformação de Frequência

Os filtros protótipos passa-baixa podem ser modificados para atender os diferentes tipos de filtros: passa-alta, passa-banda e rejeita-banda.

A transformação será realizada a partir do protótipo passa baixa normalizado, com a frequência de corte igual a 1 rad/s.

A normalização para uma frequência arbitrária  $\Omega_0$  é realizado por:  $\Omega \rightarrow \frac{\Omega}{\Omega_p}$  ou  $s \rightarrow \frac{s}{\Omega_p}$ . Onde  $\Omega_p$  pode ser a frequência de corte  $\Omega_c$  ou a frequência da banda de passagem. Observa-se que se a atenuação máxima da banda de passagem for iguala 3dB então  $\Omega_p = \Omega_c$ .

A transformação do passa-baixa para a o passa-alta é realizada a partir de:  $\Omega \rightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega}$  ou  $s \rightarrow \frac{\Omega_p}{s}$ .

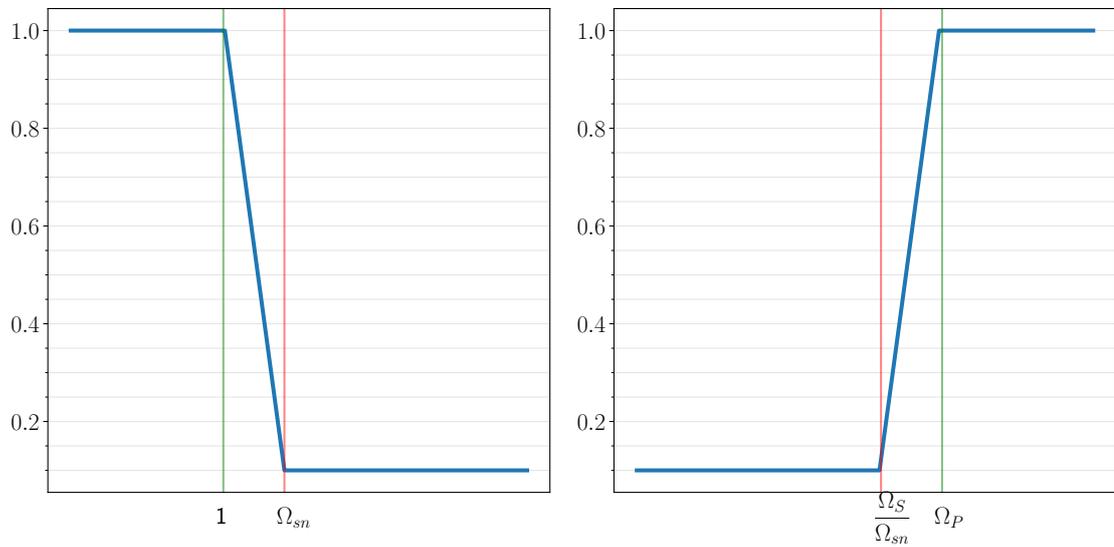


Figura 7.16: Desnormalização do passa-baixa para um novo passa-baixa e para o passa-alta.

O  $\Omega_p$  pode ser a frequência de corte  $\Omega_c$  ou a frequência da banda de passagem. O valor  $\Omega_{sn}$  é a frequência da banda de atenuação do filtro normalizado.

A transformação do filtro passa-baixa para um passa-banda com frequências de passagem  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  é feita por:  $s \rightarrow \frac{s^2 + \Omega_1\Omega_2}{(\Omega_2 - \Omega_1)s}$  e  $\Omega_0 = \sqrt{\Omega_1\Omega_2}$ , Fig. 7.17

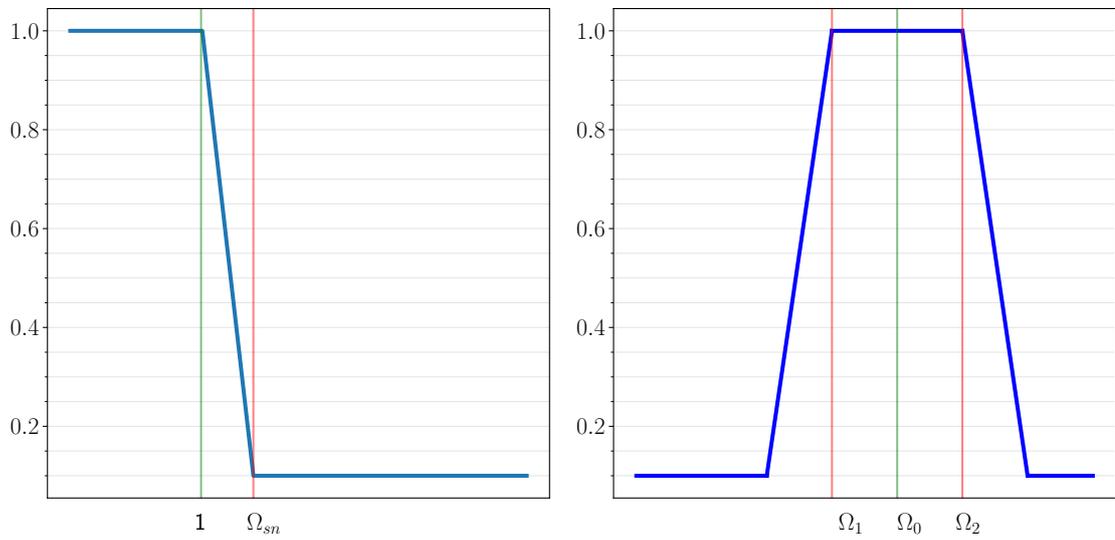


Figura 7.17: Desnormalização do filtro passa-baixa em um filtro passa-banda

A transformação do passa-baixa para o rejeita-banda com frequências de rejeição  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  é feito por:  $s \rightarrow \frac{(\Omega_2 - \Omega_1)s}{s^2 + \Omega_1\Omega_2}$ , Fig. 7.18.

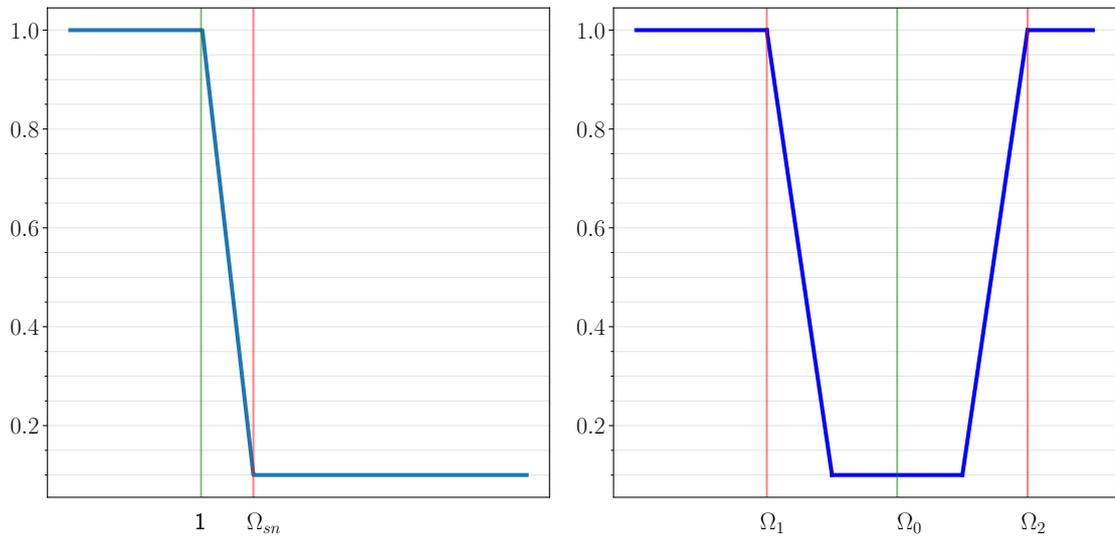


Figura 7.18: Transformação do filtro passa-baixa em rejeita-banda.

## 7.4 Os filtros em tempo discreto

O projeto de *filtros seletivos em frequência* no domínio digital pode ser dividido em dois grupos principais:

1. Filtros IIR (Resposta ao Impulso Infinita) cuja resposta  $h(n) \neq 0, n = 0, 1, 2, \dots$  e normalmente são baseados no projeto dos filtros contínuos usando as seguintes técnicas: aproximação das derivadas, invariância ao impulso e Transformação bilinear;
2. Filtros FIR (Resposta ao Impulso Finita) cuja resposta  $h(n) \neq 0, n = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ . A sua principal vantagem é a possibilidade dos projetos terem fase linear. Esses projetos envolvem tanto o uso de janelas quanto a amostragem em frequência.

Notação:

1. Frequência analógica:  $\Omega$  (rad/s) ou  $F$  (Hz), limites positivos:  $[0, +\infty)$
2. Frequência digital:  $\omega$  ou  $f$ , limites positivos:  $[0, +\pi]$

Sendo a frequência de amostragem  $Fa$ , a relação entre a frequência analógica e a digital é:

$$\omega = \frac{\Omega}{Fa} \text{ ou } f = \frac{F}{Fa} \quad (7.36)$$

### 7.4.1 Arquitetura geral e implementação

Normalmente os filtros FIR são implementados no domínio do tempo usando a operação de convolução entre as amostras que entram e a resposta  $h[n]$ . Essa operação se torna a multiplicação matricial entre as amostras e a sua implementação fica a cargo de DSP utilizando as operações de *produto interno entre vetores*, *soma de escalares* e *multiplicação de escalar por vetor*. Essas operações são realizadas diretamente no *hardware* do DSP.

### 7.4.2 Os filtros IIR

**Exemplo 90 :** Considere a equação de diferenças  $y[n] = x[n] + 0.5y[n - 1]$ . Determine a sua resposta de frequência:

*Solução:*

Aplicado a TZ em  $y[n] = x[n] + 0.5y[n - 1]$ , obtém-se:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

A sua resposta de frequência é feita para  $z = e^{j\omega}$ , Fig. 7.19,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$$

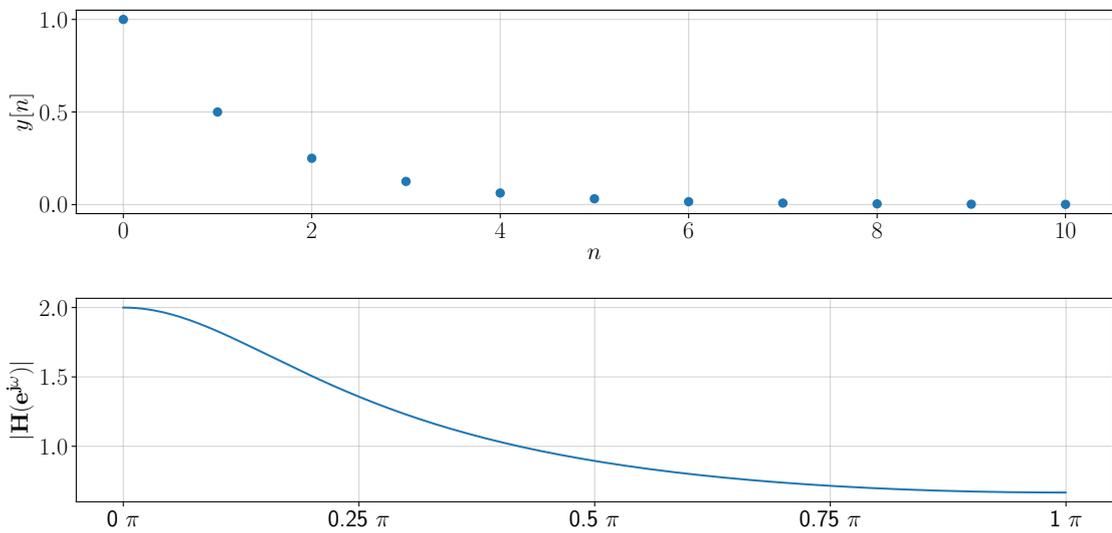


Figura 7.19: Gráficos de  $|H(z)|$  e  $h[n]$  do Exemplo 90.

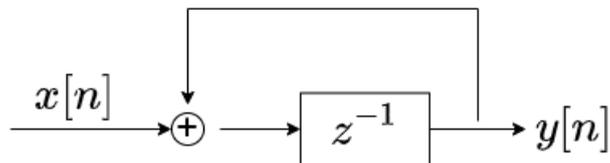


Figura 7.20: Diagrama em bloco do Exemplo 90.

A equação geral de diferenças e função de sistema é da forma:

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + \dots + b_Mx[n-M] - a_1y[n-1] - a_2y[n-2] - \dots - a_Ny[n-N] \quad (7.37)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (7.38)$$

Representação de um filtro analógico contínuo no tempo tem a função de transferência dada por:

$$H_a(s) = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^{-k}}{\sum_{k=0}^M \alpha_k s^{-k}} \quad (7.39)$$

e resposta ao impulso dada por:

$$h_a(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H_a(s) e^{st} ds \quad (7.40)$$

e sua equação linear diferencial é:

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) \quad (7.41)$$

Essas três representações acima conduzem a três métodos de projeto IIR diferentes.

1. aproximação das derivadas: a partir da representação por equações diferenciais;
2. invariância ao impulso: a partir da representação pela resposta ao impulso;
3. transformação bilinear: a partir da resposta de frequência do sistema.

**Aproximação das derivadas** Aproximar a equação diferencial por uma equação de diferenças.

primeira derivada:

$$\frac{d}{dt}y(t)|_{t=nT} = \frac{1}{T}\{y[n] - y[n-1]\} \leftrightarrow s = \frac{1}{T}\{1 - z^{-1}\}$$

segunda derivada:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)|_{t=nT} = \frac{1}{T^2}\{y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]\} \leftrightarrow s^2 = \frac{1 - z^{-1}^2}{T}$$

$$k^{\text{ésima}} \text{ derivada: } s^k = \frac{1 - z^{-1}^k}{T}$$

Fazendo a substituição:  $s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \rightarrow H(z) = H_a(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}$

Neste caso se refere a um mapeamento  $z = \frac{1}{1 - sT} = \frac{1}{1 - j\Omega T}$ . Possui os polos dentro do círculo unitário.

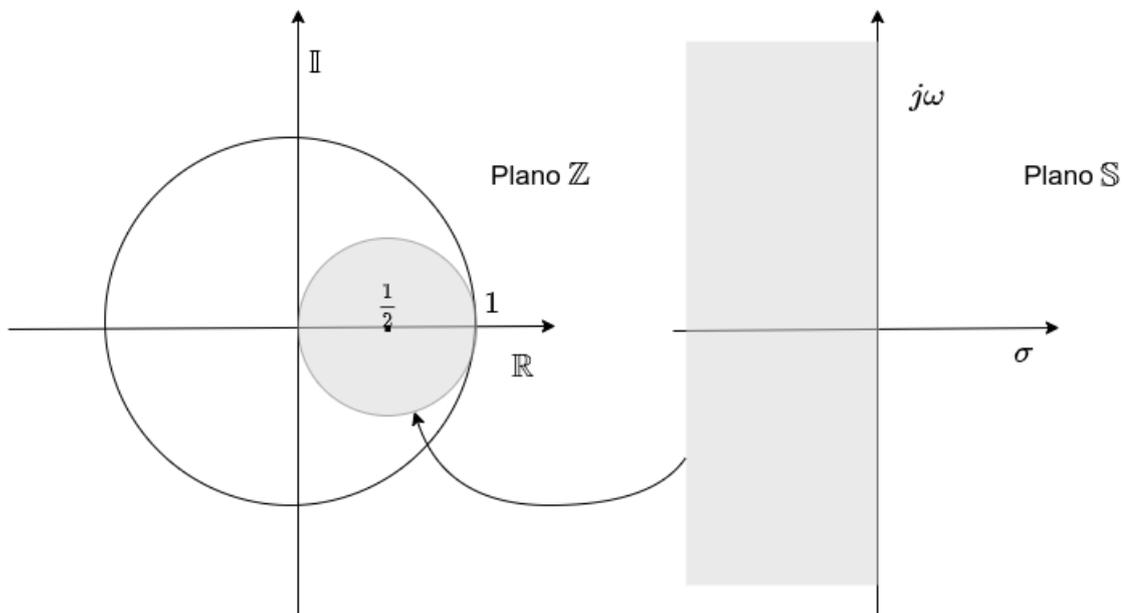


Figura 7.21: Mapeamento do plano S no plano Z para o caso da aproximação das derivadas.

**Exemplo 91 :** Projete um filtro passa-baixa pelo métodos de aproximação das derivadas sendo  $H_a(s) = \frac{1}{(s + 0.1)^2 + 3}$

*solução:*

$$H(z) = \frac{1}{\left\{\frac{1-z^{-1}}{T} + 0.1\right\}^2 + 3} \quad (7.42)$$

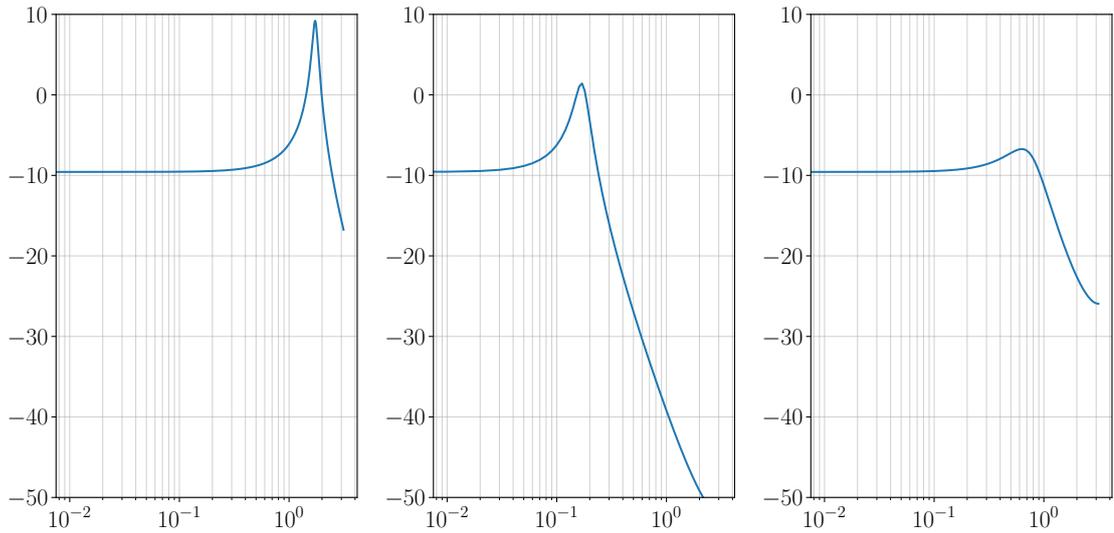


Figura 7.22: Resposta de frequência do Exemplo 91. A esquerda é a resposta analógica, no centro é a versão digital com  $T = 0.1$  e a direita com  $T = 0.5$ .

### Invariância ao Impulso

$h[n]$  é uma cópia amostrada de  $h_a(t)$ :  $h[n] = h_a(t)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . No domínio da frequência tem-se:  $H(f) = F \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(f - kF)$ , onde  $F = 1/T$  é a frequência de amostragem e deverá atender aos critérios de Nyquist.

Expandindo o filtro analógico em frações parciais, tem-se:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s - p_k} \leftrightarrow h_a(t) = \sum_{k=1}^N c_k e^{p_k t}, t \geq 0 \quad (7.43)$$

onde  $p_k$  são os polos de  $H_a(s)$

Amostrando  $h_a(t)$  tem-se

$$h[n] = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N c_k e^{p_k T n}. \quad (7.44)$$

Calculando a transformada Z de  $h[n]$  tem-se

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}} \quad (7.45)$$

Observa-se que nesta abordagem os polos  $p_k$  do filtro analógico é mapeado em  $d_k = e^{p_k T}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . Nesse mapeamento um filtro estável no domínio contínuo leva a um filtro estável no domínio discreto. Justificativa:  $p_k = \sigma_k + j\Omega_k$  e  $\sigma < 0$  leva a um novo polo  $d_k$  com  $|d_k| = e^{\sigma_k T} < 1$ . E, não é necessário determinar  $h_a(t)$ .

**Exemplo 92 :** Determine  $h[n]$  a partir do seguinte  $H_a(s) =$

$$\frac{s + 0.1}{(s + 0.1)^2 + 9}.$$

*Solução:*

$$H_a(s) = \frac{1/2}{s + 0.1 - 3j} + \frac{1/2}{s + 0.1 + 3j}.$$

Os polos serão mapeados em  $e^{-0.1 \pm 3jT}$ .

$$H(z) = \frac{1 - (e^{-0.1T} \cos(3T))z^{-1}}{1 - (2e^{-0.1T} \cos(3T))z^{-1} + e^{-0.2T}z^{-2}} \quad (7.46)$$

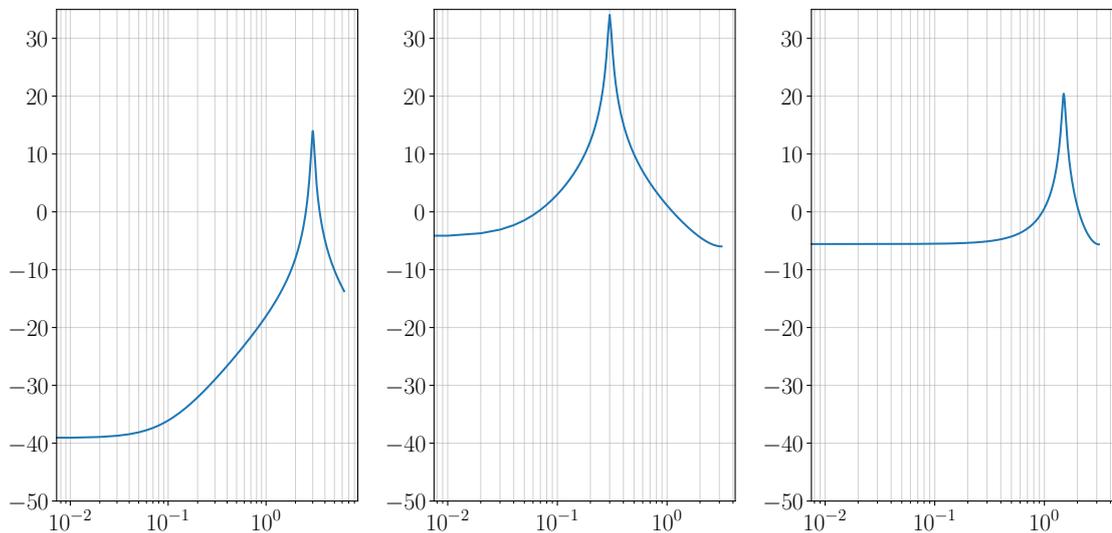


Figura 7.23: Resposta de frequência do Exemplo 92. A esquerda é a resposta analógica, no centro é a versão digital com  $T = 0.1$  e a direita com  $T = 0.5$ .

### Transformação Bilinear

Utiliza a regra de integração do trapézio. Essa transformação mapeia todo o plano  $S \rightarrow Z$  mas apresenta uma distorção no eixo das frequências.

*desenvolvimento:*

seja um sistema de primeira ordem com função de transferência dada por:

$$H_a(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b}{s+a} \rightarrow \frac{d}{dt}y(t) + ay(t) = bx(t) \quad (7.47)$$

A integral da derivada de  $y(t)$  é dado por:  $y(t) = \int_0^t y'(\tau)d\tau + y(t_0)$ . Admitindo  $t = nT$  e  $t_0 = (n-1)T$ , então pela regra do trapézio tem-se:

$$y[n] = \frac{T}{2}[y'[n] + y'[n-1]] + y[n-1] \quad (7.48)$$

substituindo a equação das derivadas para  $t = nT$  na equação anterior tem-se:

$$\left[1 + \frac{aT}{2}y[n] - \left[1 - \frac{aT}{2}\right]y[n-1] = \frac{bT}{2}[x[n] + x[n-1]] \quad (7.49)$$

Calculando a transformada Z:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + a} \quad (7.50)$$

Fazendo a equivalência entre as equações 7.47 e 7.50 tem-se que o mapeamento do plano S no Z será feito por:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (7.51)$$

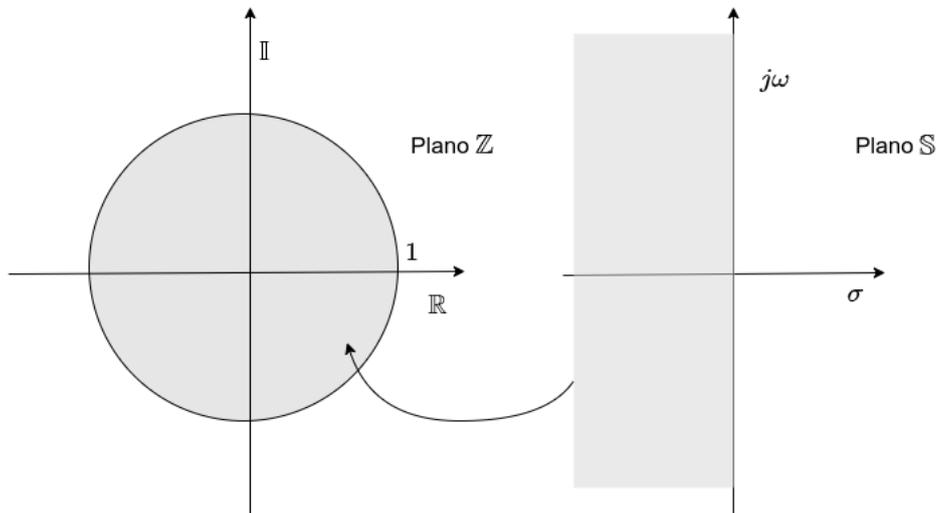


Figura 7.24: Gráficos do mapeamento do plano S no plano Z para o caso da transformação bilinear.

Seja  $z = re^{j\omega}$  e  $s = \sigma + j\omega$ . Fazendo as substituições na eq. ?? tem-se:

$$s = \frac{2}{T} \left[ \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos \omega} + j \frac{2r \sin \omega}{1 + r^2 + 2r \cos \omega} \right] \quad (7.52)$$

se  $r < 1$  sss  $\sigma < 0$ , sistemas estáveis em S ou Z são mapeados em sistemas estáveis. Se  $r = 1$  então:

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (7.53)$$

Fig 7.25.

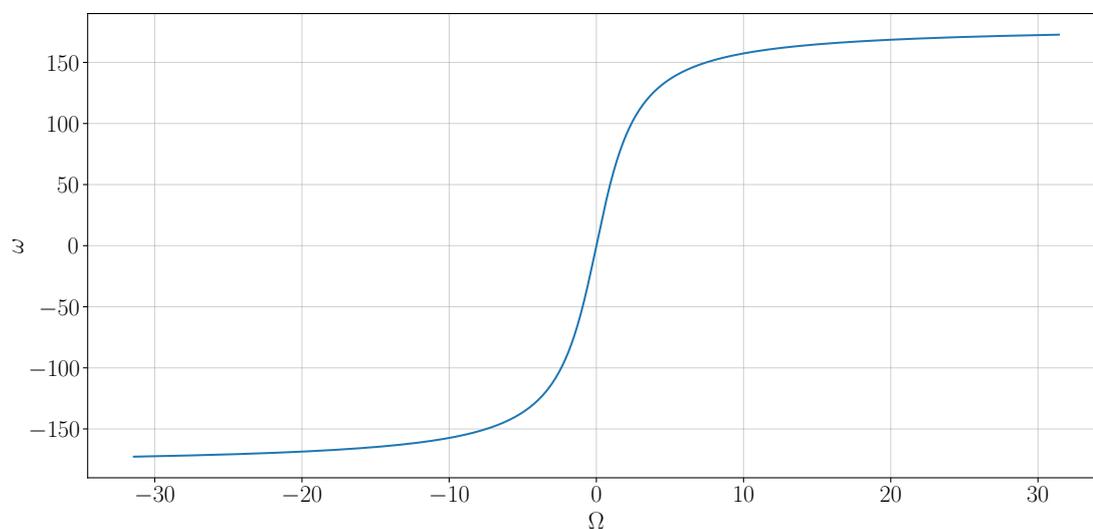


Figura 7.25: Relação entre  $\Omega$  e  $\omega$ .

**Exemplo 93 :** Projete um filtro passa-banda,  $H_a(s) = \frac{s + 0.1}{(s + 0.1)^2 + 16}$ , pelo método da transformação bilinear tendo  $T = 0.5$ .

*solução:* Fazendo a substituição  $s = 4 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$  em  $H_a(s)$  tem-se:

$$H(z) = \frac{0.128 + 0.006z^{-1} - 0.122z^{-2}}{1 + 0.0006z^{-1} + 0.975z^{-2}}$$

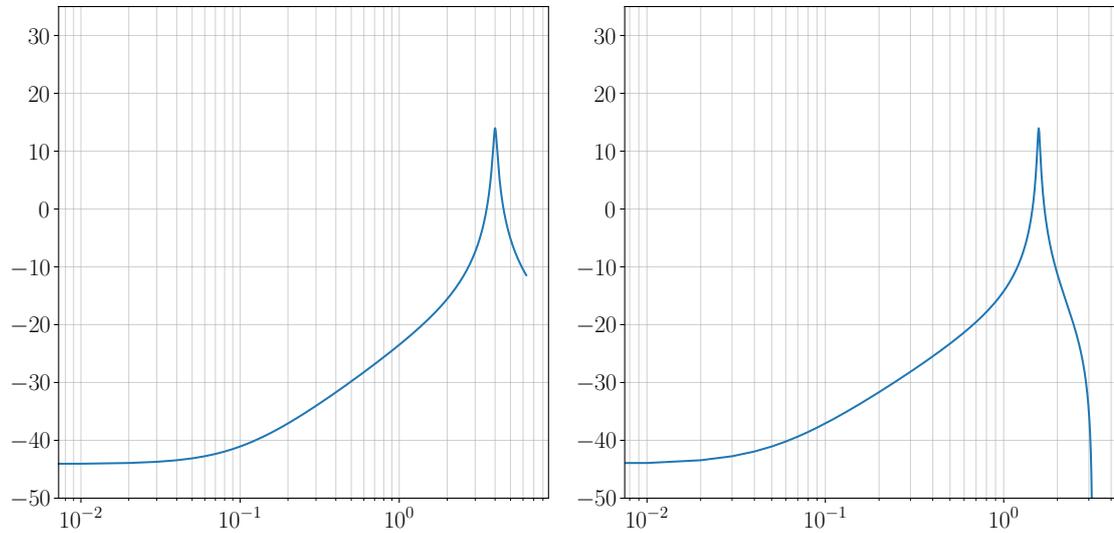


Figura 7.26: Resposta de frequência do Exemplo 90.

## 7.5 Os filtros FIR

São filtros digitais cuja resposta ao impulso é finita,

$$h[n] \neq 0, n = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (7.54)$$

Nesta caso a função de transferência, eq. 7.56 é composta apenas do numerador. A saída depende dos valores passados e presente da entrada.

As principais vantagens é que pode-se implementar filtros com a fase linear e são sempre estáveis. A principal desvantagem é que a ordem normalmente é maior do que os filtros IIR. As principais forma de projeto são: o projeto por janelamento e por amostragem de frequência.

Um filtro FIR de ordem  $M - 1$  é descrito por:

$$\begin{aligned} y[n] &= b_0x[n] + b_1x[n - 1] + \dots + b_{M-1}x[n - M + 1] \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} b_kx[n - k] \end{aligned} \quad (7.55)$$

Expresando a saída como a convolução da entrada com a resposta ao impulso  $h[n]$  tem-se:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x[n-k] \quad (7.56)$$

Desta forma, os coeficientes do filtro correspondem à resposta ao impulso do filtro,  $b_n = h[n]$ . Como  $h[n]$  é finita, com comprimento  $M$  o filtro será sempre estável. Neste caso a função de transferência será:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]z^{-k}. \quad (7.57)$$

Para a condição de um filtro FIR possuir fase linear tem-se:

$$h[n] = (-1)^k h[M-n], k \in Z \quad (7.58)$$

ou seja, um filtro FIR apresenta fase linear quando a sua resposta ao impulso  $h[n]$  é simétrica ou anti-simétrica em torno do ponto médio, que pode existir ( $M$  é par) ou não ( $M$  é ímpar). Esse filtro é conhecido como tipo I ( $k=0$  e  $M$  é par,  $h[M-n] = h[n]$ ), tipo II ( $k=0$  e  $M$  é ímpar),  $h[M-n] = h[n]$ ), tipo III ( $k=1$  e  $M$  é par, neste caso o termo  $h[\frac{M}{2}] = 0$ ) ou tipo IV ( $k=1$  e  $M$  é ímpar)  $h[M-n] = -h[n]$ . Dependendo se  $M$  for ímpar ou par ou simétrico ou anti-simétrico. Essa justificativa se encontra no livro<sup>1</sup>, seção 4.2.3.

A expressão para  $H(e^{j\omega})$  é:

$$\begin{aligned} \text{tipo I} \quad H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega \frac{M}{2}} \left[ h\left[\frac{M}{2}\right] + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} 2h[n] \cos\left(\omega\left(n - \frac{M}{2}\right)\right) \right] \\ \text{tipo II} \quad H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} \left[ \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} 2h[n] \cos\left(\omega\left(n - \frac{M}{2}\right)\right) \right] \\ \text{tipo III} \quad H(e^{j\omega}) &= e^{-j\left(\omega \frac{M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \left[ \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} -2h[n] \sin\left(\omega\left(n - \frac{M}{2}\right)\right) \right] \\ \text{tipo IV} \quad H(e^{j\omega}) &= e^{-j\left(\omega \frac{M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \left[ \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} -2h[n] \sin\left(\omega\left(n - \frac{M}{2}\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (7.59)$$

<sup>1</sup>Processamento digital de sinais: projeto e análise de sistemas (2004) Paulo Sergio Ramirez Diniz, Eduardo Antônio Barros da Silva, Sérgio Lima Netto, ISBN = 85-363-0418-9

Uma representação gráfica da simetria é apresentado na Fig. 7.5 com valores arbitrários de  $h[n]$ .

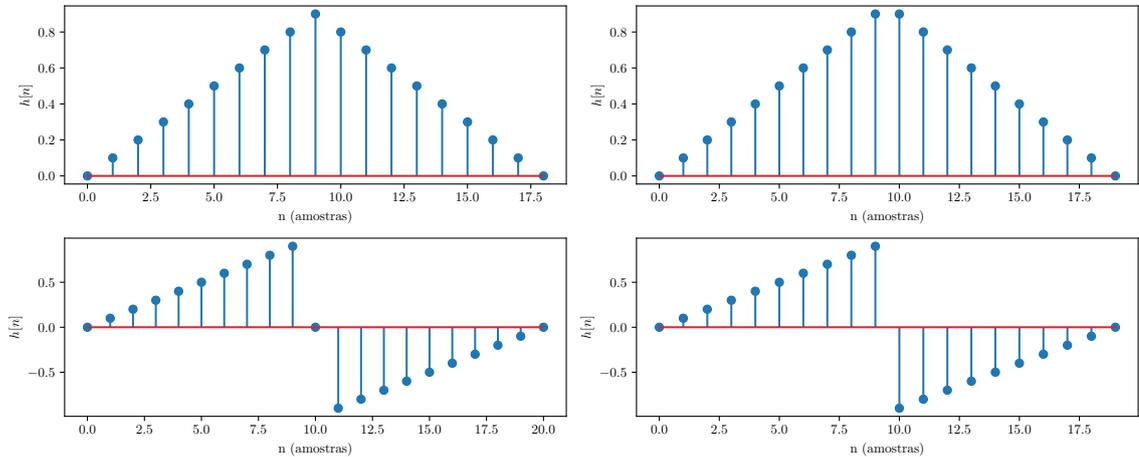


Figura 7.27: Exemplo de  $h[n]$  onde possuem diferentes tipos de simetria.

### Projeto de filtros por janelas

É baseado na aproximação da resposta em frequência desejada, com a condição de fase linear. O projeto inicia-se com a especificação da resposta ao impulso e posterior truncamento da sua resposta.

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (7.60)$$

A resposta de frequência desejada ( $H_d(e^{j\omega})$ ) é a mesma especificação dos filtros analógicos e,  $h_d[n]$  deve ser causal e ter duração finita. Neste caso,  $h_d[n]$  deverá ser truncado a partir  $n = M - 1$ ,

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n] & \text{se } n = 0, 1, \dots, M - 1 \\ 0 & \text{c.c..} \end{cases} \quad (7.61)$$

O caso mostrado pela eq. 7.61 é equivalente a multiplicar  $h_d[n]$  por uma janela  $w[n]$  do tipo:

$$w[n] = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, 1, \dots, M - 1 \\ 0 & \text{c.c..} \end{cases} \quad (7.62)$$

e,

$$h[n] = h_d[n]w[n]. \quad (7.63)$$

As consequências dessa multiplicação (ou truncamento) são melhor compreendidas no domínio da frequência.

$$H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta})W(e^{i(\omega-\theta)})d\theta \quad (7.64)$$

A operação de convolução produz uma resposta em frequência que é uma versão "modificada" da resposta de frequência desejada. Para a função janela  $w[n]$  retangular (eq. 7.62) a resposta de frequência é dada por:

$$W(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} \frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (7.65)$$

A Fig. 7.5 mostra o efeito da convolução entre  $H_d(e^{j\omega})$  e  $W(e^{j\omega})$  para um filtro ideal passa-baixa. Os lóbulos laterais da janela retangular provavam o efeito de oscilação na resposta de frequência do filtro. O que se deseja da função de janela é que fosse o mais parecida possível com um impulso.

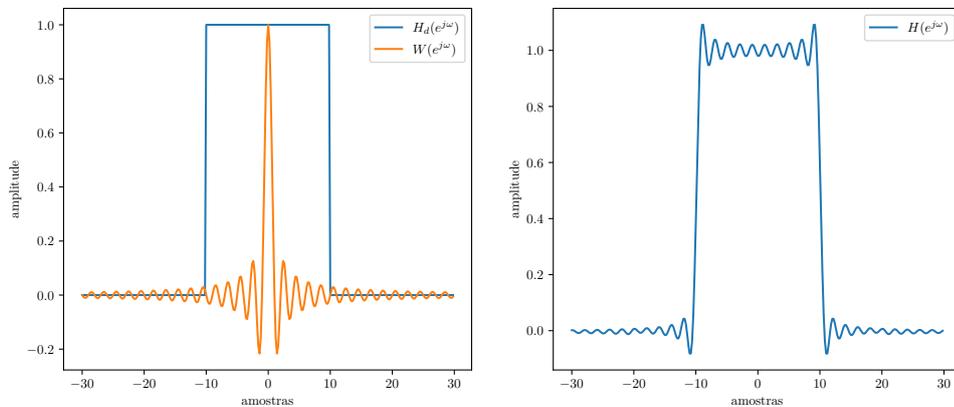


Figura 7.28: Efeito do janelamento. (a) Convolução das funções  $H_d(e^{j\omega})$  e  $W(e^{j\omega})$  (b) Resposta final da resposta de frequência  $H(e^{j\omega})$

Outras janelas com transições mais suaves podem ser adotadas<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Window\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Window_function)

### Janela Retangular

A janela retangular é tida como a mais simples de todas, equivalente a zerar todas as amostras exceto os  $N$  valores dos dados. Como se o sinal abruptamente fosse zero ou removidas:

$$w[n] = 1, n = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (7.66)$$

Outras janelas foram desenvolvidas para moderar essa discontinuidade já que esta causa alguns efeitos não desejados.

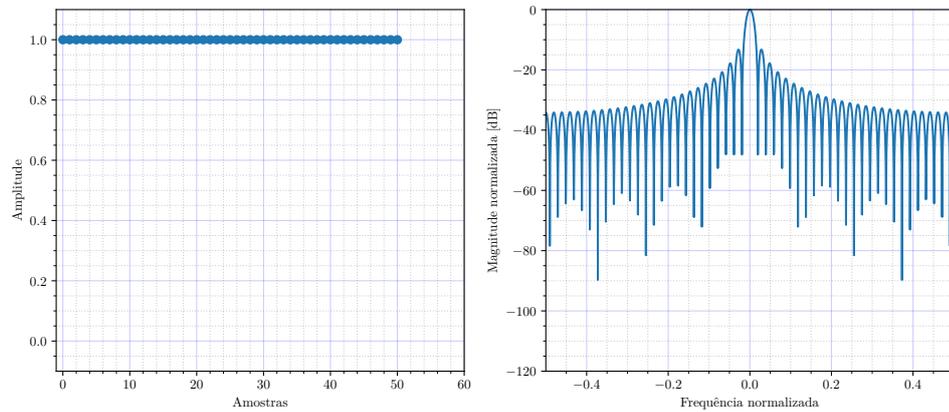


Figura 7.29: Resposta da janela **retangular** com  $N = 51$  e o seu espectro de amplitude a direita.

### Janela Triangular ou *Bartlett*

A janela triangular é da seguinte forma:

$$w(n) = 1 - \left| \frac{n - \frac{N-1}{2}}{\frac{L}{2}} \right|, \quad (7.67)$$

onde  $L$  varia até  $N$ ,  $N + 1$  ou  $N - 1$ . Todas as três definições de  $L$  convergem para  $N$  grande.

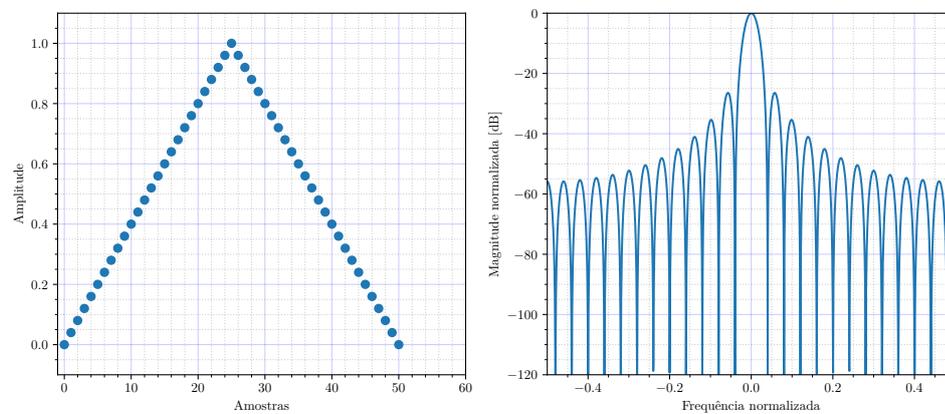


Figura 7.30: Resposta da janela **Bartlett** com  $N = 51$  e o seu espectro de amplitude a direita.

### Janela de Hamming

a janela de Hamming é:

$$w(n) = \alpha - \beta \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right). \quad (7.68)$$

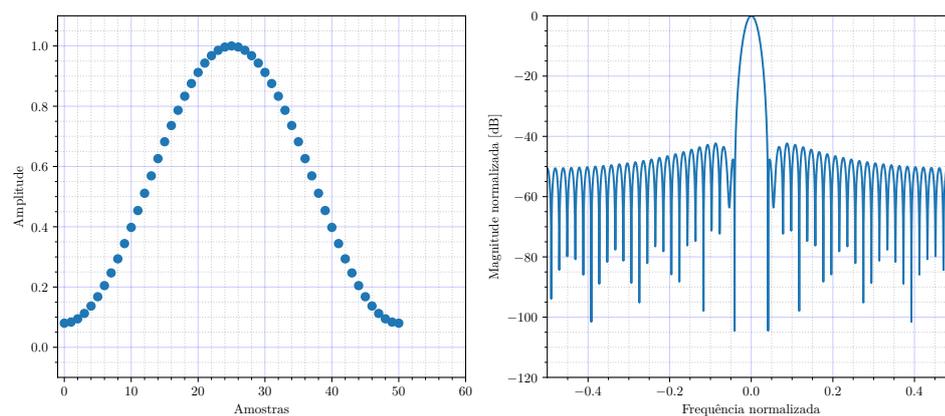


Figura 7.31: Resposta da janela **Hamming** com  $N = 51$  e o seu espectro de amplitude a direita.

**Janela de Hann**

é da seguinte forma:

$$w(n) = 0.5 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi n}{N-1} \right) \right) = \text{hav} \left( \frac{2\pi n}{N-1} \right) \quad (7.69)$$

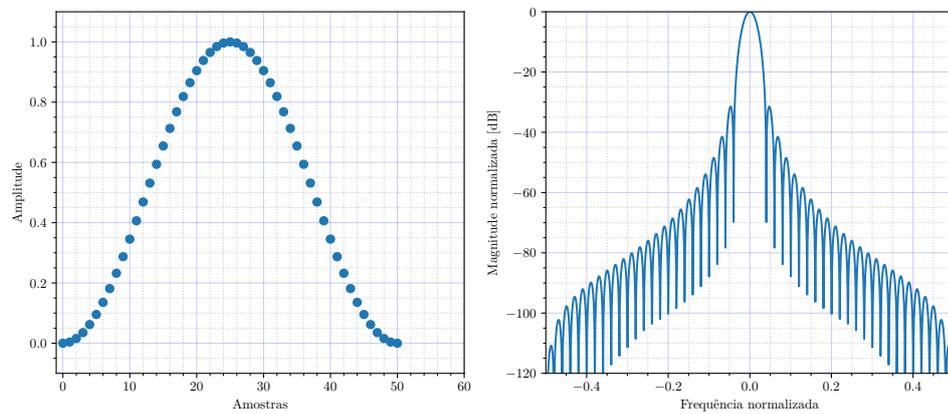


Figura 7.32: Resposta da janela **Hann** com  $N = 51$  e o seu espectro de amplitude a direita.

**Janela Cosseno**

é da seguinte forma:

$$w(n) = \sum_{k=0}^K a_k \cos \left( \frac{2\pi kn}{N} \right) \quad (7.70)$$

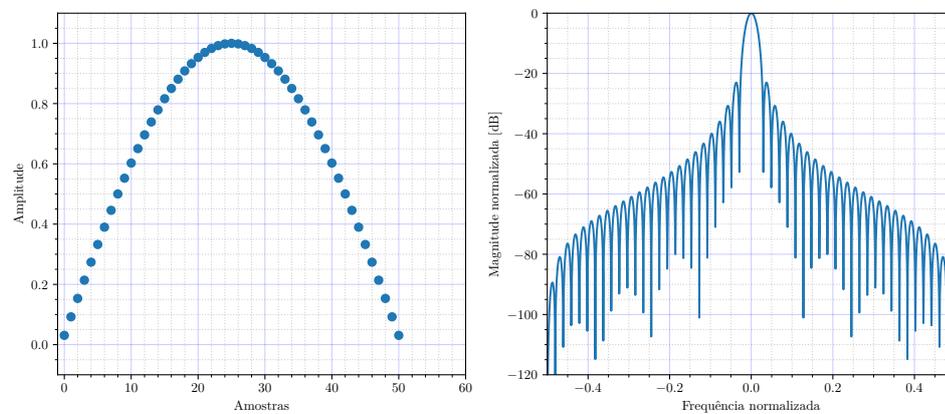


Figura 7.33: Resposta da janela **Cosseno** com  $N = 51$  e o seu espectro de amplitude a direita.

### Janela de Blackman

A janela de Blackman tem os parâmetros:  $\alpha = 0.16$ ;  $B = 1.73$ . É definida como:

$$w(n) = a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \quad a_0 = \frac{1-\alpha}{2}; \quad a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{\alpha}{2} \quad (7.71)$$

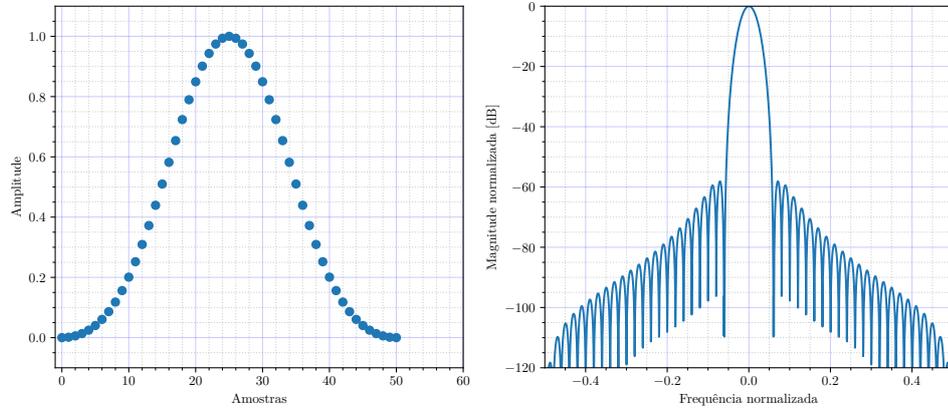


Figura 7.34: Resposta da janela **Blackman** com  $N = 51$  e o seu espectro de amplitude a direita.

**Exemplo 94 :** Projeto de um filtro FIR passa-baixa com frequência de corte  $\omega_c$ , fase linear e ordem  $M$ .

*solução:* Neste caso, a resposta  $H_d(e^{j\omega})$  será:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} & \text{se } |\omega| < \omega_c, \\ 0 & \text{se } \omega_c < |\omega| < \pi. \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa determina-se a resposta ao impulso:

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} e^{j\omega n} d\omega \quad (7.72)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n - \frac{M-1}{2})} d\omega = \frac{\sin(\omega_c(n - \frac{M-1}{2}))}{\pi(n - \frac{M-1}{2})} \quad (7.73)$$

observe que  $h_d[n] = h_d[M - 1 - n]$  fase linear tipo I.

Multiplicando  $h_d[n]$  por uma das janelas anteriores tem-se:  $h[n] = \frac{\sin(\omega_c(\frac{M-1}{2}))}{\pi(n - \frac{M-1}{2})} w[n]$

Utilizando  $f_c = 0.4$  ( $\omega_c = 0.8\pi$ ),  $M = 51$  e as janelas Retangular e de Hamming tem-se as respostas deseja dadas na Fig. ?? (a). Utilizando as mesmas especificações anteriores e  $M = 9$  as respostas da banda de passagem e transição são mostradas nas Fig. ??(b)

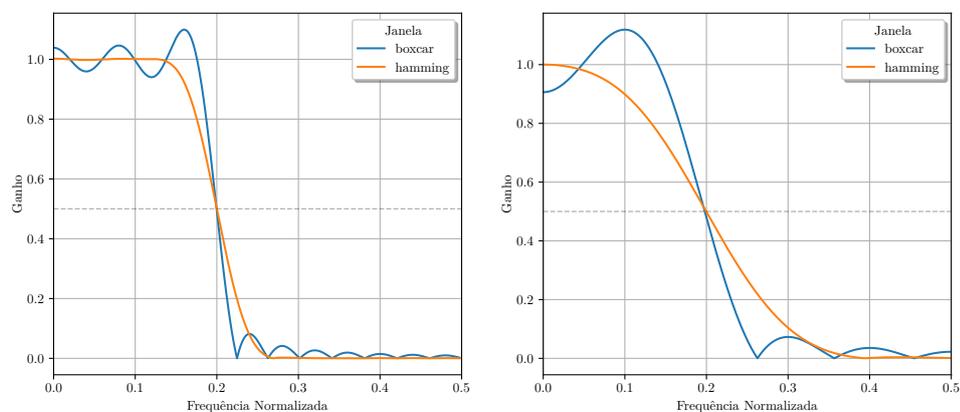


Figura 7.35: Resposta para o exercício 94 (a)  $M = 51$  (b)  $M = 19$

A Fig. 7.36 apresenta uma comparação de diferentes funções de janela apropriada para um filtro. O eixo de frequência é normalizado pela frequência de corte e se apresenta décadas. Observa-se o desempenho de cada uma das funções de janelamento. Esse desempenho é tanto na largura de banda do lóbulo principal quanto na atenuação presente nos lóbulos secundários. Essas informações são resumidas nas Tab. 7.1.

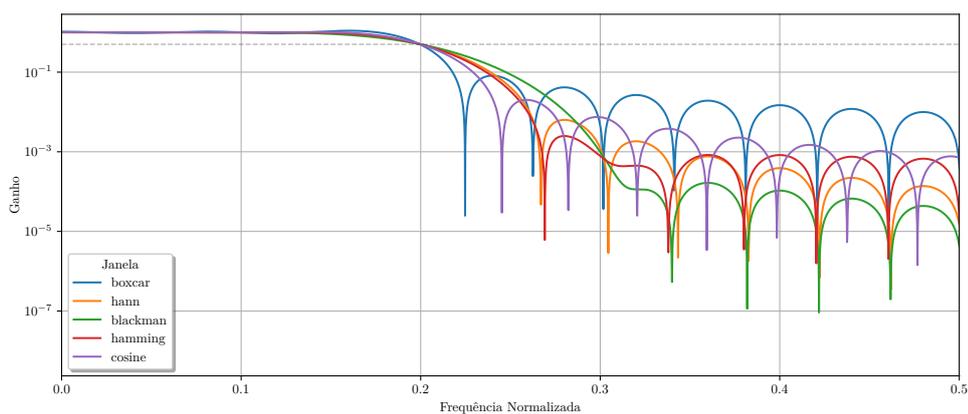


Figura 7.36: Comparação de diferentes janela.

Tabela 7.1: Parâmetros de comparação entre algumas janelas.

Janela	Máximo lóbulo lateral (dB)	Largura de transição ( $\delta f$ )
retangular	-13	$\frac{0.9}{M-1}$
hanning	-31	$\frac{3.1}{M-1}$
hamming	-41	$\frac{3.3}{M-1}$
blackman	-57	$\frac{5.5}{M-1}$

## 7.6 Exercícios propostos

Filtros analógicos

1. Considere um filtro passa-baixas ideal com resposta em frequência:

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\Omega| < 4\pi \text{ rad/s,} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} .$$

Admitindo como entrada do filtro o sinal:  $x(t) = 1 + \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_0 t) + \frac{1}{7} \cos(7\omega_0 t) + \dots$ .  
Determine o sinal na saída do filtro.

2. Um sinal cuja série de Fourier é dada por:  $x(t) = A\{1 + \frac{1}{2} \sin(300\pi t) + \frac{1}{3} \sin(900\pi t) + \frac{1}{5} \sin(1500\pi t) + \frac{1}{7} \sin(2100\pi t) + \dots\}$  é aplicado na entrada de um filtro passa-baixas ideal com resposta em frequência,

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\Omega| < 2\pi 600 \text{ rad/s,} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} .$$

Encontre o sinal  $y(t)$  na saída do filtro.

3. Mostre que, para  $N$  ímpar (ordem do filtro), o filtro de Butterworth passa-baixas apresenta um polo real em  $s = -\Omega_c$ .
4. Admitindo  $A_p$  (em dB) a atenuação máxima na banda de passagem e  $A_s$  a atenuação mínima na banda de atenuação. Determine uma fórmula para o valor de  $N$  em um de Butterworth em função de  $\Omega_p$  e  $\Omega_s$ .  
Resposta:  $N \geq \log[(10^{0.1A_p} - 1)(10^{0.1A_s} - 1)] / 2 \log(\Omega_p / \Omega_s)$
5. Uma oitava é a diferença entre duas frequências  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , na qual uma é duas vezes a outra. Mostre que para o filtro de Butterworth nas

frequências altas ( $\Omega \geq \Omega_c$ ) a atenuação  $A(\Omega)$  tem uma inclinação de aproximadamente 6N dB/oitava.

6. Determine a função de transferência de um filtro de Butterworth de ordem 2 com frequência de corte  $\Omega_c = 1$  rad/s.
7. A partir do resultado do exercício anterior determine a função de transferência de um filtro com frequência de corte igual a 1 kHz.
8. Determine a função de transferência de um filtro de Chebyshev de ordem 2, com frequência da banda de passagem  $\Omega_p = 1$  rad/s e ondulação igual a 1 dB.
9. Deseja-se projetar um filtro passa-baixas com as seguintes especificações: banda de passagem: 0 a 1 MHz e atenuação  $\leq 1$  dB, banda de atenuação: acima de 2 MHz e atenuação  $\geq 40$  dB
  - (a) Determine a ordem do filtro de Butterworth,
  - (b) Determine a ordem do filtro de Chebyshev,
  - (c) compare os resultados.
10. Deseja-se projetar um filtro passa-baixas com as seguintes especificações: banda de passagem: 0 a  $2\pi 1000$  rad/s e atenuação  $\leq 1$  dB, banda de atenuação: acima de  $2\pi 1500$  rad/s 2 MHz e atenuação  $\geq 50$  dB.
  - (a) Determine a ordem do filtro de Butterworth,
  - (b) Determine a ordem do filtro de Chebyshev,
  - (c) compare os resultados.
11. Encontre a ordem para um filtro de Chebyshev passa-baixas com as seguintes especificações: banda de passagem: 0 a 0.5 MHz e ondulação  $\leq 0.2$  dB e banda de atenuação: acima de 1 MHz e atenuação  $\geq 50$  dB.
12. Repita o exercício anterior admitindo ondulação máxima igual a 1 dB. Compare os resultados.
13. Determine a função de transferência de um filtro de Chebyshev que satisfaça as seguintes especificações: ondulação na banda de passagem  $r = 2$  dB,  $\Omega_p = 1000\pi$  rad/s ( $F_p = 500$  Hz),  $\Omega_s = 4000\pi$  rad/s ( $F_s = 2000$  Hz),  $A_s = 40$  dB.

14. Considere um filtro de Chebyshev tipo I de terceira ordem, com frequência da banda de passagem igual a  $\Omega_p$  rad/s. Dado que:  $C_3(x) = 4x^3 - 3x$ , e que a ondulação “ripple” na banda de passagem é igual a 1 dB. Determine o valor da magnitude da resposta em amplitude do filtro para as frequências:  $\Omega = \Omega_p$  e  $\Omega = 2\Omega_p$ .
15. Determine a função de transferência de um filtro de Chebyshev tipo II que satisfaça as seguintes especificações: atenuação máxima banda de passagem 2 dB,  $\Omega_p = 2000\pi$  rad/s ( $F_p = 1000$  Hz),  $\Omega_s = 4000\pi$  rad/s ( $F_s = 2000$  Hz), atenuação mínima na banda de atenuação  $A_s = 20$  dB.
16. Determine a ordem de um filtro elíptico que satisfaça as seguintes especificações: atenuação máxima (ou ondulação) na banda de passagem 0.1 dB,  $\Omega_p = 900$  rad/s,  $\Omega_s = 1000$  rad/s e atenuação mínima na banda de atenuação  $A_s = 50$  dB.
17. A função de transferência de um filtro de Butterworth de ordem 3 é dada por:  $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$ . Encontre a função de transferência para um filtro passa-altas com frequência de corte 1 rad/s. Desenhe o módulo da resposta em frequência.
18. Para o exercício anterior qual seria a função de transferência do filtro para uma frequência de corte qualquer  $\Omega_c$ ?
19. Considere um filtro passa-baixas de primeira ordem com função do sistema:  $H(s) = \frac{\Omega_p}{s + \Omega_p}$
- Transforme o filtro acima em um filtro passa-altas com frequência  $\Omega_p$ .
  - Transforme o filtro acima em um filtro passa-banda com frequências da banda de passagem, inferior e superior  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , respectivamente.
  - Transforme o filtro acima em um filtro rejeita-banda com frequências da banda de rejeição, inferior e superior  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , respectivamente.
  - Compare os resultados.
20. Considere um filtro passa-baixas com função de transferência  $H(s) = \frac{3}{s+3}$ . A partir deste filtro, encontre a função de transferência do filtro passa-banda que apresenta frequência de ressonância de 12 rad/s e largura de banda igual a 4.0 rad/s.

21. Considere um filtro passa-baixas com função de transferência  $H(s) = \frac{3}{s+3}$ .  
A partir deste filtro, encontre a função de transferência de um outro filtro passa-baixas que apresenta frequência de corte igual a 12 rad/s.
22. Considere um filtro passa-baixas de primeira ordem com função do sistema:  $H(s) = \frac{1}{s+1}$ . Encontre a função de transferência do filtro passa-banda com frequência de ressonância  $\Omega_0 = 1$  rad/s e largura de banda igual a 0.1 rad/s.
23. Considere a seguinte função de transferência:  $H(s) = \frac{s}{s^2} + s\frac{\omega_0}{Q_0} + \omega_0^2$ .  
Determine:
- O tipo de filtro descrito por  $H(s)$  (explique claramente),
  - Mostre que a máxima magnitude do filtro ocorre em  $\omega = \omega_0$  e determine o ganho nesta frequência.
24. Uma distorção multi-percurso ocorre quando um sinal sai de um transmissor e chega a um receptor por dois caminhos com atrasos e atenuações diferentes. Considerando que o caminho direto não sofre atenuação ( $\alpha$ ) ou atraso ( $\tau$ ):
- Determine a equação que associa  $x(t)$  e  $y(t)$  para o sistema de multiplo-percurso;
  - Encontre a função do sistema  $H(s)$ ;
  - Desenhe  $|H(j\Omega)|$  em função da frequência para atenuação  $\alpha = 1$ ;
  - Para compensar a distorção em  $x(t)$  utiliza-se um filtro equalizador com função de transferência  $H_{eq}(s) = 1/H(s)$ . Admitindo como equalizador um filtro transversal como mostrado abaixo, encontre  $H_{eq}(s)$  e  $a_0, a_1, a_2, a_3$  para  $\alpha < 1$ .
- OBS:  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, |x| < 1$
25. Encontre a perda em  $\omega_s = 40$  rad/s para um filtro Butterworth de 5ª ordem que possui perda máxima de 1 dB na banda de passagem  $\omega_p = 10$  rad/s.
26. Encontre a função de transferência para a aproximação de Butterworth de 3ª ordem.

27. Encontre a função de aproximação Butterworth para um filtro passa-baixa cuja especificação é:  $A_{max} = 0.5$  dB,  $A_{min} = 12$  dB,  $\omega_p = 100$  rad/s,  $\omega_s = 400$  rad/s.
28. Um filtro passa-baixa Butterworth tem a seguinte especificação:  $A_{max} = 1$  dB,  $A_{min} = 35$  dB,  $\omega_p = 1000$  Hz,  $\omega_s = 3500$  Hz. Determine a função de transferência, a perda em 9 kHz e os polos do sistema.
29. Encontre a função de aproximação Chebyshev para um filtro passa-baixa cuja especificação é:  $A_{max} = 0.5$  dB,  $A_{min} = 20$  dB,  $\omega_p = 200$  rad/s,  $\omega_s = 600$  rad/s.
30. Um filtro passa-baixa de 5ª ordem Chebyshev possui uma perda de 72 dB em 400 Hz. Encontre a frequência aproximada na qual um filtro passa-baixa de 5ª ordem Butterworth exibe a mesma perda, dado que possuem a mesma especificação para a banda de passagem.

## Filtros Digitais

31. Para cada um dos seguintes filtros estabeleça a ordem e identifique os seus coeficientes:
- (a)  $y[n] = 2x[n] - x[n - 1] + y[n - 1]$
  - (b)  $y[n] = x[n - 1] - x[n - 2] - y[n - 1]$
  - (c)  $y[n] = x[n] + x[n - 1] - y[n - 1] - 0.5y[n - 3]$
  - (d)  $y[n] = 2x[n] - x[n - 1]$
  - (e)  $y[n] = 0.5x[n - 3]$
  - (f)  $y[n] = x[n] - x[n - 1] + x[n - 2] + x[n - 3]$
32. Determine as funções de transferência de cada um dos filtros do exercício 1.
33. Um filtro digital é descrito pela seguinte equação de diferenças:  $y(n) = x(n) - x(n - 1) + 0.4y(n - 1)$
- (a) O filtro é recursivo ou não recursivo. Justifique a resposta.
  - (b) Qual a ordem do filtro?
  - (c) Determine a resposta em frequência e desenhe o espectro de amplitudes.
  - (d) Sendo  $1 \ 4 \ 6 \ 2 \ -1 \ 0$  a seqüência aplicada na entrada do filtro, determine a seqüência de saída de  $y(0)$  até  $y(6)$ .

34. Um filtro digital apresenta a seguinte função de transferência:  $H(z) = \frac{1}{1 + 0.9z^{-1}}$ .
- Desenhe o diagrama de pólos e zeros.
  - Desenhe o módulo da função de transferência
  - Determine a fórmula de recursão que relaciona os valores das amostras de saída e de entrada.
  - Determine e esboce a resposta ao impulso do filtro
35. Um filtro analógico apresenta a seguinte função de transferência:  $H(s) = \frac{2}{(s + 1)(s + 2)}$
- Utilize transformação bilinear para converter o filtro no seu equivalente digital (admita  $T = 0.5$ ).
  - Encontre a equação de recursão do filtro.
  - Desenhe o módulo da resposta em frequência para ambos os filtros e compare os resultados.
36. A Fig. 7.37 é um sistema utilizado para obter um filtro passa-altas a partir de um filtro passa baixas. Mostre que se  $H(\Omega)$  é um passa baixas ideal com frequência de corte  $\Omega_{lp}$  então o sistema todo será um passa altas ideal; e se  $H(\Omega)$  é um passa altas ideal com frequência de corte  $\Omega_{hp}$  então o sistema todo será um passa baixas ideal e determine sua frequência de corte.

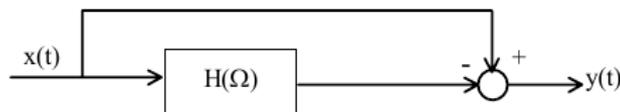


Figura 7.37: Figura referente ao exercício 36.

37. Projete um filtro digital IIR de primeira ordem, com característica de Butterworth e frequência de corte  $\omega_c = 0.3\pi$ .
38. Projete um filtro digital passa-baixas com característica de Butterworth que satisfaça as seguintes especificações:
- Banda de passagem: 0 - 1 kHz e atenuação máxima de 1 dB.

- (b) Banda de atenuação: a partir de 3 kHz com atenuação mínima de 20 dB.
- (c) Frequência de amostragem: 10 kHz.
39. Repita o exercício anterior utilizando característica de Chebyshev.
40. Projete um filtro FIR passa-baixas utilizando o método por janelas que satisfaça as seguintes especificações:
- (a) Frequência da banda de passagem: 1.5 kHz
- (b) Largura da banda de transição: 0.5 kHz
- (c) Atenuação na banda de atenuação:  $> 50$  dB
- (d) Frequência de amostragem: 10 kHz
41. Projete um filtro FIR passa-baixas, com  $f_c = 0.4(\omega_c = 0.8\pi)$  utilizando janela de Hamming e  $M = 9$ .
42. Determine a resposta de amplitude e de fase de um filtro FIR causal cuja função de transferência é dada por:  $H(z) = \sum_0^3 h(m)z^{-m}$  em que:  
 $h(m) = h(M - m)M = 3$
43. Projete um filtro FIR passa-baixas, com fase linear e ordem 14, pelo método de amostragem em frequência, que aproxima a característica de frequência dada na Fig. 7.38. Desenhe o módulo da função de transferência.

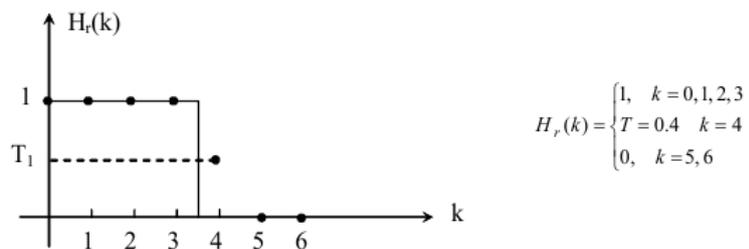


Figura 7.38: Figura referente ao exercício 43.

# Bibliografia Consultada

1. B. P. Lathi, Sinais e Sistemas Lineares, Bookman, Porto Alegre, 2.ed, 2007, ISBN: 85-60031-13-8;
2. A.V. Oppenheim, A.S.Willsky & H. Nawab, Sinais e Sistemas, Pearson, São Paulo, 2.ed, 2010, ISBN: 857605504X;
3. Simon Haykin & Barry Van Veen, Sinais E Sistemas, 2003, Bookman, 2003, ISBN: 8573077417;
4. Paulo Sergio Ramirez Diniz, Eduardo Antônio Barros da Silva & Sérgio Lima Netto, Processamento digital de sinais : projeto e análise de sistemas, Bookman, Porto Alegre, 2004, ISBN: 85-363-0418-9
5. A.V. Oppenheim & A.S. Willsky, Signal & Systems, 2.ed, 1999, ISBN: 13-754-920-2, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, EUA;
6. A.V. Oppenheim & R.W. Schafer, J.R. Buck, Discrete-Time Signal Processing, 4.ed, 1997, ISBN = 0-13-814757-4, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, EUA;