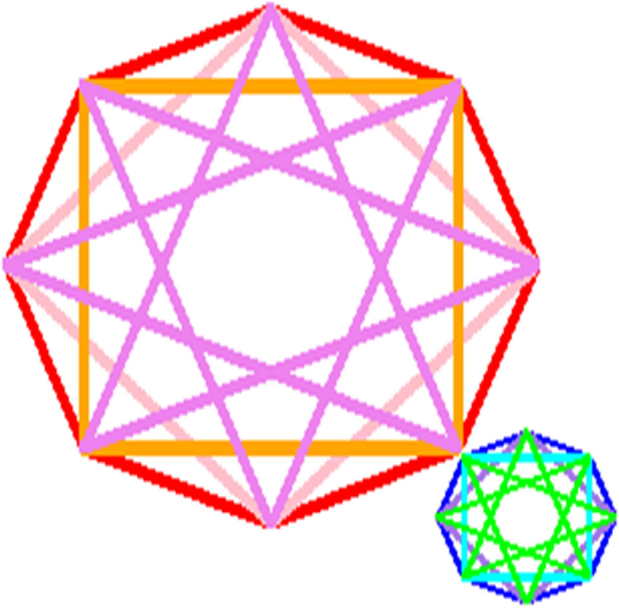
RODOLFO HOFFMANN



PRODUTIVIDADE E PREÇOS EM SISTEMAS SRAFFIANOS

Portal de Livros Abertos
da USP
2016

Rodolfo Hoffmann

PRODUTIVIDADE E PREÇOS EM SISTEMAS SRAFFIANOS

1ª EDIÇÃO DIGITAL

Piracicaba, ESALQ-USP

Edição do autor

2016

DOI: 10.11606/9788592105723

Digitação do original: Joselene R. da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
DIVISÃO DE BIBLIOTECA - DIBD/ESALQ/USP

Hoffmann, Rodolfo
Produtividade e preços em sistemas Sraffianos [recurso eletrônico] / Rodolfo Hoffmann. - - Piracicaba: ESALQ, 2016.
308 p. : il.

ISBN: 978-85-921057-2-3

1. Economia sraffiana 2. Mercadoria 3. Modelos matemáticos 4. Preços 5. Economia marxista 6. Valores-trabalho I.Título
CDD 338.5
H711p

DOI: 10.11606/9788592105723

Uma versão anterior deste livro, impresso, foi publicada pela Editora LP-Books em 2013.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste texto é apresentar, didaticamente, as ideias básicas do livro de Piero Sraffa intitulado “Produção de mercadorias por meio de mercadorias”, publicado em 1960, e alguns de seus desdobramentos. O estilo e a organização da exposição se baseiam no trabalho de Pasinetti (1977) intitulado “Lectures on the Theory of production”.

O trabalho de Sraffa teve repercurssões importantes tanto para a escola marxista como para a corrente de pensamento neoclássica. Não há dúvida que uma de suas características básicas é o fato de ressaltar a estrutura da produção de mercadorias e sua influência na determinação dos preços, da mesma maneira que Ricardo. Alguns se referem, até mesmo, a uma escola “neo-ricardiana”, mas me parece que a obra de Sraffa não tem a abrangência necessária para se apresentar como uma alternativa às escolas neoclássica ou marxista (nem era essa a pretensão do autor).

Quatro capítulos deste livro tratam da determinação de valores-trabalho nos esquemas econômicos analisados. Cabe destacar a determinação de valores-trabalho em esquemas com produção conjunta, particularmente quando há renda da terra, um assunto raramente abordado na literatura econômica.

2. PRODUÇÃO PARA SUBSISTÊNCIA

No primeiro capítulo de “Produção de mercadorias por meio de mercadorias”, Sraffa considera uma economia que produz apenas o necessário à sua subsistência.

Supõe, inicialmente, uma economia com apenas duas mercadorias: trigo e ferro. Considerando tanto o consumo dos trabalhadores como a utilização de meios de produção, admite que 280 sacos de trigo e 12 toneladas de ferro são usadas para produzir 400 sacos de trigo, ao mesmo tempo que 120 sacos de trigo e 8 toneladas de ferro são usados para produzir 20 toneladas de ferro. Esquematicamente:

$$\begin{aligned} 280 \text{ trigo} + 12 \text{ ferro} &\rightarrow 400 \text{ trigo} \\ 120 \text{ trigo} + 8 \text{ ferro} &\rightarrow 20 \text{ ferro} \end{aligned}$$

Esses são os métodos de produção e consumo produtivo ou, mais simplesmente, *os métodos de produção*.

Notar que, nesse exemplo, o total produzido de cada mercadoria é igual ao total utilizado, caracterizando a produção apenas para subsistência.

No início do período de produção admite-se que as mercadorias estão distribuídas pelas indústrias de acordo com o que é necessário para a produção, mas no fim apenas os respectivos produtores tem cada tipo de mercadoria. Há apenas um conjunto de relações de troca que, através de um mercado, restaura a distribuição original. Para o exemplo considerado pode-se verificar que essa relação de trocas é 10 sacos de trigo por tonelada de ferro.

A seguir Sraffa apresenta um exemplo com 3 mercadorias:

240 trigo + 12 ferro + 18 porcos → 450 trigo
90 trigo + 6 ferro + 12 porcos → 21 ferro
120 trigo + 3 ferro + 30 porcos → 60 porcos

Note-se, novamente, que a produção é suficiente, apenas, para repor o que foi utilizado. Pode-se verificar que, nesse caso, as relações de troca que garantem a reprodução do processo de produção são

10 sacos de trigo = 2 porcos = 1 tonelada de ferro

Pasinetti mostra que a "produção para subsistência" de Sraffa pode ser analisada como um sistema de Leontief fechado. O termo "fechado" é utilizado nesse contexto para indicar que não se destaca a demanda final, isto é, o consumo das pessoas é encarado como um insumo do processo de produção, da mesma maneira que o combustível de uma máquina[1].

Seja q_{ij} a quantidade da mercadoria i que entra na produção da mercadoria *j*. No exemplo acima temos $q_{11} = 240$, $q_{12} = 90$,

[1] É mais usual usar os termos "fechado" e "aberto" para designar uma economia sem ou com comércio externo, respectivamente.

$q_{21} = 12$, etc. Os índices i e j variam de 1 a n, sendo n o número de diferentes mercadorias do sistema econômico.

Seja Q_j a produção total da j-ésima mercadoria.

Por definição, os coeficientes técnicos de produção são

$$a_{ij} = \frac{q_{ij}}{Q_j}$$

Seja $\mathbf{Q}$ a matriz $n \times n$ dos fluxos físicos intersetoriais, isto é, $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$.

Então

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \mathbf{QD}^{-1}, \qquad (1)$$

onde $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal com as quantidades totais produzidas, isto é,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Q_n \end{bmatrix}$$

Também vamos considerar o vetor

$$\mathbf{q}' = [Q_1 \quad Q_2 \ \dots \ Q_n]$$

Seja $\boldsymbol{\iota}$ o vetor-coluna com n elementos iguais a 1. Verifica-se que $\mathbf{D}\boldsymbol{\iota} = \mathbf{q}$ e $\mathbf{Q}\boldsymbol{\iota} = \mathbf{q}$.

Seja p_i o preço da i-ésima mercadoria. Podemos, então construir uma tabela com os valores dos fluxos intersetoriais.

Tabela 1. Tabela das transações (valores dos fluxos intersetoriais)

Setor	Setor				Total
	1	2	…	n	
1	$q_{11}p_1$	$q_{12}p_1$	…	$q_{1n}\,p_1$	Q_1p_1
2	$q_{21}p_2$	$q_{22}p_2$	…	$q_{2n}\,p_2$	Q_2p_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$q_{n\,1}p_n$	$q_{n\,2}p_n$	…	$q_{nn}\,p_n$	$Q_n\,p_n$

Considerando as linhas dessa tabela, temos

$$\begin{cases} q_{11} + q_{12} + \cdots + q_{1n} = Q_1 \\ q_{21} + q_{22} + \cdots + Q_{2n} = Q_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ q_{n1} + q_{n\,2} + \cdots + q_{n\,n} = Q_n \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + \cdots + a_{1n}\,Q_n = Q_1 \\ a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + \cdots + a_{2n}\,Q_n = Q_2 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{n1}Q_1 + a_{n\,2}Q_2 + \cdots + a_{nn}\,Q_n = Q_n \end{cases}$$

ou

$$\mathbf{Aq} = \mathbf{q} \tag{2}$$

Considerando as colunas da tabela, obtemos

$$\begin{cases} a_{11}Q_1 p_1 + a_{21}Q_1 p_2 + \cdots + a_{n1}Q_1 p_n = Q_1 p_1 \\ a_{12}Q_2 p_1 + a_{22}Q_2 p_2 + \cdots + a_{n2}Q_2 p_n = Q_2 p_2 \\ \quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{1n}Q_n p_1 + a_{2n}\, Q_n\, p_2 + \cdots + a_{nn}\, Q_n\, p_n = Q_n\, p_n \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + \cdots + a_{n1} p_n = p_1 \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + \cdots + a_{n2} p_n = p_2 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{1n}\, p_1 + a_{2n}\, p_2 + \cdots + a_{nn}\, p_n = p_n \end{cases}$$

ou

$$\mathbf{A}'\mathbf{p}' = \mathbf{p}'$$

ou, ainda,

$$\mathbf{pA} = \mathbf{p} \quad , \tag{3}$$

onde **p** é o vetor-linha com os preços dos produtos.

É claro que $\mathbf{q} > 0$ e $\mathbf{A} \geq 0$

De (2) segue-se que

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{4}$$

Conclui-se que $|\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ e que 1 é uma raiz característica de **A** (ver o Apêndice A) .

Vamos demonstrar que 1 é a maior raiz característica de **A.**

Se dividirmos os elementos de cada linha de **Q** pelo total da linha (lembrar que $\mathbf{Q}\boldsymbol{\iota} = \mathbf{q}$), obtemos a matriz $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}$. Temos $\mathbf{B} \geq 0$ e a soma dos elementos de qualquer linha de **B** é igual a 1. Então a maior raiz característica de **B** é igual a 1. Uma vez que **B** e **A** são semelhantes, as raízes características de **A** são iguais às raízes características de **B**. Conclui-se, assim, que a maior raiz característica de **A** é igual a 1, isto é, $\lambda_m = 1$.

A relação (2) mostra que **q** é o vetor característico à direita correspondente a $\lambda_m = 1$ e a relação (3) mostra que **p** é o vetor característico à esquerda correspondente a $\lambda_m = 1$. Então $\mathbf{p} \geq 0$. Podemos concluir que $\mathbf{p} > 0$ se a matriz **A** for irredutível.

No caso do exemplo considerado, uma solução para o vetor de preços é $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 1 & 0{,}5 \end{bmatrix}$.

3. O SISTEMA DE LEONTIEF

Vimos, na seção anterior, que a “produção para subsistência” de Sraffa corresponde a um sistema de Leontief fechado, isto é, um sistema de Leontief onde não se separa a demanda final. Antes de prosseguir com a apresentação dos esquemas sraffianos, vamos, nessa seção, apresentar o sistema de Leontief aberto, isto é, uma análise de insumo-produto em que se destaca a demanda final.

Seguindo Pasinetti, vamos adaptar o exemplo de uma economia com 3 setores apresentado na seção anterior. Vamos admitir que a mão-de-obra total seja igual a 60 unidades, com 18 unidades empregadas no setor 1, 12 unidades empregadas no setor 2 e 30 unidades empregadas no setor 3. Vamos admitir, ainda, que a cada unidade de mão-de-obra corresponde um consumo de 3 sacos de trigo e de 1/2 porco. Então o valor do salário, com $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0,1 & 1 & 0,5 \end{bmatrix}$, é $w = 3 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,55$.

As tabelas a seguir mostram os fluxos de mercadorias e trabalho e os respectivos valores monetários.

Tabela 2. Fluxos de Mercadorias e Trabalho

Setor	Setor			Demanda Final	Total
	1	2	3		
1	186	54	30	180	450
2	12	6	3	0	21
3	9	6	15	30	60
Mão-de-obra	18	12	30		60

Tabela 3. Fluxos em valor

Setor	Setor			Demanda final (consumo)	Total
	1	2	3		
1	18,6	5,4	3	18	45
2	12	6	3	0	21
3	4,5	3	7,5	15	30
Sub total	35,1	14,4	13,5		
Valor adicionado	9,9	6,6	16,5	**33**	
Total	45	21	30		**96**

Essa é a matriz das transações, tabela das transações ou tabela de insumo-produto.

A técnica de produção é representada por uma matriz quadrada de coeficientes interindustriais

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

e pelo vetor dos coeficientes de mão-de-obra

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \tag{6}$$

Para o exemplo considerado temos

$$a_{11} = \frac{186}{450},\ a_{12} = \frac{54}{21},\ a_{13} = \frac{30}{60},\ a_{21} = \frac{12}{450}, \cdots, a_{33} = \frac{15}{60},$$
$$b_1 = \frac{18}{450},\ b_2 = \frac{12}{21} \text{ e } b_3 = \frac{30}{60}$$

Fazemos

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix}$$

e $\quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \end{bmatrix}$

onde Y_j é a quantidade do produto j destinada a atender a demanda final.

Temos

$$\mathbf{Aq} + \mathbf{y} = \mathbf{q} \tag{7}$$

ou

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\, \mathbf{q} = \mathbf{y}$$

Exercícios 1

1.l. Considere um sistema econômico com 3 setores cuja matriz de coeficientes técnicos é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}25 & 0{,}55 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}15 \\ 0{,}03 & 0{,}09 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

e cujo vetor de coeficientes de mão-de-obra é

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Faça uma tabela com os fluxos de mercadorias e trabalho e determine o vetor do produto líquido sabendo que o vetor das produções é

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 300 \\ 100 \\ 60 \end{bmatrix}$$

1.2. Seja uma economia com dois setores: setor primário e setor urbano (incluindo indústria e serviços). São dadas as seguintes informações, para um ano-base:

Vendas do setor primário ao setor urbano:	80
Vendas do setor urbano ao setor primário:	120
Valor agregado no setor primário:	150
Valor agregado no setor urbano:	400
Valor bruto da produção do setor primário:	300
Valor bruto da produção do setor urbano:	800

Determine:

a) a matriz (**A**) dos coeficientes de custo dos meios de produção[2].

b) a matriz dos multiplicadores: $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

c) o valor bruto da produção e a estrutura de insumos compatíveis com uma nova demanda final de 200 para produtos do setor primário e de 500 para produtos do setor urbano.

---

2 Como não são fornecidos os fluxos físicos intersetoriais, não podemos determinar a matriz dos coeficientes técnicos. A matriz dos coeficientes de custo dos meios de produção é definida de maneira similar, usando os valores monetários.

4. PRODUÇÃO COM EXCEDENTE

No segundo capítulo de “Produção de mercadorias por meio de mercadorias” Sraffa começa a analisar métodos de produção onde há um excedente. Ele considera, inicialmente, que esse excedente será distribuído entre as indústrias conforme uma taxa de lucro uniforme. Dados os fluxos físicos intersetoriais, os preços e a taxa de lucro (r) são determinados *simultaneamente*, de acordo com o seguinte sistema de equações:

$$\left(A_a\ p_a + B_a\ p_b + \cdots + K_a\ p_k\right)\left(1+r\right) = A\ p_a$$

$$\left(A_b\ \ p_a + B_p\ p_b + \cdots + K_b\ p_k\right)\left(1+r\right) = B\ p_b$$

$$\ldots$$

$$\left(A_k\ p_a + B_k p_b + \cdots + K_k\ p_k\right)\left(1+r\right) = K\ p_k$$

O volume total produzido de cada mercadoria é indicado por A, B, … , K . Os preços são p_a , p_b , …, p_k . Os fluxos físicos intersetoriais são representados por A_a , B_a , etc. Essa é a simbologia utilizada por Sraffa ao longo de todo o seu livro.

Para que a economia representada por essas equações possa se reproduzir deve-se ter

$$A_a\ +\ A_b\ +\ \ldots\ +\ A_k\ \leq\ A$$

$$B_a\ +\ B_b\ +\ \ldots\ +\ B_k\ \leq\ B\ \ ,\ \text{etc.}$$

Note-se que, dados os volumes produzidos e os fluxos físicos intersetoriais, o número de incógnitas (os $k-1$ preços relativos e a taxa de lucro) é igual ao número de equações.

Sraffa apresenta o seguinte exemplo numérico de uma economia com duas mercadorias (sacos de trigo e toneladas de ferro):

$$\begin{aligned} &280 \text{ trigo} + 12 \text{ ferro} \rightarrow 575 \text{ trigo} \\ &120 \text{ trigo} + 8 \text{ ferro} \rightarrow 20 \text{ ferro} \end{aligned}$$

Indicando por p o preço da tonelada de ferro em sacos de trigo, as equações ficam

$$\begin{aligned} &(280 + 12\,p)\,(1 + r) = 575 \\ &(120 + 8\,p)\,(1 + r) = 20p \end{aligned}$$

A solução é $p = 15$ e $r = 0{,}25$.

Até aqui admitiu-se que os salários pagos aos trabalhadores correspondem estritamente aos meios de subsistência; esses meios de subsistência estão incluídos entre os insumos, da mesma maneira que o combustível de uma máquina. A seguir Sraffa destaca, no sistema, o pagamento de salários, admitindo inclusive que os trabalhadores possam receber uma parcela do excedente. Indicando o salário por w e as quantidades de trabalho necessárias por L_a , L_b , …, L_k , o sistema de equações fica

$$\left(A_a\ p_a + B_a\ p_b + \ldots + K_a\ p_k\right)\left(1+r\right) + L_a\ w = A\ p_a$$

$$\left(A_b\ p_a + B_b\ p_b + \ldots + K_b\ p_k\right)\left(1+r\right) + L_b\ w = B\ p_b$$

$$\ldots$$

$$\left(A_k\ p_a + B_k\ p_b + \ldots + K_k\ p_k\right)\left(1+r\right) + L_k\ w = Kp_k$$

Sraffa admite que os salários são pagos apenas no fim do ciclo de produção, não se computando, então, juros sobre o seu valor.

Em geral vamos considerar que w representa todo o salário pago por unidade de trabalho; nesses casos as mercadorias necessárias à subsistência dos trabalhadores (e de suas famílias) não estão mais incluídas nos insumos A_a, B_a, , etc. Entretanto, quando for conveniente, também podemos admitir que as mercadorias necessárias à subsistência dos trabalhadores continuam incluídas nos insumos A_a, B_a, , etc. , e que w representa apenas a participação dos trabalhadores no excedente, por unidade de trabalho.

Note-se que agora o número de incógnitas (r , w e o preços relativos) supera em uma unidade o número de equações. Nas palavras de Sraffa, “o sistema pode mover-se com um grau de liberdade”.

Vamos, agora, abandonar a simbologia utilizada por Sraffa, passando a usar uma notação mais compatível com o uso da álgebra de matrizes (como faz Pasinetti).

Seja $\mathbf{A}$ a matriz $n \times n$ dos coeficientes interindustriais e seja $\mathbf{b}$ o vetor-linha dos coeficientes de trabalho direto, já definidos na seção 3. Essas duas matrizes caracterizam a *técnica* de produção que é utilizada.

Seja $\mathbf{p}$ o vetor-linha dos preços, com n elementos[3]. O salário e a taxa de lucro são indicados, respectivamente, por w e π. Essas $n + 2$ incógnitas devem obedecer à equação

$$\mathbf{pA}(1+\pi)+\mathbf{b}w=\mathbf{p} \tag{8}$$

que corresponde a um sistema de n equações. Mesmo lembrando que um dos preços pode ser arbitrariamente fixado, ainda ficamos com $n+1$ incógnitas e n equações, isto é, permanece "um grau de liberdade".

Estamos admitindo (como faz Sraffa na parte I do seu livro) que cada indústria produz uma única mercadoria usando trabalho e mercadorias. As mercadorias empregadas como meios de produção são usadas (consumidas) em cada período, sendo necessário repor a mesma quantidade. Assim, ao fim de cada período a produção total deverá ser dividida em duas partes: uma que é destinada a repor os meios de produção gastos e outra que

---

[3] Os preços determinados nos esquemas sraffianos são apropriadamente denominados "preços de reprodução" por Possas (1982 e 1984). O mesmo autor assinala a natureza rigidamente estática (no sentido de "atemporal", e não de "equilíbrio") imposta pela moldura teórica do problema econômico definido por Sraffa (Possas, 1983, p. 168).

pode ser consumida, constituindo-se no produto líquido final, produto nacional líquido ou produto líquido.

O valor adicionado, que é igual ao valor do produto líquido, é dividido pelas pessoas do sistema, no fim de cada período de produção, em duas formas: salários e lucros. Admite-se que o trabalho é homogêneo e que a taxa de lucro é a mesma em todas as indústrias.

Sraffa, diferentemente de Leontief, *não* pressupõe retornos constantes à escala. No prefácio do livro ele afirma que vai tratar exclusivamente daquelas propriedades de um sistema econômico que não dependem de mudança na escala de produção ou nas proporções dos "fatores".

Seja $\mathbf{q}$ o vetor-coluna com as quantidades totais produzidas em cada indústria, da mesma maneira que na seção 3. Então o vetor-coluna com as quantidades que constituem o produto líquido é $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{q}$ e

$$\text{valor do produto líquido} = \mathbf{p}(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{q} \tag{9}$$

Temos, também, que

$$\text{total de salários} = \mathbf{bq}w \tag{10}$$

5. MERCADORIAS BÁSICAS E NÃO-BÁSICAS

Sraffa nota que na produção para subsistência *todas* as mercadorias aparecem tanto entre os produtos como entre os meios de produção; então todas as mercadorias entram, direta ou indiretamente, na produção de todas as outras, e todas participam da determinação dos preços relativos. Por outro lado, quando há um excedente, surge a possibilidade de existência de produtos “de luxo” que não são usados como meios de produção. Nesse caso, no sistema de equações (8) o preço desse produto aparece apenas na equação (linha) correspondente à sua produção. Assim, essa equação poderia ser separada do sistema, reduzindo-se simultaneamente o número de equações e o número de incógnitas em uma unidade. O mesmo raciocínio vale para o caso dos bens “de luxo” que são utilizados como meios de produção apenas na sua própria reprodução (como, por exemplo, cavalos de corrida). Pode-se considerar, ainda, um grupo de k mercadorias que são utilizadas, direta ou indiretamente, apenas na produção delas, de maneira que as k equações poderiam ser separadas do sistema, reduzindo-se ao mesmo tempo, o número de incógnitas em k unidades.

Sraffa denomina de *básica* uma mercadoria que entra, direta ou indiretamente, na produção de todas as mercadorias. Quando isso não ocorre (como no caso dos produtos “de luxo” descritos anteriormente) a mercadoria é denominada *não-básica*.

A existência de mercadorias não-básicas correponde, sempre, a uma matriz **A** redutível. No caso de um produto de luxo utilizado apenas na sua própria reprodução teríamos uma linha de matriz **A** onde apenas o elemento na diagonal principal seria diferente de zero; admitindo, sem perda de generalidade, que essa mercadoria é a n-ésima, a matriz **A** fica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & a_{nn} \end{bmatrix} ,$$

onde $\mathbf{A}_{11}$ é uma matriz $(n-1)\times(n-1)$, $\mathbf{A}_{12}$ é um vetor-coluna e $\mathbf{0}$ representa um vetor-linha com $n - 1$ zeros.

No caso de um grupo de k produtos que aparecem como meios de produção apenas nas equações correspondentes às mercadorias do grupo, sempre será possível reordenar as indústrias de maneira que elas fiquem nas últimas posições, fazendo com que a matriz **A** fique

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{A}_{11}$ é uma matriz $(n-k)\times(n-k)$, $\mathbf{A}_{12}$ é uma matriz $(n-k)\times k$, $\mathbf{A}_{22}$ é uma matriz $k \times k$ e $\mathbf{0}$ representa uma matriz $k\times(n-k)$ de zeros.

Sraffa pressupõe, explicitamente, que todo sistema econômico contém pelo menos uma mercadoria básica.

Na exposição que se segue, sempre que for conveniente, vamos admitir que as equações referentes a mercadorias não-básicas já foram previamente separadas do sistema, de maneira que todas as mercadorias consideradas são básicas e, consequentemente, a matriz $\mathbf{A}$ é irredutível.

6. VALORES-TRABALHO, PREÇOS E A TAXA DE LUCRO

O valor-trabalho de uma mercadoria é o tempo de trabalho necessário à produção da mercadoria, incluindo tanto o trabalho diretamente empregado no processo de produção da mercadoria como todo o trabalho empregado em etapas anteriores na produção dos insumos utilizados nesse processo.[4]

Seja $\mathbf{v}$ o vetor-linha com os valores-trabalho por unidade de cada mercadoria. Então

$$\mathbf{vA} + \mathbf{b} = \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v}\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = \mathbf{b}$$

e

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} \tag{11}$$

O valor-trabalho do produto nacional líquido é $\mathbf{v}(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{q}$. Lembrando (11), verifica-se que:

valor-trabalho do produto líquido = $\mathbf{bq}$ = total de trabalho direto empregado

[4] Neste texto, ao nos referirmos a esse conceito, vamor utilizar sempre a expressão “valor-trabalho”, reservando a palavra “valor” para o valor monetário de uma mercadoria ou de um conjunto de mercadorias.

Vejamos, em seguida, qual é o vetor de preços no caso extremo em que a taxa de lucro é igual a zero. Com $\pi = 0$ a relação (8) fica

$$\mathbf{p}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)=\mathbf{b}w$$

ou

$$\mathbf{p}=\mathbf{b}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}w \tag{12}$$

Comparando (11) e (12) verifica-se que, com $\pi = 0$ os preços são proporcionais aos valores-trabalho (ou tempos de trabalho incorporados nas mercadorias). Particularmente, se $w = 1$ tem-se $\mathbf{p} = \mathbf{v}$.

No outro extremo temos $w = 0$ e $\pi = \Pi$, a taxa de lucro máxima. É claro que $w = 0$ representa uma situação hipotética que só pode ocorrer se w estiver sendo usado para indicar a participação dos trabalhadores no excedente, sendo as necessidades de subsistência consideradas nos coeficientes interindustriais. O vetor de preços para esse caso extremo será representado por $\mathbf{p}^*$. De acordo com (8), com $w = 0$ temos

$$\mathbf{p}^*\mathbf{A}(1+\Pi)=\mathbf{p}^*$$

ou

$$\mathbf{p}^*\mathbf{A}=\frac{1}{1+\Pi}\,\mathbf{p}^* \tag{13}$$

Isso mostra que $1/(1+\Pi)$ é uma raiz característica de $\mathbf{A}$ e que o correspondente vetor característico à esquerda é $\mathbf{p}^*$. Se $\mathbf{A}$

é irredutível, de acordo com os teoremas de Perron-Frobenius a única solução aceitável é $\lambda_m = 1/(1+\Pi)$, garantindo-se que **p*** > 0. Para que o sistema econômico seja viável devemos ter $\Pi > 0$ e , portanto, $\lambda_m < 1$, isto é, a raiz característica máxima de **A** deve ser menor do que 1.

Em geral, com $0 < \pi < \Pi$, temos

$$\mathbf{p}[\mathbf{I} - (1+\pi)\mathbf{A}] = \mathbf{b}w \tag{14}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{b}[\mathbf{I} - (1+\pi)\mathbf{A}]^{-1} w \tag{15}$$

ou

$$\mathbf{p} = \frac{1}{1+\pi}\mathbf{b}\left[\frac{1}{1+\pi}\mathbf{I} - \mathbf{A}\right]^{-1} w \tag{16}$$

Como $\lambda_m = \dfrac{1}{1+\Pi}$, com $\pi < \Pi$ temos $\dfrac{1}{1+\pi} > \lambda_m$ e $\left(\dfrac{1}{1+\pi}\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} \geq 0$, concluindo-se que todos os preços são não-negativos (todos são *positivos* se **A** for irredutível).

Vejamos, em seguida, como pode ser obtida uma equação para a relação entre o salário e a taxa de lucro, comumente denominada de relação *w-r* .

Se fizermos $p_1 = 1$ e pós-multiplicarmos (15) por $\mathbf{e_1}$ (a primeira coluna de uma matriz unitária), obtemos

$$1 = \mathbf{b}[\mathbf{I} - (\mathbf{1}+\pi)\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{e}_1 w \tag{17}$$

Essa expressão mostra, implicitamente, como w varia em função de π. Trata-se, em geral, de um polinômio de grau n em π.

Se **A** é irredutível todos os elementos de $[\mathbf{I}-(1+\pi)\mathbf{A}]^{-1}$ são funções contínuas e crescentes de π e podemos concluir que a relação entre w e π é uma função monotonicamente decrescente. Isso mostra que, *dada a técnica*, há um conflito de interesses entre assalaridados e os que recebem lucros.

Sraffa mostra como os preços das mercadorias podem ser reduzidos a "quantidades datadas de trabalho". Com $\pi < \Pi$ temos

$$1+\pi < 1+\Pi = \frac{1}{\lambda_m}$$

Então, a partir de (15) obtemos

$$\mathbf{p} = \mathbf{b}w + (1+\pi)\mathbf{bA}w + (1+\pi)^2\,\mathbf{bA}^2w + \ldots \tag{18}$$

Com $w = 1$ temos

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} + (1+\pi)\mathbf{bA} + (1+\pi)^2\mathbf{bA}^2 + \ldots \tag{19}$$

Notar que $w = 1$ pode ser obtido simplesmente escolhendo de maneira conveniente a unidade de tempo de trabalho.

De (11) obtemos

$$\mathbf{v} = \mathbf{b} + \mathbf{bA} + \mathbf{bA}^2 + \ldots \tag{20}$$

Tanto em (20) como em (19) aparecem as quantidades de trabalho direto (**b**) , aquelas diretamente empregadas no período anterior na produção dos meios de produção (**bA**) , aquelas diretamente empregadas dois períodos antes na produção dos meios de produção necessários à produção dos meios de produção ($\mathbf{bA}^2$) , e assim por diante. Em (20), para obtermos o vetor de valores-trabalho, essas quantidades de trabalho são simplesmente somadas. Em (19), para obter o vetor de preços, é necessário ponderar aquelas quantidades de trabalho por uma potência de $(1+\pi)$. É isso que Sraffa denomina de “quantidades datadas de trabalho”.

Antes de encerrar esta seção vamos ver como Pasinetti analisa os efeitos de uma mudança na taxa de lucro sobre os preços relativos. A j-ésima equação do sistema (8) é

$$(1+\pi)\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, p_i + b_j\, w = p_j$$

Com $w = 1$ obtemos

$$\frac{p_j}{p_1} = \frac{b_j + (1+\pi)\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, p_i}{b_1 + (1+\pi)\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\, p_i} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Temos

$$\frac{d}{d\pi}\left(\frac{p_j}{p_1}\right) = \frac{p_1 \dfrac{d\,p_j}{d\,\pi} - p_j \dfrac{d\,p_1}{d\,\pi}}{p_1^2}$$

Então o sinal de $\dfrac{d}{d\pi}\left(\dfrac{p_j}{p_1}\right)$ é igual ao sinal de

$$p_1 \frac{dp_j}{d\pi} - p_j \frac{dp_1}{d\pi} = p_1\, p_j \left(\frac{\sum_i a_{ij}\, p_i}{p_j} - \frac{\sum_i a_{i1}\, p_i}{p_1} \right) +$$

$$+ (1+\pi)\left(p_1 \sum_i a_{ij} \frac{d\, p_i}{d\pi} - p_j \sum_i a_{i1} \frac{d\, p_i}{d\pi} \right) \qquad (21)$$

No segundo membro dessa expressão, o primeiro dos dois termos será positivo ou negativo conforme a produção da j-ésima mercadoria seja ou não mais capital-intensiva do que a produção da mercadoria 1. Se a produção da j-ésima mercadoria for mais capital-intensiva pode-se dizer que, em geral, o preço relativo p_j / p_1 irá crescer com π. A afirmativa não pode ser mais conclusiva porque o sinal de (21) também depende do segundo termo e o resultado final pode inclusive ter sinal oposto ao do primeiro termo. Note-se que o segundo termo depende das variações que a alteração da taxa de lucro causa em todos os preços, o que, por sua vez, depende de toda a estrutura do sistema, e não apenas das características da produção das duas mercadorias cuja relação de preços está sendo analisada.

7. UM CASO PARTICULAR

Vamos examinar o que ocorre no caso muito particular de uma “técnica” em que o vetor **b** é um vetor característico à esquerda de **A**, correspondente à raiz característica λ_m . Vamos indicar esse particular vetor dos coeficientes de trabalho por **b*** . Então

$$\mathbf{b}^*\mathbf{A} = \lambda_m \mathbf{b}^* \qquad (22)$$

De acordo com (9), desenvolvendo $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, obtemos

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}^* + \mathbf{b}^*\mathbf{A} + \mathbf{b}^*\mathbf{A}^2 + \ldots \qquad (23)$$

De (22) segue-se que $\mathbf{b}^*\mathbf{A}^2 = \lambda_m^2 \mathbf{b}^*$, $\mathbf{b}^*\mathbf{A}^3 = \lambda_m^3 \mathbf{b}^*$, etc.

Substituindo esses resultados em (23), obtemos

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}^* + \lambda_m \mathbf{b}^* + \lambda_m^2 \mathbf{b}^* + \ldots$$

ou

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}^*\left(1 + \lambda_m + \lambda_m^2 + \cdots\right)$$

Como $\lambda_m = \dfrac{1}{1 + \Pi} < 1$, segue-se que

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}^* \frac{1}{1 - \lambda_m} = \mathbf{b}^* \frac{1 + \Pi}{\Pi} \qquad (24)$$

Esse resultado mostra que, nesse caso, os valores-trabalho são proporcionais aos tempos de trabalho direto.

Lembrando que $\mathbf{b}^*\mathbf{A} = \lambda_m \mathbf{b}^*$, $\mathbf{b}^*\mathbf{A}^2 = \lambda_m^2 \mathbf{b}^*$, etc., de (19) segue-se que

$$\mathbf{p} = \left[\mathbf{b}^* + (1+\pi)\lambda_m \mathbf{b}^* + (1+\pi)^2 \lambda_m^2 \mathbf{b}^* + \ldots\right] w$$

ou

$$\mathbf{p} = \mathbf{b}^* \left[1 + (1+\pi)\lambda_m + (1+\pi)^2 \lambda_m^2 + \ldots\right] w$$

Como $(1+\pi)\lambda_m = \dfrac{1+\pi}{1+\Pi} < 1$ se $\pi < \Pi$, temos

$$\mathbf{p} = \mathbf{b}^* \frac{w}{1 - \dfrac{1+\pi}{1+\Pi}} = \mathbf{b}^* \frac{1+\Pi}{\Pi - \pi} w \ , \qquad (25)$$

mostrando que neste caso muito particular os preços, da mesma maneira que os valores-trabalho, são proporcionais aos tempos de trabalho direto.

De (24) e (25) segue-se que

$$\mathbf{p} = \frac{\Pi w}{\Pi - \pi} \mathbf{v}, \qquad (26)$$

mostrando que neste caso os preços são proporcionais aos valores-trabalho. Em terminologia marxista, esse é o caso de composição orgânica do capital idêntica em todas as indústrias.

Quando $w = 0$ e $\pi = \Pi$ as relações (25) e (26) não se aplicam. Nesse caso o vetor de preços é $\mathbf{p}^*$ que, de acordo com (13) , é um vetor característico à esquerda de **A** correspondente à raiz característica λ_m . Uma vez que tanto $\mathbf{p}^*$ como $\mathbf{b}^*$ são vetores característicos de **A** correspondentes a λ_m , concluiu-se que $\mathbf{p}^*$ é proporcional a $\mathbf{b}^*$.

A relação (26) mostra que, neste caso particular, é possível escolher uma unidade monetária de tal maneira que

$$\mathbf{p} = \mathbf{v} \tag{27}$$

e, ao mesmo tempo,

$$\frac{\Pi\, w}{\Pi - \pi} = 1 \tag{28}$$

De (28) segue-se que

$$\pi = \Pi\,(1 - w) \tag{29}$$

Esse resultado mostra que a taxa de lucro (π) é uma função linear decrescente do salário (w) e que o salário máximo é $W = 1$.

Sabemos que o valor do produto líquido é $\mathbf{p}(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{q}$. Considerando (27) e (11) obtemos

valor do produto líquido = $\mathbf{b}^*\mathbf{q}$

Mas **b***q** é, também, o total de trabalho empregado. Conclui-se, novamente, que o salário máximo é igual a 1, pois então todo o produto líquido seria apropriado pelos trabalhadores.

É interessante ressaltar que o fato de **b*** ser um vetor característico à esquerda de **A**, correspondente à sua raiz característica máxima, faz com que **p** e **v** sejam proporcionais a **b*** e garante a *linearidade* da relação entre π e w. Essa linearidade *não* depende da unidade monetária escolhida.

8. O SISTEMA PADRÃO

Dado um sistema econômico cuja técnica de produção é caracterizada pelas matrizes **A** e **b**, o sistema padrão é um sistema econômico artificial que inclui as mesmas mercadorias básicas, combinando as respectivas indústrias em proporções tais que o produto líquido desse sistema é uma mercadoria composta com exatamente a mesma composição que o conjunto de insumos utilizados na produção.

Seja $\boldsymbol{\theta}$ o vetor-coluna com os n coeficientes que indicam a fração ou o múltiplo de cada indústria que irá compor o sistema padrão. O vetor-coluna de produções do sistema padrão será

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\theta}\,, \tag{30}$$

onde **D** é a matriz diagonal com as produções do sistema econômico dado, isto é,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q_n \end{bmatrix}$$

O vetor-coluna dos insumos utilizados no sistema padrão é, portanto,

$$\mathbf{Aq}^* = \mathbf{AD}\boldsymbol{\theta}$$

Indicando por $1 + R$ a relação entre produção e insumos no sistema padrão, devemos ter

$$\mathbf{AD\theta}\,(1 + R) = \mathbf{D\theta} \qquad (31)$$

Seja T o total de trabalho empregado no sistema econômico dado. Vamos impor que o sistema padrão empregue o mesmo total de trabalho:

$$\mathbf{bq}^* = \mathbf{bD\theta} = T \qquad (32)$$

As expressões (31) e (32) constituem um sistema de $n + 1$ equações com $n + 1$ incógnitas (os n elementos de $\boldsymbol{\theta}$ e R), tornando possível determinar o sistema padrão correspondente a um dado sistema econômico.

De (30) e (31) segue-se que

$$\mathbf{Aq}^*(1 + R) = \mathbf{q}^*$$

ou

$$\mathbf{Aq}^* = \frac{1}{1 + R}\,\mathbf{q}^* \qquad (33)$$

Isso mostra que $1/(1 + R)$ é uma raiz característica de $\mathbf{A}$ e que $\mathbf{q}^*$ é o correspondente vetor característico à direita. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz semipositiva irredutível, a única solução aceitável é aquela correspondente à raiz característica máxima de $\mathbf{A}$, isto é, devemos ter

$$\frac{1}{1 + R} = \lambda_m \tag{34}$$

Conclui-se, então, que $R = \Pi$.

De (33) e (34) segue-se que

$$\mathbf{A}\mathbf{q}^* = \lambda_m \mathbf{q}^* \tag{35}$$

Seja **y*** o vetor-coluna do produto líquido do sistema padrão. Temos que

$$\mathbf{y}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{q}^* \tag{36}$$

Lembrando (35) verifica-se que

$$\mathbf{y}^* = (1 - \lambda_m)\mathbf{q}^* \tag{37}$$

A cesta de produtos representada por **y*** é denominada *mercadoria padrão*.

A seguir vamos demonstrar que a taxa de lucro é uma função linear decrescente do salário sempre que a unidade monetária adotada for uma fração qualquer da mercadoria padrão. Para facilitar vamos adotar uma unidade monetária que torne o valor de **y*** numericamente igual ao total de trabalho empregado. Então, lembrando (37), temos

$$\mathbf{p}\,\mathbf{y}^* = (1 - \lambda_m)\mathbf{p}\mathbf{q}^* = T \tag{38}$$

De (8) , pós-multiplicando por **q*** , obtemos

$$\mathbf{pAq}^*(1+\pi)+\mathbf{bq}^* w=\mathbf{pq}^*$$

Lembrando (35) segue-se que

$$\mathbf{pq}^* \lambda_m(1+\pi)+\mathbf{bq}^* w=\mathbf{pq}^*$$

Lembrando (32) e (38) segue-se que

$$\mathbf{pq}^* \lambda_m(1+\pi)+(1-\lambda_m)\mathbf{pq}^* w=\mathbf{pq}^*$$

ou

$$\lambda_m(1+\pi)+(1-\lambda_m)w=1$$

Após algumas transformações algébricas obtemos

$$\pi=\frac{1-\lambda_m}{\lambda_m}(1-w)$$

Lembrando (34) conclui-se que

$$\pi=R(1-w) \tag{39}$$

Portanto, se for utilizada como unidade monetária a fração $1/T$ da mercadoria padrão (**y***) , o salário máximo é $W=1$ e a relação entre π e w corresponde, graficamente, a uma reta decrescente. Note-se que estamos nos referindo à relação entre π e w no sistema econômico original. O sistema padrão só é “construído”, teoricamente, para definir a mercadoria padrão.

De (35) e (37) segue-se que

$$\mathbf{A}\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^* \tag{40}$$

mostrando que $\mathbf{y}^*$, da mesma maneira que $\mathbf{q}^*$, é um vetor característico à direita de $\mathbf{A}$, associado à raiz característica λ_m .

De (18) , pós-multiplicando por $\mathbf{y}^*$ e lembrando (40), obtemos

$$\mathbf{p}\mathbf{y}^* = \mathbf{b}\mathbf{y}^* w + (1+\pi)\mathbf{b}\lambda_m \mathbf{y}^* w + (1+\pi)^2\, \mathbf{b}\lambda_m^2 \mathbf{y}^* w + \ldots$$

ou

$$\mathbf{p}\mathbf{y}^* = w\mathbf{b}\mathbf{y}^*\left[1+(1+\pi)\lambda_m+(1+\pi)^2\lambda_m^2+\ldots\right]$$

Lembrando (34) segue-se que

$$\mathbf{p}\mathbf{y}^* = w\mathbf{b}\mathbf{y}^*\left[1+\frac{1+\pi}{1+R}+\left(\frac{1+\pi}{1+R}\right)^2+\ldots\right] \tag{41}$$

ou

$$\mathbf{p}\mathbf{y}^* = w\mathbf{b}\mathbf{y}^*\frac{1+R}{R-\pi} \tag{42}$$

A expressão (41) mostra que os termos da série que constitui o valor da mercadoria padrão ($\mathbf{p}\mathbf{y}^*$) formam uma progressão geométrica com razão $(1+\pi)/(1+R)$.

Analogamente, de (20), pós-multiplicando por $\mathbf{y}^*$ e lembrando (40), obtemos

$$\mathbf{vy}^* = \mathbf{by}^*(1 + \lambda_m + \lambda_m^2 + \ldots) \qquad (43)$$

Esse resultado mostra que as quantidades de trabalho exigidas em cada etapa da produção da mercadoria padrão também constituem uma progressão geométrica, neste caso com razão $\lambda_m = 1/(1 + R)$.

Essa regularidade na distribuição do tempo de trabalho pelos vários estágios também é uma característica do caso particular em que a composição orgânica do capital é uniforme (ver seção anterior). A mercadoria padrão reproduz, *por construção*, em todos os estágios, a constância da proporção entre "capital" e trabalho que é uma característica daquele caso particular (Pasinetti, Lectures on the Theory of Production, p. 119).

De (43), lembrando (34), obtemos

$$\mathbf{vy}^* = \mathbf{by}^* \frac{1}{1 - \lambda_m} = \mathbf{by}^* \frac{1 + R}{R}$$

Lembrando (32) e (37) verifica-se que

$$\mathbf{vy}^* = T$$

e

$$\mathbf{vq}^* = T \frac{1 + R}{R} ,$$

ou seja, o valor-trabalho da produção do sistema padrão é um múltiplo $(1 + R) / R$ do total de trabalho direto empregado.

Cabe assinalar que na apresentação original de Sraffa o sistema padrão é uma etapa essencial do raciocínio que lhe permite concluir que o salário (w) é uma função decrescente da taxa de lucro (π). Aqui essa conclusão já foi obtida anteriormente com base nos teoremas de Perron-Frobenius, quando analisamos a relação (17).

9. SUBSISTEMAS

Consideremos um sistema econômico cuja técnica de produção é caracterizada pelas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ e cujo produto líquido é o vetor semipositivo

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{q}=\mathbf{y}=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

Vamos admitir que $\mathbf{y}$ tem h (como $h \leq n$) elementos positivos. Então o sistema pode ser subdividido em h partes, de tal maneira que cada parte forma um sistema menor cujo produto líquido consiste em apenas uma espécie de mercadoria. Sraffa denomina essas partes de *subsistemas*.

Seja $\boldsymbol{\theta}_i$ o vetor-coluna com as frações de cada indústria que irão constituir o i-ésimo subsistema, isto é, o subsistema cujo produto líquido é Y_i . Então o vetor-coluna das quantidades produzidas nesse subsistema é

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{D}\boldsymbol{\theta}_i \tag{44}$$

e devemos ter

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{q}_i = \mathbf{e}_i Y_i \tag{45}$$

onde $\mathbf{e}_i$ é a i-ésima coluna de uma matriz unitária $n \times n$.

Substituindo (44) em (45) obtemos

$$\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)\mathbf{D}\boldsymbol{\theta}_i = \mathbf{e}_i Y_i \tag{46}$$

Esse sistema de n equações permite determinar os elementos de $\boldsymbol{\theta}_i$ a partir de $\mathbf{A}$, $\mathbf{D}$ e Y_i.

De (45) segue-se que

$$\mathbf{q}_i = \left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{e}_i Y_i$$

Então o trabalho direto empregado nesse subsistema é igual a

$$\mathbf{bq}_i = \mathbf{b}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{e}_i Y_i$$

Lembrando (11) segue-se que

$$\mathbf{bq}_i = \mathbf{ve}_i Y_i$$

Esse resultado mostra que o trabalho direto empregado no subsistema é igual ao valor-trabalho do seu produto líquido. Uma vez que o produto líquido do subsistema é constituído por uma única mercadoria, e as demais indústrias apenas repõem os meios de produção utilizados, todo o trabalho empregado pode ser considerado como direta ou indiretamente aplicado naquela única mercadoria. Nas palavras de Sraffa, “em um subsistema, vemos de imediato, como um agregado, a mesma quantidade de trabalho que obtemos como a soma de uma série de termos quando percorremos os sucessivos estágios da produção de uma mercadoria".

Consideremos, como exemplo, um sistema econômico com apenas duas mercadorias, trigo e ferro, cujos métodos de produção são descritos pelo seguinte esquema, com trigo e ferro medidos em toneladas:

$$\begin{cases} 18\ \text{trigo} + \ \ 6\ \text{ferro} + 0{,}6\ \text{trabalho} \rightarrow \ 36\ \text{trigo} \\ 12\ \text{trigo} + 12\ \text{ferro} + 0{,}4\ \text{trabalho} \rightarrow \ 20\ \text{ferro} \end{cases}$$

Note-se que a unidade de medida do trabalho é tal que o total empregado é igual a 1. Verifica-se que o produto líquido é

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para obter o subsistema cujo produto líquido é igual a 6 toneladas de trigo devemos tomar uma fração θ_1 da primeira indústria e uma fração θ_2 da segunda, de maneira que

$$\begin{aligned} 36\,\theta_1 - \left(18\,\theta_1 + 12\,\theta_2\right) &= 6 \\ 20\,\theta_2 - \left(6\,\theta_1 + 12\,\theta_2\right) &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema de equações obtemos

$$\theta_1 = \frac{2}{3} \qquad \text{e} \qquad \theta_2 = \frac{1}{2}$$

Então o subsistema cujo produto líquido é igual a 6 toneladas de trigo é

$$\begin{cases} 12 \text{ trigo} + 4 \text{ ferro} + 0{,}4 \text{ trabalho} \rightarrow \ 24 \text{ trigo} \\ \ \ 6 \text{ trigo} + 6 \text{ ferro} + 0{,}2 \text{ trabalho} \rightarrow \ 10 \text{ ferro} \end{cases}$$

Para obter as 6 toneladas de trigo são empregadas, direta ou indiretamente, 0,6 unidades de trabalho. Então o valor-trabalho da tonelada de trigo é

$$v_1 = \frac{0{,}6}{6} = 0{,}1$$

O sistema cujo produto líquido é constituído por 2 toneladas de ferro pode ser obtido "subtraindo" do sistema econômico global o subsistema para trigo, obtendo-se

$$\begin{cases} 6 \text{ trigo} + 2 \text{ ferro} + 0{,}2 \text{ trabalho} \rightarrow 12 \text{ trigo} \\ 6 \text{ trigo} + 6 \text{ ferro} + 0{,}2 \text{ trabalho} \rightarrow 10 \text{ ferro} \end{cases}$$

Verifica-se que 0,4 unidades de trabalho são empregadas, direta e indiretamente, para obter o produto líquido de 2 toneladas de ferro. Então o valor-trabalho da tonelada de ferro é

$$v_2 = \frac{0{,}4}{2} = 0{,}2$$

É interessante verificar que os mesmos valores-trabalho são obtidos através da expressão (11). Para o sistema econômico dado temos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 \\ \frac{1}{6} & 0{,}6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{60} & \frac{1}{50} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}6 \\ -\frac{1}{6} & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ \frac{5}{3} & 5 \end{bmatrix}$$

e, finalmente,

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Exercícios 2

2.1. Considere o seguinte sistema econômico sraffiano com duas indústrias, A e B:

$4A + 8B + 0{,}2$ trabalho $\rightarrow 16A$

$4A + 4B + 0{,}8$ trabalho $\rightarrow 28B$

Determine:

a) o subsistema cujo produto líquido é formado exclusivamente por A.

b) o valor-trabalho por unidade de A.

c) o valor-trabalho por unidade de B .

d) a taxa de lucro máxima do sistema

e) o salário, em unidades de B por unidade de trabalho, quando a taxa de lucro é 20%.

2.2. Considere o seguinte sistema econômico sraffiano com duas indústrias, A e B :

$$6A + 6B + 0{,}8 \text{ trabalho} \rightarrow 210A$$

$$20A + 8B + 0{,}2 \text{ trabalho} \rightarrow 15B$$

Determine:

a) o sistema padrão (mantendo o total de trabalho igual a 1)

b) a taxa de lucro máxima

c) a relação entre o salário (w) e a taxa de lucro (π) para o sistema, utilizando uma unidade monetária tal que o valor da mercadoria padrão (produto líquido do sistema padrão) seja igual a 1.

2.3. Considere um sistema econômico sraffiano cuja técnica de produção é caracterizada pelas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$. Temos

$$\mathbf{vA} + \mathbf{b} = \mathbf{v}$$

e

$$\mathbf{Aq} + \mathbf{y} = \mathbf{q}$$

onde **v** é o vetor-linha dos valores-trabalho, **q** é o vetor-coluna das produções e **y** é o vetor-coluna das produções líquidas.

Compare os resultados obtidos pós-multiplicando a primeira equação por **q** e pré-multiplicando a segunda equação por **v**, concluindo que o valor-trabalho do produto líquido é igual ao trabalho total diretamente empregado em um período de produção. De acordo com Rosinger (1984, p. 1463), essas relações mostram a *dualidade* entre valores e quantidades físicas.

2.4. Considere um sistema econômico sraffiano com apenas duas mercadorias: A e B. Com 5 unidades de B e 25 unidades de trabalho são produzidas 50 unidades de A. Com 40 unidades de A e 4 unidades de trabalho são produzidas 8 unidades de B.

a) Determine o produto líquido do sistema.

b) Determine o subsistema cujo produto líquido é constituído exclusivamente pela mercadoria A.

c) Determine os valores-trabalho por unidade de cada mercadoria.

d) Adotando uma unidade monetária tal que $p_A = 1$, determine o salário (w), a taxa de lucro (π) e p_B, sabendo que a remuneração total do trabalho é igual a 80% do valor monetário do produto líquido.

2.5. Vamos considerar uma economia com 4 indústrias onde os salários são pagos no fim do período de produção, ou seja, o montante de salários não faz parte do capital empatado. Na notação usual, são dadas as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 2{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

a) Com base na matriz **A** , classifique cada uma das 4 mercadorias como básica ou não-básica, justificando (sumariamente) sua classificação.

b) Determine a taxa de lucro máxima do sistema.

2.6. Considere o seguinte sistema econômico sraffiano com duas indústrias, A e B:

$16A + 24B + 0{,}8$ trabalho $\rightarrow 224A$

$24A + 12B + 0{,}2$ trabalho $\rightarrow 36B$

Determine:

a) os valores-trabalho por unidade de A e B.

b) um subsistema cujo produto líquido seja $138B$.

c) o sistema padrão.

d) a taxa de lucro máxima.

e) a taxa de lucro quando o salário for igual a $92A$ por unidade de trabalho.

2.7. Considere um sistema econômico com 4 mercadorias onde as relações entre preços (**p**), salário (w) e taxa de lucro (π) sejam dadas por

$$\mathbf{pA}(1 + \pi) + w\mathbf{b} = \mathbf{p}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Qual é a taxa de lucro máxima nessa economia?

b) Qual é o salário, medido em unidades da mercadoria 3, quando $\pi = 0{,}2$?

Sugestão: Na matriz **A ,** troque a ordem das mercadorias 1 e 3.

2.8. São dadas as seguintes condições técnicas, referentes a certo sistema econômico:

12 homens com 1 t de aço produzem 4 t de ferro

32 homens com 4 t de ferro produzem 4 t de aço

10 homens com 3 t de aço produzem 100 t de pão

Seja π a taxa de lucro e w o nível do salário. Considere um modelo sraffiano, onde os lucros são calculados apenas sobre o valor dos meios de produção. Obtenha a relação w-π e verifique se ela é côncova ou convexa em relação à origem. Faça, também, um gráfico dessa relação. (Exemplo de Robinson e Eatwell, 1973, pp.184-195).

2.9. Para um sistema econômico com 3 mercadorias, na notação de Sraffa, temos:

$$
\begin{array}{lllll}
A_a = 5 & B_a = 5 & C_a = 0 & L_a = 6 & A = 20 \\
A_b = 5 & B_b = 1 & C_b = 0 & L_b = 10 & B = 6 \\
A_c = 2 & B_c = 0 & C_c = 7 & L_c = 7 & C = 14
\end{array}
$$

a) Determine o subsistema cujo produto líquido é constituído apenas pela mercadoria A .

b) Determine o sistema padrão de maneira que o trabalho total empregado seja o mesmo do sistema original.

c) Qual é a taxa de lucro máxima no sistema dado?

2.10. Considere um sistema econômico com 4 mercadorias onde as relações entre preços ($\mathbf{p}$) , salário (w) e taxa de lucro (π) sejam dadas por

$$\mathbf{pA}(1 + \pi) + w\mathbf{b} = \mathbf{p}$$

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix}
$$

a) Classifique as mercadorias como básicas ou não básicas.

b) Determine a taxa de lucro máxima nessa economia.

Sugestão: Troque a ordem das mercadorias 1 e 4.

10. INTRODUÇÃO A MODELOS DE PRODUÇÃO DINÂMICOS

Vamos examinar o que ocorre em um sistema econômico ao longo do tempo, admitindo que a população cresce mas a tecnologia e as preferências dos consumidores se mantêm constantes. O “dinamismo” é tão simples que se fala em modelo *quase dinâmico* (ou *pseudodinâmico*). Seja $N(t)$ a população no ano t e seja g a sua taxa de crescimento. Então

$$N(t) = N(0)(1 + g)^t \tag{47}$$

Vamos admitir que a força de trabalho (T) é proporcional à população, isto é,

$$T(t) = \mu N(t)$$

Segue-se que

$$T(t) = T(0)\,(1 + g)^t$$

Seja $\mathbf{q}(t)$ o vetor-coluna das produções no ano t e seja $\mathbf{y}(t)$ o vetor-coluna do correspondente produto líquido. Então

$$\mathbf{q}(t) - \mathbf{Aq}(t) = \mathbf{y}(t)$$

Para que haja pleno emprego devemos ter

$$\mathbf{bq}(t) = T(t) = \mu N(t) \tag{48}$$

Seja $\mathbf{c}$ o vetor-coluna do consumo *per capita*, que se supõe constante. O consumo no ano t é $\mathbf{c}N(t)$.

Para que o volume de insumos cresça na mesma proporção que a força de trabalho, o investimento no ano t deve ser igual a $g\mathbf{Aq}(t)$. Uma vez que o produto líquido deve ser dividido entre consumo e investimento, devemos ter

$$\mathbf{q}(t) - \mathbf{Aq}(t) = g\mathbf{Aq}(t) + \mathbf{c}N(t) \tag{49}$$

ou

$$\mathbf{q}(t) = [\mathbf{I} - (1+g)\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{c}N(t) \tag{50}$$

Lembrando (47) segue-se que

$$\mathbf{q}(t) = [\mathbf{I} - (1+g)\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{c}N(0)(1+g)^t \tag{51}$$

mostrando que todos os elementos de $\mathbf{q}(t)$ crescem com taxa igual a g .

Substituindo (50) em (48) obtemos

$$\mathbf{b}[\mathbf{I} - (1+g)\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{c}N(t) = T(t) \tag{52}$$

As relações (50) e (52) constituem um sistema de $n + 1$ equações que devem ser obedecidas para que haja crescimento com pleno emprego. Se considerássemos como dadas as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ (a técnica de produção), g , $N(t)$ e $\mathbf{c}$, teríamos apenas os n elementos de $\mathbf{q}(t)$ como incógnitas. Na realidade, o vetor $\mathbf{c}$ não pode ser livremente escolhido. Pelo menos um dos elementos de

$\mathbf{c}$ deve ser considerado como incógnita. Uma alternativa seria considerar como dado um vetor $\boldsymbol{\gamma}$ que estabecesse a proporcionalidade entre os elementos de $\mathbf{c}$, fazendo $\mathbf{c} = \omega\boldsymbol{\gamma}$, e deixando o coeficiente ω como incógnita.

Seja $\overline{\mathbf{q}}$ o vetor-coluna das produções *per capita*. De acordo com (50) temos

$$\overline{\mathbf{q}} = \frac{1}{N(t)}\mathbf{q}(t) = \left[\mathbf{I} - (1+g)\,\mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{c} \tag{53}$$

Desde que a mesma moeda seja mantida ao longo do tempo (não ocorrendo inflação ou deflação), os preços se mantém constantes e temos, para todo t,

$$\mathbf{pA}(1+\pi) + \mathbf{b}w = \mathbf{p}$$

ou

$$\mathbf{p} = \mathbf{b}\left[\mathbf{I} - (1+\pi)\mathbf{A}\right]^{-1} w$$

Com $w = 1$ temos

$$\mathbf{p} = \mathbf{b}\left[\mathbf{I} - (1+\pi)\,\mathbf{A}\right]^{-1} \tag{54}$$

Note-se a simetria (dualidade) entre as expressões (53) e (54).

Vamos fixar em zero o valor dos $n-1$ últimos elementos de $\mathbf{c}$, obtendo

$$\mathbf{c}^{(1)} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

De (51), pré-multiplicando por $\mathbf{b}$, obtemos

$$\frac{1}{N(t)}\mathbf{bq}(t) = \mathbf{b}\left[\mathbf{I} - (1+g)\mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{c}^{(1)}$$

Lembrando (48) segue-se que

$$1 = \mathbf{b}\left[\mathbf{I} - (1+g)\mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{c}^{(1)}\mu^{-1} \tag{55}$$

Comparando essa expressão com (17), verifica-se que a relação entre c_1/μ e g tem exatamente a mesma forma que a relação entre w e π. Portanto, se $\mathbf{A}$ é uma matriz semipositiva irredutível, c_1 é uma função monotonicamente decrescente de g. Dada a técnica de produção, uma taxa de crescimento maior implica em menor consumo *per capita*.

A taxa de crescimento máxima (G) é obtida com $\mathbf{c} = 0$. Nesse caso, de acordo com (49), temos

$$\mathbf{Aq}(t) = \frac{1}{1+G}\mathbf{q}(t)$$

Então, de acordo com os teoremas de Perron-Frobenius, devemos ter

$$\frac{1}{1+G} = \lambda_m$$

e concluimos que

$$G = \Pi = R \tag{56}$$

A seguir vamos procurar entender melhor como as produções das diversas indústrias deverão se ajustar para atender a determinada necessidade de investimento e consumo.

A taxa de excedente físico para cada mercadoria é

$$R_i = \frac{Y_i}{Q_i - Y_i}$$

Então

$$Y_i = R_i \sum_j a_{ij} Q_j \tag{57}$$

De acordo com (49), e omitindo, por simplicidade, o índice t, temos

$$\mathbf{y} = g\mathbf{Aq} + \mathbf{c}N$$

ou

$$Y_i = g \sum_j a_{ij} Q_j + c_i N, \tag{58}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Comparando (57) e (58), verifica-se que, como $\mathbf{c} \geq 0$, a taxa de crescimento g não pode ultrapassar o menor dos R_i.

O menor dos R_i pode, em geral, ser aumentado alterando-se as proporções entre as produções dos setores. Para isso a produção do setor limitante é aumentada, diminuindo, simultaneamente, a produção de algum setor, de maneira a manter o pleno emprego. Se $\mathbf{c} = 0$ esse tipo de ajustamento na produção dos setores pode ser feito até tornar todos os R_i iguais a $R = G$, a taxa de crescimento máxima.

11. O MODELO MARXISTA [5]

Uma das características do modelo de Sraffa é o fato de o salário não ser fixado. O produto líquido é dividido entre salários e lucro e o número de incógnitas no sistema supera, em uma unidade, o número de equações. O sistema pode mover-se com um grau de liberdade.

Nesta seção vamos admitir que o salário é regulado pelas necessidades de consumo do trabalhador e de sua família, de acordo com o pensamento econômico clássico e marxista. Para Marx a *força de trabalho* é uma mercadoria cujo valor-trabalho é igual ao valor-trabalho da cesta de mercadorias necessária para a sobrevivência do trabalhador e de sua família, incluindo elementos histórica e culturalmente condicionados.

Já vimos que, se $\mathbf{v}$ é o vetor-linha dos valores-trabalho por unidade de cada mercadoria, temos

$$\mathbf{vA} + \mathbf{b} = \mathbf{v} \tag{59}$$

e

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \tag{60}$$

[5] Cabe mencionar Medio (1972) como um trabalho pioneiro utilizando algumas idéias de Sraffa para construir um modelo marxista de uma economia capitalista.

Seja **d** o vetor-coluna que mostra a composição física da cesta de mercadorias consumida por trabalhador (e sua família) por unidade de tempo de trabalho. Então o valor da força de trabalho por unidade de tempo é

$$\delta = \mathbf{vd} \tag{61}$$

Para que exista mais-valia (distribuída como lucro e/ou renda da terra) devemos ter

$$\delta < 1$$

A relação (59) pode ser escrita

$$\mathbf{vA} + \delta\mathbf{b} + (1 - \delta)\mathbf{b} = \mathbf{v} \tag{62}$$

que, considerando uma unidade de cada mercadoria, equivale a

(capital constante) + (capital variável) + (mais-valia) = (valor total)

A taxa de mais-valia é

$$\sigma = \frac{1 - \delta}{\delta} \tag{63}$$

De (61) e (63) segue-se que

$$\mathbf{vd}(1 + \sigma) = 1 \tag{64}$$

A partir de (61), (62) e (63) obtemos

$$\mathbf{vA} + \mathbf{vdb} + \sigma\mathbf{vdb} = \mathbf{v} \tag{65}$$

Se o vetor-coluna das quantidades produzidas no sistema econômico é $\mathbf{q}$, então $\mathbf{vAq}$ é o capital constante total, $\mathbf{vdbq}$ é o capital variável total e $\sigma\mathbf{vdbq}$ é o total de mais-valia.

De (65) segue-se que

$$(1+\sigma)\mathbf{vdb} = \mathbf{v}(\mathbf{I}-\mathbf{A}) \tag{66}$$

ou

$$\mathbf{vdb}\,(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{1+\sigma}\,\mathbf{v} \tag{67}$$

Esse resultado mostra que $1/(1+\sigma)$ é uma raiz característica da matriz $\mathbf{d}\,\mathbf{b}\,(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ e que $\mathbf{v}$ é o respectivo vetor característico à esquerda. Mas $\mathbf{d}\,\mathbf{b}$, como um produto de vetores, é uma matriz com característica igual a 1. Consequentemente $\mathbf{d}\,\mathbf{b}\,(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ também tem característica igual a 1, isto é, tem apenas uma raiz característica diferente de zero, que será igual a $1/(1+\sigma)$.

De (66) segue-se que

$$\mathbf{v}\left[\mathbf{I}-\mathbf{A}-(1+\sigma)\mathbf{db}\right]=\mathbf{0}$$

ou

$$\mathbf{v}\left[\frac{1}{1+\sigma}\,\mathbf{I}-\left(\frac{1}{1+\sigma}\,\mathbf{A}+\mathbf{db}\right)\right]=\mathbf{0}$$

Para que esse sistema de equações lineares homogêneas tenha outras soluções além da trivial, devemos ter

$$\left|\frac{1}{1+\sigma}\mathbf{I}-\left(\frac{1}{1+\sigma}\mathbf{A}+\mathbf{db}\right)\right|=0 \tag{68}$$

Vamos considerar, em seguida, a determinação dos preços de produção. Cabe ressaltar que, diferentemente do que faz Sraffa, e de acordo com Marx, o montante de salários pagos é considerado parte do capital empatado. Então, se $\mathbf{p}$ é o vetor-linha dos preços e π é a taxa de lucro, temos

$$(\mathbf{pA}+w\mathbf{b})(1+\pi)=\mathbf{p} \tag{69}$$

com

$$w=\mathbf{pd} \tag{70}$$

Então

$$(\mathbf{pA}+\mathbf{pdb})(1+\pi)=\mathbf{p} \tag{71}$$

ou

$$\mathbf{p}\left[\frac{1}{1+\pi}\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{db})\right]=\mathbf{0}$$

Essa relação mostra que $1/(1+\pi)$ é uma raiz característica da matriz

$$\mathbf{A}^{+}=\mathbf{A}+\mathbf{db} \tag{72}$$

e que $\mathbf{p}$ é o respectivo vetor característico à esquerda.

Se $\mathbf{A}$ é uma matriz semipositiva irredutível, $\mathbf{A}^+$ também é semipositiva e irredutível.

Então $1/(1 + \pi)$ deve ser igual à maior raiz característica de $\mathbf{A}^+$, isto é,

$$\frac{1}{1 + \pi} = \lambda_m^+ \tag{73}$$

A correspondente equação característica é

$$\left| \frac{1}{1+\pi} \mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{db}) \right| = 0 \tag{74}$$

Comparando (68) e (74) e lembrando que a raiz característica máxima de uma matriz semipositiva irredutível é uma função contínua e crescente dos valores dos elementos da matriz, conclui-se que, se $\mathbf{A}$ é semipositiva e irredutível e $\sigma > 0$, temos

$$\sigma > \pi \tag{75}$$

Se o valor de σ que satisfaz (68) [e (67)] for $\sigma = 0$, então a solução para (74) será π = 0, isto é, teremos $\pi = \sigma = 0$. Excluindo esse caso especial teremos $\lambda_m^+ < 1$ e $\sigma > \pi > 0$. A afirmativa de que "a taxa de lucro é positiva se e somente se a taxa de mais-valia for positva" é o *teorema marxista fundamental* de Morishima.

De (71) segue-se que

$$\mathbf{pA}(1+\pi\ )+\mathbf{pdb}(1+\pi\ )=\mathbf{p} \tag{76}$$

Vamos adotar uma unidade monetária de tal maneira que, analogamente a (64), tenhamos

$$\mathbf{pd}(1+\sigma)=\ 1 \tag{77}$$

Isso significa que a quantidade da “cesta” $\mathbf{d}$ com valor-trabalho igual a 1 também terá valor monetário igual a 1. Lembrando (70) verifica-se que a condição (77) corresponde a

$$w(1+\sigma\ )=1 \qquad \text{ou} \qquad \sigma=\frac{1-w}{w}$$

Substituindo (77) em (76) obtemos

$$\mathbf{pA}(1+\pi\ )+\frac{1+\pi}{1+\sigma}\mathbf{b}=\mathbf{p}$$

ou

$$\mathbf{p}[(\mathbf{I}-\mathbf{A})-\pi\ \mathbf{A}]=\frac{1+\pi}{1+\sigma}\mathbf{b}$$

Pós-multiplicando por $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ e lembrando (60), obtemos

$$\mathbf{p}\left[\mathbf{I}-\pi\ \mathbf{A}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]=\frac{1+\pi}{1+\sigma}\mathbf{v}$$

ou

$$\mathbf{p}=\frac{1+\pi}{1+\sigma}\mathbf{v}\left[\mathbf{I}-\pi\ \mathbf{A}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]^{-1} \tag{78}$$

Essa expressão mostra a transformação de valores ($\mathbf{v}$) em preços de produção ($\mathbf{p}$), tema de muita controvérsia na história do pensamento econômico. Voltaremos a esse tema depois de deduzir uma relação entre a taxa de lucro e a taxa de mais-valia.

De (65) e (72) obtemos

$$\mathbf{vA}^{+} + \sigma\mathbf{vdb} = \mathbf{v} \tag{79}$$

Verifica-se que $\mathbf{vA}^{+}$ é o vetor-linha com os valores-trabalho do capital em cada indústria (incluindo tanto o capital constante como o capital variável) e que $\sigma\mathbf{vdb}$ é o vetor-linha com os montantes da mais-valia criada em cada indústria, por unidade de produto.

Se $\mathbf{A}^{+}$ é uma matriz semipositiva irredutível, os teoremas de Perron-Frobenius nos garantem que o vetor característico à direita associado à raiz característica máxima de $\mathbf{A}^{+}$ é positivo, isto é, temos

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{x} = \lambda_m^{+}\mathbf{x} \tag{80}$$

com $\mathbf{x} > 0$. Para que $\mathbf{x}$ fique determinado é necessário estabelecer alguma restrição como, por exemplo, fixar em 1 o seu primeiro elemento.

Pós-multiplicando (79) por $\mathbf{x}$ obtemos

$$\mathbf{vA}^{+}\mathbf{x} + \sigma\mathbf{vdbx} = \mathbf{vx} \tag{81}$$

De (80), pré-multiplicando por $\mathbf{v}$ e lembrando (73), obtemos

$$(1+\pi)\mathbf{vA}^{+}\mathbf{x}=\mathbf{vx}$$

Comparando esse resultado com (81) verifica-se que

$$(1+\pi)\mathbf{vA}^{+}\mathbf{x}=\mathbf{vA}^{+}\mathbf{x}+\sigma\mathbf{vdbx}$$

ou

$$\pi\mathbf{vA}^{+}\mathbf{x}=\sigma\mathbf{vdbx}$$

ou, finalmente,

$$\pi=\sigma\frac{\mathbf{vdbx}}{\mathbf{vA}^{+}\mathbf{x}} \tag{82}$$

Sabemos que $\mathbf{vdb}$ é o vetor-linha com os valores do capital variável em cada indústria, por unidade de produto e que $\mathbf{vdbq}$ é o capital variável total na economia. Então $\mathbf{vdbx}$ é uma soma ponderada daqueles valores de capital variável por unidade de produto, que corresponde ao capital variável total em uma economia artificial onde as produções das n indústrias fossem proporcionais aos elementos de $\mathbf{x}$. Analogamente, $\mathbf{vA}^{+}\mathbf{x}$ é o valor-trabalho de todo o capital (constante e variável) empatado nessa economia. Note-se que, na expressão (82), só interessa a proporcionalidade entre os elementos de $\mathbf{x}$, pois multiplicando numerador e denominador da fração por uma constante podemos alterar os valores absolutos desses elementos.

Marx, nos seus exemplos numéricos de transformação de valores de preços de produção, utilizou a relação

$$\text{taxa de lucro} = \frac{m}{c+v} = \frac{\frac{m}{v}}{1+\frac{c}{v}} \tag{83}$$

onde m, c e v representam, respectivamente, a mais-valia, o capital constante e o capital variável na economia. Essa relação é equivalente a

$$\text{taxa de lucro} = \frac{m}{v} \cdot \frac{v}{c+v}$$

ou

$$\text{taxa de lucro} = \sigma \frac{v}{c+v} \tag{84}$$

Essa relação só corresponde exatamente à relação (82) se $\mathbf{x} = \mathbf{q}$ ou se a composição orgânica for a mesma em todas as indústrias, isto é, se for sempre a mesma a relação entre os elementos de **vdb** (capital variável) e os elementos correspondentes de $\mathbf{vA}^{+}$ (capital total), pois neste caso o resultado não é afetado pelos fatores de ponderação (os elementos de **x**)[6].

---

[6] Ver Possas (1982). Esse trabalho faz uma interessante distinção entre preços de produção e preços de reprodução.
Sobre a determinação dos valores-trabalho e sua transformação em preços de produção, ver os artigos de Gontijo listados na bibliografia.

As relações (78) e (82) mostram como as variáveis fundamentais das análises marxista, os valores-trabalho (**v**) e a taxa de mais-valia (σ), de um lado, se transformam, no outro lado, nas variáveis taxa de lucro (π) e preços de produção (**p**) , no domínio dos valores monetários. Pode-se dizer que, na análise marxista, **v** e σ estão em um nível de abstração mais elevado do que **p** e π, da mesma maneira que, na Física, o conceito de massa é mais abstrato do que o conceito de peso.

12. COMPOSIÇÃO ORGÂNICA UNIFORME

Nesta seção vamos analisar o caso especial de um sistema econômico no qual a composição orgânica do capital é a mesma em todas as indústrias. Neste caso temos

$$\mathbf{vA} = \gamma\mathbf{vdb} \tag{85}$$

onde γ é uma constante, **vA** é o vetor-linha dos capitais constantes e **vdb** é o vetor-linha dos capitais variáveis.

Substituindo (85) em (65) obtemos

$$\gamma\mathbf{vdb} + \mathbf{vdb} + \sigma\mathbf{vdb} = \mathbf{v}$$

ou $$\mathbf{vdb} = \frac{1}{1+\gamma+\sigma}\mathbf{v} \tag{86}$$

Substituindo esse resultado em (85) obtemos

$$\mathbf{v\,A} = \frac{\gamma}{1+\gamma+\sigma}\mathbf{v} \tag{87}$$

Somando (86) e (87) membro-a-membro e lembrando que $\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A} + \mathbf{db}$, obtemos

$$\mathbf{v\,A}^{+} = \frac{1+\gamma}{1+\gamma+\sigma}\mathbf{v} \tag{88}$$

Esse resultado mostra que $(1 + \gamma) / (1 + \gamma + \sigma)$ é uma raiz característica de $\mathbf{A}^{+}$ e que **v** é o correspondente vetor característico à esquerda. De acordo com os teoremas de Perron-

Frobenius, se $\mathbf{A}^+$ é uma matriz semipositiva irredutível, somente o vetor característico correspondente à raiz característica máxima não tem nenhum elemento negativo (e é positivo). Então devemos ter

$$\frac{1+\gamma}{1+\gamma+\sigma}=\lambda_m^+$$

Lembrando as deduções de (71) a (73), verifica-se que, no caso particular em que a composição orgânica do capital é uniforme, tanto $\mathbf{p}$ como $\mathbf{v}$ são vetores característicos à esquerda de $\mathbf{A}^+$ associados à sua raiz característica máxima.

$$\lambda_m^+=\frac{1}{1+\pi}=\frac{1+\gamma}{1+\gamma+\sigma}$$

Conclui-se que, nesse caso, os preços de produção são proporcionais aos valores-trabalho e

$$\pi=\frac{\sigma}{1+\gamma} \tag{89}$$

Note-se que esse resultado corresponde exatamente à relação (83) de Marx. Mas a relação (89) foi obtida pressupondo que a composição orgânica é a mesma em todas as indústrias e Marx admitiu, erroneamente, que a relação (83) fosse válida em geral.

13. CRESCIMENTO COM INVESTIMENTO DE TODO O LUCRO

Da mesma maneira que no capítulo 10, vamos considerar um modelo pseudodinâmico, em que a técnica de produção se mantêm a mesma e todas as indústrias crescem com a mesma taxa θ. Em um modelo marxista, para que a produção seja exatamente suficiente para repor o capital constante e o capital variável utilizados e, ao mesmo tempo, permita novos investimentos que façam esses capitais crescerem com taxa θ, devemos ter

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{q}(1+\theta)=\mathbf{q} \tag{90}$$

Cabe ressaltar que estamos considerando uma situação hipotética em que toda a produção se destina à reposição dos capitais (incluindo o consumo dos trabalhadores, que é igual ao capital variável) e aos novos investimentos. Não há consumo dos capitalistas, isto é, todo o lucro é investido. Os capitalistas exercem apenas sua função essencial: acumular capital.

De (90) segue-se que

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{q}=\frac{1}{1+\theta}\mathbf{q} \tag{91}$$

Esse resultado mostra que $1/(1+\theta)$ é uma raiz característica de $\mathbf{A}^{+}$ e $\mathbf{q}$ é o correspondente vetor característico à direita. Lembrando os teoremas de Perron-Frobenius, conclui-se que

$$\frac{1}{1 + \theta} = \lambda_m^+ \tag{92}$$

Comparando (73) e (92) verifica-se que $\theta = \pi$, isto é, a taxa de crescimento é idêntica à taxa de lucro.

Note-se que tanto o vetor **x** definido em (80) como o vetor **q** em (91) são vetores característicos à direita de $\mathbf{A}^+$, correspondentes à sua raiz característica máxima (λ_m^+). Então esses vetores-coluna são proporcionais entre si e a dedução feita para chegar a (82) pode ser repetida, com **q** em lugar de **x**, obtendo-se

$$\pi = \sigma \frac{\mathbf{vdbq}}{\mathbf{vA^+q}}$$

Lembrando que $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} + \mathbf{db}$ segue-se que

$$\pi = \sigma \frac{\mathbf{vdbq}}{\mathbf{vdbq} + \mathbf{vAq}}$$

ou

$$\pi = \frac{\sigma}{1 + \dfrac{\mathbf{vAq}}{\mathbf{vdbq}}} \tag{93}$$

Essa relação mostra, para o caso especial do modelo pseudodinâmico analisado, a relação entre a taxa de lucro (π), a taxa de mais-valia (σ) e a composição orgânica na economia como um todo, dada por

$$\gamma = \frac{\mathbf{vAq}}{\mathbf{vdbq}} = \frac{\text{capital constante}}{\text{capital variável}}$$

Note-se que a expressão (93) corresponde exatamente à relação (83) de Marx, da mesma maneira que a expressão (89). Há, portanto, duas situações particulares em que aquela relação de Marx é exatamente válida: o caso da composicão orgânica uniforme, analisado na seção anterior, e o caso do modelo de crescimento pseudodinâmico com investimento de todo o lucro analisado nesta seção.

Vejamos como a composição orgânica na economia como um todo (γ) se relaciona com as composições orgânicas em cada indústria. Seja ω_i o i-ésimo elemento do vetor-linha $\mathbf{vA}$. Então a composição orgânica na i-ésima indústria é

$$\gamma_i = \frac{\omega_i Q_i}{\mathbf{vd}b_i Q_i} = \frac{\omega_i}{\mathbf{vd}b_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

onde b_i representa o i-ésimo elemento de $\mathbf{b}$. Verifica-se que

$$\gamma = \frac{\sum_i \gamma_i b_i Q_i}{\sum_i b_i Q_i} \quad , \tag{94}$$

mostrando que a composição orgânica global é uma média ponderada das composições orgânicas em cada indústria, ponderadas pela mão-de-obra diretamente empregada (ou pelo valor do capital variável) em cada indústria.

14. EXEMPLO NUMÉRICO

Nesta seção vamos analisar pormenorizadamente um exemplo numérico de uma “economia” com 3 setores (ou 3 indústrias), utilizando os conceitos e a notação apresentados no capítulo 11 (o modelo marxista).

São dadas as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

Observa-se que a mercadoria 2 (produto da segunda indústria) não é consumida pelos trabalhadores.

Obtemos

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A} + \mathbf{db} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

A correspondente equação característica é

$$\left| \mathbf{A}^{+} - \lambda \mathbf{I} \right| = 0$$

ou

$$\lambda^3 - 0{,}4\,\lambda^2 - 0{,}05\,\lambda = 0$$

cujas raízes são $-0{,}1$, 0 e $0{,}5$. Então a raiz característica máxima é

$$\lambda_m^+ = 0{,}5$$

Como $\lambda_m^+ = \dfrac{1}{1 + \pi}$, obtemos

$$\pi = 1 \quad \text{ou} \quad 100\%$$

O vetor-linha de preços (**p**) é um vetor característico à esquerda de $\mathbf{A}^+$ correspondente à raiz característica máxima. Então

$$\mathbf{pA}^+ = \lambda_m^+ \mathbf{p}$$

ou

$$\mathbf{p}\left(\mathbf{A}^+ - \lambda_m^+ \mathbf{I}\right) = \mathbf{0}$$

ou

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & -0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Das duas primeiras equações segue-se que $p_2 = p_1$ e $p_3 = 2\,p_1$. Fazendo $p_1 = 1$ (que corresponde a utilizar a mercadoria 1 como moeda), obtemos

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

O salário é

$$w = \mathbf{pd} = 3$$

O vetor-linha dos valores-trabalho por unidade de cada mercadoria [ver (60)] é

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

Para este exemplo numérico temos

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & 1 & -0{,}2 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{789}\begin{bmatrix} 880 & 30 & 300 \\ 90 & 810 & 210 \\ 10 & 90 & 900 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{v} = \frac{1}{789}\begin{bmatrix} 98 & 93 & 141 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1242 & 0{,}1179 & 0{,}1787 \end{bmatrix}$$

Então o valor-trabalho da unidade de força de trabalho é

$$\delta = \mathbf{vd} = \frac{239}{789} = 0{,}3029$$

e a taxa de mais-valia é

$$\sigma = \frac{1 - \delta}{\delta} = \frac{550}{239} = 2{,}301$$

Vamos admitir que a economia está crescendo proporcionalmente (todos os setores crescem com a mesma taxa) e com investimento de todo o lucro. Então, de acordo com (91) e (92), temos

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{q} = \lambda_m^{+}\mathbf{q}$$

ou

$$\left(\mathbf{A}^{+} - \lambda_m^{+}\ \mathbf{I}\right)\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Das duas primeiras equações desse sistema obtemos

$$q_1 = \frac{11}{5} q_2 \quad \text{e} \quad q_3 = \frac{7}{5} q_2$$

Vamos fixar em 50 a produção do setor 2. Então o vetor-coluna das produções é

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 110 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix}$$

O número de unidades de trabalho empregadas na economia é $\mathbf{bq} = 23$, sendo 11 no setor 1, 5 no setor 2 e 7 no setor 3.

As tabelas a seguir mostram o sistema econômico sob vários ângulos.

Tabela 4. Os fluxos físicos intersetoriais

Setor de origem	Setor de Destino			Sub-Total	Investi-mento	Total
	1	2	3			
1	22	5	28	55	55	110
2	11	0	14	25	25	50
3	11	10	14	35	35	70

Tabela 5. Os fluxos físicos intersetoriais de meios de produção (destacando o consumo dos trabalhadores)

Setor de origem	Setor de destino			Cons.dos trabalhadores	Investi-mento	Total
	1	2	3			
1	11	0	21	23	55	110
2	11	0	14	0	25	50
3	0	5	7	23	35	70

Note-se que nessas duas primeiras tabelas não tem sentido somar valores de uma coluna, pois se trata de unidades heterogêneas.

Tabela 6. Valores monetários dos fluxos intersetoriais de meios de produção, do consumo dos trabalhadores e do investimento.

Setor de origem	Setor de destino			Cons.dos trabalhadores	Investi-mento	Total
	1	2	3			
1	11	0	21	23	55	110
2	11	0	14	0	25	50
3	0	10	14	46	70	140
Trabalho	33	15	21	69		
Lucro	55	25	70		150	

Tabela 7. Valores-trabalho

Setor	Capital Constante	Capital variável	Mais-valia	Total	Composição orgânica
1	2,66	3,33	7,67	13,66	0,799
2	0,89	1,51	3,49	5,89	0,590
3	5,51	2,12	4,88	12,51	2,598
TOTAL	9,07	6,97	16,03	32,07	1,301

Se, em lugar de fixar $p_1 = 1$, adotarmos uma unidade monetária que torne o valor de toda a produção (**pq**) igual ao valor trabalho total (**vq** = 25300/789 = 32,07) , o vetor de preços será

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix}0{,}1069 & 0{,}1069 & 0{,}2138\end{bmatrix}$$

Comparando com o vetor **v** verifica-se que no setor 3, onde a composição orgânica do capital é elevada, temos $p_3 > v_3$, enquanto nos setores 1 e 2, onde a composição orgânica do capital é relativamente baixa, temos $p_1 < v_1$ e $p_2 < v_2$. Até aí as diferenças ocorrem no sentido que seria previsto com base no método de transformação de valores-trabalho em preços de produção utilizado por Marx. No entanto, se compararmos os setores 1 e 2, verifica-se que o preço é relativamente mais baixo, em comparação com o valor-trabalho, no setor 1, apesar de a composição orgânica do capital ser menor no setor 2.

Verifica-se, nesse exemplo numérico, que a relação entre a mais-valia e a soma do capital constante e do capital variável na economia é igual à taxa de lucro ($\pi = 1$). Mas isso só ocorre, neste caso, porque estamos considerando um vetor de produções (**q**) que permite o crescimento com investimento de todo o lucro, como descrito na seção 12. Qualquer mudança não proporcional nas produções dos três setores fará com que a relação entre o total de mais-valia e o total dos capitais constantes e variáveis deixe de ser igual a π.

Pode-se verificar que o produto líquido do sistema econômico, em termos físicos, é

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 78 \\ 25 \\ 58 \end{bmatrix}$$

Seu valor monetário é $\mathbf{py} = 219$, igual à soma do valor do consumo dos trabalhadores e do investimento.

O valor-trabalho do produto líquido é $\mathbf{vy} = 23$, igual ao total de trabalho direto empregado.

Esse sistema econômico pode ser decomposto em 3 subsistemas onde o produto líquido é constituído por apenas uma mercadoria.

Para o subsistema cujo produto líquido é igual a 78 unidades da mercadoria 1 o vetor de produto líquido fica

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 78 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Temos

$$\mathbf{A}\,\mathbf{q}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{q}_1 \quad \text{ou} \quad (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{q}_1 = \mathbf{y}_1$$

Então

$$\mathbf{q}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{y}_1 = \frac{78}{789}\begin{bmatrix} 880 \\ 90 \\ 10 \end{bmatrix}$$

A quantidade de trabalho empregada nesse subsistema é

$$\mathbf{bq}_1 = 9{,}688$$

Então a quantidade de trabalho por unidade do produto líquido é

$$\frac{9{,}688}{78} = 0{,}1242$$

ou 0,1242 unidades de trabalho empregadas, direta e indiretamente, para obtenção de uma unidade da mercadoria 1. Este é, obviamente, o valor-trabalho por unidade da mercadoria 1.

Exercícios 3

3.1. Fazendo $p_1 = 1$, determine os preços, a taxa de lucro, o salário, os valores-trabalho por unidade de cada produto e a taxa de mais-valia para os seguintes sistemas econômicos (considerando o modelo marxista):

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix}$

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,30 & 2,00 \\ 0,04 & 0,10 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix}$

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,04 & 0,20 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{24} \end{bmatrix}$

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}44 & 0{,}72 \\ 0{,}02 & 0{,}26 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix}$

e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}40 & 0{,}25 & 0{,}55 \\ 0 & 0{,}40 & 0{,}15 \\ 0{,}03 & 0{,}09 & 0{,}50 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix}$

3.2. Para um “sistema de produção” com apenas 2 mercadorias, tem-se:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}50 & 0{,}05 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2{,}25 & 1 \end{bmatrix}$$

Admite-se que os salários são adiantados, isto é, o montante de salários pagos faz parte do capital empatado. Então tem-se:

$$(\mathbf{pA} + w\mathbf{b})(1+\pi) = \mathbf{p} \qquad \text{com } w = \mathbf{pd}$$

a) Determine a taxa de lucro.

b) Adotando uma unidade monetária que torne o salário igual a 1, determine os preços (p_1 e p_2) das duas mercadorias.

c) Determine a taxa de mais-valia.

d) Preservando o consumo dos trabalhadores, qual é a taxa de crescimento máxima *se* a produção nas duas indústrias for $q_1 = 200$ e $q_2 = 1000$ (admitindo que não haja limitações ao crescimento da mão-de-obra empregada)?

e) Se $q_1 = 200$, qual deve ser o valor de q_2 para que os dois setores cresçam com taxa máxima (com investimento de todo o lucro), preservando o consumo dos trabalhadores e admitindo que não haja limitações ao crescimento da mão-de-obra empregada?

3.3. Vamos considerar uma economia com 3 indústrias onde os salários são adiantados, isto é, o montante de salários pagos faz parte do capital empatado. Na notação usual, são dadas as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0,55 \\ 0,4 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 1,8 \end{bmatrix}$$

a) Com base na matriz $\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A} + \mathbf{db}$, classifique cada uma das três mercadorias como básica ou não-básica, justificando (sumariamente) sua classificação.

b) Determine a taxa de lucro.

c) Fazendo $p_2 = 1$, determine os demais preços e o salário (w).

d) Determine os valores-trabalho por unidade de cada mercadoria.

e) Determine o valor-trabalho da unidade de força de trabalho e a taxa de mais-valia.

3.4. Como se alteram as respostas da questão anterior se o salário real for multiplicado por 4, isto é, se tivermos

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.5. O que ocorre com p_3, na questão 3.3, se tivermos $a_{33} = 0,6$ (em lugar de $a_{33} = 0,3$)? Qual é o significado econômico desse resultado?

3.6. Vamos considerar uma economia com 3 indústrias onde os salários são pagos no fim do período de produção, ou seja, o montante de salários *não* faz parte do capital empatado. Na notação usual, são dadas as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0,55 \\ 0,4 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 1,8 \end{bmatrix}$$

Note que essas matrizes são iguais às matrizes **A** e **b** da questão 3.3.

a) Com base na matriz **A**, classifique cada uma das três mercadorias como básica ou não-básica, justificando (sumariamente) sua classificação.

b) Obtenha a relação entre o salário (w) e a taxa de lucro (π) com $p_2 = 1$. Determine o salário máximo (W) e a taxa de lucro máxima (Π).

c) Determine a taxa de lucro para o salário obtido na questão 3.3. Compare essa taxa de lucro com a taxa de lucro obtida naquela questão. Explique (com palavras) porque essas taxas são diferentes apesar de o salário e as matrizes **A** e **b** serem iguais nas duas questões.

d) Determine o vetor de produções totais (**q**) correspondente a um produto líquido igual a

$$\mathbf{y} = \mathbf{q} - \mathbf{Aq} = \begin{bmatrix} 90 \\ 10 \\ 63 \end{bmatrix}$$

Qual é o total de unidades de trabalho empregadas nessa situação?

3.7. Considere um sistema econômico com 4 mercadorias no qual as relações entre preços (**p**), salários (w) e taxa de lucro (π) são dadas por

$$(\mathbf{pA} + w\mathbf{b})(1+\pi) = \mathbf{p}$$

$w = \mathbf{pd}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Qual é a taxa de lucro nessa economia?

3.8. Considere um sistema econômico com 4 mercadorias no qual as relações entre preços ($\mathbf{p}$) , salário (w) e taxa de lucro (π) são dados por

$$(\mathbf{pA} + w\mathbf{b})(1+\pi) = \mathbf{p}$$

$$w = \mathbf{pd}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Tendo em vista a matriz $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} + \mathbf{db}$, classifique as mercadorias como básicas ou não-básicas.

b) Determine a taxa de lucro.

c) Determine os preços das 4 mercadorias se $w = 1$.

3.9. Considerando o modelo marxista, determine a taxa de lucro, os preços, o salário, os valores-trabalho por unidade de cada produto, a taxa de mais-valia, o vetor **q** para crescimento proporcional com investimento de todo o lucro, o vetor **y** e os fluxos intersetoriais para cada um dos conjuntos de dados a seguir. Em cada caso obtenha, também, o subsistema cujo produto líquido é constituído apenas pela mercadoria 1 e confira o valor-trabalho por unidade dessa mercadoria, como foi feito no capítulo 14.

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}10 & 0{,}16 & 0{,}32 \\ 0{,}05 & 0{,}12 & 0{,}20 \\ 0 & 0 & 0{,}02 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0{,}08 \\ 0{,}03 \\ 0{,}04 \end{bmatrix}$

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$p_1 = 1 \;,\quad Q_1 = 40$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}37 & 0{,}85 & 0{,}68 \\ 0{,}01 & 0{,}25 & 0{,}04 \\ 0{,}02 & 0{,}10 & 0{,}28 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}1 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 1{,}5 & 1{,}2 \end{bmatrix}$

$p_1 = 1 \;,\quad Q_1 = 100$

c) $\mathbf{A}^{+} = \begin{bmatrix} 0{,}27 & 1{,}92 & 0{,}48 \\ 0{,}03 & 0{,}27 & 0{,}06 \\ 0{,}12 & 0{,}96 & 0{,}27 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}2 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{bmatrix}$

$p_1 = 1$, $Q_1 = 800$

d) $\mathbf{A}^{+} = \begin{bmatrix} 0{,}56 & 0{,}24 & 0{,}36 \\ 0{,}06 & 0{,}56 & 0{,}18 \\ 0{,}04 & 0{,}08 & 0{,}56 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0{,}09 \\ 0{,}05 \\ 0{,}02 \end{bmatrix}$

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 2{,}4 & 3{,}6 \end{bmatrix}$

$p_1 = 1$, $Q_3 = 500$

15. A ESCOLHA DA TÉCNICA

Neste capítulo voltamos a considerar o modelo de Sraffa

$$\mathbf{pA}(1+\pi)+\mathbf{b}w=\mathbf{p}$$

que corresponde a um sistema de n equações com n + 1 incógnitas $(n-1$ preços, π e $w)$. Há, portanto, um grau de liberdade. Eliminando $n - 1$ preços obtemos uma relação funcional monotonicamente decrescente entre o salário (w) e a taxa de lucro (π) [Ver (17)].

As matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ constituem a técnica de produção utilizada, que passamos a representar através de uma única matriz $(n + 1) \times n$:

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{b}\end{bmatrix}$$

O conjunto das técnicas conhecidas em dado momento é denominado *tecnologia*. Admitindo que haja k diferentes técnicas conhecidas, a tecnologia é o conjunto das matrizes $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, … , $\mathbf{C}_k$. Vamos admitir que a mercadoria 1 é a mesma em todas essas técnicas e que ela é adotada como numerário. Então as relações w-π para as diferentes técnicas podem ser colocadas em um mesmo gráfico e comparadas, como na figura 1.

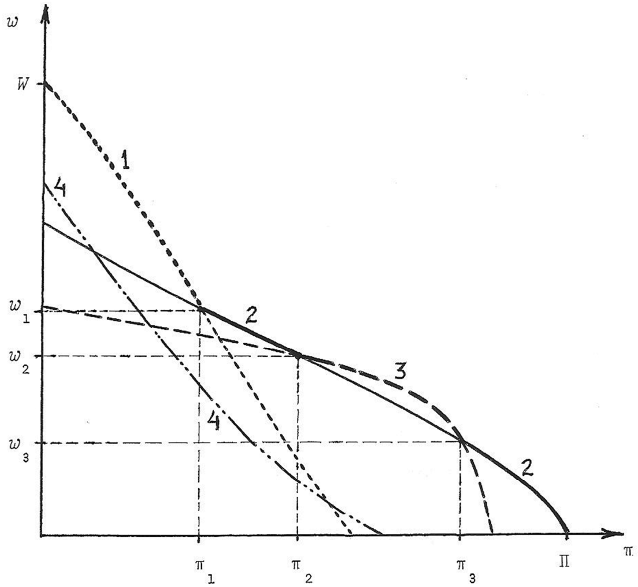


Figura 1. Relações w-π para quatro técnicas.

Para cada nível de salário os empresários escolherão a técnica que permite obter a maior taxa de lucro. Assim, na figura 1, para $w_1 < w < W$ $\left(\text{ou } 0 < \pi < \pi_1\right)$ será usada a técnica 1, para $w_2 < w < w_1$ (ou $\pi_1 < \pi < \pi_2$) será usada a técnica 2, e assim por diante. A técnica usada corresponde, sempre, a um segmento de uma curva w-π que está mais afastado da origem. A linha (envolvente) formada por esses segmentos é a fronteira tecnológica das possibilidades de distribuição de renda. É claro que muitas técnicas conhecidas não tem nenhuma participação nessa fronteira, isto é, são técnicas *obsoletas* , como é o caso da técnica 4 na figura 1.

Vamos considerar duas técnicas, $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$, relativas à produção do mesmo conjunto de n mercadorias. Vamos admitir que essas duas técnicas diferem apenas nos coeficientes técnicos de produção da h-ésima mercadoria. Então

$$\mathbf{C_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_{h1} & \dots & \mathbf{a}_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{h1} & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_{h2} & \dots & \mathbf{a}_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{h2} & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

Note-se que as matrizes $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ só diferem na h-ésima coluna. Para a técnica 1 temos

$$\mathbf{pa}_i(1+\pi)+b_i w = p_i \qquad (i \neq h) \tag{95}$$

$$\mathbf{pa}_{h1}(1+\pi)+b_{h1} w = p_h \tag{96}$$

Para a técnica 2 a única equação distinta é

$$\mathbf{pa}_{h2}(1+\pi)+b_{h2} w = p_h \tag{97}$$

As relações (95), (96) e (97) formam um sistema com $n + 1$ equações e $n + 1$ incógnitas ($n - 1$ preços, w e π) cuja solução, se existir, corresponde ao ponto de interseção das curvas w-π referentes às duas técnicas. É claro que esse ponto só tem significado econômico se a interseção ocorrer no 1º quadrante. Nesse ponto é, obviamente, indiferente utilizar a técnica 1 ou a técnica 2, já que os preços, o salário e a taxa de lucro são os mesmos; pode-se, inclusive, utilizar uma combinação das duas técnicas, isto é, produzir parte da mercadoria h com uma técnica e parte com a outra técnica.

Vamos admitir, agora, que há duas técnicas para produzir a h-ésima mercadoria e há, também, duas técnicas para produzir a m-ésima mercadoria. Podemos distinguir, então, 4 técnicas de produção para as n mercadorias:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix}\mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_{h\,1} & \dots & \mathbf{c}_{m\,1} & \dots & \mathbf{c}_n\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix}\mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_{h\,2} & \dots & \mathbf{c}_{m\,1} & \dots & \mathbf{c}_n\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix}\mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_{h\,2} & \dots & \mathbf{c}_{m\,2} & \dots & \mathbf{c}_n\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix}\mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_{h\,1} & \dots & \mathbf{c}_{m\,2} & \dots & \mathbf{c}_n\end{bmatrix}$$

Nesta sequência uma matriz difere da anterior apenas em uma coluna, isto é, uma técnica difere da anterior apenas na maneira de produzir uma única mercadoria. As técnicas 1 e 3, entretanto, diferem na maneira de produzir duas mercadorias. Se tentássemos impor, para as técnicas 1 e 3, os mesmos valores para os preços, w e π obteríamos um sistema de $n + 2$ equações com $n + 1$

incógnitas que, em geral não teria solução. Isso significa que, em geral, as relações w-π para as técnicas 1 e 3 não terão um ponto de interseção na fronteira tecnológica, onde seria indiferente usar uma dessas duas técnicas. Esse ponto de interseção estaria, em geral, fora da fronteira tecnológica, como ocorre na figura 1. Pontos de mudança de técnica na fronteira tecnológica envolvem, em geral, mudança na maneira de produzir uma única mercadoria[7].

Pasinetti (1977, capítulo 6) mostra que, dado um conjunto de técnicas, desde que haja uma mercadoria básica comum a todas elas, as seguintes propriedades são válidas:

I) em um ponto de mudança de técnica na fronteira tecnológica as duas técnicas envolvidas levam ao mesmo vetor de preços;

II) para qualquer valor de π para o qual há apenas uma técnica mais lucrativa, essa técnica leva a preços relativos ao salário (p_i / w) que são, para todas as mercadorias, menores do que aqueles associados a qualquer outra técnica;

III) os pontos de mudanças de técnica e a posição relativa das curvas w-π não dependem do numerário escolhido;

IV) a fronteira tecnológica é sempre decrescente.

[7] A exceção ocorre quando mais de duas curvas w-π passam por um mesmo ponto, como ilustram os exercícios 4.2 e 4.4.

É interessante notar que uma técnica de produção pode ser a mais lucrativa para dois intervalos distintos da taxa de lucro, como ocorre com técnica 2 na figura 1. Isso decorre da possibilidade de duas curvas w-π cruzarem mais de uma vez, fenômeno que foi denominado de "*reswitching of techniques*" (retorno de uma técnica). Em princípio pode haver até n pontos de cruzamento das curvas w-r relativas a duas técnicas distintas para produzir n mercadorias básicas.

Exercícios 4

4.1. Considere as técnicas 1 e 2, indicadas esquematicamente a seguir:

Técnica 1:

$$0{,}4 \text{ t de trigo} + 1{,}6 \text{ t de bronze} + \frac{7}{9} \text{ un. de trabalho} \rightarrow$$
$$\rightarrow 1{,}94 \text{ t de trigo}$$

$$0{,}6 \text{ t de trigo} + 2{,}4 \text{ t de bronze} + \frac{2}{9} \text{ un. de trabalho} \rightarrow$$
$$\rightarrow 4 \text{ t de bronze}$$

Técnica 2:

1 t de trigo + 2,8 t de ferro + 0,6 un. de trabalho $\rightarrow$ $\rightarrow$ 3 t de trigo

1 t de trigo + 1,2 t de ferro + 0,4 un. de trabalho $\rightarrow$ $\rightarrow$ 4 t de ferro

Caracterize as formas das relações w-π dessas técnicas.

Para que valor(es) da taxa de lucro há "mudança de técnica"?

(Nos pontos de mudança de técnica as duas técnicas conduzem ao mesmo salário).

Há reversibilidade de uma técnica de produção?

Genericamente, isto é, para coeficientes técnicos quaisquer, numa economia com dois produtos e sendo disponíveis duas técnicas (como no exemplo dado), quantos pontos de mudança de técnica pode haver? (Justifique).

4.2. Para uma economia com duas mercadorias básicas dispomos das seguintes técnicas de produção:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}04 \\ 1{,}0 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}06 \\ 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}05 & 0{,}01 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}06 \\ 1{,}0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}01 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}04 \\ 1{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

Determine a fronteira tecnológica, especificando os pontos de mudança de técnica.

4.3. Para uma economia com 3 mercadorias dispomos das seguintes técnicas de produção:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Note-se que a primeira coluna é a mesma nas duas matrizes. Devem ser consideradas também outras duas técnicas que podem ser obtidas fazendo diferentes combinações das duas últimas colunas das duas matrizes. Seja $\mathbf{C}_3$ a matriz cuja 2ª coluna é igual à de $\mathbf{C}_1$ e cuja 3ª coluna é igual à de $\mathbf{C}_2$ e seja $\mathbf{C}_4$ a matriz cuja 2ª coluna é igual à de $\mathbf{C}_2$ e cuja 3ª coluna é igual à de $\mathbf{C}_1$.

Determine a fronteira tecnológica, especificando os pontos de mudança e a técnica usada em cada intervalo de valores da taxa de lucro.

4.4. Para uma economia com 3 mercadorias básicas dispomos das seguintes técnicas de produção:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Fazendo $p_1 = 1$, determine as relações w-π para as 4 técnicas e mostre que as respectivas curvas cruzam no ponto $\pi = \frac{1}{9}$ e $w = \frac{5}{90}$.

16. PROGRAMAÇÃO LINEAR E O SIGNIFICADO DOS PREÇOS

Nesta seção procuramos apresentar, resumidamente, a interpretação de Pasinetti (1977, pp. 180-190) sobre o sistema de preços, contrastando o modelo de Sraffa com a solução de um problema de programação linear.

Vamos, inicialmente, descrever esse problema de programação linear.

Vamos admitir que existem k maneiras diferentes de produzir cada uma das n mercadorias. Os coeficientes técnicos referentes à h-ésima maneira de produzir a i-ésima mercadoria formam o vetor-coluna $\mathbf{c}_{ih}$, com $n + 1$ elementos (como uma coluna da matriz $\mathbf{C}$ definida no início da seção anterior). Todas as possibilidades de produção estariam representadas por esses nk vetores-coluna, que formam a matriz $(n+1) \times nk$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{11} & \mathbf{c}_{12} & \dots & \mathbf{c}_{1k} & \mathbf{c}_{21} & \dots & \mathbf{c}_{nk} \end{bmatrix}$$

Seja $\boldsymbol{\varepsilon}$ o vetor-coluna com as disponibilidades de mercadorias (estoques) e mão-de-obra no início do período de produção. Esse vetor tem $n + 1$ elementos, sendo que o último é a mão-de-obra disponível.

Consideremos o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \bar{\mathbf{p}}\,\mathbf{x} \\ \text{com} & \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x} \leq \boldsymbol{\varepsilon} \\ \text{e} & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

onde $\bar{\mathbf{p}}$ é um vetor-linha de preços preestabelecidos e $\mathbf{x}$ é o vetor-coluna de produções de cada mercadoria através de cada método de produção. Tanto $\bar{\mathbf{p}}$ como $\mathbf{x}$ tem $n\,k$ elementos, sendo que no vetor $\bar{\mathbf{p}}$ o preço de cada mercadoria é repetido k vezes.

Note-se que nesse problema a tecnologia, representada por $\boldsymbol{\Gamma}$, os recursos disponíveis ($\boldsymbol{\varepsilon}$) e os n preços são dados. As incógnitas são os elementos de $\mathbf{x}$. Na solução, que será indicada por $\mathbf{x}^*$, os elementos positivos indicam os métodos de produção escolhidos e os elementos iguais a zero correspondem a métodos de produção descartados.

Cabe ressaltar que nesse problema não há referência aos custos de produção dos recursos $\boldsymbol{\varepsilon}$, como se todos fossem recursos naturais.

O *dual* [8] desse problema de programação linear é

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \mathbf{z}\boldsymbol{\varepsilon} \\ \text{com} & \mathbf{z}\boldsymbol{\Gamma} \geq \bar{\mathbf{p}} \\ \text{e} & \mathbf{z} \geq 0 \end{array}$$

---

[8] Ver, por exemplo, Lanzer (1982), pp. 192-205.

onde $\mathbf{z}$ é o vetor-linha cujos n elementos são os preços-sombra atribuídos aos recursos disponíveis. Seja **z*** a solução do problema dual.

Sabemos que as soluções dos problemas primal e dual são tais que

$$\overline{\mathbf{p}}\mathbf{x}^* = \mathbf{z}^* \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{x}^* = \mathbf{z}^* \boldsymbol{\varepsilon}$$

Os elementos iguais a zero em **z*** correspondem a recursos que existem em excesso, havendo *folga* na obediência às restrições do problema primal. Os elementos positivos em **z*** correspondem a recursos escassos, cuja disponibilidade é completamente utilizada. Simetricamente, os elementos positivos em **x***, que indicam métodos de produção efetivamente utilizados, correspondem, no dual, a métodos de produção em que o custo atribuído (custo calculado com os preços-sombra, $\mathbf{z}^* \mathbf{c}_{ih}$) é exatamente igual ao preço preestabelecido. E os elementos iguais a zero em **x*** correspondem a métodos com *folga* no dual, isto é, métodos cujo custo atribuído $\mathbf{z}^* \mathbf{c}_{ih}$ é maior do que o preço preestabelecido (métodos ineficientes).

Pasinetti assinala que esse modelo exige o desenvolvimento de uma teoria da demanda, como é feito na microeconomia neoclássica. O vetor $\overline{\mathbf{p}}$ é obviamente uma maneira canhestra de expressar a demanda. Mas essa teoria da demanda não é necessária para analisar como o modelo se comporta quando ocorrem certas mudanças. Para analisar as consequências de uma redução na disponibilidade de um recurso vamos supor uma situação inicial em que o h-ésimo recurso existia em abundância, existindo folga para esse recurso na solução do problema primal. Então o respectivo preço-sombra, na solução do problema dual, era igual a zero. Vamos admitir que a disponibilidade do h-ésimo recurso seja reduzida, tornando-o escasso. Na nova solução a restrição do problema primal para esse recurso será atendida sem folga e o respectivo preço-sombra na solução do problema dual passará a ser positivo. Terá ocorrido então, um aumento do preço-sombra do h-ésimo recurso. Em geral, desde que o número de técnicas seja bastante grande, a nova solução $\mathbf{x}^*$ será diferente da inicial, implicando em alterações na técnica de produção, em favor de métodos de produção que sejam menos exigentes no uso do h-ésimo recurso.

Vejamos, agora, o que ocorre quando aumenta a “demanda” por um produto. Vamos admitir que aumenta o valor de $\overline{p}_i$ e que a produção da i-ésima mercadoria seja a mais exigente no uso do j-ésimo recurso. Então as soluções dos problemas primal e dual serão alteradas, ocorrendo aumento do preço-sombra para o j-ésimo recurso e uma tendência de alteração dos métodos de produção em favor dos métodos menos exigentes no recurso que se tornou mais escasso.

Em resumo, Pasinetti apresenta duas proposições que considera “tradicionais” :

a) Uma alteração dos preços estabelecidos (em relação às disponibilidades de recursos) ou uma mudança das disponibilidades de recursos (em relação à demanda final) leva, em geral, a uma mudança na técnica e, consequentemente, a mudanças nos preços-sombra e a mudanças nas proporções entre insumos utilizados, de maneira que a relação entre quantidades de dois insumos varia no sentido inverso da variação da relação entre os respectivos preços. Recursos que se tornam relativamente mais escassos (e mais caros) são substituídos por recursos que se tornam relativamente menos escassos (e mais baratos). Nesse contexto a escolha da técnica se confunde com a escolha da proporção entre insumos. Pode-se dizer que mudanças nos preços relativos implicam em um processo de substituição entre recursos.

b) Os preços-sombra atribuídos aos recursos são “índices de escassez” . A utilização, ou “alocação”, dos recursos com base nesses preços é, então, uma alocação baseada nos seus graus de escassez. Essa alocação é ótima (eficiente) no sentido de minimizar os custos atribuídos (custos calculados com os preços-sombra).

É interessante comparar essas proposições tradicionais com os resultados relativos à escolha da técnica no modelo de Sraffa, analisados no capítulo 15.

No modelo de Sraffa não há "recursos disponíveis" que possam ser considerados mais ou menos escassos; todas as mercadorias são produzidas.

A escolha da técnica, no modelo de Sraffa, não depende da demanda. Como todos os insumos são produzidos, uma mudança na composição da demanda leva a alterações nas quantidades produzidas, mas a técnica continua a mesma. No modelo de Sraffa não há motivo para substituição entre insumos, porque não há recursos escassos.

Pode-se pensar que no modelo de Sraffa não há substituição entre insumos porque os coeficientes técnicos (a matriz **A**) são considerados fixos. A comparação com o problema de programação linear apresentado nesta seção mostra que a constância dos coeficientes técnicos *não* é o ponto essencial, pois essa constância também ocorre na programação linear, onde podemos identificar a substituição de insumos associada com mudanças nos preços relativos.

Cabe ressaltar, ainda, que no modelo de Sraffa, se houver uma mudança na técnica utilizada, devido a uma mudança na taxa de lucro, não podemos estabelecer nenhuma regra geral relacionando as mudanças nos preços relativos com as alterações nas proporções entre insumos. Isso fica óbvio no caso do retorno de uma técnica (*reswitching of techniques*).

17. RENDA DA TERRA

Sraffa trata da renda da terra no último capítulo da parte II do livro, onde analisa as indústrias com produto múltiplo e capital fixo. Ele assinala que "os recursos naturais que são usados na produção, tais como terra e depósitos minerais, e que sendo escassos permitem aos seus proprietários obter uma renda, ocupam entre os meios de produção uma posição equivalente àquela ocupada pelos não-básicos entre os produtos. Sendo empregados na produção, mas não sendo eles próprios produzidos, são o inverso de mercadorias que, embora produzidas, não são usadas na produção"[9].

17.1. Renda extensiva

Vamos considerar, inicialmente, um sistema em que há um único produto agrícola, denominado "cereal", que é produzido em h diferentes qualidades de terra. Vamos admitir que há k mercadorias industriais. Em cada indústria é produzida uma única mercadoria utilizando um método de produção. Para o produto agrícola há um método de produção para cada tipo de terra. O produto líquido do sistema será distribuído na forma de salário, lucros e, eventualmente, renda da terra. Utilizando a notação de

---

[9] Posteriormente vários autores utilizaram o método de Sraffa para explorar diferentes possibilidades de formação e variação da renda da terra. Uma revisão bibliográfica sobre o tema encontra-se em Venter (1990).

Sraffa (ver seção 4), esse sistema pode ser representado pelas equações

$$\left.\begin{array}{l}\left(A_a p_a + B_a p_b + \ldots + K_a p_k + Z_a p_z\right)(1+\pi) + L_a w = Ap_a \\ \left(A_b p_a + B_b p_b + \ldots + K_b p_k + Z_b p_z\right)(1+\pi) + L_b w = Bp_b \\ \quad \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ \left(A_k p_a + B_k p_b + \ldots + K_k p_k + Z_k p_z\right)(1+\pi) + L_k w = Kp_k\end{array}\right\} \qquad (98)$$

$$\left(A_{zi} p_a + B_{zi} p_b + \ldots + K_{zi} p_k + Z_{zi} p_z\right)(1+\pi) + L_{zi} w + T_i \rho_i = Z_i p_z$$

com $i = 1, 2, \ldots, h$ (99)

As k primeiras equações referem-se ao sistema industrial e as h equações finais constituem o setor agrícola. O índice i é usado para distinguir os h diferentes métodos de produzir o (único) produto agrícola, um para cada tipo de terra. Assim, B_{zi} indica a quantidade do produto industrial B utilizada na produção do cereal no i-ésimo tipo de terra, juntamente com L_{zi} unidades de trabalho. A área cultivada do i-ésimo tipo de terra é T_i e ρ_i é o valor da respectiva renda da terra, por unidade de área.

Admite-se que as terras de melhor qualidade são totalmente utilizadas e que há um tipo de terra, denominado *marginal*, que não é totalmente utilizado e para o qual a renda é, consequentemente, igual a zero. A condição de que um dos ρ_i seja igual a zero dá origem à seguinte equação:

$$\rho_1\rho_2 \cdots \rho_h = 0 \tag{100}$$

Temos, então, $k + h + 1$ equações. As variáveis econômicas são os $k + 1$ preços , π, w e as h rendas. Mesmo considerando que um dos preços é determinado pela escolha da unidade monetária, ainda restam $k + h + 2$ incógnitas. O sistema sraffiano continua com um grau de liberdade.

Por simplicidade vamos considerar um exemplo numérico referente a um sistema econômico com um único produto industrial A e produção de cereal em dois tipos de terra (1 e 2). Vamos admitir que as áreas de terra disponíveis são insuficientes para que a quantidade necessária de cereal seja produzida em um único tipo de terra, mas que são mais do que suficientes quando os dois tipos são utilizados, fazendo com que parte da área de um tipo não seja cultivada. Adotando o cereal como numerário, as equações ficam (Hoffmann e Venter, 1990):

$$(4p_a + 1)(1+\pi) + 0{,}5w = 10p_a \tag{101}$$

$$(0{,}5p_a + 2)(1+\pi) + 0{,}15w + \rho_1 = 4{,}2 \tag{102}$$

$$(2{,}5\,p_a + 0{,}4)(1+\pi) + 0{,}4\,w + \rho_2 = 5{,}4 \tag{103}$$

$$\rho_1\rho_2 = 0 \tag{104}$$

Observa-se que na terra 1, por exemplo, são produzidos 4,2 unidades do cereal por unidade de área (hectare), utilizando 0,5 unidade do produto industrial, 2 unidades de cereal e 0,15 unidade de trabalho. Note-se que tanto o cereal como o produto industrial são mercadorias básicas.

Isolando p_a da equação (101) e substituindo a expressão obtida nas equações (102) e (103), obtemos duas equações em w, π, ρ_1 e ρ_2 que podem ser representadas por

$$\phi_1(w, \pi, \rho_1) = 0 \tag{105}$$

$$\phi_2(w, \pi, \rho_2) = 0 \tag{106}$$

A relação w-π para a terra 1 é obtida fazendo $\rho_1 = 0$ em (105). Se a expressão para w obtida dessa relação for substituída em (106) obtemos ρ_2 como função de π. Para a faixa de valores de π para a qual a terra 1 é a marginal teremos, efetivamente, $\rho_1 = 0$ e $\rho_2 \geq 0$.

Analogamente, fazendo $\rho_2 = 0$ em (106) obtemos a relação w-π para a terra 2. A partir dessa relação e da equação (105) podemos obter ρ_1 como função de π. Para o intervalo de valores de π no qual a terra 2 é a marginal teremos, efetivamente, $\rho_2 = 0$ e $\rho_1 \geq 0$.

A parte superior da figura 2 mostra as duas relações w-π para o exemplo numérico apresentado. Para a terra 1 o salário máximo é 11,04 e a taxa de lucro máxima é 0,806; para a terra 2 esse valores são, respectivamente, 7,53 e 0,973. As duas linhas se cruzam quando $\pi =$ 0,476.

É mais *eficiente* a terra que proporciona maior salário para uma dada taxa de lucro (ou maior taxa de lucro para um dado salário).

Se a demanda por cereal pudesse ser atendida com o cultivo de apenas parte da área de um único tipo de terra, a fronteira tecnológica dessa economia seria a linha $A\ B\ C$ na figura 2, utilizando-se sempre a terra mais eficiente.

Entretanto, se a demanda por cereal não pode ser atendida cultivando apenas um tipo de terra, então a fronteira tecnológica é formada pelas partes mais internas das curvas $w-\pi$, isto é, pela linha $D\ B\ E$ na figura 2. Neste caso haverá pagamento de renda pelo uso da terra mais eficiente, como mostra a parte inferior da figura 2. Note-se que a renda da terra 2 não é definida para π superior a 0,806, que é a taxa de lucro máxima para produção de cereal na terra 1.

Na figura 2 observa-se que, à medida que a taxa de lucro aumenta, diminui a eficiência relativa da terra 1 e, em contrapartida, aumenta a eficiência relativa da terra 2. Isso ocorre porque a produção de cereal na terra 1 é mais intensiva em capital, sendo mais eficiente, portanto, para valores baixos da taxa de lucro. Por outro lado, a produção na terra 2 é mais intensiva em trabalho, o que a torna relativamente mais eficiente para valores elevados da taxa de lucro (que correspondem a valores baixos para o salário).

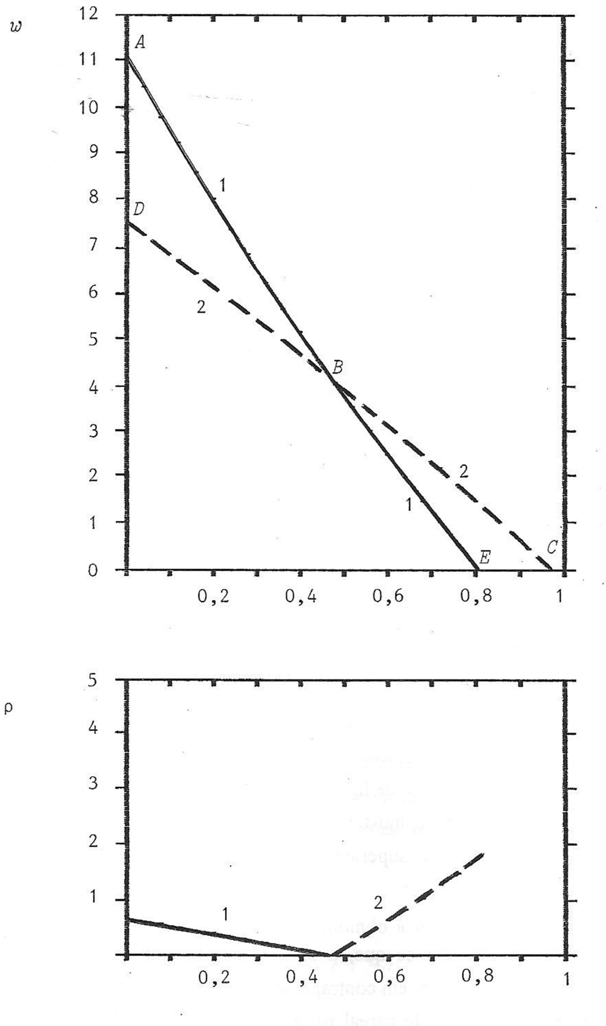


Figura 2. Relações entre salário (w), taxa de lucro (π) e renda (ρ) nas terras 1 e 2.

No ponto B, com $\pi = 0{,}476$, os dois tipos de terra são igualmente eficientes e tanto ρ_1 como ρ_2 são iguais a zero.

Para $\pi < 0{,}476$ a terra 1 é mais eficiente e será totalmente utilizada, sendo considerada escassa, não havendo escassez da terra 2, cuja área não será totalmente cultivada.

Para $\pi > 0{,}476$ a terra 2 é mais eficiente e será totalmente utilizada e escassa, não havendo escassez da terra 1, cuja área não será totalmente utilizada.

Verifica-se, portanto, que a ordem de eficiência das terras e até mesmo a escassez de certo tipo de terra dependem do valor de π, ou seja, da participação de assalariados e capitalistas no produto líquido.

O aumento da demanda por cereal pode levar à utilização de toda a área disponível dos dois tipos de terra e tornar necessário o cultivo de um terceiro tipo de terra. Nesse caso haverá, em geral, renda positiva para dois dos três tipo de terra (ver Hoffmann e Venter, 1990).

17.2. Renda intensiva[10]

Sraffa mostra que pode haver renda da terra mesmo que a terra seja totalmetne homogênea, associada com o uso simultâneo de dois métodos de cultivo do cereal. Nesse caso dizemos que há renda *intensiva*, em oposição ao caso da renda *extensiva*,

---

[10] Nas seções 17.2 a 17.7 são reproduzidas partes do artigo de Venter e Hoffmann (1991)

associada ao uso simultâneo de vários tipos de terra, analisado anteriormente.

Sraffa argumenta que os casos mais complexos, com vários produtos agrícolas sendo cultivados em vários tipos de terra, podem ser compreendidos como combinações dos modelos de renda extensiva e renda intensiva.

Vejamos o modelo sraffiano de renda intensiva. Vamos considerar um sistema econômico fechado onde há só uma qualidade de terra[11] e apenas um produto agrícola denominado “cereal”. Neste caso, como veremos a seguir, o aparecimento da renda da terra deve-se à coexistência de dois métodos de cultivo do cereal na terra homogênea, usando-se toda a área disponível. Como afirma Sraffa (1983, p.238), “enquanto o caso das terras de qualidades diferentes será facilmente reconhecido como o resultado de um processo de rendimentos decrescentes *extensivos*, pode ser menos óbvio que exista uma conexão similar entre o emprego de dois métodos de produzir cereal na terra de uma só qualidade e um processo de rendimentos decrescentes *intensivos*”.

Utilizando a notação de Sraffa (ver capítulo 4), o sistema é representado pelas seguintes equações:

---

[11] A qualidade da terra é determinada pelas suas características edafoclimáticas e pela sua localização.

$$\left.\begin{array}{l}(A_a + B_a p_b + ... + K_a p_k)(1+\pi) + L_a w = A \\ (A_b + B_b p_b + ... + K_b p_k)(1+\pi) + L_b w = Bp_b \\ \text{...} \\ (A_k + B_k p_b + ... + K_k p_k)(1+\pi) + L_k w = Kp_k\end{array}\right\} \quad (107)$$

$$[A_{z(i)} + B_{z(i)} p_b + ... + K_{z(i)} p_k](1+\pi) + L_{z(i)} w + T_{(i)}\rho = Z_{(i)} p_z \quad (108)$$

As primeiras k equações referem-se aos processos produtivos industriais. O termo K_b, por exemplo, corresponde à quantidade da mercadoria industrial K necessária à produção de B unidades da segunda mercadoria industrial, empregando L_b unidades de trabalho.

As h equações restantes correspondem ao setor agrícola, com diferentes métodos de cultivo para a mesma qualidade de terra. O termo $A_{z(i)}$, por exemplo, refere-se à quantidade da mercadoria industrial A necessària para a produção de $Z_{(i)}$ unidades do cereal, pelo método "i", em $T_{(i)}$ hectares, empregando $L_{z(i)}$ unidades de trabalho.

Admite-se que todos os coeficientes técnicos são não-negativos.

Adotando a mercadoria A como numerário, de modo que $p_a = 1$, as $k+3$ incógnitas desse sistema econômico são a taxa de lucro (π), a taxa de salário (w), a renda da terra (ρ), os $k-1$ preços industriais $(p_b,..,p_k)$ e o preço do cereal (p_z).

Cabe ressaltar que, nesse modelo, a terra é um recurso natural e que, consequentemente, a renda da terra *não* inclui a remuneração do capital incorporado à terra. O adubo, por exemplo, deve ser incluido entre os elementos que estão entre colchetes nas equações relativas à produção do cereal. Também deve ser registrado que, apenas para fins de simplificação, o cereal é considerado uma mercadoria não-básica (ver capítulo 5).

Pressupõe-se que as *k* primeiras equações, referentes aos processos produtivos industriais, constituem um sistema econômico viável, ou seja, que a raiz característica máxima da respectiva matriz de coeficientes técnicos seja menor do que 1.

Pela tradição sraffiana escolhe-se a taxa de salário ou de lucro como variável exógena para obter a solução do sistema de preços, dado o numerário. Isto apenas implica que no sistema econômico sraffiano a solução distributiva é um dado exógeno, não sendo determinada no âmbito restrito da teoria econômica. Sraffia deixa margem para a determinação política da distribuição da renda (conflito de classes). Dada uma das variáveis distributivas obtem-se a outra e os preços das demais mercadorias.

Tomando-se a taxa de salário como um dado exógeno, se dois métodos estiverem sendo operados, lado a lado, no cultivo do cereal sobre a mesma qualidade de terra, o sistema de preços acima estará determinado (não restando qualquer grau de liberdade). Isto porque, teremos $k+2$ equações para determinar as $k+2$ incógnitas do sistema (os $k-1$ preços industriais, o preço do cereal, a taxa de lucro e a renda da terra). Como afirma Sraffa (1983, p. 238), "se toda a terra é de mesma qualidade e sua oferta é escassa, isso torna possível que dois processos ou métodos diferentes de cultivo sejam utilizados coerentemente, lado a lado, em terras similares, determinando uma renda uniforme por acre".

Neste caso, deveremos supor que a tera é escassa: caso contrário, haverá sempre um capitalista disposto a aplicar seu capital na parte não cultivada da terra, obtendo a taxa de lucro apenas, e oferecendo o cereal a um preço menor. No entanto, como afirma Sraffa (1983, p. 239), "enquanto a escassez de terra proporciona assim o *background* do qual surge a renda, a única evidência dessa escassez que se encontra no processo de produção é a dualidade de métodos: se não houvesse escassez, apenas se utilizaria um método, o mais barato, sobre a terra, e não poderia existir renda".

Na verdade, uma vez que, no sistema econômico que ora discutimos, o cereal não é uma mercadoria básica, as k primeiras equações (do sistema industrial) determinam os $k-1$ preços industriais e a taxa de lucro. Os valores dessas incógnitas são, então, inseridos nas equações de produção do cereal, obtendo-se o valor das últimas duas incógnitas: a renda da terra e o preço do cereal.

Para que, no entanto, não obtenhamos valores negativos para a renda da terra, devemos obedecer à restrição de que o método com maior produção por unidade de área (maior $Z_{(i)}/T_{(i)}$) apresente o maior custo por unidade de produto, calculado a partir dos valores correntes dos preços e taxas de salário e de lucro. Vejamos isto mais de perto. O custo total de produção do método *i* é:

$$C_{(i)} = (A_{z(i)} + B_{z(i)} p_b + ... + K_{z(i)} p_k)(1+\pi) + L_{z(i)} w$$

Note-se que a renda da terra não é incluida no custo. Dessa maneira, as duas equações de produção do cereal podem ser escritas da seguinte forma:

$$Z_{(1)} p_z - T_{(1)} \rho = C_{(1)} \tag{109}$$

$$Z_{(2)} p_z - T_{(2)} \rho = C_{(2)} \tag{110}$$

Como o cereal é uma mercadoria não-básica, $C_{(1)}$ e $C_{(2)}$ são conhecidos e apenas ρ e p_z são incógnitas. Para que esse sistema de equações tenha uma solução determinada é necessário que:

$$\begin{vmatrix} Z_{(1)} & -T_{(1)} \\ Z_{(2)} & -T_{(2)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Isso implica que $Z_{(2)}T_{(1)} - Z_{(1)}T_{(2)} \neq 0$, ou seja, $Z_{(2)}/T_{(2)} \neq Z_{(1)}/T_{(1)}$ (as produções por unidade de área dos dois métodos devem diferir).

Da equação (109) ou da (110) segue-se que:

$$\rho = \frac{Z_{(i)}}{T_{(i)}} p_z - \frac{C_{(i)}}{T_{(i)}} \tag{111}$$

Agora, resolvendo o sistema constituído pelas equações (109) e (110), obtemos

$$\rho = \frac{Z_{(2)}C_{(1)} - Z_{(1)}C_{(2)}}{Z_{(1)}T_{(2)} - Z_{(2)}T_{(1)}} \tag{112}$$

Como, por hipótese, $Z_{(2)}/T_{(2)} \neq Z_{(1)}/T_{(1)}$, suponhamos que $Z_{(2)}/T_{(2)} > Z_{(1)}/T_{(1)}$. Neste caso, o denominador da expressão (112) será negativo. Então, para $\rho > 0$ deveremos ter o numerador também negativo, o que implicará em $Z_{(1)}C_{(2)} > Z_{(2)}C_{(1)}$ e, portanto, $C_{(2)}/Z_{(2)} > C_{(1)}/Z_{(1)}$, como queríamos demonstrar. Recapitulando: o método com maior produção por unidade de área (o método 2, no caso) deverá ter maior custo médio (custo total por unidade do produto) para que a renda da terra seja positiva. A Figura 3 ilustra o fato[12].

[12] Esta figura é obtida a partir dos parâmetros usados no exemplo numérico discutido na secção 17.5, fixando a taxa de lucro em 0,5.

A equação (111) mostra que, para cada método de produção do cereal, fixado o custo, a renda da terra é uma função linear do preço do cereal. A inclinação da reta é a produção por unidade de área naquele método e a intercecção da reta com o eixo das abcissas (quando $\rho = 0$ fornece o valor do custo médio por unidade produzida.

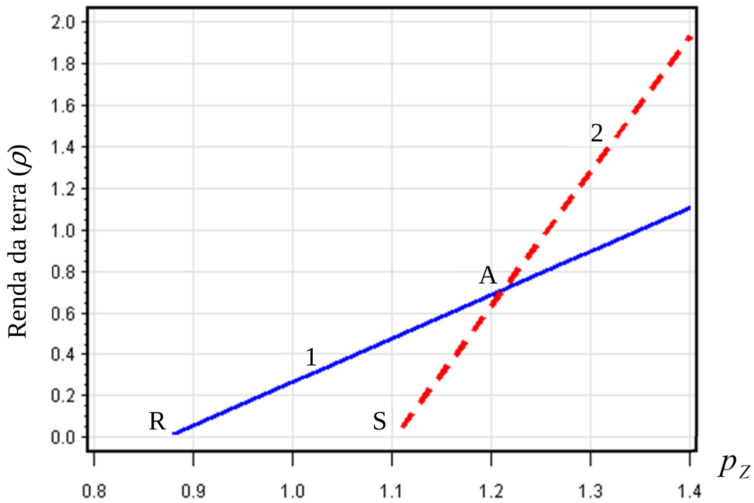


Figura 3. A coexistência de dois métodos gerando renda positiva.

Observando a Figura 3, vemos que quando o método com maior produção por unidade de área (reta mais inclinada) for também o de maior custo médio (OS > OR), ambos os métodos podem coexistir, lado a lado, gerando uma mesma renda (positiva), como mostra a intersecção das duas retas no ponto A. É importante ressaltar, entretando, que a posição dessas retas pode alterar-se para valores diferentes da taxa de lucro (ou de salário, conforme a variável escolhida como exógena). Ou seja, a Figura 3 é válida para uma dada taxa de lucro. Voltaremos a comentar este importante aspecto quando nos referimos às mudanças autônomas na distribuição.

17.3. O crescimento intensivo da produção agrícola

Dentro do modelo até então considerado é possível analisar o processo de aumento da produção agrícola devido à crescente demanda por cereal (questão central na análise de Ricardo). Manteremos a pressuposição (meramente didática, a fim de introduzir o assunto) de que o cereal é uma mercadoria não-básica.

Suponhamos que existam três métodos de cultivo do cereal e que o método com maior produção por unidade de área é também o que produz o cereal ao maior custo médio. Este custo, evidentemente, é obtido para um dado valor monetário do salário, tomando-se a solução do sistema de preços industriais. A Figura 4 ilustra o que pretendemos discutir.

Essa figura é obtida a partir do sistema econômico a seguir, para $\pi = 0{,}5$ e $p_a = 1$.

$$5p_a(1+\pi) + 0{,}3w = 10{,}5p_a$$

$$1p_a(1+\pi) + 0{,}04w + 1\rho = 2{,}1p_z \qquad \text{(método 1)}$$

$$2p_a(1+\pi)+0{,}50w+1\rho=3{,}2p_z \qquad \text{(método 2)}$$

$$0{,}1p_a(1+\pi)+1{,}96w+1\rho=4{,}5p_z \qquad \text{(método 3)}$$

Observemos que o modelo considera, simplificadamente, apenas uma mercadoria industrial. Entretanto, os fenômenos que desejamos analisar não são afetados pela introdução, no modelo, de maior número de mercadorias industriais.

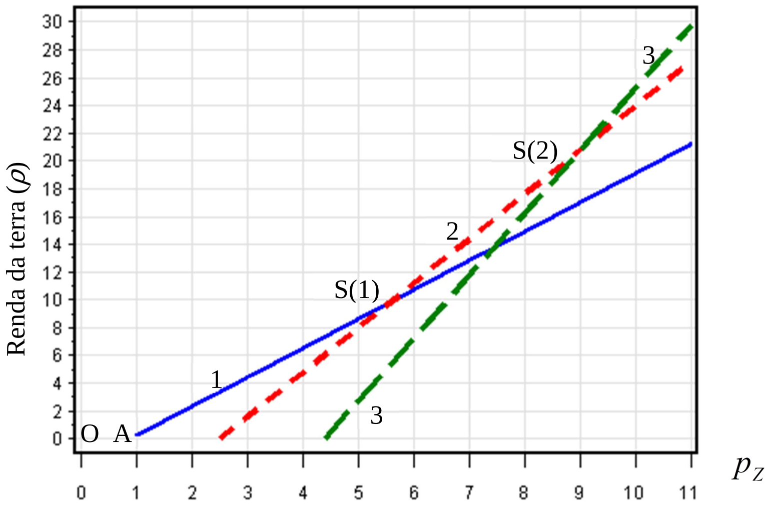


Figura 4. O crescimento da produção e a substituição dos métodos de cultivo.

Vamos partir do caso em que a demanda por cereal (que é fixada exogenamente nos sistemas sraffianos) é suficientemente pequena, de tal forma que pode ser atendida com o cultivo de parte da terra total disponível (com qualquer método). Neste caso a terra não é escassa e, portanto, p_Z . O método 1, que produz o cereal ao menor custo médio, será empregado isoladamente. O preço do cereal corresponderá, assim, à medida do segmento OA na Figura 4.

Suponhamos que a demanda por cereal cresça até o ponto em que o método 1 (com menor produção por unidade de área) não mais possa atendê-la, mesmo utilizando toda a terra disponível. Assim sendo, o preço do cereal deverá subir (devido ao excesso de demanda), até o ponto em que seja viável o cultivo pelo método 2, lado a lado com o método 1. O novo preço e a renda por unidade de área são as coordenadas do ponto S(1) na Figura 4.

Um novo crescimento na demanda por cereal fará com que o segundo método substitua, paulatinamente, o primeiro, por toda a extensão da terra, uma vez que é mais produtivo. Enquanto isto acontece, o preço do cereal e a renda da terra permanecem constantes ao nível anterior.

Apesar de a produção do cereal pelo método 2 ocorrer a um custo médio maior, não podemos esquecer que este método produz mais cereal por unidade de área. Vamos verificar o que está ocorrendo, através de alguns cálculos. Da equação de produção da mercadoria industrial verifica-se que, para $\pi = 0{,}5$, a taxa de salário é igual a 10,0. Assim sendo, os custos por unidade de área são, respectivamente, 1,9 e 8. Verifica-se que no ponto S(1), com o uso simultâneo dos métodos 1 e 2, o preço do cereal é $p_z = 5{,}545$. Então, nesse ponto, enquanto a receita da produção total pelo método 1 é igual a 11,64 (2,1 unidades produzidas vezes o preço do cereal), a receita total obtida pelo método 2 é igual a 17,74. Os cálculos mostram que ambos os métodos, ao preço do cereal igual a 5,545, pagarão a mesma renda da terra por unidade de área $(\rho = 9{,}74)$. Ou seja, com esse preço do cereal e essa renda da terra, os métodos 1 e 2 produzem a mesma taxa de lucro, tornado-se indiferentes para o capitalista.

Assim, fica claro que a introdução de métodos mais *custosos* se viabiliza, apenas, com o cescimento da demanda pelo cereal (que acarreta um crescimento no preço do cereal).

Quando o crescimento da demanda fizer com que a mesma não possa mais ser atendida com o cultivo de toda a terra disponível com o método 2, voltaremos a ter um crescimento no preço do cereal e, por conseguinte, na renda da terra. Quando o preço do cereal atingir o valor 9,04 o terceiro método passa a ocupar parte da terra disponível, pagando uma renda da terra igual à obtida com o cultivo pelo método 2 $(\rho = 20{,}93)$. E o processo continua, com métodos que produzem mais por unidade de área a um custo médio cada vez maior. Como afirma Sraffa (1983, pp. 238-9), "desse modo, o volume de produção pode aumentar continuamente, embora os métodos de produção sejam mudados de uma forma espasmódica".

Em geral haverá dois métodos de cultivo sendo utilizados simultaneamente na terra homogênea. Então o sistema de equações constituido por (107) e (108) terá $k+2$ equações. Como há $k+3$ incógnitas (depois que um dos preços fica fixado pela definição do numerário), resta um grau de liberdade, como é usual nos sistemas sraffianos.

Se formos construir um gráfico como o da Figura 4 com infinitos métodos, poderemos obter uma curva envolvente, que representará as possíveis soluções de p_z e ρ para o crescente nível de demanda. Um método que não tenha qualquer segmento da respectiva reta pertencendo à curva envolvente não será utilizado a qualquer nível de demanda por cereal.

Observa-se, portanto, que quanto mais favorável for a razão entre o aumento na produtividade da terra e o aumento no custo (ou seja, quanto mais próximas forem as intersecções das retas com o eixo das abcissas, e quanto maior a diferença nas inclinações destas retas), menor deverá ser o aumento do preço do cereal para que um método substitua outro.

Além disso, devemos ressaltar que a posição das retas na Figura 4 altera-se para valores de π diferentes, porque alteram-se os custos médios de produção de cada método, alterando o intercepto com o eixo das abscissas. Essas alterações podem até mesmo fazer com que o método com maior produção por unidade de área seja também o de menor custo médio. Para o exemplo numérico apresentado isso ocorre quando $\pi = 1{,}07$ e $w = 0{,}5$. Nesse caso o método 3 será o único utilizado e não haverá renda da terra. Isso não invalida o raciocínio apresentado, pois poderá existir (ou poderá ser criado) um quarto método com produção por unidade de área ainda maior, porém com maior custo médio (é, na verdade, o que acontece frequentemente na prática). A teoria sraffiana ressalta que o custo de produção é uma variável que assume valores diferentes quando muda a distribuição de renda entre lucros e salários.

Note-se que esse processo de crescimento intensivo da produção agrícola através da introdução de métodos que produzem mais por unidade de área a um custo maior, está associado ao crescimento da renda da terra e ao aumento do preço do cereal, gerando, consequentemente, queda do salário real, dada a taxa de lucro.

Finalmente, é preciso acrescentar que a análise do processo de crescimento intensivo da produção agrícola acima discutido não se altera, em essência, para o caso (real) de o cereal ser uma mercadoria básica[13]. Na verdade, o que se modifica é a forma das relações entre p_z e ρ para dado valor de *w*, que deixam de ser retas (a menos que escolhamos a taxa de salário como numerário), uma vez que, agora, mudanças em p_z alteram a taxa de lucro. Dessa maneira o custo médio de produção do cereal por um dado método não corresponde mais à intersecção da linha que

---

[13] Ver em Kurz (1980) e Montani (1972) a determinação do custo médio e a análise do crescimento intensivo da produção agrícola para o caso de o cereal ser uma mercadoria básica.

representa a relação entre p_z e ρ com o eixo p_z (como antes). Esse custo varia para diferentes valores de p_z.

17.4. As mudanças autônomas na distribuição e a renda intensiva

Vamos analisar, no modelo da renda intensiva, os efeitos de mudanças autônomas na distribuição sobre a renda da terra e, portanto, sobre a escassez do meio de produção terra. Veremos que, dados certos métodos de produção do cereal em uma mesma qualidade de terra, a terra tornar-se-á escassa em função das necessidades globais da economia pelo cereal e da distribuição do excedente econômico entre lucros e salários.

O fato novo da teoria sraffiana para renda da terra consiste exatamente na relação entre a escassez da terra e a distribuição do excedente econômico entre lucros e salários. A teoria mostra que o grau de escassez da terra (medido pela renda da terra) não depende, exclusivamente, da demanda pelo cereal e da disponibilidade de terra (com uma dada produtividade), mas também da distribuição da renda entre lucros e salários.

Inicialmente, como introdução ao tema, vamos considerar o seguinte sistema econômico:

$$A_a p_a(1+\pi)+L_a w = Ap_a$$

$$A_{z(1)} p_a(1+\pi)+L_{z(1)} w + T_{(1)}\rho = Z_{(1)} p_z \qquad \text{(método 1)}$$

$$A_{z(2)} p_a(1+\pi)+L_{z(2)} w + T_{(2)}\rho = Z_{(2)} p_z \qquad \text{(método 2)}$$

A primeira equação representa a produção da mercadoria industrial (que é a única mercadoria básica), escolhida como numerário $(p_a = 1)$. A fronteira tecnológica[14] dessa economia é determinada, exclusivamente, a partir da equação de produção industrial, sendo a seguinte função linear:

$$w = A/L_a - (A_a/L_a)(1+\pi)$$

Suponhamos que o método de produção do cereal representado pela terceira equação do sistema (que chamaremos de método 2) produz mais por unidade de área que o outro (método 1). Portanto, $Z_{(2)}/T_{(2)} > Z_{(1)}/T_{(1)}$. Além disso, suponhamos que a demanda por cereal não poderá ser atendida com o método 1, mesmo que se cultive toda área disponível, mas poderá ser atendida pelo método 2 sem o cultivo de toda área disponível[15].

---

[14] Ver seção 15.

[15] Fazemos essas hipóteses para analisar o surgimento da renda, que só será positiva se a produção do cereal for mais eficiente pelo método 1, que não atende a demanda, tornando-se necessária a introdução do método 2, lado a lado com o método 1.

Já vimos que, no caso em que dois métodos coexistem, é necessário que o método com maior produção por unidade de área tenha o maior custo médio de produção, para que a solução do sistema gere renda da terra positiva. Agora, no entanto, analisaremos esse processo diretamente por meio das relações w-π, ao invés de nos reportarmos às relações entre p_z e ρ, porque desejamos levar em consideração variações na distribuição da renda entre lucros e salários.

Para esse primeiro caso particular, onde a fronteira tecnológica é determinada, exclusivamente, pela equação de produção da mercadoria industrial, deveremos considerar a variação dos custos médios em cada método, quando varia a distribuição. Enquanto a Figura 5 apresenta a fronteira tecnológica, a Figura 6 mostra a variação dos custos médios frente a variações na distribuição da renda.

Para o sistema econômico acima, a equação dos custos médios dos métodos é dada por:

$$\frac{C_{(i)}}{Z_{(i)}} = \frac{L_{z(i)}A}{Z_{(i)}L_a} + \frac{(L_a A_{z(i)} - L_{z(i)}A_a)}{Z_{(i)}L_a}(1+\pi)$$

Esta é uma relação linear crescente se $L_a A_{z(i)} > L_{z(i)} A_a$, e linear decrescente no caso contrário[16].

---

[16] As figuras 5 e 6 mostram um caso possível. Na verdade, o caso que pretendemos discutir. Observe-se que o coeficiente angular das funções representadas na Figura 6 reflete a comparação entre as intensidades relativas de “capital” e trabalho dos métodos agrícolas frente ao método industrial (algo

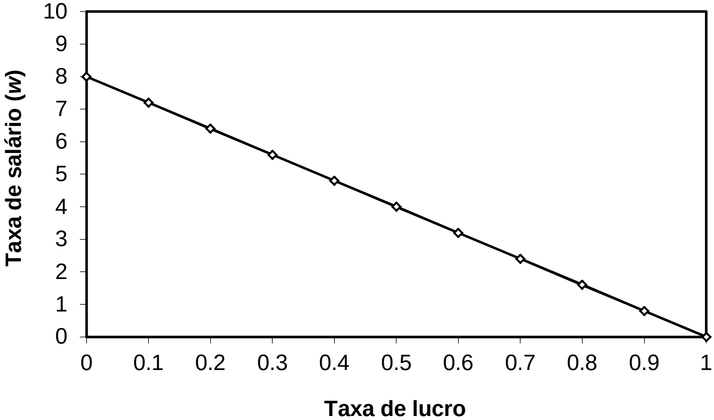


Figura 5. A fronteira tecnológica.

---

como o conceito marxista de “composição orgânica do capital”). De acordo com a Figura 6, o método 1 é mais intensivo em “capital” do que o método industrial. Este, por sua vez, é mais intensivo em capital do que o método 2, pois a reta é decrescente. Assim sendo, é claro que o aumento em π aumenta o custo de produção do método 1, ao mesmo tempo que diminui o custo de produção do método 2.

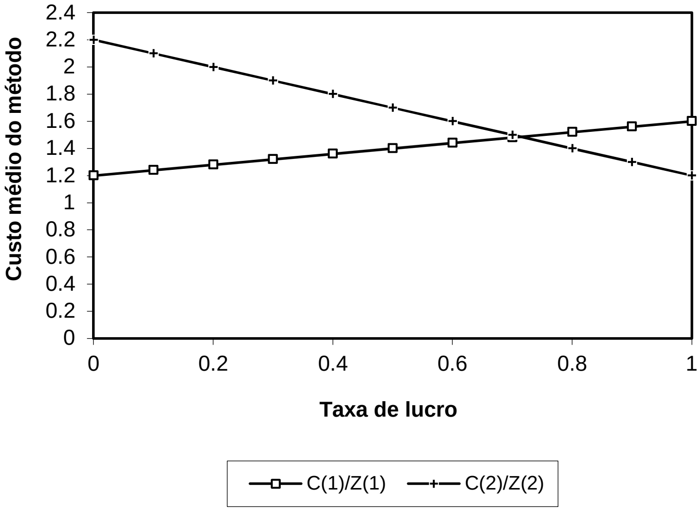


Figura 6. O comportamento dos custos médios.

As Figuras 5 e 6 baseiam-se no seguinte sistema econômico:

$$8(1+\pi)+1w=16$$

$$4(1+\pi)+0{,}25w+1\rho=5p_z$$

$$6(1+\pi)+2w+1\rho=10p_z$$

A Figura 6 mostra que para valores de π entre 0 e 0,71 (aprox.) a produção com o método 1 é mais eficiente (tem menor custo médio). Como a demanda não poderá ser atendida (por hipótese), a terra torna-se-á escassa, a renda será, portanto, positiva, e os dois métodos coexistirão, lado a lado, no cultivo de toda área disponível. Entretando, para π maior que 0,71 a produção será mais eficiente com o método 2. Como a demanda poderá ser atendida com o cultivo parcial da terra disponível se for usado o método 2, a terra não será escassa enquanto π for maior que 0,71. Finalmente, para $\pi = 0{,}71$ ambos os métodos terão igual eficiência, e a demanda por cereal será atendida pelo cultivo parcial da terra disponível com o método 2, exclusivamente, ou com ambos. Neste caso, não haverá renda da terra.

Concluindo: quando o custo médio de produção do método de maior produção por unidade de área é maior que o custo médio do método de menor produção por unidade de área, é possível a existência de renda da terra. A escassez da terra dependerá, portanto, de duas condições: primeiramente, é necessário que haja pelo menos um método, entre os disponíveis, cuja produtividade é tal que as necessidades globais de cereal não serão atendidas se toda a terra disponível for cultivada exclusivamente por este método. Em segundo lugar, é necessário que tal método tenha um custo médio de produção menor que o custo médio de produção de todos os outros métodos com maior produtividade. Como esta última condição depende da distribuição do excedente econômico entre lucros e salários, fica claro que a escassez da terra não depende, exclusivamente, das necessidades globais da economia por cereal mas, também, da distribuição do excedente econômico[17]. A constatação desse fato é, certamente, uma contribuição original da teoria sraffiana.

17.5. Relações entre taxas de lucro, salário e renda intensiva da terra

A fim de nos aprofundarmos no tema, vamos analisar mais detalhadamente as relações entre as taxas de lucro, de salário e a renda intensiva da terra. Para este fim, vamos considerar o seguinte sistema econômico:

$$A_a p_a (1+\pi) + L_a w = A p_a$$

$$A_{z(1)} p_a (1+\pi) + L_{z(1)} w + T_{(1)} \rho = Z_{(1)} \qquad \text{(método 1)}$$

$$A_{z(2)} p_a (1+\pi) + L_{z(2)} w + T_{(2)} \rho = Z_{(2)} \qquad \text{(método 2)}$$

A única alteração, em relação ao sistema anterior, é o numerário que, agora, passa a ser o cereal. Neste caso, a fronteira não mais poderá ser obtida diretamente do sistema industrial e, assim, deveremos analisar a relação entre a renda da terra e as mudanças autônomas na distribuição da renda, diretamente a partir das curvas w-π. Manteremos, entretanto, as hipóteses sobre as produtividades dos métodos e os requisitos de atendimento da demanda por cereal.

Para analisar as relações entre as taxas de lucro, salário e renda da terra (além de determinar a fronteira tecnológica),

---

[17] O que já tinha sido constatado na análise da renda extensiva da terra.

precisamos considerar, no mesmo gráfico, as três possíveis relações w-π deste sistema econômico[18].

A primeira relação w-π refere-se ao caso em que ambos os métodos são utilizados conjuntamente sobre toda a área disponível. Tal relação é obtida, por substituição, utilizando-se as três equações do sistema acima. Neste caso, também é possível obter-se, alternativamente, a relação entre π e ρ, uma vez que a renda da terra será positiva.

Pode-se, ainda, obter a relação w-π correspondente ao caso em que o segundo método é utilizado isoladamente, sem o cultivo de toda a terra disponível. Assim, a terra será redundante, $\rho = 0$, e a relação w-π é obtida substituindo-se a terceira equação do sistema (referente ao método 2) na equação industrial.

Deveremos acrescentar, por fim, a relação w-π referente ao cultivo parcial da terra disponível, exclusivamente com o método 1. Embora isto nunca irá ocorrer (pois, por hipótese, a demanda por cereal não será atendida), será necessário incluirmos essa relação para analisarmos o que pretendemos, como veremos adiante. Tal relação é obtida das duas primeiras equações do sistema, com $\rho = 0$.

Para essas três relações teremos a mesma taxa máxima de lucro (Π, para $w = 0$), pois há só uma mercadoria básica. Neste

---

[18] Ver Montani (1975) para a obtenção, em termos literais, das relações w-π e ρ - π, partindo do sistema discutido nesta seção.

caso, $\Pi = (A - A_a)/A_a$. As Figuras 7 e 8 ilustram um caso possível. Essas figuras correspondem ao seguinte exemplo numérico de Montani (1975, p. 94):

$$5p_a(1+\pi) + 0{,}30w = 10p_a$$

$$1p_a(1+\pi) + 0{,}04w + 1\rho = 2{,}1$$

$$2p_a(1+\pi) + 0{,}50w + 1\rho = 6{,}5$$

Como $\Pi = 1$, vamos fazer π variar de zero a 1, para estudarmos as relações que pretendemos. A Figura 7 mostra que, para valores de π entre 0 e 0,7 o método 1 é mais eficiente (tem menor custo médio) que o método 2, uma vez que o cultivo do produto agrícola com este método permite pagar um salário maior, dada a taxa de lucro. Pode-se verificar que com o uso exclusivo do método 1 o salário máximo (com $\pi = 0$) seria 21.

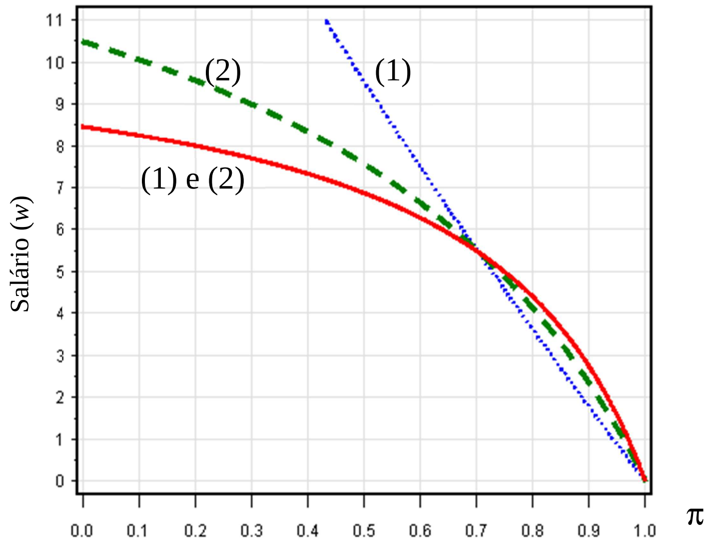


Figura 7. A renda intensiva e as mudanças autônomas na distribuição: curvas w - π

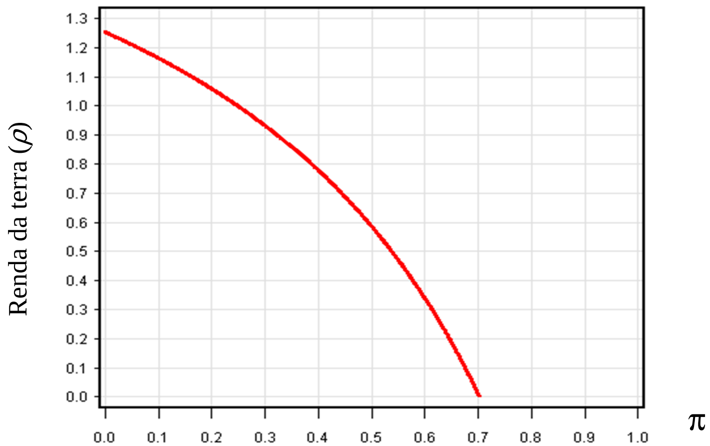


Figura 8. A renda intensiva e as mudanças autônomas na distribuição: curva ρ - π

Como o uso exclusivo do método 1 não permite atender a demanda, será necessário que ambos os métodos operem lado a lado, acarretando o aparecimento da renda da terra (como mostra a Figura 8). Portanto, nesta faixa de variação da taxa de lucro, a relação w-π relevante será a correspondente à mais interna relação w-π na Figura 7, representada pela linha contínua.

Quando π varia entre 0,7 e 1,0 = Π, podemos observar, na Figura 7, que o método 2 passa a ser mais eficiente que o método 1. Assim, parte da terra não será cultivada, a terra será redundante e não haverá, portanto, renda da terra. O método 2 será utilizado na parte cultivada da terra. A relação w-π relevante para este intervalo de variação de π é dada, dessa vez, pela curva intermediária (operação isolada do método 2), representada pela linha tracejada na Figura 7.

Por fim, para $\pi = 0{,}7$, ambos os métodos terão igual eficiência, a terra será parcialmente cultivada com o método 2 ou com ambos. A fronteira tecnológica desta economia, na Figura 7, será formada, portanto, pela curva contínua para $\pi \leq 0{,}7$ e pela curva tracejada para $0{,}7 \leq \pi \leq 1$, sendo a máxima taxa de salário possível igual a 8,5 (aprox.)[19].

Finalmente, poderemos observar o processo de crescimento intensivo da produção agrícola, discutido anteriormente,

[19] Veja em Montani (1975, p. 88) outro caso possível, quando ρ cresce para valores crescentes de π.

considerando, diretamente, as relações w-π. Voltemos a obesrvar a Figura 7, admitindo que π é menor que 0,7. Se a demanda por cereal for pequena e puder ser atendida pelo cultivo com o método 1, não haverá renda da terra. O crescimento da demanda por cereal (para π menor que 0,7) tornará necessária a introdução de um método que produza mais cereal por unidade de área. Como vimos, inicialmente ambos os métodos operarão simultaneamente, até que o método 2 substitua (com o crescimento da demanda) totalmente o método 1.

As Figuras 3 e 4, discutidas anteriormente, mostram o processo de substituição de métodos de cultivo para um valor fixo de π. A Figura 7, por outro lado, permite analisar a sequência de métodos que serão utilizados para qualquer dos possíveiss valores de π, mostrando inclusive que a ordem de eficiência dos métodos depende do valor da taxa de lucro.

17.6. A possibilidade de uma relação w-π crescente: a indeterminação para uma dada taxa de salário

Os exercícios 5.6 e 5.7 ilustram um fenômeno interessante: a indeterminação da taxa de lucro para uma dada taxa de salário. Isso pode ocorrer quando tivermos uma relação w-π crescente, gerando uma fronteira tecnológica também crescente, embora apenas para uma faixa de variação de π.

17.7. Renda da terra: Ricardo, Marx e Sraffa

É difícil fazer uma correspondência entre os conceitos de renda da terra em Ricardo e Marx e os modelos de Sraffa, pois estes permitem considerar situações absolutamente inéditas.

A renda diferencial I de Marx está associada à produtividade diversa de aplicações iguais de capital em áreas iguais de terras de qualidade desigual. A renda diferencial II decorre da aplicação de doses adicionais de capital (e trabalho), mas, admitindo, em geral, que a pior terra utilizada não gera renda.

O modelo sraffiano de renda extensiva mostra a determinação da renda da terra quando se considera que há diferentes qualidades de terra em uso, sendo nula a renda em uma das qualidades de terra. Não é feita nenhuma restrição no que se refere à aplicação de diferentes quantidades de capital nos diversos tipos de terra. Verifica-se, portanto, que a renda extensiva de Sraffa engloba tanto a renda diferencial I como a renda diferencial II.

O modelo sraffiano de renda intensiva mostra como se estabelece o valor da renda da terra mesmo quando esta é perfeitamente homogênea, desde que sejam utilizados, lado a lado, dois métodos de cultivo do cereal. Uma vez que esses diferentes métodos de cultivo correspondem a diferentes intensidades de aplicação de capital, a renda intensiva de Sraffa poderia ser associada com a renda diferencial II de Marx. Deve-se ressaltar, entretanto, que Marx não admitia a possibilidade de haver renda diferencial II se a terra fosse totalmente homogênea. Para ele “a renda diferencial II supõe a renda diferencial I” (Marx, 1985, p.776).

Poder-se-ia associar a renda intensiva de Sraffa com a renda absoluta de Marx, pois ambas explicam a existência de renda quando a terra é totalmente homogênea. Entretanto, a natureza da explicação é totalmente distinta. A teoria marxista da renda absoluta depende do pressuposto questionável (e historicamente mutável) da menor composição orgânica do capital na agricultura e se baseia em uma diferença entre valor-trabalho e preço de produção que está metodologicamente errada porque envolve unidades de medida diferentes (tempo de trabalho e valor monetário).

Devemos ressaltar, também, que os modelos sraffianos permitem analisar a simultaniedade na determinação das variáveis econômicas como renda, preço do cereal, taxa de lucro e salário. É óbvio que isso era muito mais difícil para os autores do século XIX. Assim Ricardo (1982, p. 67), ao analisar a variação na renda devida a sucessivas aplicações de capital na mesma terra, não leva em consideração a possibilidade de variação no preço do cereal. Os esquemas de Marx sobre a determinação da renda diferencial II já mostraram que a alteração na intensidade de uso de capital por unidade de área pode alterar tanto a renda da terra como o preço do cereal.

Não há dúvida de que o uso de um modelo formalizado permite análises mais precisas do progresso técnico na agricultura. Além disso, a teoria sraffiana parte de uma abordagem alternativa da questão da distribuição da renda, recusando o enfoque clássico de manter o salário ao nível de subsistência e considerando, de maneira mais realista, as diferentes soluções do conflito distributivo sempre presente na sociedade capitalista. Assim fazendo, a teoria sraffiana da renda da terra permite a análise das variações nos preços e na renda terra, frente a mudanças nas variáveis distributivas (w e π). Dessa maneira foi possível mostrar que a escassez de uma única qualidade de terra, além de depender da demanda global da economia e da produtividade dos métodos disponíveis, também depende da distribuição da renda.

Os casos de indeterminação da renda da terra ilustrados pelos exercícios 5.6 e 5.7 podem ser encarados como aspectos positivos ou negativos da teoria sraffiana. São aspectos negativos se forem interpretados como sintomas da natureza "incompleta" da teoria, que não permite determinar especificamente o que vai ocorrer, mesmo depois que se fixa o salário. São aspectos positivos para os que consideram que uma análise de caráter estritamente econômico não deve levar, necessariamente, a uma solução única, deixando margem para a influência de fatores sócio-políticos (o que é uma característica básica dos esquemas sraffianos).

No que se refere à determinação da renda intensiva, acreditamos que o modelo sraffiano é superior (quanto à sua consistência lógica) às considerações de Ricardo e Marx. Em primeiro lugar, porque a teoria sraffiana permite explicar a determinação da renda mesmo quando há uma única qualidade de terra. Em segundo lugar, porque ficam explícitas as inter-relações entre as variáveis econômicas como taxa de lucro, salário, preços e renda da terra.

Cabe ressaltar, finalmente, a contribuição de Marx no sentido de analisar as condições sociais e institucionais para a existência da renda da terra. Para que alguém receba a renda da terra é necessário que seja reconhecido como proprietário da terra. Não basta que um recurso natural seja escasso para que gere renda. Nuvens de chuva podem ser, em certas ocasiões, escassas e muito úteis, mas não geram renda porque não são propriedade de ninguém. A cobrança de renda sobre áreas de mar não se tornou comum simplesmente devido à dificuldade de construir “cercas” delimitando uma “propriedade” no mar.

Exercícios 5

5.1. Consideremos um sistema econômico onde há apenas uma mercadoria, que é o produto de uma lavoura. Existem dois tipos de terra onde essa lavoura pode ser desenvolvida. Admite-se que a utilização de apenas um dos dois tipos de terra é insuficiente para obter a produção necessária, mas não há necessidade de usar toda a área disponível dos dois tipos de terra. Vamos indicar o preço do produto, o salário, a taxa de lucro, a renda por hectare da terra tipo 1 e a renda por hectare da terra tipo 2 por p, w, π, ρ_1 e ρ_2, respectivamente. O sistema econômico pode, então, ser representado pelo seguinte sistema de equações:

$$p(1+\pi)+4w+\rho_1=10p \qquad (1)$$

$$5p(1+\pi)+5w+\rho_2=20p \qquad (2)$$

$$\rho_1\,\rho_2=0 \qquad (3)$$

Verifica-se que a produção por hectare na terra tipo 2 é duas vezes maior do que na terra tipo 1.

Vamos admitir que a moeda adotada é tal que p = 1.

a) Qual é a taxa de lucro máxima nesse sistema econômico?

b) Qual é o salário máximo?

c) Determine w, ρ_1 e ρ_2 se a taxa de lucro for igual a 20%.

d) Para que valor de π os dois tipos de terra são igualmente eficientes?

e) Para que intervalo de valores de π a terra de tipo 1 é mais eficiente, apresentando renda da terra positiva?

f) Faça um gráfico aproximado mostrando as relações w-π e como ρ_1 e ρ_2 variam em função de π.

5.2. Consideremos um sistema econômico semelhante ao da questão anterior, mas com um único tipo de terra e dois métodos de exploração da cultura. O sistema econômico seria representado pelas equações (1) e (2) com $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Admite-se que há disponibilidade de apenas 1000 ha de terra homogênea, e que é necessário produzir 16000 unidades do produto.

a) Para que faixa de valores de π a renda da terra (ρ) será positiva?

b) Obtenha a equação que mostra como ρ varia em função de π.

5.3. Considere um sistema econômico com 1 produto industrial (A) e um produto agrícola (Z) que pode ser cultivado por dois métodos distintos no único tipo de terra disponível. O método II permite obter maior quantidade do produto agrícola por unidade de área. Admite-se que a demanda pelo produto agrícola não poderá ser atendida com o uso exclusivo do método I, mesmo que se cultive toda a área disponível, mas poderá ser atendida pelo método II sem o cultivo de toda a área disponível. O sistema econômico pode ser representado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 8p_a(1+\pi)+w=16p_a & \\ 2p_a(1+\pi)+\rho= 6p_z & \text{(método I)} \\ p_a(1+\pi)+2w+\rho=15p_z & \text{(método II)} \end{cases}$$

Note que não é utilizada mão-de-obra (direta) na produção de *Z* pelo método I.

a) Classifique os dois produtos como básicos ou não-básicos.

b) Qual é a taxa de lucro máxima nessa economia?

c) Para que intervalo de valores de π haverá uso simultâneo dos métodos I e II e renda da terra positiva? O que acontece para o outro intervalo de valores possíveis de π?

d) Fazendo $p_z = 1$, determine os valores de p_a, w e ρ para $\pi = 0{,}8$.

e) idem, para $\pi = 0{,}3$.

f) Obtenha a expressão algébrica para a relação w-π com $p_z = 1$, quando há uso simultâneo dos métodos I e II. Mostre, através do sinal de sua derivada, se ela é uma função crescente ou decrescente.

g) Com $p_z = 1$, qual é o salário máximo nessa economia?

5.4. Consideremos um sistema econômico com 1 produto industrial (*A*), um produto agrícola (*Z*) e dois tipos de terra. Admite-se que a utilização de apenas um dos dois tipos de terra é insuficiente para obter a produção necessária, mas não há necessidade de usar totalmente a área disponível dos dois tipos de terra. O sistema econômico pode ser representado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 0{,}5p_a(1+\pi)+0{,}2w=p_a \\ 0{,}1p_a(1+\pi)+0{,}04w+\rho_1=2 \\ 0{,}6p_a(1+\pi)+0{,}01w+\rho_2=8 \\ \rho_1 \ \rho_2=0 \end{cases}$$

O produto agrícola é adotado como moeda ($p_z = 1$).

Verifica-se que a produção (física) por unidade de área na terra 2 é quatro vezes maior do que na terra 1.

a) Qual é a taxa de lucro máxima nesse sistema econômico?

b) Qual é o salário máximo?

c) Determine p_a , w, ρ_1 e ρ_2 para $\pi = 0{,}2$.

d) Idem, para $\pi = 0{,}8$.

e) Para que valor de π os dois tipos de terra são igualmente eficientes?

f) Para que intervalo de valores de π a terra 1 é mais eficiente?

g) Faça um gráfico aproximado mostrando as relações w-π e como ρ_1 e ρ_2 variam em função de π.

5.5. Consideremos um sistema econômico com 1 produto industrial (A) e um produto agrícola (Z) que pode ser cultivado por dois métodos distintos no único tipo de terra disponível. O método 2 permite obter maior quantidade do produto agrícola por unidade de área. Admite-se que a demanda pelo produto agrícola não poderá ser atendida com o uso exclusivo do método 1, mesmo que se cultive toda a área disponível, mas poderá ser atendida pelo método 2 sem o cultivo de toda a área disponível. Com $p_z = 1$, o sistema econômico pode ser representado pelo seguinte sistema de equações (note a semelhança com o sistema do exercício anterior):

$$\begin{cases} 0{,}5p_a(1+\pi)+0{,}2w = p_a \\ 0{,}1p_a(1+\pi)+0{,}04w+\rho = 2 \\ 0{,}6p_a(1+\pi)+0{,}01w+\rho = 8 \end{cases}$$

a) Qual é a taxa de lucro máxima?

b) Qual é o salário máximo?

c) Determine p_a, w e ρ para $\pi = 0{,}2$.

d) Idem, para $\pi = 0{,}8$.

e) Para que valor de π se torna indiferente utilizar o método 1 ou o método 2? (os custos de produção por unidade do produto, sem considerar renda da terra, são iguais nos dois métodos).

f) Para que intervalo de valores de π a renda da terra é positiva?

g) Faça um gráfico aproximado mostrando as relações w-π e como ρ varia em função de π.

5.6. Considere o seguinte esquema sraffiano com um único produto industrial e dois métodos de cultivo do cereal em terra homogênea[20]:

$$(8p_a + 1p_z)(1+\pi) + 1w = 16p_a$$

$$(2p_a + 2p_z)(1+\pi) + 0{,}05w + 1\rho = 6p_z \qquad \text{(método 1)}$$

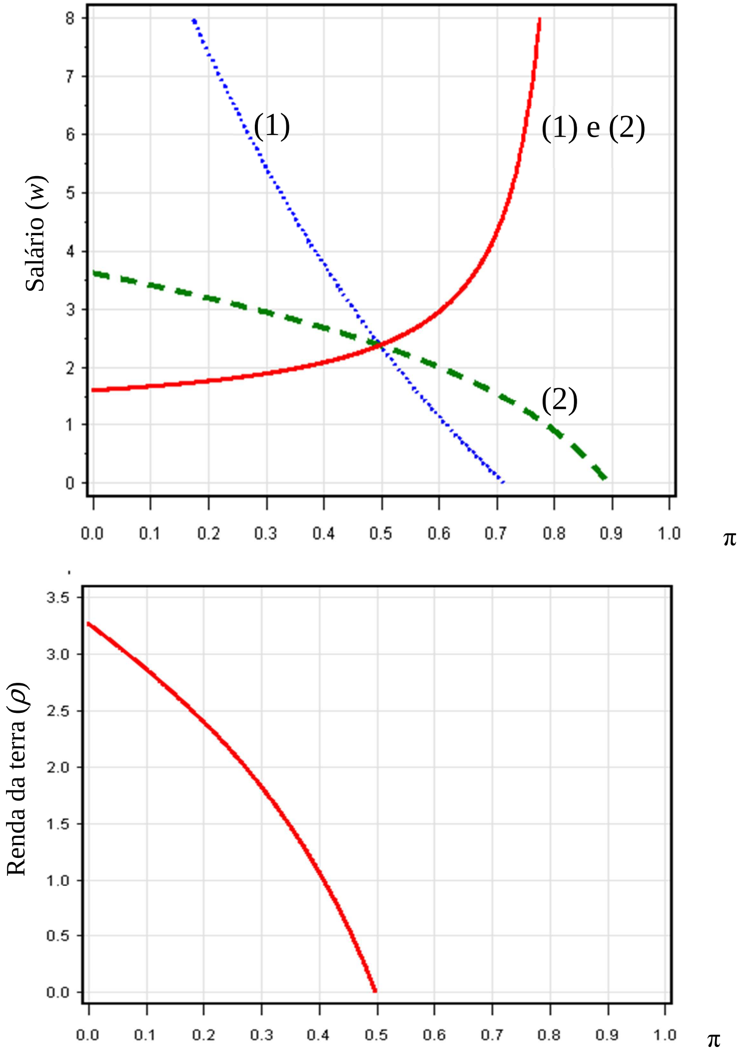
$$(1p_a + 2p_z)(1+\pi) + 1{,}50w + 1\rho = 8p_z \qquad \text{(método 2)}$$

Diferentemente do exemplo analisado na seção 17.5, aqui o cereal é uma mercadoria básica. Vamos admitir que a demanda por cereal e a área de terra disponível são tais que a demanda não pode ser atendida com o uso exclusivo do método 1, mas pode ser atendida com o uso exclusivo do método 2, com maior produção por unidade de área.

Adotando o cereal como numerário ($p_z = 1$), verifique que a posição das 3 relações w-π (uso exclusivo do método 1, uso exclusivo do método 2 e uso simultâneo dos 2 métodos de cultivo

[20] Exemplo numérico apresentado e discutido em Venter e Hoffmann (1991).

do cereal) é a ilustrada na figura a seguir, com cruzamento no ponto de coordenada $\pi = 0{,}50$ e $w = 2{,}37$.



As curvas w - π referentes ao uso esclusivo de um dos dois métodos de cultivo do cereal, com $\rho = 0$, são necessariamente decrescentes. Isso pode ser verificado analisando o sistema de equações dado, com $p_z = 1$. A primeira equação mostra que o crescimento simultâneo de π e w exigiria o crescimento de p_a. Mas, isso é incompatível com qualquer uma das outras duas equações com $p_z = 1$ e $\rho = 0$. Concluímos que apenas a relação w - π referente ao uso simultâneo dos dois métodos, com $\rho > 0$, pode ser crescente, pois nesse caso a queda no valor de ρ pode compensar o crescimento simultâneo de π, w e p_a .

Verifique que a fronteira tecnológica dessa economia hipotética é formada pela linha contínua (referente ao uso simultâneo dos dois métodos de cultivo do cereal) para π variando de 0 a 0,50 (aprox.) e pela linha tracejada (referente ao uso exclusivo do método 2) para π variando de 0,50 a 0,89.

Note-se que para $\pi > 0{,}50$ a curva contínua é uma pura construção matemática, pois está associada a valores negativos da renda da terra.

Um aspecto curioso desse exemplo numérico é que a existência de um ramo ascendente na fronteira tecnológica gera um problema de indeterminação quando consideramos o salário como variável exógena. Neste caso, para w entre 1,60 e 2,37 (aprox.) haverá duas soluções possíveis. Para w = 2, por exemplo, verifica-se que uma solução consiste em cultivar parte da terra com o método 2, exclusivamente, obtendo-se $\pi = 0{,}6$ e $\rho = 0$.

Outra solução possível consiste em cultivar toda a terra disponível com ambos os métodos, com uma taxa de lucro menor (0,36, aprox.), mas com $\rho = 1{,}37$ (aprox.)[21].

5.7. Considere o seguinte esquema sraffiano, com dois produtos industriais (*A* e *B*) e dois métodos de cultivo, em terra homogênea, de um único produto agrícola (cereal)[22]:

$$(0{,}50 p_a + 1 p_z)(1+\pi) + 0{,}1 w = 1 p_a \qquad \text{(indústria } A\text{)}$$

$$(0{,}05 p_b + 1 p_z)(1+\pi) + 1{,}0 w = 1 p_b \qquad \text{(indústria } B\text{)}$$

$$(0{,}10 p_a + 0{,}20 p_z)(1+\pi) + 1{,}0 w + 1\rho = 3 p_z \qquad \text{(método 1)}$$

$$(1{,}00 p_b + 0{,}20 p_z)(1+\pi) + 0{,}02 w + 1\rho = 4{,}6 p_z \qquad \text{(método 2)}$$

Trata-se de um sistema muito particular, onde o método agrícola 1 corresponde a uma tecnologia trabalho-intensiva (em relação ao método 2) e utiliza uma mercadoria industrial produzida com uma tecnologia capital-intensiva (em relação à outra mercadoria industrial). O inverso ocorre com o método 2. Essa particularidade é importante para que se obtenha o tipo especial de relação w-π mostrado a seguir.

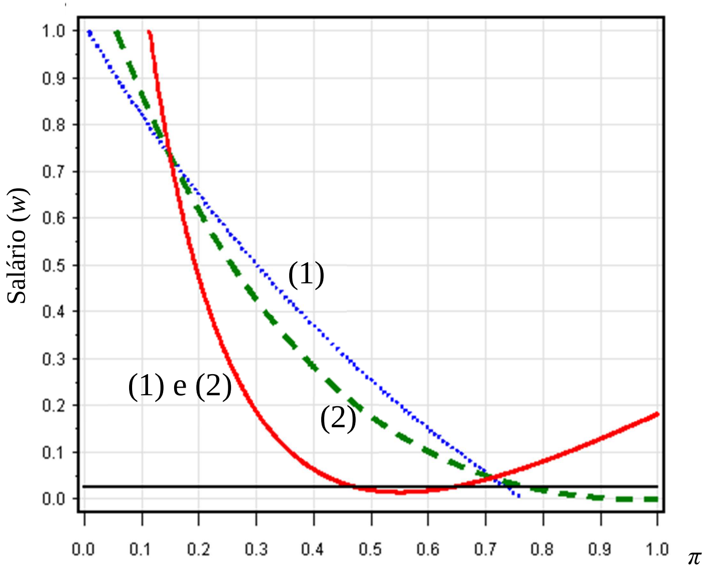
---

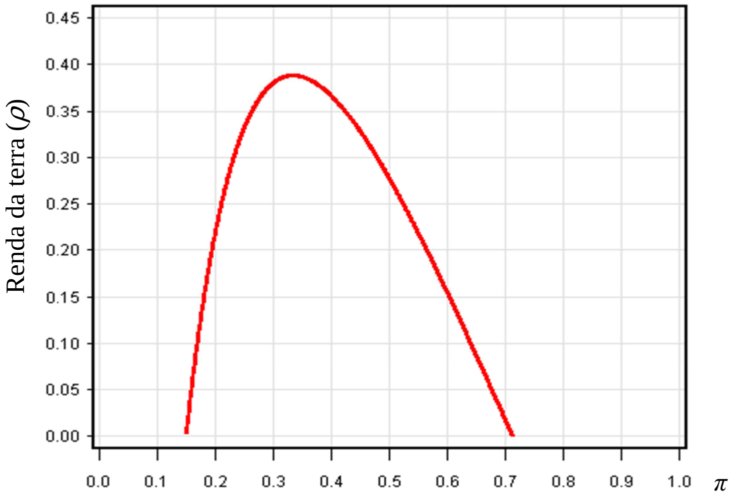
[21] Fixado *w*, o conflito distributivo se dá entre capitalistas e proprietários de terras. Se não houver separação de classes entre capitalistas e proprietários de terras, o conflito poderá ocorrer entre os capitalistas agrícolas e industriais, uma vez que para os primeiros a menor taxa de lucro será compensada por uma maior renda da terra, o que não ocorrerá para os últimos.

[22] Exemplo numérico apresentado e discutido em Venter e Hoffmann (1991).

Admite-se, novamente, que a demanda por cereal pode ser atendida usando exclusivamente o método de produção 2, mas, dada a área de terra homogênea disponível, não pode ser atendida usando exclusivamente o método 1, com menor produção por unidade de área.

Adotando o primeiro produto industrial como numerário $(p_a = 1)$, verifique que as 3 relações w-π (uso exclusivo do método 1, uso exclusivo do método 2 e uso simultâneo dos 2 métodos de cultivo do cereal) são as representadas pelas 3 curvas da figura a seguir.





Há dois pontos em que as 3 curvas w-π se cruzam: em $\pi = 0{,}15$ e $w = 0{,}73$ e no ponto de coordenadas $\pi = 0{,}71$ e $w = 0{,}045$. Para $\pi < 0{,}15$ será usado exclusivamente o método 2 e não haverá renda da terra. Para $0{,}15 < \pi < 0{,}71$ os dois métodos de cultivo do cereal serão usados simultaneamente e a renda da terra será positiva. Para $\pi > 0{,}71$ será usado exclusivamente o método 2, novamente com $\rho = 0$. Note-se que a relação w - π referente ao cultivo do cereal com a operação simultânea dos dois métodos é inicialmente decrescente (até $\pi = 0{,}55$) e posteriormente crescente. Dessa maneira, para uma pequena faixa de valores de *w*, há três possíveis soluções, que refletirão, da mesma maneira que no exercício 5.6, um conflito distributivo entre capitalistas e proprietários da terra (se houver separação de classes). No entanto, diferentemente do caso discutivo no exercício anterior, duas das possíveis soluções corresponderão a valores positivos (e diferentes) da renda da terra.

Se, por exemplo, fixarmos *w* em 0,025, as 3 soluções possíves correspondem aos pontos com $\pi = 0{,}476$ (e $\rho = 0{,}303$), $\pi = 0{,}641$ (e $\rho = 0{,}099$) e, agora na relação w - π referente ao uso exclusivo do método 2, $\pi = 0{,}774$ (e $\rho = 0$).

18. VALORES-TRABALHO EM SISTEMAS COM PRODUÇÃO CONJUNTA

Nesta seção será analisada a determinação dos valores-trabalho quando há produção conjunta, isto é, uma atividade econômica gera um produto formado por duas ou mais mercadorias. Um exemplo clássico é a produção simultânea de lã e de carne de carneiro.

Para explicar o problema, será usado um exemplo numérico apresentado por Steedman (1977), que causou grande impacto na literatura sobre determinação de valores-trabalho. A tabela a seguir mostra esse exemplo, constituído por dois processos de produção, ambos com produção conjunta das mercadorias *A* e *B*. Note-se que são apresentadas as quantidades de insumos e produtos obtidos empregando uma unidade de trabalho em cada processo.

Tabela 8. Fluxos de mercadorias em dois processos de produção, ambos com produção conjunta das mercadorias *A* e *B*.

Processo	Insumos			Produto	
	Mercadoria *A*	Mercadoria *B*	Trabalho	Mercadoria *A*	Mercadoria *B*
1	5	0	1	6	1
2	0	10	1	3	12

Pressupõe-se que cada unidade de trabalho necessita, para sua manutenção e reprodução, de 0,5 unidade de *A* e 5/6 unidade de *B*.

Admite-se, também, que o salário (w) é estritamente suficiente para atender a essas necessidades.

Fixando a unidade monetária de maneira que o preço da mercadoria B seja igual a 1. $(p_b = 1)$, o preço de A (p_a), o salário e a taxa de lucro (π) devem obedecer às seguintes equações[23]:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}5p_a + \dfrac{5}{6} = w \\ (5p_A + w)(1+\pi) = 6p_A + 1 \\ (10 + w)(1+\pi) = 3p_A + 12 \end{array}\right\} \qquad (113)$$

Pode-se verificar que a única solução desse sistema com significado econômico é

$$p_A = \frac{-3+\sqrt{54}}{27} = \frac{-1+\sqrt{6}}{9} = 0{,}1611\,,$$

$$w = 0{,}9139 \text{ e } \pi = 0{,}1438 \text{ ou } 14{,}38\%$$

Seja **Q** a matriz quadrada dos fluxos de mercadorias usadas como insumos. Da mesma maneira que na definição da matriz **Q** na seção 2, o elemento q_{ij} é a quantidade da i-ésima mercadoria usada no j-ésimo processo.

Seja **L** o vetor-linha das quantidades de trabalho[24]:

---

[23] Considerando que a despesa com salários é parte do capital empatado, como é usual em economia marxista.

[24] Em geral usamos uma letra minúscula para representar um vetor. No caso do vetor de quantidades de trabalho, o uso do L minúsculo se torna inconveniente, simplesmente porque ele pode ser confundido com o número 1.

$$\mathbf{L} = [L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_n] \tag{114}$$

Seja **D** a matriz quadrada das produções. Na *i*-ésima coluna dessa mtriz estão as quantidades produzidas na *i*-ésima indústria, usando os insumos da *i*-ésima coluna de **Q** e a quantidade de trabalho dada pelo *i*-ésimo elemento de **L**.

Na seção 2, como o produto de cada indústria era constituído por uma única mercadoria, a matriz **D** era uma matriz diagonal. Havendo produção conjunta, pelo menos um elemento fora da diagonal de **D** será positivo.

Para o exemplo da Tabela 18.1, temos

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 12 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{L} = [1 \quad 1]$$

Sendo **p** o vetor-linha dos preços, devemos ter[25]

$$(\mathbf{pQ} + w\mathbf{L})(1+\pi) = \mathbf{pD} \tag{115}$$

Sendo **d** o vetor-coluna que representa a cesta de consumo dos trabalhadores por unidade de tempo de trabalho, temos

$$w = \mathbf{pd} \tag{116}$$

As expressões (115) e (116) formam um sistema com $n+1$ equações. Como um dos preços é determinado pela escolha da

---

[25] Note-se que na presença de produção conjunta não é possível definir as matrizes de coeficientes técnicos **A** e **b.**

unidade monetária, o sistema tem $n+1$ incógnitas ($n-1$ preços, w e π).

Da mesma maneira que fez Steedman (1977), vamos admitir que uma determinada economia é formada por apenas duas indústrias: uma utilizando o processo 1 e empregando 5 unidades de trabalho e outra utilizando o processo 2 e empregando uma unidade de trabalho. Os fluxos físicos de mercadorias e trabalho são apresentados na Tabela 9.

Tabela 9. Fluxos físicos de mercadorias e trabalho.

Indústria	Insumos			Produção	
	Mercadoria *A*	Mercadoria *B*	Trabalho	Mercadoria *A*	Mercadoria *B*
1	25	0	5	30	5
2	0	10	1	3	12
Total	25	10	6	33	17

A partir dos dados dessa tabela verifica-se que o produto líquido dessa economia é

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{117}$$

Seja $\boldsymbol{\theta}$ o vetor-coluna de multiplicadores que mostram quantas unidades de cada processo são operados na economia. Para o exemplo numérico considerando temos

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então o produto líquido da economia é dado por

$$\mathbf{y} = \mathbf{D\theta} - \mathbf{Q\theta} = (\mathbf{D} - \mathbf{Q})\boldsymbol{\theta} \tag{118}$$

Para esse exemplo numérico temos

$$\mathbf{D} - \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{119}$$

e

$$\mathbf{y} = (\mathbf{D} - \mathbf{Q})\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{120}$$

Como o trabalho total é $\mathbf{L\theta} = 6$ e

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 5/6 \end{bmatrix}, \tag{121}$$

o consumo dos trabalhadores é

$$6\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{122}$$

Seja **v** o vetor-linha dos valores-trabalho por unidade de cada mercadoria. Conforme o procedimento já usado no caso da produção simples de mercadorias, devemos ter

$$\mathbf{vQ} + \mathbf{L} = \mathbf{vD} \tag{123}$$

ou

$$\mathbf{v}(\mathbf{D} - \mathbf{Q}) = \mathbf{L} \tag{124}$$

Para o exemplo numérico apresentado na Tabela 8, temos

$$\begin{bmatrix} v_A & v_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} v_A + v_B = 1 \\ 3v_A + 2v_B = 1 \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos $v_A = -1$ e $v_B = 2$. Com tais valores-trabalho, a mais-valia seria negativa. Esses resultados levam Steedman a sugerir que o conceito de valor-trabalho deveria ser definitivamente abandonado.

Mas, como bem mostram Morishima e Catephores (1980), os resultados absurdos decorrem de uma maneira errônea de calcular os valores-trabalho. Como se trata de tempos de trabalho, é óbvio que valores-trabalho não podem ser negativos, isto é, o vetor **v** não pode ter elementos negativos. No caso dos esquemas simples que estamos analisando, com trabalho totalmente uniforme (sempre com a mesma intensidade), o valor-trabalho (λ_y) de uma cesta de mercadorias **y** é obtido resolvendo o seguinte problema de programação linear[26]:

---

[26] Para calcular os preços ou os valores-trabalho, é indiferente usar as matrizes de insumos e produtos obtidos da tabela 8 ou da Tabela 9. Por simplicidade, optamos por usar sempre as matrizes **Q, D e L** obtidas da Tabela 8.

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Minimizar}\,\lambda_y = \mathbf{Lx} \\ \text{com} & (\mathbf{D}-\mathbf{Q})\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \\ \quad\text{e} & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}\right\} \tag{125}$$

Neste problema, são dadas as matrizes **L, D, Q** e **y** e a solução do problema irá fornecer o vetor **x** de multiplicadores e o valor-trabalho (λ_y) de **y.**

Vejamos, particularmente, a determinação do valor-trabalho do produto líquido dado pela expressão (117). O problema de programação linear a ser resolvido fica:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Min }\lambda_y = x_1 + x_2 \\ \text{com} & 1x_1 + 3x_2 \geq 8 \\ & 1x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ & x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \tag{126}$$

A solução é $x_1 = 0$ e $x_2 = 3{,}5$, de maneira que $\lambda_y = 3{,}5$.

Um problema de programação linear relativamente simples como esse pode ser resolvido pelo método gráfico. Entretanto, para resolver vários problemas desse tipo ou para problemas envolvendo mais de duas variáveis, é muito conveniente usar um programa de computador.

O dual do problema (125) é

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Max } \boldsymbol{\sigma}\mathbf{y} \\ \text{com} & \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{D}-\mathbf{Q}) \le \mathbf{L} \\ \text{e} & \boldsymbol{\sigma} \ge \mathbf{0} \end{array}\right\} \qquad (127)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor-linha dos valores-sombra:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

Para o exemplo numérico que estamos analisando o problema dual é

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Max } 8\sigma_1 + 7\sigma_2 \\ \text{com} & \sigma_1 + \sigma_2 \le 1 \\ & 3\sigma_1 + 2\sigma_2 \le 1 \\ & \sigma_1 \ge 0 \text{ e } \sigma_2 \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (128)$$

A solução desse problema é $\sigma_1 = 0$ e $\sigma_2 = 0{,}5$, gerando um valor máximo da função objetivo igual a 3,5. Note-se que esse valor é idêntico ao valor ótimo da função objetivo no problema primal (125). Há um teorema que garante que o valor ótimo da função objetivo no problema dual é sempre igual ao valor ótimo da função objetivo no problema primal[27]. Isso significa que para os problemas formulados em (125) e (127), nos respectivos pontos ótimos tem-se sempre

$$\lambda_y = \mathbf{Lx} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{y} \qquad (129)$$

[27] Ver, por exemplo, Lanzer (1982).

O valor nulo do valor-sombra da mercadoria *A* na solução do dual $(\sigma_1 = 0)$ significa que a primeira restrição em (126) não é limitante; substituindo a solução $(x_1 = 0$ e $x_2 = 3{,}5)$ nessa equação obtém-se a desigualdade $10{,}5 > 8$, mostrando que há *folga*.

Por outro lado, a segunda é limitante; substituindo a solução $(x_1 = 0$ e $x_2 = 3{,}5)$ nessa equação obtém-se a igualdade 7=7. O valor-sombra da mercadoria *B* obtido na solução do dual $(\sigma_2 = 0{,}5)$ mostra que a redução de uma unidade da mercadoria *B* no produto líquido causaria uma redução de 0,5 no seu valor-trabalho, isto é, o valor-trabalho de uma cesta com 8 unidades de *A* e 6 unidades de *B* é $3{,}5 - 0{,}5 = 3{,}0$. Analogamente, o valor-trabalho de uma cesta com o produto líquido estabelecido e uma unidade adicional de *B* é igual a 3,5 + 0,5 = 4, como mostra a Tabela 10.

Pode-se verificar que a equação (129) é obedecida em todas as linhas da Tabela 10.

Na Tabela 10, a mais-valia foi determinada como o valor-trabalho da cesta de mercadorias obtida subtraindo do produto líquido o consumo dos trabalhadores (cujo valor-trabalho é o capital variável).

Tabela 10. Valores-trabalho de cestas com y_A unidades da mercadoria A e y_B unidades da mercadoria B, para o sistema de produção descrito nas Tabelas 8 e 9.

Cesta ou respectivo valor-trabalho	y_A	y_B	Valor-trabalho λ_y	Solução		Valor-sombra	
				x_1	x_2	σ_1	σ_2
Produto líquido	8	7	3,5	0	3,5	0	0,5
Prod. líq. –1*B*	8	6	3,0	0	3,0	0	0,5
Prod. líq. +1*B*	8	8	4,0	0	4,0	0	0,5
Prod. líq. –1*A*	7	7	3,5	0	3,5	0	0,5
Prod. líq. +1*A*	9	7	3,5	0	3,5	0	0,5
Prod. Total	33	17	11,0	0	11,0	1/3	0
Cap. constante	25	10	25/3	0	25/3	1/3	0
Cap. Variável	3	5	2,5	0	2,5	0	0,5
Mais-valia	5	2	5/3	0	5/3	1/3	0
A cesta-salário	0,5	5/6	5/12	0	5/12	0	0,5
1 unid. de *A*	1	0	1/3	0	1/3	1/3	0
1 unid. de *B*	0	1	0,5	0	0,5	0	0,5
Outra cesta-salár.(1)	0,57	0,95	0,475	0	0,475	0	0,5
Outro cap. var.(1)	3,42	5,70	2,85	0	2,85	0	0,5
Outra mais-valia(1)	4,58	1,30	1,5267	0	1,5267	1/3	0

(1) Referente ao exemplo discutido adiante, com cesta-salário 14% maior.

É importante notar que os valores-trabalho da Tabela 10 *não são aditivos*. Nos esquemas econômicos sem produção conjunta os valores-trabalho são aditivos, mas essa propriedade não é preservada na presença de produção conjunta, como pode ser verificado na Tabela 10. Se os valores trabalhos fossem aditivos, o valor-trabalho do produto líquido poderia ser calculado com base nos valores-trabalho por unidade de cada mercadoria, e seria

$$8 \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot 0{,}5 = 6{,}167$$

Entretanto, o valor-trabalho do produto líquido é muito mais baixo: 3,5.

Sendo **v** o vetor-linha dos valores-trabalho por unidade, de cada mercadoria, em geral temos[28]

$$\lambda_y \leq \mathbf{vy} \tag{130}$$

O valor-trabalho da produção total (33 unidades de *A* e 17 de *B*) é 11, mas a soma dos valores-trabalho das cestas correspondentes ao capital constante, ao capital variável e à mais-valia é

$$\frac{25}{3} + 2{,}5 + \frac{5}{3} = 12{,}5$$

A equação (65), deduzida para economias sem produção conjunta, não é necessariamente válida quando há produção conjunta.

Considerando os valores-trabalho apresentados na tabela 10, a taxa de mais-valia é

$$\mu_3 = \frac{\frac{5}{3}}{2{,}5} = \frac{2}{3} = 0{,}667 \text{ ou } 66{,}7\%$$

A economia emprega 6 unidades de trabalho e o valor-trabalho das mercadorias consumidas pelos trabalhadores (igual

---

[28] Como mostram Morishima e Cathefores (1980). Há exemplo bem conhecido de falta de aditividade em outros campos da Economia: havendo economias de escala, o custo de produção de 1000 unidades pode ser muito menor do que 200 vezes o custo de produção de 5 unidades.

ao capital variável) é 2,5. Então o trabalho excedente (não pago) é $6-2{,}5=3{,}5$ e o grau de exploração poderia ser medido pela relação

$$\mu_1 = \frac{6-2{,}5}{2{,}5} = 1{,}4 \text{ ou } 140\%$$

No cálculo de μ_3 tanto o numerador como o denominador são obtidos por meio da resolução de problemas de programação linear nos quais se minimiza o tempo de trabalho. Mas a combinação de atividades efetivamente existente em uma economia capitalista não é feita com o objetivo de minimizar o esforço humano. Isso implica em certo "desperdício" de trabalho, que faz com que o trabalho excedente (o numerador no cálculo de μ_1) possa ser maior do que a mais-valia (o numerador no cálculo de μ_3), de maneira que[29]

$$\mu_1 \geq \mu_3$$

O grau de exploração também pode ser obtido usando o valor-trabalho da cesta de consumo por unidade de trabalho, que é $5/12$. A parte não paga é $1-5/12$ e, portanto, o grau de exploração é

[29] Ver Morishima e Catephores (1980)

$$\mu_2 = \frac{1-\frac{5}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

Neste exemplo verifica-se que $\mu_1 = \mu_2 > \mu_3$. Morishima e Catephores (1980, p. 52) afirmam que em geral $\mu_1 = \mu_2 \geq \mu_3$, mas na próxima seção veremos que, em esquemas com renda da terra podemos ter $\mu_2 > \mu_1$.

Em seguida vamos examinar o que ocorre se o exemplo numérico analisado for modificado, multiplicando a cesta de consumos dos trabalhadores por 1,14, de maneira que passamos a ter

$$d = 1{,}14 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 5/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}57 \\ 0{,}95 \end{bmatrix}$$

Então, no sistema (113) a primeira equação deve ser substituída, obtendo-se o sistema

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}57\, p_A + 0{,}95 = w \\ (5p_A + w)(1+\pi) = 6p_A + 1 \\ (10 + w)(1+\pi) = 3p_A + 12 \end{array}\right\} \qquad (131)$$

Se, nas duas últimas equações, substituirmos w pela expressão fornecida pela primeira equação e, em seguida, eliminarmos π, obtemos a seguinte equação do 2º grau em p_A:

$$13{,}29p_A^2 + 3{,}42p_A + 0{,}45 = 0 \qquad (132)$$

O discriminante dessa equação é negativo, mostrando que não há solução real. O sistema (131) não tem solução. O acréscimo de 14% nos componentes da cesta de consumo dos trabalhadores torna a economia inviável.

Entretanto, o cálculo dos valores-trabalho não indica que essa economia seja inviável. O consumo total dos trabalhadores é

$$6 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}57 \\ 0{,}95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}42 \\ 5{,}70 \end{bmatrix}$$

Subtraindo essa cesta do produto líquido obtemos a cesta correspondente à mais-valia:

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3{,}42 \\ 5{,}70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}58 \\ 1{,}30 \end{bmatrix}$$

Verifica-se (ver 3 ultimas linhas da Tabela 10) que o valor-trabalho do consumo dos trabalhadores (igual ao capital variável) é 2,85, a mais-valia é 1,5267 e que o valor-trabalho do novo **d** é 0,475. As medidas do grau de exploração são

$$\mu_1 = \frac{6 - 2,85}{2,85} = 1,105$$

$$\mu_2 = \frac{1 - 0,475}{0,475} = 1,105$$

e
$$\mu_3 = \frac{1,5267}{2,85} = 0,536$$

Fica claro, portanto, que, na presença de produção conjunta, a taxa de mais-valia positiva, por si só, não garante que haja lucro[30].

Na ausência de produção conjunta foi possível obter relações entre valores-trabalho e preços de produção, como a expressão (78). Faz sentido, então falar em "transformação de valores em preços de produção". Neste capítulo, na presença de produção conjunta, vimos como preços e valores-trabalho podem ser determinados a partir dos fluxos físicos de mercadorias. Mas não é possível obter uma relação funcional que caracterize uma "tranformação de valores em preços". A expressão deixa de ter sentido. Isso não reduz em nada a importância que se possa dar aos valores-trabalho. Mesmo no caso da produção simples de mercadorias, a determinação prévia dos valores-trabalho

---

[30] Para demonstrar o que chamam de "Teorema Marxista Fundamental Generalizado", Morishima e Catephores (1980, p. 56-61) pressupõe uma economia capitalista viável, o que torna o teorema parcialmente tautológico. Parece mais razoável considerar que, na presença de produção conjunta, a existência de exploração $(\mu_1 > 0)$ é condição necessária, mas não suficiente, para que haja lucros positivos.

certamente não é necessária para determinar os preços de produção[31].

Exercícios 6

6.1. Considere uma economia com dois processos de produção, ambos com produção conjunta das mercadorias *A* e *B*. A Tabela a seguir mostra os fluxos de mercadorias e trabalho por unidade de tempo.

Tabela dos fluxos de mercadorias e trabalho

Indústria	Insumos			Produção	
	Mercadoria *A*	Mercadoria *B*	Trabalho	Mercadoria *A*	Mercadoria *B*
1	1	3	5	13	10
2	2	2	8	9	18
Total	3	5	13	22	28

Admite-se que o consumo dos trabalhadores por unidade de trabalho é igual a uma unidade de cada mercadoria.

Fixando o preço da mercadoria *A* em 1 $(p_A = 1)$, mostre que $p_B = 2$, $w = 3$ e a taxa de lucro (π) é igual a 50%.

Verifique os resultados apresentados na Tabela a seguir, resolvendo (por meio de um computador) problemas de programação linear como indicado em (124).

[31] Para o economista interessado na determinação dos preços é absolutamente desnecessário pensar nos valores-trabalho, da mesma maneira que para um engenheiro civil preocupado com o peso de uma viga é totalmente desnecessário que ele lembre que esse peso depende da massa da viga e da massa do globo terrestre.

Valores-trabalho de cestas com y_A unidades da mercadoria *A* e y_B unidades da mercadoria *B*.

Cesta ou respectivo valor-trabalho	y_A	y_B	Valor-trabalho λ_y	Multiplicadores		Valores-sombra	
				x_1	x_2	σ_1	σ_2
Produto líquido	19	23	13	1	1	0,1678	0,4266
Prod. líq. –1A	18	23	12,8322	0,8881	1,0490	0,1678	0,4266
Produto total	23	27	15,3776	1,2518	1,1399	0,1678	0,4266
Cap. constante	4	4	2,3776	0,2518	0,1399	0,1678	0,4266
Cap. variável	13	13	7,7273	0,8182	0,4546	0,1678	0,4266
Mais-valia	6	10	5,2727	0,1818	0,5454	0,1678	0,4266
A cesta-salário	1	1	0,5944	0,0629	0,0350	0,1678	0,4266
1 unid. de *A*	1	0	0,4167	0,0833	0	0,41670	0
1 unid. de *B*	0	1	0,5	0	0,0625	0	0,5

Notar que nas 7 primeiras linhas dessa Tabelas os dois valores-sombra são positivos, indicando que não há folga em nenhuma das duas restrições. Nessas condições os respectivos valores-trabalho são aditivos. Pode-se verificar que somando o capital constante, o capital variável e a mais-valia, o resultado é igual ao valor-trabalho do produto total.

Verifica-se, também, que nesse caso

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0{,}682$$

19. VALORES-TRABALHO EM SISTEMAS COM RENDA DA TERRA

A terra nua (da mesma maneira que qualquer outro recurso natural) coloca um problema especial para a economia marxista: como algo sem valor-trabalho tem preço?

Não há dúvida, na teoria, de que o preço da terra é uma conseqüência da renda da terra (e não o contrário). É necessário, então, explicar como se determina a renda da terra e verificar se há alguma parcela do valor-trabalho total que possa ser associado a essa renda.

Marx define vários tipos de renda da terra (renda diferencial I, renda diferencial II e renda absoluta) e associa todas à mais-valia gerada na própria agricultura, pressupondo, para isso, que a composição orgânica do capital nesse setor é mais baixa do que no resto da economia. Esta é, obviamente, uma pressuposição muito limitante para um teoria geral. De qualquer maneira, a análise apresentada por Marx se baseia no seu procedimento errôneo de "transformação de valores em preços de produção".

Vimos, no capítulo 17, que os esquemas Sraffianos permitem explicar apropriadamente a renda associada à diferenciação entre tipos de terra (renda extensiva) e a renda associada ao uso de diferentes métodos de produção em terra homogênea (renda intensiva).

Cabe, agora, investigar se a renda da terra em esquemas Sraffianos pode ser associada a alguma parcela específica do valor-trabalho total. Para isso, vamos considerar, inicialmente, um esquema muito simples com renda extensiva. Há apenas uma mercadoria (o cereal) produzida em dois tipos de terra. A Tabela 11 mostra a produção e os insumos utilizados em cada um dos dois tipos de terra.

Tabela 11. Produção do cereal e insumos utilizados no processo de produção em cada tipo de terra.

Tipo de terra ou processo de produção	Insumos			Produção de cereal
	Cereal	Trabalho	Terra	
1	1	4	1	10
2	5	5	1	20

Preliminarmente vamos analisar a relação entre salário e taxa de lucro, sem fixar a cesta de consumo dos trabalhadores por unidade de trabalho. Admite-se que a unidade monetária seja estabelecida de maneira que o preço da única mercadoria seja igual a 1. Considerando o pagamento dos salários como parte do capital empatado, obtemos as seguintes equações:

$$(1+4w)(1+\pi)+\rho_1 = 10 \tag{133}$$

$$(5+5w)(1+\pi)+\rho_2 = 20 \tag{134}$$

Vamos admitir que a produção necessária não pode ser obtida usando apenas um dos tipos de terra, mas que não é necessário usar toda a área disponível dos dois tipos de terra. Então, de acordo com o que foi discutido na seção 17.1, haverá sobra de um dos dois tipos de terra e a respectiva renda será nula, de maneira que

$$\rho_1\rho_2 = 0 \tag{135}$$

O sistema formado pelas equações (133), (134) e (135) tem 4 incógnitas: w, π, ρ_1 e ρ_2.

Se a terra marginal for a primeira $(\rho_1 = 0)$, temos as seguintes equações:

$$w = \frac{9-\pi}{4(1+\pi)} \tag{136}$$

$$\rho_2 = 20 - (5+5w)(1+\pi) \tag{137}$$

Por outro lado, se a terra marginal for a segunda $(\rho_2 = 0)$, temos as seguintes equações:

$$w = \frac{3-\pi}{1+\pi} \tag{138}$$

$$\rho_1 = 10 - (1+4w)(1+\pi) \tag{139}$$

A Figura 9 mostra as curvas *w*-*π* correspondentes às equações (136) e (138). Verifica-se que elas cruzam no ponto em que $\pi = 1$ e $w = 1$. Para $\pi < 1$ a produção é mais eficiente na terra tipo 2 (maior *w* potencial para dado π); esta será totalmente utilizada e vai gerar renda; a terra tipo 1 será a marginal. Para $\pi > 1$ a produção é mais eficiente na terra tipo 1 (que vai gerar renda) e a terra tipo 2 será a marginal. Para $\pi = 1$ os dois tipos de terra são igualmente eficientes e não haverá renda da terra. A fronteira tecnológica é a linha que passa pelos pontos A(0; 2,25), B(1;1) e C(3;0)

A Figura 10 mostra como varia a renda da terra por unidade de área. Para $\pi < 1$ a renda é positiva na terra tipo 2 e para $\pi > 1$ a renda é positiva na terra tipo 1.

Vamos analisar, a seguir, a determinação dos valores-trabalho, admitindo que há, apenas, uma unidade de área de cada um dos dois tipos de terra. Verifica-se, na Tabela 11, que o produto líquido por unidade de área é igual a 9 unidades do cereal na terra tipo 1 e é igual a 15 na terra tipo 2. Sejam x_1 e x_2 os multiplicadores dos processos descritos nas duas linhas da Tabela 11 que precisamos determinar para compor um sistema econômico hipotético que gere determinado produto líquido. Então o valor-trabalho λ_y de um produto líquido igual a y unidades do cereal é a solução do seguinte problema primal:

$$\text{Minimizar } \lambda_y = 4x_1 + 5x_2 \tag{140}$$

$$\text{com} \quad 9x_1 + 15x_2 \geq y\,, \tag{141}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\,, \tag{142}$$

$$x_1 \leq 1 \text{ e } x_2 \leq 1. \tag{143}$$

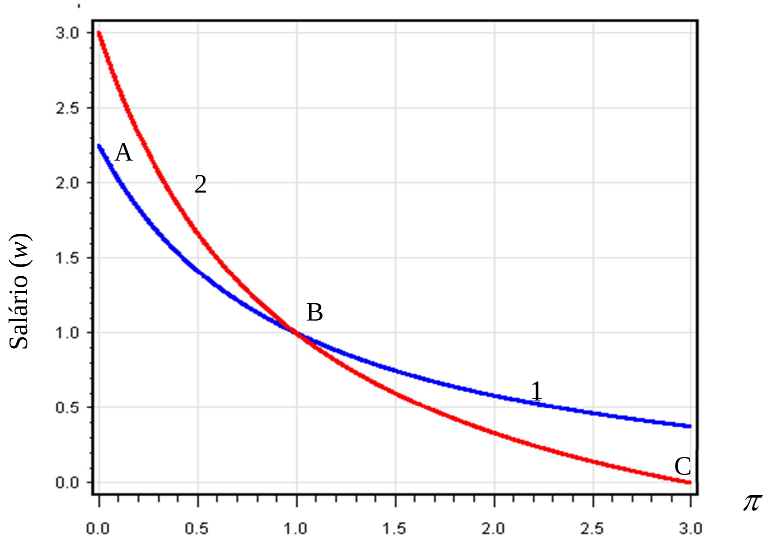


Figura 9. Relações *w*-*π* para o exemplo da Tabela 11

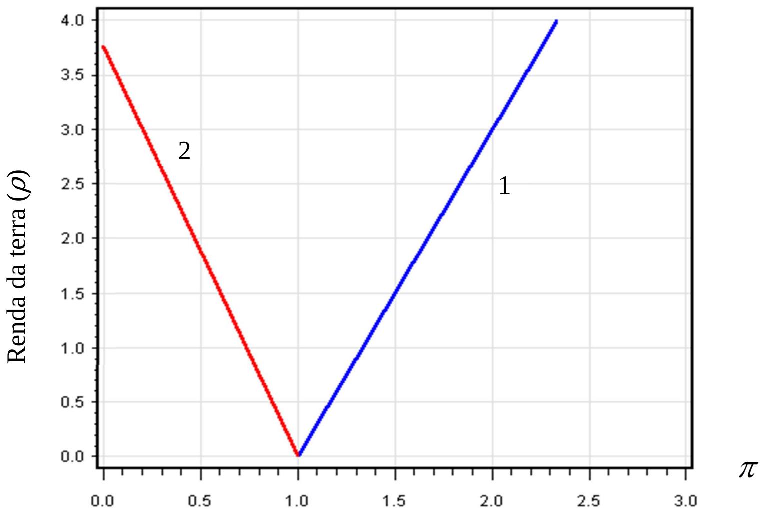


Figura 10. Variação da renda da terra em função de *π* para o exemplo da Tabela 11

Indicando o calor-sombra do cereal por σ_c e os valores-sombra por unidade das terras 1 e 2 por σ_1 e σ_2, respectivamente, o problema dual é

$$\text{Maximizar } \sigma_c y - \sigma_1 - \sigma_2 \tag{144}$$

$$\text{com} \quad 9\sigma_c - \sigma_1 \leq 4, \tag{145}$$

$$15\sigma_c - \sigma_2 \leq 5, \tag{146}$$

$$\sigma_c \geq 0,\ \sigma_1 \geq 0 \text{ e } \sigma_2 \geq 0 \tag{147}$$

Na função objetivo (144) os valores-sombra dos dois tipos de terra ficam com sinal negativo porque as restrições correspondentes no problema primal [as inequações (143)] têm sentido oposto ao da restrição associada ao valor-sombra do cereal [a restrição (141)].

Para poder calcular o capital constante vamos admitir, agora, que a Tabela 11 descreve o fluxo de mercadorias na economia e, para calcular o capital variável, vamos admitir que o consumo dos trabalhadores é igual a uma unidade do cereal por unidade de trabalho. Assim, o consumo total dos trabalhadores é igual a 9 unidades do cereal.

A Tabela 12 mostra o valor-trabalho de cestas de cereal correspondentes a vários componentes dessa economia hipotética.

Tabela 12. Valores-trabalho de *y* unidades do cereal, para o sistema de produção descrito na Tabela 11.

Conceito		y	Valor-trabalho λ_y	Solução		Valores-sombra		
				x_1	x_2	σ_c	σ_1	σ_2
Produto líq.		24	9	1	1	4/9	0	5/3
Prod. líq. -1		23	77/9	8/9	1	4/9	0	5/3
Cap. Constante		6	2	0	0,4	1/3	0	0
Cap. variável (*v*)		9	3	0	0,6	1/3	0	0
Mais-valia (*m*)		15	5	0	1	1/3	0	0
1 unidade		1	1/3	0	2/30	1/3	0	0
$\delta = 0{,}6$	v	5,4	1,8	0	0,36	1/3	0	0
	m	18,6	6,6	0,4	1	4/9	0	5/3
$\delta = 1{,}4$	v	12,6	4,2	0	0,84	1/3	0	0
	m	11,4	3,8	0	0,76	1/3	0	0
$\delta = 2$	v	18	19/3	1/3	1	4/9	0	5/3
	m	6	2	0	0,4	1/3	0	0

Utilizando as expressões (140) e (144), pode-se verificar, para qualquer linha da Tabela 12, que o valor da função objetivo do problema dual coincide com o valor da função objetivo do problema primal.

Note-se que o valor de σ_c (4/9) na primeira linha da Tabela 12 é igual à redução em λ_y quando se reduz de uma unidade o valor de *y*.

O valor-trabalho de uma unidade do cereal é igual a 1/3. Se os valores-trabalho fossem aditivos, o valor-trabalho do produto líquido (24 unidades do cereal) deveria ser igual a 8. No entanto, esse valor-trabalho é maior (igual a 9). Verifica-se que

$$\lambda_{24} = 9 > 8 = 24.(1/3) = 24\lambda_1 \tag{148}$$

Note-se que, neste caso, o sentido da desigualdade é oposto ao de (130).

A desigualdade (148) ocorre porque a produção de uma única unidade do cereal pode ser obtida usando apenas o processo mais produtivo (cultivo da terra 2), ao passo que a produção de 24 unidades exige o uso, também, da terra de tipo 1.

Consideremos a primeira linha da Tabela 12 e vejamos como interpretar o valor-sombra da terra tipo 2 $(\sigma_2 = 5/3)$. De acordo com a expressão (144), que fornece o valor da função objetivo do problema dual, o valor-trabalho do produto líquido (24 unidades do cereal) é

$$\lambda_{24} = \sigma_c 24 - \sigma_1 - \sigma_2$$

ou
$$\lambda_{24} = \frac{4}{9} \cdot 24 - \frac{5}{3} = \frac{32}{3} - \frac{5}{3} \tag{149}$$

A primeira parcela $(24\sigma_c = 32/3)$ representa o valor-trabalho do produto líquido se toda a produção fosse feita na terra tipo 1, menos produtiva. Nesse tipo de terra é obtido um produto líquido de 9 unidades do cereal por unidade de área, ocupando 4 unidades de trabalho por unidade de área. Portanto, para produzir $y = 24$ seria necessário cultivar $\frac{24}{9} = \frac{8}{3}$ unidades de área, ocupando

$$\frac{8}{3} \cdot 4 = \frac{32}{3} \text{ unidades de trabalho.}$$

Então o valor subtraído $(\sigma_2 = 5/3)$ na expressão (149) representa a redução no valor-trabalho de y devida à disponibilidade de uma unidade da terra tipo 2, mais produtiva. O valor-sombra por unidade da terra tipo 2 é a "economia" de valor-trabalho associada à disponibilidade de uma unidade desse tipo de terra.

Analogamente, no âmbito da análise monetária (dos preços), a renda extensiva em determinado tipo de terra está associada à escassez de um tipo de terra mais eficiente. Entretanto, no âmbito dos valores-trabalho, a terra mais produtiva é sempre a mesma (a terra tipo 2 no exemplo analisado), ao passo que no âmbito dos valores monetários a ordenação dos vários tipos de terra conforme sua eficiência depende da taxa de lucro. No exemplo analisado, a terra 2 é mais eficiente se $\pi < 1$, mas para $\pi > 1$ a mais eficiente é a terra de tipo 1.

Para $\pi = 1$ não haverá renda da terra, mas o valor-sombra da terra de tipo 2 será $\sigma_2 = 5/3$ se o produto líquido desejado for superior a 9. Note-se, entretanto, que o valor-sombra da terra não é um tempo de trabalho efetivamente dispendido; é um tempo de trabalho hipotético: o tempo de trabalho adicional necessário à produção se a disponibilidade da terra mais produtiva fosse reduzida de uma unidade.

A seguir vamos analisar como a taxa de lucro (π) varia em função da taxa de exploração (μ_1). Para que a taxa de exploração seja variável, vamos variar o consumo dos trabalhadores por unidade de trabalho, que passamos a indicar por δ. Na quarta linha do corpo da Tabela 12 admitimos que $\delta = 1$. Nas 6 últimas linhas dessa tabela são obtidos o capital variável e a mais-valia para $\delta = 0{,}6$, $\delta = 1{,}4$ e $\delta = 2$, mantendo sempre as condições de produção estabelecidas na Tabela 11.

Para $\delta = 1$ obtemos as seguintes medidas do grau de exploração:

$$\mu_1 = \frac{9 - \frac{19}{3}}{\frac{19}{3}} = 0{,}4211,$$

$$\mu_2 = \frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 0{,}5$$

e $$\mu_3 = \frac{2}{\frac{19}{3}} = 0{,}3158$$

Verifica-se que, neste caso,

$$\mu_2 > \mu_1,$$

como foi anunciado quando discutimos a ordenação das três medidas de exploração no capítulo 18.

A Tabela 13 mostra as três medidas do grau de exploração para diversos valores de δ.

Tabela 13. As medidas do grau de exploração na economia descrita na Tabela 11, para diferentes valores do consumo dos trabalhadores (δ) por unidade de trabalho

δ	Medidas do grau de exploração		
	μ_1	μ_2	μ_3
0,6	4	4	3,6667
1	2	2	5/3=1,6667
1,4	8/7=1,1429	8/7=1,1429	0,9048
2	0,4211	0,5	0,3158

Pode-se verificar que a mais-valia se torna nula para $\delta = 8/3 = 2{,}667$

Por outro lado, fixando o preço do cereal em 1, temos $w = \delta$ e o valor de π pode ser calculado usando (133) com $\rho_1 = 0$ ou (134) com $\rho_2 = 0$. De acordo com a Figura 9, para $w = \delta > 1$ deverá ser usada a equação (133), calculando-se

$$\pi = \frac{10}{1+4\delta} - 1$$

e para $w = \delta < 1$ deverá ser usada a equação (134), calculando-se

$$\pi = \frac{20}{5+5\delta} - 1$$

Cabe notar que a economia é inviável para $\delta = w > 2{,}25$.

Dentro do intervalo $0 \leq \delta \leq 2{,}25$ podemos calcular, para cada valor de δ, os correspondentes valores de μ_1 e π, obtendo a relação funcional representada na Figura 11.

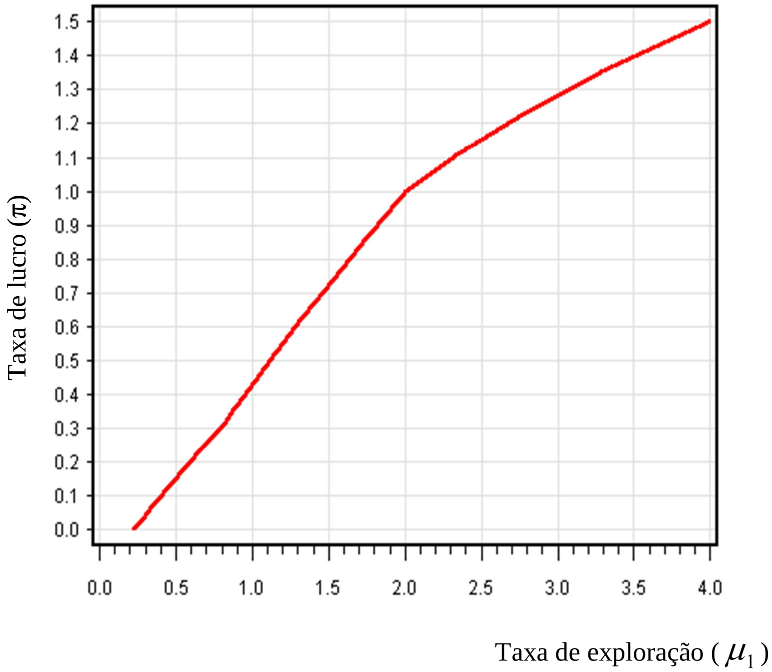


Figura 11. A taxa de lucro (π) como fução da taxa de exploração (μ_1) para o exemplo da Tabela 11.

Para $\delta \leq 5/3$, correspondendo a $\mu_1 \geq 0{,}8$, o consumo dos trabalhadores pode ser produzido usando apenas a terra tipo 2, mais produtiva. Para $\delta > 5/3$, correspondendo $\mu_1 < 0{,}8$, torna-se necessário usar também a terra tipo 1. Por isso é que há, na

Figura 11, uma mudança da declividade da relação funcional no ponto $\mu_1 = 0{,}8$ e $\pi = 0{,}304$. Também ocorre uma mudança mais brusca de inclinação no ponto $\mu_1 = 2$ e $\pi = 1$, que é o ponto no qual se altera a ordem de eficiência econômica dos dois tipos de terra, conforme foi visto na Figura 9.

É interessante notar que para $2{,}25 < \delta < 8/3 = 2{,}667$ a mais-valia é positiva e $\mu_1 > 0$, mas a economia é invariável e não há lucro. A existência de mais-valia positiva é condição necessária para que haja lucro, mas não é condição suficiente para que isso ocorra.

Calcular valores-trabalho para o sistema econômico descrito na Tabela 11 com $\delta = 2{,}3$ é pura perda de tempo. É a análise no domínio dos preços que mostra que essa economia é inviável. Não tem sentido insistir na idéia de que a determinação dos valores-trabalho deve preceder a determinação dos preços.

Da mesma maneira que no capítulo 18, o exemplo analisado neste capítulo mostra que não há como "transformar valores-trabalho em preços". Embora a existência de mais-valia seja condição necessária para que a economia gere lucros e renda da terra, não é possível separar uma parcela da mais-valia que seja a "fonte" da renda da terra.

Um exemplo numérico de determinação de valores-trabalho em um esquema que considera a produção de uma mercadoria industrial, além da produção de cereal em dois tipos de terra, pode ser encontrado em Cunha e Hoffmann (2000). No mesmo artigo encontra-se uma apresentação do problema mais geral, considerando um esquema com n_a atividades industriais e n_z tipos de terra

A determinação de valores-trabalho em esquemas com renda intensiva é analisada em Hoffmann e Cunha (2001) e Hoffmann (2013).

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1.1.

Fluxos de mercadorias e trabalho

Setor	Setor			Sub-Total	Produto Líquido	Total
	1	2	3			
1	120	25	33	178	122	300
2	0	40	9	49	51	100
3	9	9	30	48	12	60
Trabalho	30	20	12	62		

1.2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 1{,}8 \end{bmatrix}$$

Fluxos intersetoriais, demanda final e valor bruto da produção

Setor	Setor		Demanda Final	Valor bruto da produção
	Primário	Secundário		
Primário	34	106	200	340
Urbano	136	424	500	1060

2.1.

a) $3\,A + 6\,B + 0{,}15$ trab. $\rightarrow 12\,A$

$1\,A + 1\,B + 0{,}2$ trab. $\rightarrow 7\,B$

Produto líquido = $8\,A$

b) 0,04375

c) 0,040625

d) $R = 1{,}132$

e) $w = 21{,}548$

2.2.

a) $3\,A + \ \ 3\,B + 0{,}4$ trab. $\rightarrow 105\,A$

$60\,A + 24\,B + 0{,}6$ trab. $\rightarrow \ \ 45\,B$

Produto líquido: $42\,A$ e $18\,B$

b) $R = 2/3$

c) $\pi = \frac{2}{3}(1 - w)$

2.4

a) $10\,A$ e $3\,B$

b) $2\,B + 10$ trab. $\rightarrow 20\,A$

$10\,A + \ \ 1$ trab. $\rightarrow \ \ 2\,B$

c) 1,1 e 6

d) $w = 0{,}7537$,

$\pi = 7{,}934\%$ e $p_B = 5{,}7735$

2.5.

a) As mercadorias 1 e 2 constituem um conjunto de mercadorias não-básicas. As mercadorias 3 e 4 são básicas.

b) 100%

2.6.

a) 1/184 e 19/1380

b) $12\,A + 18\,B + 0{,}6$ trab. $\rightarrow 168\,A$

$156\,A + 78\,B + 1{,}3$ trab. $\rightarrow 234\,B$

c) $10\,A + \ 15\,B + 0{,}5$ trab. $\rightarrow 140\,A$

$60\,A + 30\,B + 0{,}5$ trab. $\rightarrow \ \ 90\,B$

d) 100%

e) 57,91%

2.7. A única mercadoria básica é a 3ª . Com $p_3 = 1$ obtemos $0{,}5(1 + \pi) + w = 1$

a) 100% b) $w = 0{,}4$

2.8. Indicando os preços de ferro, aço e pão por p_1 , p_2 e p_3 , respectivamente, obtemos

$$0{,}25 p_2 (1+\pi) + 3w = p_1$$
$$p_1 (1+\pi) + 8w = p_2$$
$$0{,}03 p_2 (1+\pi) + 0{,}1w = p_3$$

Verifica-se que pão é uma mercadoria não-básica.

Fazendo $p_1 = 1$ obtemos

$$w = \frac{1 - 0{,}25\left(1+\pi\right)^2}{3 + 2\left(1+\pi\right)}$$

que corresponde a um arco de curva ligeiramente convexo no 1º quadrante.

Fazendo $p_2 = 1$ obtemos

$$w = \frac{1 - 0{,}25\left(1+\pi\right)^2}{8 + 3\left(1+\pi\right)}$$

que corresponde a um arco de curva ligieiramente côncavo no 1º quadrante.

Verifica-se que a mercadoria padrão é formada por ferro e aço na proporção de 2 para 1. Se adotarmos uma unidade monetária tal que $2p_1 + p_2 = 28$ a relação w-π será linear:

$w = 1 - \pi$

2.9.

a) $4\,A + 4\,B + 4{,}8$ trab. $\rightarrow 16A$

$4\,A + 0{,}8\,B + 8$ trab. $\rightarrow 4{,}8\,B$

b) $3{,}75\,A + 3{,}75\,B + 4{,}5$ trab. $\rightarrow 15\,A$

$6{,}25\,A + 1{,}25\,B + 12{,}5$ trab. $\rightarrow 7{,}5B$
Prod. líquido: $5\,A$ e $2{,}5\,B$

c) 50%

2.10.

a) As mercadorias 2 e 4 são básicas e as mercadorias 1 e 3 são não-básicas.

b) 25%.

3.1.

a) $p_1 = p_2 = 1,\ \pi = 0{,}25,\ w = 1{,}5,$
$v_1 = v_2 = 0{,}4$ e $\sigma = 2/3$

b) $p_2 = 5,\ \pi = 0{,}25,\ w = 7{,}5,$
$v_1 = 0{,}08,\ v_2 = 0{,}4$ e $\sigma = 2/3$

c) $p_2 = 2{,}4,\ \pi = 0{,}2,\ w = 0{,}5,$
$v_1 = 1,\ v_2 = 3,\ \sigma = 0{,}6$

d) $p_2 = 3,\ \pi = 0{,}25,\ w = 1{,}5,$
$v_1 = 0{,}4,\ v_2 = 1{,}2,\ \sigma = 2/3$

e) $p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ \pi = 0{,}25,\ w = 2{,}5$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{495}\begin{bmatrix}102 & 266 & 390\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{52}{47}$$

3.2.

a) $\pi = 0{,}25$

b) $p_1 = 5$ e $p_2 = 2$

c) $\sigma = 0{,}4093$

d) 14,29%

e) $q_2 = 1300$

3.3.

a) As mercadorias 1 e 2 são básicas. A mercadoria 3 é não-básica.

b) $\pi = 2/3$

c) $p_1 = 1$, $p_3 = 10/3$, $w = 0{,}25$

d) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}8 & 3{,}2\end{bmatrix}$

e) $\delta = 0{,}2$ e $\sigma = 4$

3.4.

a) Resposta inalterada

b) $\pi = 1/9$

c) $p_1 = 1$, $p_3 = 47/12$, $w = 1$

d) Resposta inalterada

e) $\delta = 0{,}8$ e $\sigma = 0{,}25$

3.5. Verifica-se que $p_3 = \dfrac{1}{0{,}6 - a_{33}}$

Então quando a_{33} tende a 0,6, $\lim p_3 = \pm\infty$

Em uma economia com taxa de lucro igual a 2/3 não é economicamente viável produzir a mercadoria 3 se $a_{33} = 0{,}6$.

3.6.

a) Apenas a mercadoria 2 é básica

b) $w = 1{,}25(1-\pi)$, $W = 1{,}25$ e $\Pi = 1$

c) $\pi = 0{,}8$. A taxa é maior porque se aplica apenas no valor dos insumos (exclusive mão-de-obra).

d) $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 155 \\ 144 \\ 90 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{bq} = 281{,}6$

3.7. Verifica-se que na matriz A^+ todas as linhas tem soma igual a 0,8. Então $\pi = 0{,}25$.

3.8. a) A mercadoria 4 é não-básica. As outras três mercadorias são básicas.

b) $\pi = 1/9$ c) $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 6 & 14 & 5 & 10 \end{bmatrix}$

3.9.

a) $\pi = 1$, $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $w = 0{,}3$

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1{,}25 & 2{,}5 & 5{,}0 \end{bmatrix}$, $\sigma = 5/3$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 29{,}6 \\ 13{,}6 \\ 9{,}8 \end{bmatrix}$$

b) $\pi = 0{,}25$, $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $w = 1$

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 3{,}0 & 2{,}4 \end{bmatrix}$, $\sigma = 2/3$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 100 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 29 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

c) $\pi = 1/3$, $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$, $w = 2{,}5$

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix}$, $\sigma = 1$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 800 \\ 100 \\ 400 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 320 \\ 73 \\ 148 \end{bmatrix}$$

d) $\pi = 0{,}25$, $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $w = 0{,}25$

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2{,}4 & 4{,}8 & 7{,}2 \end{bmatrix}$, $\sigma = 2/3$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1500 \\ 750 \\ 500 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 786 \\ 420 \\ 208 \end{bmatrix}$$

4.1. Adotando o trigo como unidade monetária, a relação w-π para a técnica 1 é

$$w_1 = \frac{1,692 - 7,038\pi}{1,8 - 1,7\pi}$$

e para a técnica 2 é

$$w_2 = 1 - 4\pi$$

A primeira é côncava e a segunda é linear. Há mudança de técnica para $\pi = 0{,}083$ e para $\pi = 0{,}19$, aproximadamente. Ocorre reversibilidade da técnica 2.

Em geral, ao igualar as expressões para w (em função de π) nas duas técnicas, obtemos uma equação de 3º grau em π. Portanto, pode haver 3 pontos de mudança de técnica.

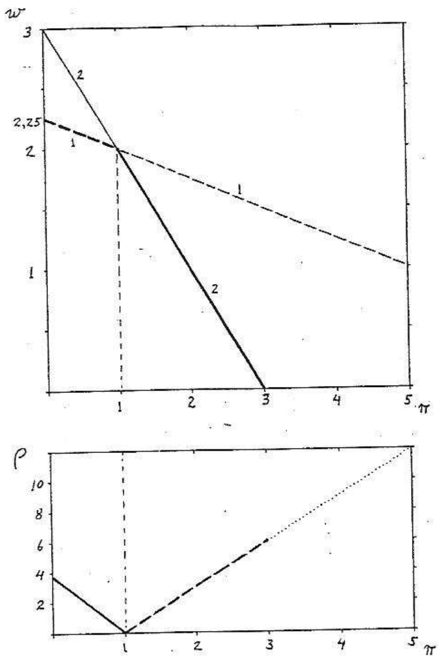
4.2. As curvas w-π das quatro técnicas tem um ponto comum que é $\pi = 0{,}2$ e $w = 0{,}8$, com $p_1 = 5\,p_2$; nesse ponto é indiferente utilizar qualquer uma das 4 técnicas. Para $\pi < 0{,}2$ será utilizada a técnica 2 e para $0{,}2 < \pi \leq 1$ será utilizada a técnica 1.

4.3. Para $0 \leq \pi < 0{,}0714$ será usada a técnica 1. Com $\pi = 0{,}0714$ (e $w = 0{,}1429$) é indiferente usar as técnicas 1 ou 4. Para $0{,}0714 < \pi < 0{,}3436$ será usada a técnica 4. Com $\pi = 0{,}3436$ (e $w = 0{,}0385$) é indiferente usar as técnicas 4 ou 2. Para $0{,}3436 < \pi < 0{,}8$ será usada a técnica 2. A técnica 3 é obsoleta.

4.4. Para $0 \leq \pi < 1/9$ será usada a técnica 1. Para $\pi = 1/9$ (e $w = 5/90$) é indiferente usar qualquer uma das 4 técnicas. Para $1/9 < \pi \leq 3/7$ será usada a técnica 4.

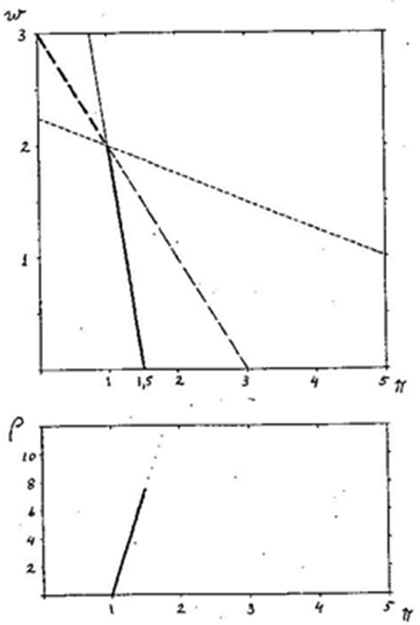
5.1. a) 300%; b) $W = 2{,}25$; c) $w = 2{,}2$, $\rho_1 = 0$ e $\rho_2 = 3$;

d) $w_1 = \frac{1}{4}(9 - \pi)$, $w_2 = 3 - \pi$, $w_1 = w_2$, quando $\pi = 1$ ou 100%; e) $1 < \pi \leq 3$



5.2. a) $1 < \pi \leq 1{,}5$; b) $\rho = 15\,(\pi - 1)$

A relação w-π com uso simultâneo dos 2 métodos é $w = 6 - 4\,\pi$



5.3. a) O produto industrial é básico e o produto agrícola é não-básico.

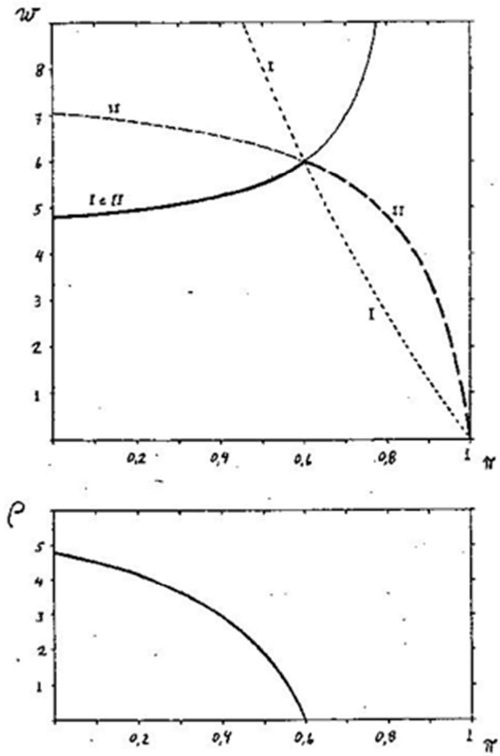
b) 1 ou 100%

c) Para $0 \leq \pi < 0{,}6$ o método I , com menor produção por unidade de área, tem menor custo médio, ocorrendo, então, uso simultâneo dos dois métodos e $\rho > 0$. Para $\pi = 0{,}6$ o custo médio é o mesmo para os dois métodos e $\rho = 0$. Para $0{,}6 < \pi \leq 1$ o método II, com maior produção por unidade de área, tem o menor custo médio; então apenas este método será utilizado e $\rho = 0$.

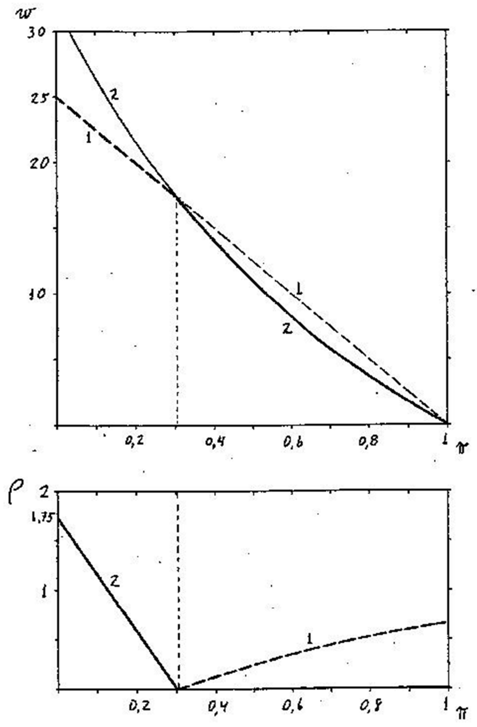
d) $p_a = 3$, $w = 4{,}8$, e $\rho = 0$; e) $p_a = 0{,}909$, $w = 5{,}091$ e $\rho = 3{,}636$; f) $w = \dfrac{72(1-\pi)}{15-17\pi}$, $\dfrac{d\,w}{d\,\pi} = \dfrac{144}{(15-17\,\pi)^2}$

mostrando que w é uma função crescente de π quando há uso simultâneo dos dois métodos.

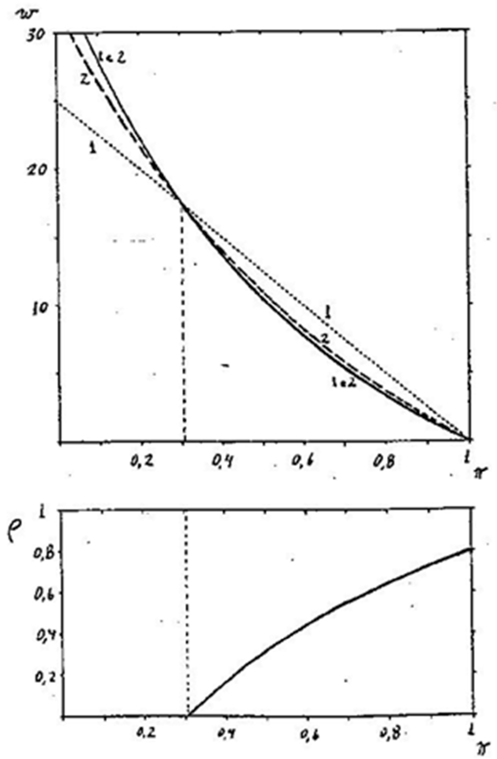
g) O salário máximo ocorre com $\pi = 0{,}6$ e é igual a 6 .



5.4. a) $\Pi = 1$; b) $W = 25$; c) $p_a = 10$, $w = 20$, $\rho_1 = 0$ e $\rho_2 = 0,6$; d) $p_a = 7{,}3733$, $w = 3{,}6866$, $\rho_1 = 0{,}5253$, e $\rho_2 = 0$; e) $\pi = 0{,}3$ (aproximadamente) ; f) $0{,}3 < \pi < 1$; g) Estão em negrito as partes das relações w-π que mostram, efetivamente, com w varia em função de π nesse sistema.



5.5. a) $R = 1$; b) $W = 32$; c) $p_a = 10{,}8108$, $w = 21{,}6216$, $\rho = 0$ d) $p_a = 6{,}7797$, $w = 3{,}3898$, $\rho = 0{,}6441$; e) $\pi = 0{,}3$ (aproximadamente); f) $0{,}3 < \pi < 1$; g) Com $0 < \pi < 0{,}3$ é utilizado apenas o método 2 e $\rho = 0$. Com $0 < \pi < 0{,}3$ os dois métodos são utilizados e $\rho = 0$.



APÊNDICE A. RAÍZES CARACTERÍSTICAS DE UMA MATRIZ E AS PROPRIEDADES DAS MATRIZES NÃO-NEGATIVAS

Admitimos, aqui, que o leitor já conheça os seguintes conceitos e operações: matrizes e vetores, adição e multiplicação de matrizes, matriz diagonal, matriz unitária, matriz transposta, matriz simétrica, traço de uma matriz, determinantes, matriz inversa, partição de matrizes, espaço vetorial, vetores linearmente independentes, característica de uma matriz, matrizes ortogonais, matriz idempotente e forma quadrática (definida positiva, definida negativa, semidefinida positiva, semidefinida negativa ou indefinida).

1. MATRIZES SEMELHANTES

Dadas duas matrizes quadradas, **A** e **B**, se existir uma matriz não-singular **P** tal que $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1}$, dizemos que **A** e **B** são matrizes semelhantes.

Indicando o determinante de **A** por $|\mathbf{A}|$, temos

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{P}^{-1}| = |\mathbf{A}| \quad \text{pois } |\mathbf{P}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{P}|}$$

Verifica-se, portanto, que matrizes semelhantes têm o mesmo determinante.

Se indicarmos a característica (ou posto) de **A** por $r(\mathbf{A})$, temos, para qualquer produto de duas matrizes,

$$r(\mathbf{AB}) \leq \text{mín}\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$$

Com base nesse teorema, não é difícil demonstrar que duas matrizes semelhantes têm a mesma característica.

Para exemplificar, considere as seguintes matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

$$\text{e} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Mostre que **P** é uma matriz ortogonal

b) Verifique que $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1}$, $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$ e $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$.

2. RAÍZES E VETORES CARACTERÍSTICOS DE UMA MATRIZ QUADRADA

Seja **A** uma matriz $n \times n$. Vamos determinar o escalar λ e o vetor-coluna **x**, com n elementos, tais que

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \tag{2.1}$$

Isso seria verdadeiro para qualquer λ se **x** = 0; então impomos $\mathbf{x} \neq 0$. Além disso, se $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, segue-se que $\mathbf{A}(k\mathbf{x}) = \lambda(k\mathbf{x})$, ou seja, o vetor **x** é indeterminado. Para tornar a solução determinada podemos impor $\mathbf{x}'\mathbf{x} = 1$.

A equação $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ pode ser escrita

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2.2}$$

Dada a matriz **A**, se $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, com $\mathbf{x} \neq 0$, então λ é uma *raíz característica* de **A** e **x** é o respectivo vetor característico.

A raíz característica também é denominada *valor característico, autovalor* ou *valor próprio* e o vetor característico também é denominado *autovetor* ou *vetor próprio*.

A equação $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, com $\mathbf{x} \neq 0$, implica que as colunas de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ são linearmente dependentes. Segue-se que

$$|\,\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\,| = \mathbf{0} \tag{2.3}$$

Essa é a *equação característica* da matriz **A**.

Para uma matriz 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

a equação característica fica

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 .$$

que é uma equação do 2º grau em λ. Em geral, se **A** é uma matriz $n \times n$, a equação característica é uma equação do n-ésimo grau em λ.

No caso de uma matriz 2×2 verifica-se facilmente que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$$

e

$$\lambda_1 \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |\,\mathbf{A}\,|$$

Generalizando, no caso de uma matriz $n \times n$ temos

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) \tag{2.4}$$

e

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |\,\mathbf{A}\,| \tag{2.5}$$

Isso pode ser facilmente verificado no caso de uma matriz diagonal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

A equação característica fica

$$\begin{bmatrix} d_1 - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

ou $(d_1 - \lambda)(d_2 - \lambda)\ldots(d_n - \lambda) = 0$.

Obviamente, as raízes características são $\lambda_1 = d_1$, $\lambda_2 = d_2$, $\ldots$, $\lambda_n = d_n$, isto é, as raízes características são os próprios elementos da diagonal principal de **A**. É imediato, nesse caso, que $\sum \lambda_i = \text{tr}(\mathbf{A})$ e que $\Pi \lambda_i = |\,\mathbf{A}\,|$.

TEOREMA 2.1. Dada a matriz **A**, se **x** (com $\mathbf{x}'\mathbf{x} = 1$) é o vetor característico correspondente à raíz característica λ, então $\mathbf{x}'\mathbf{Ax} = \lambda$.

Demonstração: Temos $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, com $\mathbf{x}'\mathbf{x} = 1$.

Então, $\mathbf{x}'\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}'\mathbf{x}$

ou $\mathbf{x}'\mathbf{Ax} = \lambda$, c.q.d.

TEOREMA 2.2. Dada a matriz **A**, se **x** (com $\mathbf{x}'\mathbf{x} = 1$) é o vetor característico correspondente à raíz característica λ, então $-\mathbf{x}$ também pode ser considerado como o vetor característico correspondente a essa raiz característica.

Demonstração: Temos $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, com $\mathbf{x}'\mathbf{x} = 1$.

Então, $\mathbf{A}(-\mathbf{x}) = \lambda(-\mathbf{x})$,

com $(-\mathbf{x})'(-\mathbf{x}) = 1$, c.q.d.

TEOREMA 2.3. As raízes características de $\mathbf{A}^2$ são iguais aos quadrados das raízes características de **A**, e os vetores característicos são os mesmos.

Demonstração: Sejam λ e $\mathbf{x}$ uma raíz característica e o respectivo vetor característico da matriz $\mathbf{A}$.

Então $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$

e $\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{AAx} = \mathbf{A}\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{Ax} = \lambda^2\mathbf{x}$,

A igualdade $\mathbf{A}^2 x = \lambda^2\mathbf{x}$ mostra que as raízes características de $\mathbf{A}^2$ são λ^2 e que os vetores característicos são os vetores característicos de **A**, c.q.d.

TEOREMA 2.4. Se $\mathbf{A}$ é não-singular, as raízes características de $\mathbf{A}^{-1}$ são os recíprocos das raízes características de $\mathbf{A}$ e os vetores característicos são os mesmos.

Demonstração: De $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ obtemos

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\lambda\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\lambda\mathbf{x}$$

ou $\mathbf{A}^{-1}x = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}$, c.q.d.

Note-se que o fato de **A** ser não-singular implica que nenhuma raiz característica é igual a zero.

TEOREMA 2.5. As raízes características de uma matriz definida positiva (semidefinida positiva) são todas positivas (não-negativas).

Demonstração: Se a matriz é definida positiva, temos $\mathbf{z}'\mathbf{Az} > 0$ para qualquer $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Mas, de acordo com o teorema 2.1, temos $\mathbf{x}'\mathbf{Ax} = \lambda$, com $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, onde $\mathbf{x}$ é o vetor característico correspondente à raiz característica λ. Então, necessariamente, $\lambda > 0$.

A demonstração é análoga para o caso de uma matriz semidefinida positiva.

Analogamente, temos que as raízes características de uma matriz definida negativa (semidefinida negativa) são todas negativas (não-positivas).

TEOREMA 2.6. Matrizes semelhantes têm as mesmas raízes características.

Demonstração: De acordo com o que foi visto na seção 1, as matrizes quadradas **A** e **B** são semelhantes se existe **P** tal que $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$.

Seja λ uma raiz característica de **A**, de tal maneira que

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}, \text{ com } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Podemos escrever

$$\mathbf{AP}^{-1}\mathbf{Px} = \lambda\mathbf{x}$$

Pré-multiplicando por **P**, obtemos

$$\mathbf{PAP}^{-1}\mathbf{Px} = \lambda\mathbf{Px}$$

ou

$$\mathbf{BPx} = \lambda\mathbf{Px}$$

Fazendo $\mathbf{y} = \mathbf{Px}$, obtemos

$$\mathbf{By} = \lambda\mathbf{y},$$

mostrando que λ é uma raiz característica de **B**, c.q.d.

TEOREMA 2.7. Dada a matriz quadrada **A**, se suas *n* raízes características são distintas, os *n* vetores característicos são linearmente independentes.

Demonstração por absurdo: Vamos admitir que a matriz **A**, de dimensões $n \times n$, tenha *n* raízes características $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ distintas entre si, mas que os correspondentes vetores característicos são linearmente dependentes. Vamos supor que os vetores característicos $\mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ são linearmente independentes e que os vetores característicos $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ podem ser expressos como combinações lineares daqueles $n-k$ vetores linearmente independentes. Para $\mathbf{x}_1$, por exemplo, teríamos

$$\mathbf{x}_1 = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i \tag{2.6}$$

com pelo menos um dos α_i diferente de zero. Pré-multiplicando (2.6) por **A** e lembrando que $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ (com $i = 1, \ldots, n$), obtemos

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \lambda_i \mathbf{x}_i \tag{2.7}$$

Multiplicando (2.6) por λ_1 obtemos

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \lambda_1 \mathbf{x}_i \tag{2.8}$$

Subtraindo (2.8) de (2.7) membro a membro, obtemos

$$0 = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_1) \mathbf{x}_i \tag{2.9}$$

Como os vetores $\mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ são linearmente independentes, a expressão (2.9) implica que os coeficientes $a_i(\lambda_i - \lambda_1)$, com i = $k+1$, $\ldots$, n, devem ser todos iguais a zero. Uma vez que as raízes características de **A** são distintas, temos $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$ para i = $k+1$, $\ldots$, n. Mas isso contraria o que foi admitido em (2.6).

A suposição de que um dos vetores característicos de **A** podia ser expresso como uma combinação linear de outros vetores característicos nos levou a uma contradição. Conclui-se que, quando as n raízes características são distintas, os n vetores característicos são linearmente independentes.

3. VETORES CARACTERÍSTICOS À ESQUERDA

Dada a matriz quadrada **A**, consideremos o vetor-linha $\mathbf{y}' \neq 0$, tal que

$$\mathbf{y}'\mathbf{A} = \lambda \mathbf{y}' \tag{3.1}$$

ou $$\mathbf{y}'(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

ou, ainda, $$(\mathbf{A}' - \lambda \mathbf{I}) y = 0 \tag{3.2}$$

Essa equação, com $\mathbf{y} \neq 0$, implica que as colunas de $\mathbf{A}' - \lambda \mathbf{I}$, que são as linhas de $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$, são linearmente dependentes. Segue-se que

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| \;\; = 0\,,$$

que é a equação característica da matriz **A**. Verifica-se, portanto, que λ é uma raiz característica de **A**. O vetor-linha $\mathbf{y}'$ é denominado *vetor característico à esquerda* de **A** e, havendo necessidade de especificação, o vetor-coluna **x** em (2.1) ou (2.2) é denominado vetor característico *à direita*. Ressalta-se que as raízes características são as mesmas, havendo uma única equação característica. A expressão (3.2) mostra que um vetor característico à esquerda de **A** é um vetor característico à direita de $\mathbf{A}'$.

É claro que os teoremas apresentados na seção, anterior podem ser demonstrados considerando-se um vetor característico à esquerda.

4. EXERCÍCIOS

4.1. É dada a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

a) Mostre que suas raízes características são 3 e 5.

b) Obtenha os correspondentes vetores característicos à direita e à esquerda (com $\mathbf{x}'\mathbf{x} = 1$ e $\mathbf{y}'\mathbf{y} = 1$).

c) Verifique as relações (4) e (5).

d) Calcule $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2$ e obtenha as raízes e vetores característicos de $\mathbf{B}$, verificando a veracidade do teorema 2.3.

4.2. Mostre que as raízes características da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são iguais a 1,6, 1 e 0,4. Obtenha os correspondentes vetores característicos à direita (com $\mathbf{x}'\mathbf{x} = 1$).

4.3. Demonstre que as raízes características de uma matriz ortogonal são sempre iguais a $+1$ ou -1.

4.4. Demonstre que as raízes características de uma matriz idempotente $(\mathbf{A}^2 = \mathbf{A})$ são iguais a zero ou 1.

5. RAÍZES E VETORES CARACTERÍSTICOS DE MATRIZES SIMÉTRICAS

Em estatística (especialmente em análise multivariada) interessa, muitas vezes, conhecer as raízes e vetores característicos de matrizes simétricas. Veremos, a seguir, algumas propriedades das raízes e vetores característicos de matrizes simétricas.

TEOREMA 5.1. Se **A** é uma matriz simétrica real (cujos elementos são todos números reais), suas raízes características são números reais.

Demonstração por absurdo: Seja λ uma raiz complexa e seja $\mathbf{x}+\mathbf{y}i$ (com $i=\sqrt{-1}$) o respectivo vetor característico. Então

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}i)=\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}i)$$

Pré-multiplicando por $(\mathbf{x}-\mathbf{y}i)'$, obtemos

$$(\mathbf{x}-\mathbf{y}i)'\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}i)=\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{y}i)'(\mathbf{x}+\mathbf{y}i)$$

e

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{y}i-\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{x}i+\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}=\lambda(\mathbf{x}'\mathbf{x}-\mathbf{x}'\mathbf{y}i-\mathbf{y}'\mathbf{x}i+\mathbf{y}'\mathbf{y})$$

Mas $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{y}=\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ pois são matrizes 1 × 1 e, com **A** simétrica, uma é a transposta da outra. Pela mesma razão, $\mathbf{x}'\mathbf{y}=\mathbf{y}'\mathbf{x}$. Então

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}=\lambda(\mathbf{x}'\mathbf{x}+\mathbf{y}'\mathbf{y})$$

e $\lambda=\dfrac{\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}}{\mathbf{x}'\mathbf{x}+\mathbf{y}'\mathbf{y}}$, que é um número real.

TEOREMA 5.2. Para uma matriz simétrica, os vetores característicos correspondentes a raízes características diferentes são ortogonais entre si.

Demonstração: De $\mathbf{A}\mathbf{x}_\mathbf{1}=\lambda_1\mathbf{x}_\mathbf{1}$ segue-se que

$$\mathbf{x}_2'\mathbf{A}\mathbf{x}_1=\lambda_1\mathbf{x}_\mathbf{2}'\mathbf{x}_1 \tag{5.1}$$

De $\mathbf{A}\mathbf{x}_2=\lambda_2\mathbf{x}_2$ segue-se que

$$\mathbf{x}_1'\mathbf{A}\mathbf{x}_2=\lambda_2\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2 \tag{5.2}$$

Uma vez que $\mathbf{x}_2'\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_2'\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1\mathbf{A}\mathbf{x}_2$, subtraindo membro a membro as expressões (5.1) e (5.2) obtemos

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2$$

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ conclui-se que $\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2 = 0$, c.q.d.

6. DIAGONALIZAÇÃO DE UMA MATRIZ SIMÉTRICA

Consideremos uma matriz simétrica **A**. Vamos admitir, inicialmente, que suas raízes características são todas distintas. Então, se $\mathbf{x}_i$ são vetores característicos, com $\mathbf{x}_i'\mathbf{x}_i = 1$, de acordo com o teorema 5.2 temos $\mathbf{x}_i'\mathbf{x}_j = 0$ para $i \neq j$. Verifica-se, portanto, que matriz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$$

é uma matriz ortogonal, isto é,

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}' \tag{6.1}$$

Temos $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ para $i = 1, \dots, n$

Então $\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 & \mathbf{A}\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{x}_n \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \lambda_2\mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{x}_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ou $$\mathbf{AP} = \mathbf{P\Lambda}\,, \tag{6.2}$$

onde $\mathbf{\Lambda}$ é uma matriz diagonal com as raízes características de **A** na diagonal principal.

Pré-multiplicando (6.2) por $\mathbf{P}'$ e lembrando (6.1) obtemos

$$\mathbf{P}'\mathbf{AP} = \mathbf{\Lambda} \tag{6.3}$$

Essa expressão mostra que, dada uma matriz simétrica **A**, podemos formar a matriz de vetores característicos (**P**) e, por meio dela, "diagonalizar" a matriz **A**, obtendo a matriz $\mathbf{\Lambda}$.

Pós-multiplicando (6.2) por $\mathbf{P}'$ e lembrando (6.1), obtemos

$$\mathbf{A} = \mathbf{P\Lambda P}' \tag{6.4}$$

Tanto (6.4) como (6.3) mostram que **A** e $\mathbf{\Lambda}$ são matrizes semelhantes. Então, de acordo com o que foi visto na seção 1, temos

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{\Lambda})$$

Mas $r(\mathbf{\Lambda}) =$ (nº de raízes características diferentes de zero).

Então,

$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{\Lambda})$ =

$$= (\text{n}^{\text{o}} \text{ de raízes características diferentes de zero}) \tag{6.5}$$

Ressalte-se que essa relação não é sempre verdadeira para matrizes não-simétricas. A matriz

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, por exemplo, tem $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ mas tem característica igual a 1.

As relações (6.3) e (6.4) foram obtidas com base na pressuposição de que as raízes características de **A** são distintas. Esses resultados, entretanto, são mais gerais: para uma matriz *simétrica* qualquer existe uma matriz ortogonal **P** tal que $\mathbf{AP} = \mathbf{P\Lambda}$, $\mathbf{P'AP} = \mathbf{\Lambda}$ e $\mathbf{A} = \mathbf{P\Lambda P'}$, onde $\mathbf{\Lambda}$ é a matriz diagonal com as raízes características de **A** na diagonal principal (ver Theil, p. 28). Da mesma maneira que em (6.3) ou (6.4), as colunas de **P** são vetores característicos de **A**. Entretanto, essa matriz ortogonal não é única quando há raízes múltiplas. Para exemplificar, consideremos $\mathbf{A} = \mathbf{I}_2$. Verifica-se que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}_2$. Neste caso a relação $\mathbf{AP} = \mathbf{P\Lambda}$ fica, simplesmente, $\mathbf{P} = \mathbf{P}$, ou seja, podemos utilizar qualquer matriz ortogonal 2 × 2. Mas

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

é uma matriz ortogonal para qualquer valor de ϕ, isto é, há infinitas matrizes que podem ser utilizadas. Qualquer uma das 2 colunas dessa matriz **P**, com ϕ qualquer, é um vetor característico de $\mathbf{I}_2$.

7. EXERCÍCIOS

7.1. É dada a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$

a) Obtenhas suas raízes características (λ_1 e λ_2)

b) Mostre que $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 5$,

$$\lambda_1\lambda_2 = |\mathbf{A}| = 4$$

e $r(\mathbf{A}) =$ (nº de raízes características diferentes de zero) = 2

c) Obtenha a matriz ortogonal de vetores característicos (**P**) e verifique a relação (6.3)

7.2. Para a matriz **A** do exercício 4.2, obtenha a matriz ortogonal de vetores característicos (**P**) e verifique a relação (6.3).

7.3. Com base no exercício 4.4 e a relação (6.5), demonstre que, para uma matriz simétrica e idempotente

$$r(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$$

8. DIAGONALIZAÇÃO DE UMA MATRIZ QUADRADA NÃO-SIMÉTRICA COM VETORES CARACTERÍSTICOS LINEARMENTE INDEPENDENTES

Consideremos uma matriz quadrada **A**, qualquer, com raízes características $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e respectivos vetores característicos $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Vamos admitir que os n vetores característicos são linearmente independentes, de maneira que a matriz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$$

é não-singular. De acordo com o teorema 2.7, os n vetores característicos são linearmente independentes sempre que as n raízes características forem distintas entre si.

Temos $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ para $i = 1, \ldots, n$

ou $$\mathbf{AP} = \mathbf{P\Lambda}, \qquad (8.1)$$

onde $\mathbf{\Lambda}$ é uma matriz diagonal com as raízes características de **A** na diagonal principal.

Se **P** é não-singular, existe $\mathbf{P}^{-1}$ e pré-multiplicando (8.1) por $\mathbf{P}^{-1}$ obtemos

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{\Lambda} \tag{8.2}$$

Se os vetores característicos de **A** não forem linearmente independentes, a matriz **P** será singular e não será possível diagonalizar a matriz **A**.

Para exemplificar, consideremos a matriz (Pasinetti, p. 262)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

a) Verifique que as suas raízes características são $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = -7$.

b) Sem impor que os vetores característicos tenham módulo igual a 1, mostre que uma possível matriz de vetores característicos é

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3/4 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Verifique a relação (8.2).

9. O DESENVOLVIMENTO DE $(\mathbf{I} - \omega\mathbf{A})^{-1}$

Dada uma matriz quadrada **A**, se

$$\lim_{m \to \infty} \mathbf{A}^m = 0,$$

dizemos que **A** é uma matriz convergente.

TEOREMA 9.1. Dada a matriz quadrada **A**, se $\theta > |\lambda_M|$, onde λ_M indica a maior raiz característica de **A**, em valor absoluto, então $\frac{1}{\theta}\mathbf{A}$ é uma matriz convergente.

Demonstração: Vamos admitir que todos os n vetores característicos de **A** são linearmente independentes. Então, de acordo com (8.2), temos

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$$

ou $$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$$

Segue-se que

$$\frac{1}{\theta}\mathbf{A} = \mathbf{P}\left(\frac{1}{\theta}\mathbf{\Lambda}\right)\mathbf{P}^{-1}$$

e $$\left(\frac{1}{\theta}\mathbf{A}\right)^m = \mathbf{P}\left(\frac{1}{\theta}\mathbf{\Lambda}\right)^m \mathbf{P}^{-1} \tag{9.1}$$

Com $\theta > |\lambda_M|$, todos os elementos não-nulos da matriz diagonal $\frac{1}{\theta}\mathbf{A}$ são, em valor absoluto, menores do que 1. Então

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{\theta}\mathbf{\Lambda}\right)^m = \mathbf{0} \tag{9.2}$$

De (9.1) e (9.2) segue-se que

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{\theta}\mathbf{A}\right)^m = \mathbf{0}\text{, c.q.d.}$$

Embora a demonstração tenha sido feita supondo que os vetores característicos de **A** são linearmente independentes, o teorema é válido para qualquer matriz quadrada (ver Pasinetti, p. 265).

Vamos desenvolver, a seguir, um método de obter a matriz inversa $\left(\mathbf{I}-\frac{1}{\theta}\mathbf{A}\right)^{-1}$.

Considere a somatória

$$\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{1}{\theta}\mathbf{A}\right)^i = \mathbf{I}+\frac{1}{\theta}\mathbf{A}+\left(\frac{1}{\theta}\mathbf{A}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{\theta}\mathbf{A}\right)^m \qquad (9.3)$$

Multiplicando os dois membros por $\mathbf{I}-\frac{1}{\theta}\mathbf{A}$, obtemos

$$\left(\mathbf{I}-\frac{1}{\theta}\mathbf{A}\right)\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{1}{\theta}\mathbf{A}\right)^i = \mathbf{I}-\left(\frac{1}{\theta}\mathbf{A}\right)^{m+1}$$

Sabemos que, para $\theta > |\lambda_M|$, a matriz $\frac{1}{\theta}\mathbf{A}$ é convergente. Então, para *m* bastante grande temos, com a aproximação desejável,

$$\left(\mathbf{I}-\frac{1}{\theta}\mathbf{A}\right)\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{1}{\theta}\mathbf{A}\right)^{i}=\mathbf{I}$$

Essa relação mostra que a somatória dada em (9.3) é, aproximadamente, a inversa de $\left(\mathbf{I}-\frac{1}{\theta}\mathbf{A}\right)$, isto é,

$$\left(\mathbf{I}-\frac{1}{\theta}\mathbf{A}\right)^{-1}=\mathbf{I}+\frac{1}{\theta}\mathbf{A}+\left(\frac{1}{\theta}\mathbf{A}\right)^{2}+\ldots \tag{9.4}$$

Temos $\mathbf{I}-\frac{1}{\theta}\mathbf{A}=\frac{1}{\theta}(\theta\mathbf{I}-\mathbf{A})$

e
$$\left(\mathbf{I}-\frac{1}{\theta}\mathbf{A}\right)^{-1}=\theta(\theta\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-\mathbf{1}} \tag{9.5}$$

De (9.4) e (9.5) segue-se que

$$(\theta\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-\mathbf{1}}=\frac{1}{\theta}\left[\mathbf{I}+\frac{1}{\theta}\mathbf{A}+\left(\frac{1}{\theta}\mathbf{A}\right)^{2}+\ldots\right] \tag{9.6}$$

Se fizermos $\omega=\frac{1}{\theta}$, com $\omega<|\lambda_M|^{-1}$, que é a condição equivalente a $\theta>|\lambda_M|$, então a expressão (9.4) pode ser escrita

$$(\mathbf{I}-\omega\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{I}+\omega\mathbf{A}+\omega^{2}\mathbf{A}^{2}+\ldots \tag{9.7}$$

10. MATRIZES NÃO-NEGATIVAS E MATRIZES IRREDUTÍVEIS

Nesta seção e nas seguintes, onde vamos deduzir algumas propriedades das matrizes não-negativas, seguiremos a apresentação de Pasinetti (p. 266-276).

A matriz $\mathbf{A}$ é *positiva* se todos os seus elementos são positivos, indicando-se $\mathbf{A} > \mathbf{0}$.

A matriz $\mathbf{A}$ é *não-negativa* se nenhum de seus elementos é negativo, indicando-se $\mathbf{A} >= \mathbf{0}$. Uma matriz nula é uma matriz não-negativa.

Uma matriz não-negativa na qual pelo menos um elemento é positivo é denominada matriz *semipositiva*, indicando-se $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$.

Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ é denominada *redutível* se for possível, trocando linhas e trocando as colunas correspondentes, colocar a matriz na forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{A}_{11}$ e $\mathbf{A}_{\mathbf{22}}$ são submatrizes quadradas. Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ é denominada *irredutível* se a operação descrita acima não for possível.

Consideremos, por exemplo, a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \\ 7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Se trocarmos a $1^{\underline{a}}$ com a $2^{\underline{a}}$ linha e, em seguida, trocarmos a $1^{\underline{a}}$ com a $2^{\underline{a}}$ coluna, obtemos a matriz

$$\left[\begin{array}{c:cc} 8 & 6 & 3 \\ \hdashline 0 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \end{array}\right]$$

Esse resultado mostra que a matriz **A** é redutível.

Oskar Perron e Georg Frobenius, em trabalhos publicados entre 1907 e 1912, deduziram uma série de teoremas sobre as raízes características e vetores característicos de matrizes não-negativas. A seguir veremos alguns dos teoremas de Perron-Frobenius que são importantes no estudo dos modelos lineares de produção.

Vejamos, inicialmente, como podemos indicar, através de uma matriz auxiliar, a permuta ou troca de posições de duas linhas (ou duas colunas) de uma dada matriz.

Se, na matriz $\mathbf{I}_3$, por exemplo, trocarmos a $1^{\underline{a}}$ com a $2^{\underline{a}}$ linha obtemos a matriz

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se uma matriz **A**, com 3 linhas, for *pré-multiplicada* por essa matriz **E**, haverá uma troca de posições da 1ª com a 2ª *linha* de **A**, como mostra o exemplo a seguir:

$$\mathbf{E}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Se uma matriz **B**, com 3 colunas, for *pós-multiplicada* por essa matriz **E**, haverá uma troca de posições da 1ª com a 2ª *coluna* de **A**, como mostra o exemplo a seguir:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}\mathbf{E} = \begin{bmatrix} b_{12} & b_{11} & b_{13} \\ b_{22} & b_{21} & b_{23} \end{bmatrix}$$

Em geral, se desejamos efetuar a permuta de duas linhas (colunas) de uma dada matriz **A**, podemos fazer a permuta desejada nas linhas de uma matriz unitária de dimensão apropriada, obtendo uma matriz **E** e, em seguida, a matriz **A** é pré-multiplicada (pós-multiplicada) por **E**.

Se uma mesma permuta de linhas for efetuada duas vezes, volta-se, evidentemente, à posição original. Então, para toda matriz **E** temos

$$\mathbf{EE} = \mathbf{I}$$

ou

$$\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E} \tag{10.1}$$

Vamos admitir, agora, que desejamos efetuar uma série de k permutas nas linhas de uma matriz **A**. Uma primeira permuta de duas linhas corresponde à pré-multiplicação por uma matriz $\mathbf{E_1}$. Uma segunda permuta de duas linhas corresponde à multiplicação por $\mathbf{E_2}$, e assim por diante. O resultado final seria indicado por

$$\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E_2}\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{GA},$$

onde $$\mathbf{G} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 \qquad (10.2)$$

Se **A** for uma matriz quadrada e a mesma sequência de permutas for feita nas linhas e nas colunas de **A**, o resultado final pode ser indicado por

$$\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E_2}\mathbf{E}_1\mathbf{A}\mathbf{E_1}\mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_k = \mathbf{GAG}^{-1} \qquad (10.3)$$

pois, de acordo com (10.1) e (10.2),

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1} \cdots \mathbf{E}_k^{-1} = \mathbf{E_1}\mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_k$$

TEOREMA 10.1. Dada uma matriz quadrada **A**, $n \times n$, irredutível, se $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ é um vetor característico de **A**, então $\mathbf{x} > \mathbf{0}$.

Demonstração por absurdo: Vamos admitir que $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ tenha h (com $0 < h < n$) elementos positivos e $n - h$ elementos iguais a zero. Então, após uma reordenação desses elementos podemos escrever

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{G}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{y}$ é um vetor-coluna com h elementos positivos. Após reordenar as linhas e colunas de **A** da mesma maneira que foi feito com os elementos de **x**, obtemos

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{A}_{12}^* \\ \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{22}^* \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{A}_{11}^*$ é uma matriz $h \times h$ e $\mathbf{A}_{22}^*$ é uma matriz $(n-h)\times(n-h)$.

Seja λ a raiz característica de **A** correspondente ao vetor característico **x**. Então temos

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Pré-multiplicando por **G**, podemos escrever

$$\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{G}\mathbf{x}$$

ou $$\mathbf{A}^*\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{x}^*$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{A}_{12}^* \\ \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Segue-se que

$$\mathbf{A}_{21}^{*}\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Com **y** > 0 essa relação implica que $\mathbf{A}_{21}^{*} = \mathbf{0}$, o que contradiz a hipótese de que **A** é irredutível.

Portanto, se $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ é um vetor característico da matriz irredutível **A**, temos $\mathbf{x} > 0$, c.q.d.

É fácil verificar que a demonstração do teorema também poderia ser feita considerando-se um vetor característico à esquerda.

11. TEOREMAS I

TEOREMA 11.1. Se $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ é uma matriz $n \times n$, irredutível, então $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^n > \mathbf{0}$, isto é, a matriz $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^n$ é positiva.

Demonstração: Consideremos um vetor-coluna $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, com n elementos[32]. Vamos admitir que h elementos são positivos e $n - h$ elementos são iguais a zero. Através de uma reordenação de seus elementos, o vetor **x** se transforma em

$$\mathbf{x}^{*} = \mathbf{G}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{11.1}$$

onde **y** é um vetor-coluna com h elementos $(h < n)$ positivos. Após reordenar as linhas e colunas de **A** da mesma maneira que foi feito com os elementos de **x**, obtemos

[32] Ressalte-se que *não* estamos admitindo, no contexto desse teorema, que **x** seja um vetor característico de **A**.

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{GAG}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{A}_{12}^* \\ \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{22}^* \end{bmatrix}, \tag{11.2}$$

onde $\mathbf{A}_{11}^*$ é uma matriz $h \times h$ e $\mathbf{A}_{22}^*$ é uma matriz $(n-h)\times(n-h)$.

Temos

$$(\mathrm{I} + \mathbf{A}^*)\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^* + \mathbf{A}^*\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{A}_{12}^* \\ \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} + \mathbf{A}_{11}^*\mathbf{y} \\ \mathbf{A}_{21}^*\mathbf{y} \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

Como $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ e $\mathbf{A}^* \geq \mathbf{0}$, temos $\mathbf{y} + \mathbf{A}_{11}^*\mathbf{y} > \mathbf{0}$, ou seja, os h primeiros elementos do vetor $(\mathbf{I} + \mathbf{A}^*)\mathbf{x}^*$ são positivos. Uma vez que $\mathbf{A}$ é uma matriz semipositiva e irredutível, temos $\mathbf{A}_{21}^* \geq \mathbf{0}$. Então, com $\mathbf{y} > \mathbf{0}$, temos $\mathbf{A}_{21}^*\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, isto é, ao menos um elemento de $\mathbf{A}_{21}^*\mathbf{y}$ é positivo. Portanto, o vetor $(\mathbf{I} + \mathbf{A}^*)\mathbf{x}^*$ tem pelo menos $h+1$ elementos positivos.

Como $\mathbf{x}^* = \mathbf{Gx}$ e $\mathbf{A}^* = \mathbf{GAG}^{-1}$, temos

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A}^*)\mathbf{x}^* = (\mathbf{I} + \mathbf{GAG}^{-1})\mathbf{Gx} = \mathbf{Gx} + \mathbf{GAx} = \mathbf{G}(\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{x}$$

mostrando que o vetor $(\mathbf{I} + \mathbf{A}^*)\mathbf{x}^*$ é resultado de uma reordenação dos elementos do vetor $(\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{x}$. Conclui-se, portanto, que o vetor $(\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{x}$ também tem pelo menos $h+1$ elemenos positivos. Pelo mesmo raciocínio, segue-se que

$$(\mathbf{I}+\mathbf{A})(\mathbf{I}+\mathbf{A})\mathbf{x}=(\mathbf{I}+\mathbf{A})^2\mathbf{x}$$ terá pelo menos $h+2$ elementos positivos, e assim por diante.

É claro que $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n\mathbf{x}$ terá, necessariamente, todos os elementos positivos, isto é,

$$(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n\mathbf{x}>\mathbf{0} \tag{11.4}$$

Como **x** é um vetor semipositivo qualquer, conclui-se que

$$(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n>\mathbf{0}\text{, c.q.d.}$$

A demonstração desse teorema também pode ser feita utilizando um vetor-linha $\mathbf{p}\geq\mathbf{0}$, com h elementos positivos e $n-h$ elementos iguais a zero. Pode-se demonstrar que o vetor $\mathbf{p}(\mathbf{I}+\mathbf{A})$ tem pelo menos $h+1$ elementos positivos, concluindo-se que

$$\mathbf{p}(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n>\mathbf{0} \tag{11.5}$$

e $$(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n>\mathbf{0}$$

Antes de enunciar o próximo teorema, vejamos algumas definições.

Seja S o conjunto dos vetores-coluna $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$, com n elementos, tais que $\mathbf{x}'\boldsymbol{\iota}=1$, onde $\boldsymbol{\iota}$ é um vetor-coluna com todos os elementos iguais a 1.

Seja $\lambda(\mathbf{x})$ o maior número real tal que

$$(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n \mathbf{Ax} >= \lambda(\mathbf{x})(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n \mathbf{x} \tag{11.6}$$

É claro que para qualquer $\lambda < \lambda(\mathbf{x})$ teremos

$$(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n \mathbf{Ax} > \lambda(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n \mathbf{x}$$

Na expressão (11.6) a igualdade deve ser observada para pelo menos um elemento pois, em caso contrário, poderíamos aumentar o valor de $\lambda(\mathbf{x})$

Note-se que:

a) Como $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{A}$ é uma matriz semipositiva irredutível, temos

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$$

b) Com $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$, temos, pelo teorema 11.1, que

$$(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n \mathbf{x} > \mathbf{0} \text{ e } (\mathbf{I}+\mathbf{A})^n \mathbf{Ax} > \mathbf{0} \tag{11.7}$$

c) De (11.6) e (11.7) segue-se que $\lambda(\mathbf{x}) > 0$

d) Como $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n = \mathbf{I} + n\mathbf{A} + \binom{n}{2}\mathbf{A}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n$,

verifica-se que

$$(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n \tag{11.8}$$

Seja λ_m o máximo dos $\lambda(\mathbf{x})$, considerando todos os vetores $\mathbf{x}$ do conjunto *S*.

TEOREMA 11.2. O máximo dos $\lambda(\mathbf{x})$, indicado por λ_m, é uma raíz característica de **A** e o vetor característico correspondente é positivo.

Demonstração: Seja $\tilde{\mathbf{x}}$ o vetor do conjunto *S* para o qual $\lambda(\mathbf{x})$ assume o valor máximo, isto é,

$$\lambda_m = \lambda(\tilde{\mathbf{x}})$$

Então, de acordo com (11.6),

$$(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} >= \lambda_m (\mathbf{I}+\mathbf{A})^n \tilde{\mathbf{x}}, \qquad (11.9)$$

com a igualdade sendo válida para pelo menos um dos elementos. Lembrando (11.8), a relação (11.9) pode ser escrita

$$\mathbf{A}(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n \tilde{\mathbf{x}} >= \lambda_m (\mathbf{I}+\mathbf{A})^n \tilde{\mathbf{x}}$$

Fazendo

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{I}+\mathbf{A})^n \tilde{\mathbf{x}} \qquad (11.10)$$

obtemos

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} >= \lambda_m \bar{\mathbf{x}}$$

ou $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \lambda_m \bar{\mathbf{x}} >= 0$

Essa relação mostra que devemos ter

I) $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$, isto é,

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \lambda_m \bar{\mathbf{x}} \tag{11.11}$$

ou

II) $\bar{\mathbf{z}} \geq \mathbf{0}$ (11.12)

Vamos demonstrar, por absurdo, que essa segunda possibilidade não pode ser verdadeira.

Com $\bar{\mathbf{z}} \geq \mathbf{0}$, de acordo com (11.4) temos

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A})^n \bar{\mathbf{z}} > 0$$

Lembrando que, por definição, $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \lambda_m \bar{\mathbf{x}}$, obtemos

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A})^n \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} > \lambda_m (\mathbf{I} + \mathbf{A})^n \bar{\mathbf{x}} \tag{11.13}$$

De acordo com (11.4) e a definição de $\bar{\mathbf{x}}$ em (11.10), temos

$$\bar{\mathbf{x}} > \mathbf{0} \tag{11.14}$$

A soma dos elementos de $\bar{\mathbf{x}}$ é dada por $\boldsymbol{\iota}'\bar{\mathbf{x}}$ e

$$\mathbf{x}^* = \frac{1}{\boldsymbol{\iota}'\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{x}}$$

é um dos vetores do conjunto *S*.

Dividindo os dois membros de (11.13) por $\boldsymbol{\iota}'\bar{\mathbf{x}}$ segue-se que

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A})^n \mathbf{A}\mathbf{x}^* > \lambda_m (\mathbf{I} + \mathbf{A})^n \mathbf{x}^*,$$

o que contraria o fato de que λ_m é o máximo dos $\lambda(\mathbf{x})$.

Uma vez que a relação (11.12) nos conduziu a uma contradição, só nos resta a relação (11.11), isto é, concluímos que, necessariamente,

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \lambda_m \bar{\mathbf{x}}, \qquad (11.15)$$

mostrando que λ_m é uma raíz característica de **A**. Ressalte-se que, de acordo com (11.14), o vetor característico correspondente é positivo, c.q.d.

TEOREMA 11.3. Nenhuma raiz característica de **A** pode ser maior que λ_m.

Demonstração: Consideremos uma matriz quadrada $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$, de dimensões $n \times n$. Seja α uma raiz característica de **B** e seja **p** o correspondente vetor característico à esquerda, isto é,

$$\mathbf{pB} = \alpha\mathbf{p}$$

ou $$\sum_{i=1}^{n} p_i b_{ij} = \alpha p_j \qquad (j = 1, ..., n)$$

com os $b_{ij} \geq 0$.

Então $$\sum_i |p_i| b_{ij} \geq |\alpha| \cdot |p_j| \qquad (11.16)$$

Como essa expressão envolve a comparação de dois escalares (e não de matrizes), é indiferente usar o símbolo $\geq$ ou o símbolo $>=$.

Seja $\mathbf{p}^*$ o vetor-linha cujos elementos são iguais aos valores absolutos dos elementos de **p**. Então a relação (11.16) pode ser escrita

$$\mathbf{p}^*\mathbf{B} >= |\alpha|\mathbf{p}^*$$

ou $$|\alpha|\mathbf{p}^* <= \mathbf{p}^*\mathbf{B} \tag{11.17}$$

Dada a matriz quadrada irredutível $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, vamos admitir que a matriz **B** seja escolhida de maneira que

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{B} <= \mathbf{A}$$

Lembrando (11.17) e considerando que $\mathbf{p}^* \geq \mathbf{0}$, temos

$$|\alpha|\mathbf{p}^* <= \mathbf{p}^*\mathbf{B} <= \mathbf{p}^*\mathbf{A} \tag{11.18}$$

Segue-se que

$$|\alpha|\mathbf{p}^* <= \mathbf{p}^*\mathbf{A}$$

Pós-multiplicando por $\bar{\mathbf{x}}$ e lembrando (11.15), obtemos

$$|\alpha|\mathbf{p}^*\bar{\mathbf{x}} \leq \lambda_m \mathbf{p}^*\bar{\mathbf{x}} \tag{11.19}$$

Note-se que os dois membros dessa expressão são escalares, tornando indiferente o uso do símbolo $\leq$ ou do símbolo $<=$.

Como $\mathbf{p}^* \geq \mathbf{0}$ e, de acordo com (11.14), $\bar{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$, temos $\mathbf{p}^*\bar{\mathbf{x}} > 0$. Então de (11.19) segue-se que

$$|\alpha| \leq \lambda_m \tag{11.20}$$

Se fizermos **B** = **A**, α passa a ser uma raiz característica de **A** e a relação (11.20) mostra que nenhuma raiz característica de **A** pode ser maior do que λ_m, c.q.d.

12. TEOREMAS II

Nesta seção veremos uma outra versão do teorema 11.2, envolvendo o vetor característico à esquerda. Antes de enunciar esse teorema, vejamos algumas definições.

Seja *R* o conjunto dos vetores-linha $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$, com *n* elementos, tais que $\mathbf{p\iota} = 1$.

Seja $\mu(\mathbf{p})$ o maior número real tal que

$$\mathbf{pA}(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n >= \mu(\mathbf{p})\mathbf{p}(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n$$

De acordo com (11.8), essa relação também pode ser escrita

$$\mathbf{p}(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n\mathbf{A} >= \mu(\mathbf{p})\mathbf{p}(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n \tag{12.1}$$

Uma vez que **A** é uma matriz semipositiva e irredutível, de acordo com (11.5) temos $\mathbf{p}(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n > \mathbf{0}$. Então, com $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, temos $\mathbf{p}(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n\mathbf{A} > \mathbf{0}$ e conclui-se que $\mu(\mathbf{p}) > 0$.

Como $\mu(\mathbf{p})$ é o maior valor que satisfaz a condição (12.1), é claro que a igualdade deve ser válida para pelo menos um dos elementos dos vetores $n \times 1$ que constituem o 1º e o 2º membros da relação.

Seja μ_m o máximo dos $\mu(\mathbf{p})$, considerando todos os vetores **p** do conjunto *R*.

TEOREMA 12.1. O máximo dos $\mu(\mathbf{p})$, indicado por μ_m, é uma raiz característica de **A** e o respectivo vetor característico à esquerda é positivo.

Demonstração: Seja $\tilde{\mathbf{p}}$ o vetor do conjunto *R* para o qual $\mu(\mathbf{p})$ assume o valor máximo, isto é,

$$\mu_m = \mu(\tilde{\mathbf{p}})$$

Então, de acordo com (12.1),

$$\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n\mathbf{A} >= \mu_m\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n, \qquad (12.2)$$

com a igualdade sendo válida para pelo menos um dos elementos.

Seja

$$\bar{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n \qquad (12.3)$$

Então, (12.2) pode ser escrita

$$\bar{\mathbf{p}}\mathbf{A} >= \mu_m\bar{\mathbf{p}} \qquad (12.4)$$

Seja

$$\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{p}}\mathbf{A} - \mu_m\bar{\mathbf{p}}$$

De acordo com (12.4) temos $\overline{\mathbf{w}} >= \mathbf{0}$, ou seja, devemos ter

I) $\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$ e, portanto,

$$\overline{\mathbf{p}}\mathbf{A} = \mu_m \overline{\mathbf{p}} \tag{12.5}$$

ou

II) $\overline{\mathbf{w}} = \overline{\mathbf{p}}\mathbf{A} - \mu_m \overline{\mathbf{p}} \geq \mathbf{0}$ (12.6)

Vamos demonstrar, por absurdo, que essa segunda possibilidade não pode ser verdadeira.

Com $\overline{\mathbf{w}} \geq \mathbf{0}$, de acordo com (11.5) temos

$$\overline{\mathbf{w}}(\mathbf{I} + \mathbf{A})^n > \mathbf{0}$$

Lembrando que, por definição, $\overline{\mathbf{w}} = \overline{\mathbf{p}}\mathbf{A} - \mu_m \overline{\mathbf{p}}$, obtemos

$$\overline{\mathbf{p}}\mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{A})^n > \mu_m \overline{\mathbf{p}}(\mathbf{I} + \mathbf{A})^n$$

ou, de acordo com (11.8),

$$\overline{\mathbf{p}}(\mathbf{I} + \mathbf{A})^n \mathbf{A} > \mu_m \overline{\mathbf{p}}(\mathbf{I} + \mathbf{A})^n \tag{12.7}$$

De acordo com (11.5) e a definição de $\overline{\mathbf{p}}$ em (12.3), temos

$$\overline{\mathbf{p}} > \mathbf{0} \tag{12.8}$$

A soma dos elementos de $\overline{\mathbf{p}}$ é dada por $\overline{\mathbf{p}}\boldsymbol{\iota}$ e

$$\mathbf{p}^* = \frac{1}{\overline{\mathbf{p}}\boldsymbol{\iota}} \overline{\mathbf{p}}$$

é um dos vetores do conjunto *R*.

Dividindo os dois membros de (12.7) por $\bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\iota}$, obtemos

$$\mathbf{p}^{*}(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n}\mathbf{A} > \mu_m \mathbf{p}^{*}(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{n},$$

o que contraria o fato de que μ_m é o máximo dos $\mu(\mathbf{p})$.

Uma vez que a relação (12.6) nos conduziu a uma contradição, só nos resta a relação (12.5), isto é, concluimos que, necessariamente,

$$\bar{\mathbf{p}}\mathbf{A} = \mu_m \bar{\mathbf{p}}, \qquad (12.9)$$

mostrando que μ_m é uma raiz característica de **A**. Ressalte-se que, de acordo com (12.8), o respectivo vetor característico à esquerda é positivo, c.q.d.

TEOREMA 12.2. Nenhuma raíz característica de **A** pode ser maior do que μ_m.

Demonstração: Consideremos uma matriz quadrada $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$, de dimensões $n \times n$. Seja α uma raiz característica de **B** e seja **x** o respectivo vetor característico à direita, isto é,

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$$

ou

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j = \alpha x_i \quad (i = 1, ..., n)$$

com os $b_{ij} \geq 0$.

Então $\sum_j b_{ij} \mid x_j \mid \geq \mid \alpha \mid \cdot \mid x_i \mid$ (12.10)

Seja $\mathbf{x}^*$ o vetor-coluna cujos elementos são os valores absolutos dos elementos de **x**. Então a relação (12.10) pode ser escrita

$$\mathbf{Bx}^* >= \mid \alpha \mid \mathbf{x}^*$$

ou $$\mid \alpha \mid \mathbf{x}^* <= \mathbf{Bx}^* \qquad (12.11)$$

Dada a matriz quadrada **A**, semipositiva e irredutível, vamos admitir que a matriz **B** seja escolhida de maneira que

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{B} <= \mathbf{A}$$

Lembrando (12.11) e considerando que $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$, temos

$$\mid \alpha \mid \mathbf{x}^* <= \mathbf{Bx}^* <= \mathbf{Ax}^*$$

Segue-se que

$$\mid \alpha \mid \mathbf{x}^* <= \mathbf{Ax}^*$$

Pré-multiplicando por $\overline{\mathbf{p}}$ e lembrando (12.9), obtemos

$$\mid \alpha \mid \overline{\mathbf{p}}\mathbf{x}^* \leq \mu_m \overline{\mathbf{p}}\mathbf{x}^* \qquad (12.12)$$

Como $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$ e, de acordo com (12.8), $\overline{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$, temos $\overline{\mathbf{p}}\mathbf{x}^* > 0$. Então, de (12.12) segue-se que

$$\mid \alpha \mid \leq \mu_m \qquad (12.13)$$

Se fizermos **B** = **A**, α passa a ser uma raiz característica de **A** e a relação (12.13) mostra que nenhuma raiz característica de **A** pode ser maior do que μ_m, c.q.d.

A partir dos teoremas 11.3.e 12.2 conclui-se que

$$\lambda_m = \mu_m \tag{12.14}$$

13. TEOREMAS III

TEOREMA 13.1. Seja $\mathbf{0} \leq \mathbf{B} <= \mathbf{A}$ e seja α uma raiz característica de **B**. Então, se $|\alpha| = \lambda_m$ temos **B** = **A**.

Demonstração: Com $|\alpha| = \lambda_m$ a relação (11.18) fica

$$\lambda_m \mathbf{p}^* <= \mathbf{p}^* \mathbf{B} <= \mathbf{p}^* \mathbf{A}, \tag{13.1}$$

onde $\mathbf{p}^*$ é o vetor-linha cujos elementos são os valores absolutos dos elementos de **p**, que é o vetor característico à esquerda correspondente à raiz característica α de **B**. Continuamos a admitir, nesta seção, que a matriz quadrada **A**, além de semipositiva, é irredutível.

Seja $$\mathbf{z} = \mathbf{p}^* \mathbf{A} - \lambda_m \mathbf{p}^* \tag{13.2}$$

De acordo com (13.1) temos

$$\mathbf{z} >= \mathbf{0}$$

Vamos considerar duas possibilidades:

I) $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, que corresponde a

$$\mathbf{p}^*\mathbf{A} = \lambda_m \mathbf{p}^* \tag{13.3}$$

ou

II) $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$ (13.4)

Vamos mostrar que essa segunda possibilidade não pode ocorrer. De acordo com (11.5), para $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$ temos

$$\mathbf{z}(\mathbf{I} + \mathbf{A})^n > \mathbf{0} \tag{13.5}$$

Substituindo (13.2) em (13.5) obtemos

$$\mathbf{p}^*\mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{A})^n > \lambda_m \mathbf{p}^*(\mathbf{I} + \mathbf{A})^n \tag{13.6}$$

Como $\mathbf{p}^* > \mathbf{0}$,

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{\mathbf{p}^*\boldsymbol{\iota}}\mathbf{p}^*$$

é um vetor do conjunto *R*. Dividindo os dois membros de (13.6) por $\mathbf{p}^*\boldsymbol{\iota}$ obtemos

$$\hat{\mathbf{p}}\mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{A})^n > \lambda_m \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{I} + \mathbf{A})^n,$$

o que contraria o fato de que $\mu_m = \lambda_m$ é o máximo dos $\mu(\mathbf{p})$ (ver o terorema 12.1).

Uma vez que a relação (13.4) nos levou a uma contradição, concluímos que a outra possibilidade, dada por (13.3), é a correta, isto é, concluímos que

$$\mathbf{p}^*\mathbf{A} = \lambda_m \mathbf{p}^* \tag{13.7}$$

Essa relação mostra que $\mathbf{p}^* \geq \mathbf{0}$ é um vetor característico da matriz irredutível **A**. Então, de acordo com o teorema 10.1, temos $\mathbf{p}^* > \mathbf{0}$.

De (13.1) e (13.7) segue-se que

$$\mathbf{p}^*\mathbf{B} = \mathbf{p}^*\mathbf{A}$$

ou

$$\mathbf{p}^*(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

Como $\mathbf{p}^* > \mathbf{0}$, concluímos que **A** = **B**, c.q.d.

TEOREMA 13.2. Dada uma matriz quadrada **A**, semipositiva e irredutível, sua raiz característica máxima λ_m (ver teorema 11.3) é uma função contínua e crescente dos elementos de **A**.

Demonstração: De acordo com (11.20), para $\mathbf{B} <= \mathbf{A}$ temos

$$\lambda_m(\mathbf{B}) \leq \lambda_m(\mathbf{A})$$

Mas, de acordo com o teorema 13.1, se $\lambda_m(\mathbf{B}) = \lambda_m(\mathbf{A})$ segue-se que $\mathbf{B} = \mathbf{A}$. Conclui-se que, para $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ (a desigualdade sendo válida para pelo menos um elemento) temos

$$\lambda_m(\mathbf{B}) < \lambda_m(\mathbf{A})$$

TEOREMA 13.3. A raiz característica máxima de uma submatriz principal obtida de **A** (eliminando uma ou mais linhas e as colunas correspondentes) é menor do que $\lambda_m(\mathbf{A})$.

Demonstração: Seja $\mathbf{A}^*$, de dimensões $h \times h$ (com $h < n$), uma submatriz principal de **A**. Se substituirmos as linhas e as colunas eliminadas por vetores nulos, obtemos a matriz **B**, $n \times n$, tal que

$$\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$$

Então, de acordo com o teorema 13.2, temos

$$\lambda_m(\mathbf{B}) < \lambda_m(\mathbf{A}) \tag{13.8}$$

As linhas e colunas de **B** podem ser reordenadas de maneira a obtermos

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^* \end{bmatrix} \tag{13.9}$$

onde **G** é uma matriz do tipo definido em (10.2). Como **B** e $\mathbf{B}^*$ são matrizes semelhantes, suas raízes características são iguais (ver teorema 2.6) e temos

$$\lambda_m(\mathbf{B}^*) = \lambda_m(\mathbf{B}) \tag{13.10}$$

As raízes características de $\mathbf{B}^*$ são dadas por $|\mathbf{B}^* - \lambda\mathbf{I}| = 0$. Lembrando (13.9), essa equação pode ser escrita

$$\begin{vmatrix} -\lambda\mathbf{I}_{n-h} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^* - \lambda\mathbf{I}_h \end{vmatrix} = 0$$

ou $$(-\lambda)^{n-h} \, |\mathbf{A}^* - \lambda\mathbf{I}_h| = 0 \, ,$$

mostrando que $\mathbf{B}^*$ tem $n-h$ raízes características iguais a zero e que as demais raízes características são iguais às de $\mathbf{A}^*$. Então

$$\lambda_m(\mathbf{A}^*) = \lambda_m(\mathbf{B}^*) \tag{13.11}$$

De (13.8), (13.10) e (13.11) conclui-se que

$$\lambda_m(\mathbf{A}^*) < \lambda_m(\mathbf{A}) \text{, c.q.d.}$$

TEOREMA 13.4. A raiz característica máxima de **A**, λ_m, é uma raiz simples (não múltipla) da equação característica $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$. A demonstração desse teorema será feita apenas para o caso em que **A** é uma matriz 2×2. Nesse caso a equação característica fica

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou $$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \tag{13.12}$$

Essa equação do 2º grau tem uma raiz dupla apenas se

$$\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0$$

ou $$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{21}a_{12} = 0 \tag{13.13}$$

Para $\mathbf{A} \geq 0$ e irredutível temos $a_{21}a_{12} > 0$ e a condição (13.13) se torna impossível. Conclui-se que $\Delta \neq 0$ e que há duas raízes distintas.

Vejamos uma outra maneira de demonstrar que a equação (13.12) não pode ter raiz dupla. Se houvesse uma raiz dupla teríamos

$$\lambda_m = \lambda = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \tag{13.14}$$

Mas a_{11} e a_{22} são as raízes características das submatrizes principais de **A**. Então, de acordo com o teorema 13.3, temos $a_{11} < \lambda_m$ e $a_{22} < \lambda_m$, o que torna (13.14) impossível.

TEOREMA 13.5. A cada raiz característica real (α) de **A** distinta de λ_m corresponde um vetor característico (**x** à direita ou **p** à esquerda) que tem pelo menos um elemento negativo.

Demonstração: Para um vetor característico à direita, temos

$$\mathbf{Ax} = \alpha\mathbf{x} \tag{13.15}$$

De acordo com os teoremas 11.3 e 13.4, temos

$$\alpha < \lambda_m \tag{13.16}$$

De acordo com (12.8), (12.9) e (12.14), temos

$$\bar{\mathbf{p}}\mathbf{A} = \lambda_m \bar{\mathbf{p}}\,, \tag{13.17}$$

com $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$.

Pré-multiplicando (13.15) por $\bar{\mathbf{p}}$ e pós-multiplicando (13.17) por **x**, obtemos

$$\bar{\mathbf{p}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \alpha \bar{\mathbf{p}}\mathbf{x}$$

e

$$\bar{\mathbf{p}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_m \bar{\mathbf{p}}\mathbf{x}$$

Subtraindo essas duas equações membro-a-membro, obtemos

$$(\lambda_m - \alpha)\bar{\mathbf{p}}\mathbf{x} = 0$$

Lembrando (13.16) segue-se que

$$\bar{\mathbf{p}}\mathbf{x} = 0$$

Como $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$, conclui-se que o vetor característico $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tem pelo menos um elemento negativo, c.q.d.

A seguir faremos a demonstração considerando um vetor característico à esquerda. Por definição, temos

$$\mathbf{p}\mathbf{A} = \alpha \mathbf{p}$$

Pós-multiplicando por $\bar{\mathbf{x}}$, obtemos

$$\mathbf{p}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \alpha \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} \tag{13.18}$$

De (11.15), pré-multiplicando por **p**, obtemos

$$\mathbf{pA\bar{x}} = \lambda_m \mathbf{p\bar{x}} \tag{13.19}$$

Subtraindo, membro-a-membro, (13.18) de (13.19), obtemos

$$(\lambda_m - \alpha)\mathbf{p\bar{x}} = 0$$

Com $\alpha < \lambda_m$ segue-se que

$$\mathbf{p\bar{x}} = 0$$

Uma vez que, de acordo com (11.14), $\mathbf{\bar{x}} > \mathbf{0}$, conclui-se que o vetor $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ tem pelo menos um elemento negativo.

TEOREMA 13.6. Dado $\theta = \dfrac{1}{\omega} > \lambda_m$, temos $(\mathbf{I} - \omega\mathbf{A})^{-1} > \mathbf{0}$, $(\theta\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} > \mathbf{0}$ e todos os elementos das matrizes $(\mathbf{I} - \omega\mathbf{A})^{-1}$ e $(\theta\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ são funções contínuas e crescentes de ω (ou funções contínuas e decrescentes de θ)

Demonstração: De acordo com os teoremas 11.3 e 13.4, sabemos que λ_m é a maior raiz característica de **A**. Então, pelo teorema 9.1, se $\theta = \omega^{-1} > \lambda_m$, a matriz $\theta^{-1}\mathbf{A} = \omega\mathbf{A}$ é convergente e, de acordo com (9.6) e (9.7), podemos escrever

$$(\theta\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\theta}\left[\mathbf{I} + \frac{1}{\theta}\mathbf{A} + \left(\frac{1}{\theta}\mathbf{A}\right)^2 + \ldots\right] \tag{13.20}$$

e
$$(\mathbf{I} - \omega\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \omega\mathbf{A} + \omega^2\mathbf{A}^2 + \ldots \tag{13.21}$$

Note-se que, com $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, todos os termos no segundo membro de (13.20) ou (13.21) são não-negativos. Os escalares (potências de ω) que multiplicam as matrizes no segundo membro de (13.20) ou (13.21) são estritamente positivos.

As matrizes nos $n+1$ primeiros termos do segundo membro de (13.20) ou (13.21) coincidem com as matrizes no segundo membro de

$$(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n = \mathbf{I} + n\mathbf{A} + \binom{n}{2}\mathbf{A}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n \,,$$

onde os coeficientes n, $\binom{n}{2}$, etc. também são positivos. Sabemos, de acordo com o teorema 11.1, que $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n > \mathbf{0}$. Então a soma dos $n+1$ primeiros termos do segundo membro de (13.20) ou (13.21) é uma matriz positiva. Como os demais termos são não-negativos, conclui-se que

$$(\theta\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} > \mathbf{0} \tag{13.22}$$

e

$$(\mathbf{I}-\omega\mathbf{A})^{-1} > \mathbf{0} \tag{13.23}$$

Observando (13.20) e (13.21) verifica-se que toda contribuição (positiva) para formar os elementos (todos positivos) de $(\theta\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ ou $(\mathbf{I}-\omega\mathbf{A})^{-1}$ é uma função contínua e crescente de $\omega = \theta^{-1} > 0$. Conclui-se que cada um dos elementos de $(\theta\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$

ou $(\mathbf{I}-\omega\mathbf{A})^{-1}$ é uma função contínua e crescente de $\omega=\theta^{-1}>0$ e, consequentemente, uma função contínua e decrescente de $\theta=\omega^{-1}$, c.q.d.

TEOREMA 13.7. Indicando por $\mathbf{a}_j$ as colunas de **A**, temos $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n]$ e os totais de colunas são $\boldsymbol{\iota}'\mathbf{a}_1$, $\boldsymbol{\iota}'\mathbf{a}_2$, ..., $\boldsymbol{\iota}'\mathbf{a}_n$. Para uma matriz quadrada **A**, semipositiva e irredutível, temos

$$\min_j(\boldsymbol{\iota}'\mathbf{a}_j)\le\lambda_m\le\max_j(\boldsymbol{\iota}'\mathbf{a}_j)$$

Demonstração: De acordo com o teorema 11.2, temos

$$\lambda_m\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}},$$

com $\bar{\mathbf{x}}>\mathbf{0}$. Pré-multiplicando por $\boldsymbol{\iota}'$, obtemos

$$\lambda_m\boldsymbol{\iota}'\bar{\mathbf{x}}=\boldsymbol{\iota}'\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$$

ou

$$\lambda_m\sum\bar{x}_j=[\boldsymbol{\iota}'\mathbf{a}_1 \quad \boldsymbol{\iota}'\mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\iota}'\mathbf{a}_n]\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \vdots\\ \bar{x}_n\end{bmatrix},$$

onde $\bar{x}_j>0$ são os elementos de $\bar{\mathbf{x}}$.

Segue-se que

$$\lambda_m = \frac{\sum(\boldsymbol{\iota}'\mathbf{a}_j)\bar{x}_j}{\sum \bar{x}_j} \tag{13.24}$$

Note-se que, com $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ e irredutível, $\boldsymbol{\iota}'\mathbf{a}_j > 0$ para todo *j*. A expressão (13.24) mostra que λ_m é uma média ponderada dos totais de colunas $\boldsymbol{\iota}'\mathbf{a}_j$, com fatores de ponderação $\bar{x}_j > 0$. Se todos os $\boldsymbol{\iota}'\mathbf{a}_j$ forem iguais temos

$$\min_j(\boldsymbol{\iota}'\mathbf{a}_j) = \lambda_m = \max_j(\boldsymbol{\iota}'\mathbf{a}_j)$$

Caso contrário teremos

$$\min_j(\boldsymbol{\iota}'\mathbf{a}_j) < \lambda_m < \max_j(\boldsymbol{\iota}'\mathbf{a}_j)$$

TEOREMA 13.8. Indicando por $\mathbf{e}_i$ as linhas de **A**, temos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{bmatrix}$$

e os totais de linhas são $\mathbf{e}_1\boldsymbol{\iota}$, $\mathbf{e}_2\boldsymbol{\iota}$, ..., $\mathbf{e}_n\boldsymbol{\iota}$. Para uma matriz quadrada **A**, semipositiva e irredutível, temos

$$\min_i(\mathbf{e}_i\boldsymbol{\iota}) \leq \lambda_m \leq \max_i(\mathbf{e}_i\boldsymbol{\iota})$$

Demonstração: De acordo com o teorema 12.1 (e lembrando que $\mu_m = \lambda_m$), temos

$$\overline{\mathbf{p}}\mathbf{A} = \lambda_m \overline{\mathbf{p}} ,$$

com $\overline{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$. Pós-multiplicando por $\boldsymbol{\iota}$, obtemos

$$\overline{\mathbf{p}} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{bmatrix} \boldsymbol{\iota} = \lambda_m \overline{\mathbf{p}} \boldsymbol{\iota}$$

Indicando os elementos de $\overline{\mathbf{p}}$ por $\overline{p}_i$, temos

$$\sum \overline{p}_i (\mathbf{e}_i \boldsymbol{\iota}) = \lambda_m \sum \overline{p}_i$$

ou
$$\lambda_m = \frac{\sum (\mathbf{e}_i \boldsymbol{\iota}) \overline{p}_i}{\sum \overline{p}_i}$$

mostrando que λ_m é uma média ponderada dos totais de linhas $(\mathbf{e}_i \boldsymbol{\iota} > 0)$, com fatores de ponderação $\overline{p}_i > 0$. Se todos os totais de linhas forem iguais temos

$$\min_i (\mathbf{e}_i \boldsymbol{\iota}) = \lambda_m = \max_i (\mathbf{e}_i \boldsymbol{\iota})$$

Caso contrário temos

$$\min_i (\mathbf{e}_i \boldsymbol{\iota}) < \lambda_m < \max_i (\mathbf{e}_i \boldsymbol{\iota})$$

14. RESUMO

Se **A** é uma matriz quadrada $n \times n$, semipositiva ($\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$) e irredutível, temos que:

a) A maior raiz *característica* de **A**, indicada por λ_m, é uma raiz simples (não-múltipla) da equação característica de **A**. Essa raiz é positiva e a ela correspondem vetores característicos à direita (**x**) e à esquerda (**p**) que são positivos, isto é, $\lambda_m > 0$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ e $\mathbf{p} > \mathbf{0}$.

b) λ_m é uma função contínua e crescente dos elementos de **A** (teorema 13.2).

c) A raiz característica máxima de uma submatriz principal de **A** é menor do que λ_m (teorema 13.3).

d) A cada raiz característica real (α) de **A** distinta de λ_m corresponde um vetor característico (à esquerda ou à direita) que tem pelo menos um elemento negativo (teorema 13.5).

e) Se $\theta = \omega^{-1} > \lambda_m$, temos $(\mathbf{I} - \omega\mathbf{A})^{-1} > \mathbf{0}$, $(\theta\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} > \mathbf{0}$ e todos os elementos dessas matrizes são funções contínuas e crescentes de ω (ou funções contínuas e decrescentes de θ) (teorema 13.6).

f) O valor de λ_m se encontra dentro do intervalo delimitado pelo menor e pelo maior total de coluna de **A**. O valor de λ_m se encontra, também, dentro do intervalo delimitado pelo menor e pelo maior total de linha de **A** (teoremas 13.7 e 13.8).

15. MATRIZES SEMIPOSITIVAS REDUTÍVEIS

Seguindo Pasinetti, vamos apresentar aqui, sem demonstração, as propriedades relativas às matrizes quadradas semipositivas redutíveis.

Se **A** é uma matriz quadrada $n \times n$, semipositiva ($\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$) e redutível, temos que:

a) O máximo (λ_m) entre os $\lambda(x)$ definidos em (11.6) é uma raiz característica de **A** à qual estão associados vetores característicos à direita (**x**) e à esquerda (**p**) que são não-negativos. Não há nenhuma raiz característica de **A** maior do que λ_m, mas λ_m não é, necessariamente, uma raiz simples da equação característica de **A**.

b) λ_m é uma função contínua e não-decrescente dos elementos de **A**.

c) A raiz característica máxima de uma submatriz principal de **A** não pode ser maior do que λ_m.

d) Se $\theta = \omega^{-1} > \lambda_m$, temos $(\mathbf{I} - \omega\mathbf{A})^{-1} \geq \mathbf{0}$, $(\theta\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \geq \mathbf{0}$ e todos os elementos dessas matrizes são funções contínuas e não-decrescentes de ω.

e) O valor de λ_m se encontra dentro do intervalo delimitado pelo menor e pelo maior total de coluna de **A**. O valor de λ_m se encontra, também, dentro do intervalo delimitado pelo menor e pelo maior total de linha de **A** (teoremas 13.7 e 13.8)

Note-se que não há, no caso de matrizes semipositivas redutíveis, teorema correspondente ao teorema 13.5 ou item (d) da seção anterior.

16. EXERCÍCIOS

16.1. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e o vetor } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note que o vetor **x** tem apenas 1 elemento positivo. Verifique que $(\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{x}$ tem 2 elementos positivos e que os elementos do vetor $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^2\mathbf{x}$ são 16, 4 e 20, todos positivos, de acordo com o que foi visto na demonstração do teorema 11.1.

16.2. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e o vetor } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifique que $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^3\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 92 \\ 0 \\ 124 \end{bmatrix}$.

Esse resultado contraria (11.4)? Explique.

16.3. No contexto do teorema 13.3, considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Seja $\mathbf{A}^*$ a matriz 2×2 obtida de **A** eliminando a primeira linha e a primeira coluna. Seja **B** a matriz 3×3 obtida substituindo a linha e a coluna eliminadas por vetores nulos.

a) Mostre que as raízes características de $\mathbf{A}^*$ são 5 e 2.
b) Mostre que as raízes características de **B** são 5, 2 e zero.
c) Verifique que a única raiz característica real de **A** é igual a 5,1528.
d) Note que, de acordo com o que foi visto no teorema 13.3, temos $\lambda_m(\mathbf{A}^*) = \lambda_m(\mathbf{B}) < \lambda_m(\mathbf{A})$.

16.4. Para a matriz **A** dado no exercício 7.1, verifique a relação (13.24).

16.5. Idem, para a matriz **A** dada no exercício 4.2 (note que se trata de uma matriz semipositiva redutível).

APÊNDICE B. INTRODUÇÃO À CONTROVÉRSIA DE CAMBRIDGE SOBRE A TEORIA DO CAPITAL

1. INTRODUÇÃO[33]

Na década de 1950, em Cambridge, Inglaterra, teve início um movimento de crítica às ideias neoclássicas, que Harcourt (1972) denomina “controvérsias de Cambridge sobre a teoria do capital”. O movimento foi liderado por Piero Sraffa e Joan Robinson.

Criticando o papel mistificador da ideia de função de produção na economia neoclássica, Robinson (1953-4) escreveu: “Ensina-se o estudante de economia a escrever $Y = f(L,K)$, onde L é a quantidade de mão-de-obra, K a quantidade de capital, e Y a produção. Se lhe ensina a supor todos os trabalhadores como sendo iguais, e a medir L em termos de homens-horas de trabalho; se lhe ensina ainda alguma coisa sobre o problema de números índices relacionado com a escolha de uma unidade de medida da produção; e então é levado rapidamente para outro assunto, na esperança de que ele se esqueça de perguntar em que unidade K é medido. Antes que faça tal pergunta, ele se

---

[33] Reproduzimos, nessa introdução, vários parágrafos da secção 2.5 (p. 33-37) da dissertação de mestrado de Graziano da Silva (1974).

tornou um professor, e assim hábitos confusos (descuidados) de pensar são transferidos de uma geração para outra".

Não se pode medir o capital pelo seu valor, pois este é função da taxa de juros, a qual, por sua vez, seria determinada a partir da função de produção (os preços relativos do capital e do trabalho sendo determinados pela taxa marginal de substituição entre esses fatores); medir o capital pelo seu valor implica, portanto, em raciocínio circular.

A teoria de produtividade marginal pode servir para explicar a relação entre variações nos salários e no emprego e é uma interessante teoria de alocação dos recursos, *dada* uma taxa de juros (e a taxa "normal" de lucros); mas não constitui uma teoria que explique a distribuição do produto entre lucros e salários (ver Serra, 1973, p. 14-141).

Para Dobb (1973, p. 248) o aparecimento, em 1960, do livro já clássico de Sraffa, intitulado "A produção de mercadorias por meio de mercadorias" representa verdadeiro divisor de águas na evolução do pensamento econômico. A partir dessa obra se desenvolveu uma espécie de escola entre a nova geração de economistas, que desenvolveu uma crítica da teoria neoclássica (como subtítulo ao seu livro, Sraffa colocou que ele era um "prelúdio a uma crítica da teoria econômica"). Uma tendência dessa escola foi reavivar o estudo das ideias de Ricardo e Marx. Comentando o livro um ano após sua publicação, Meek (1961) afirmou que se podia considerá-lo, alternativamente, "como modelo teórico herético de um tipo especial de economia, destinado a dar uma nova solução ao tradicional problema do valor", "como ataque implícito à moderna análise marginal", ou "como uma espécie de magnífica reabilitação do método clássico (e, até certo ponto, marxista) de estudo de certos problemas cruciais relativos ao valor e à distribuição".

No modelo da "produção de mercadorias por meio de mercadorias" não há lugar para os conceitos de produto marginal ou custo marginal. Sraffa mostra que numa economia com excedente, os valores dos preços relativos só podem ser determinados se o nível de salários ou da taxa de juros (ou uma relação entre ambos) for exogenamente estabelecido; em outras palavras, a distribuição da renda não pode ser determinada nos limites de um modelo estritamente "econômico". Sraffa estuda a relação funcional entre nível de salários e taxa de juros (ou lucro) sem discutir, entretanto, como é fixado (fora do seu modelo), o valor de uma dessas variáveis.

Seria necessária uma teoria da determinação dos salários, de acordo com um nível de subsistência, historicamete modificado, como é feito nas escolas clássica e marxista, para "completar" (ou "fechar") o modelo de Sraffa.

Dentro do esquema da “produção de mercadorias por meio de mercadorias” pode-se mostrar que é, em princípio, possível que o valor do capital e a taxa de juros variem no mesmo sentido, quando se consideram taxas de juros alternativas, de tal maneira que a uma taxa de juros relativamente baixa está associado um baixo nível de mecanização.

Esse fenômeno, denominado de “reversão do capital” (“capital-reversing”) contraria o que se espera de acordo com a função de produção neoclássica. Mais ainda, pode-se mostrar que uma certa técnica pode ser a mais lucrativa para diferentes valores da taxa de juros, com outra(s) técnica(s) sendo a(s) mais lucrativas) para taxas de juros intermediárias. Esse é o fenômeno denominado de “reversibilidade” (“reswitching” ou “double-switching”) de técnica de produção[34]. Ao analisar um fenômeno semelhante (as oscilações da diferença de preços entre duas mercadorias para diferentes taxas de juros) Sraffa conclui que esses movimentos “... não podem ser reconciliados com *qualquer* noção de capital como uma grandeza mensurável independentemente da distribuição e dos preços”.

Samuelson (1962), num artigo que é uma das peças básicas da controvérsia, procura defender a teoria neoclássica, desenvolvendo a sua pseudo-função de produção

---

34 Para melhor discussão do assunto veja Araújo Jr. (1973, p. 3).

(“surrogate production function”). Entretanto, Garegnani (1970) mostraria que a construção de Samuelson só era válida para uma economia onde uma única mercadoria era produzida, a partir dela mesma e de trabalho. Em razão da incompatibilidade entre a função de produção agregada da economia neoclássica e a heterogeneidade dos bens de capital, o debate deu origem a diversas denominações para um “capital” que fosse fisicamente homogêneo ou maleável: argila, conjuntos mecânicos (“meccano sets”), etc., conforme preferência do autor, e que Joan Robinson, ironicamente, denominou de ectoplasma.

Como será visto adiante, verifica-se que a função de produção agregada dos modelos neoclássicos só é estritamente válida em uma “economia” com uma única mercadoria. É claro que essa crítica não se aplica diretamente aos modelos microeconômicos de equilíbrio geral, que não dependem de uma função de produção agregada.

Ironicamente, os esquemas sraffianos também foram utilizados em críticas à economia marxista, particularmente no que se refere à determinação dos valores-trabalho quando há produção conjunta (Steedman, 1977). Mas, isso pode ser considerado superado pela solução apresentada em Morishima e Catephores (1980), embora essa solução esteja longe de ser universalmente aceita entre os economistas que consideram o conceito de valor-trabalho importante.

Nas seções seguintes desse Apêndice, após estudar algumas características da hipérbole utilizadas adiante, apresentamos a análise da relação entre nível de salários e a taxa de juros em uma economia (a relação w-π), baseando-nos, fundamentalmente, no artigo de Garegnani (1970). Nesse artigo Garegnani mostra que a “pseudo-função de produção” de Samuelson (1962) só pode existir em uma economia em que um único bem é produzido utilizando-se mão--de-obra e o mesmo bem; os pontos básicos dessa crítica são apresentados na seção 5 desse Apêndice.

2. DA GEOMETRIA ANALÍTICA DA HIPÉRBOLE

A equação geral de uma hipérbole com assíntotas paralelas aos eixos coordenados é

$$(y+\beta)(x+\alpha)=\gamma \tag{2.1}$$

ou
$$y=\frac{\gamma}{x+\alpha}-\beta$$

Consideraremos, aqui, apenas casos em que $\gamma>0$. Note-se que, com $\gamma>0$,

$$\lim_{x\to-\alpha^+} y=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\alpha^-} y=-\infty$$

e
$$\lim_{x\to\infty} y=-\beta,$$

mostrando que as retas $x=-\alpha$ e $y=-\beta$ são assíntotas da curva.

De (2.1) obtemos:

a) para $x=0$, $y=\overline{OB}=\dfrac{\gamma}{\alpha}-\beta$;

b) para $y=0$, $x=\overline{OA}=\dfrac{\gamma}{\beta}-\alpha$

A figura 1 ilustra os dois tipos de arcos de hipérbole que serão examinados mais pormenorizadamente.

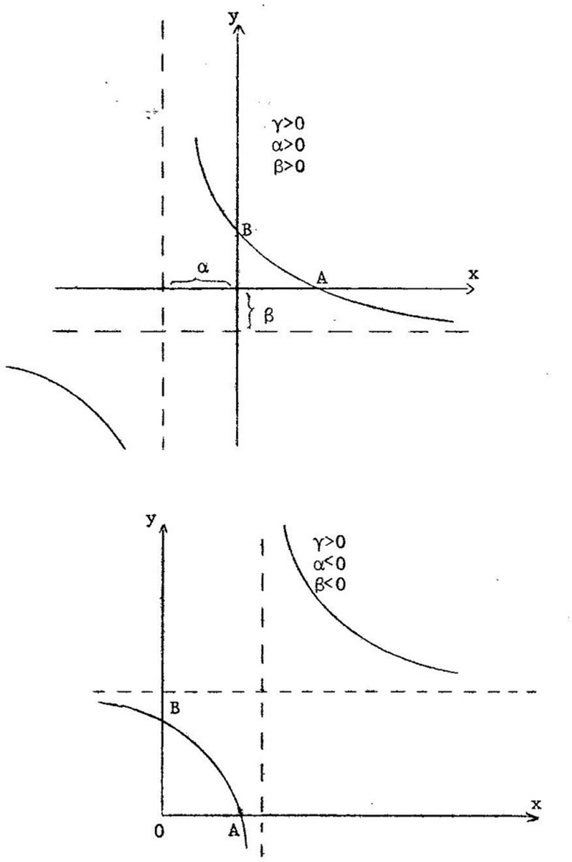


Figura 1. Arco de hipérbole convexo ou côncavo no primeiro quadrante.

A equação da hipérbole pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\left(\frac{\gamma}{\alpha}-\beta-y\right)\left(\frac{\gamma}{\beta}-\alpha-x\right)}{xy}=\frac{\gamma}{\alpha\beta}=m \qquad (2.2)$$

Mostraremos, a seguir, que essa expressão é equivalente a (2.1). De (2.2) segue-se que

$$\gamma xy = \left[(\gamma - \alpha\beta) - \alpha y\right]\left[(\gamma - \alpha\beta) - \beta x\right]$$

$$\gamma xy = (\gamma - \alpha\beta)^2 - \beta x(\gamma - \alpha\beta) - \alpha y(\gamma - \alpha\beta) + \alpha\beta xy$$

$$(\gamma - \alpha\beta)xy = (\gamma - \alpha\beta)^2 - \beta x(\gamma - \alpha\beta) - \alpha y(\gamma - \alpha\beta)$$

$$xy + \beta x + \alpha y + \alpha\beta = \gamma$$

E, finalmente,

$$(y + \beta)(x + \alpha) = \gamma$$

A figura a seguir mostra a interpretação geométrica de (2.2.)

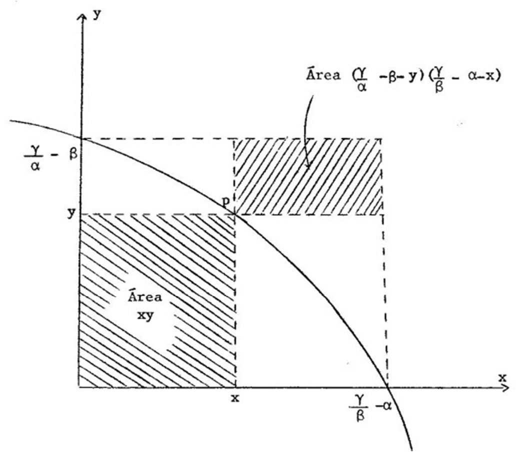


Figura 2. Arco de hipérbole côncavo.

O tipo de hipérbole que estamos considerando é caracterizado pelo fato de a relação entre as áreas dos retângulos hachurados na figura ser igual a $m = \dfrac{\gamma}{\alpha\beta}$. Note-se que essa relação não depende da posição do ponto P na hipérbole.

Conclui-se, então, que o arco de hipérbole que intercepta a parte positiva dos eixos coordenados é côncavo (em relação à origem) se, e somente se, $m<1$, e é convexo se, e somente se, $m>1$.

3. A RELAÇÃO ENTRE SALÁRIO E TAXA DE JUROS EM UM ÚNICO 'SISTEMA' COM DUAS 'LINHAS DE PRODUÇÃO'

Consideremos uma técnica de produção, com retornos constantes à escala, com duas 'linhas de produção', onde são produzidos dois bens econômicos, utilizando, como insumos, trabalho (*L*) e capital (*C*). Numa das linhas de produção, o setor 1, é produzido um bem de capital e na outra, o setor 2, é produzido um bem de consumo. Sejam C_1 e L_1 as quantidades do bem de capital e de trabalho necessárias à produção de uma unidade do bem de capital e sejam C_2 e L_2 as quantidades do bem de capital e de trabalho necessárias à produção de uma unidade do bem de consumo. Estabelecemos que o preço do bem de consumo é igual a um e que o preço do bem de capital é igual a *p*. Representemos por *w* o nível do salário, por π a taxa de juros ou lucros e por *d* a taxa de depreciação. Admitindo que os salários sejam pagos no fim do período de produção, temos

$$pC_1(\pi + d) + wL_1 = p \tag{3.1}$$

$$pC_2(\pi + d) + wL_2 = 1 \tag{3.2}$$

Admitamos que o sistema esteja em estado estacionário (isto é, que haja apenas reprodução simples), de maneira que todo o produto líquido está na forma de bem de consumo.

Neste caso, para cada unidade do bem de consumo que é produzida, é necessário produzir λ unidades do bem de capital, com

$$\lambda = dC_2 + \lambda dC_1$$

Portanto, para cada unidade do bem de consumo são produzidas

$$\lambda = \frac{dC_2}{1 - dC_1} \tag{3.3}$$

unidades do bem de capital, exatamente o suficiente para repor a depreciação dos bens de capital existentes.

Explicitando p em (3.1) e (3.2) e igualando as duas expressões, obtemos:

$$\frac{1 - wL_2}{C_2(\pi + d)} = \frac{wL_1}{1 - C_1(\pi + d)} \tag{3.4}$$

$$1 - C_1(\pi + d) - wL_2[1 - C_1(\pi + d)] = wL_1C_2(\pi + d)$$

$$1 - C_1(\pi + d) = w[L_2 + (L_1C_2 - L_2C_1)(\pi + d)]$$

$$w = \frac{1 - C_1(\pi + d)}{L_2 + (L_1C_2 - L_2C_1)(\pi + d)} \tag{3.5}$$

Para $\pi = 0$ obtemos o salário máximo, dado por

$$W = \frac{1 - dC_1}{L_2 + (L_1C_2 - L_2C_1)d} = \frac{1 - dC_1}{L_2(1 - dC_1) + dL_1C_2} \tag{3.6}$$

Seja Π o valor de π para $w = 0$. Então, de (3.5) temos:

$$1 - C_1(\Pi + d) = 0$$

ou

$$\Pi = \frac{1 - dC_1}{C_1} \tag{3.7}$$

Uma vez que $1 - dC_1 > 0$ (isto é, a depreciação dos bens de capital requeridos para a produção de uma unidade do bem de capital é menor que um)[35], W e Π são positivos, concluindo-se que a relação entre w e π, dada pela equação (3.5), intercepta as partes positivas dos eixos coordenados.

Se $L_1C_2 - L_2C_1 = 0$, de (3.5) obtemos

$$w = \frac{1 - dC_1}{L_2} - \frac{C_1}{L_2}\pi, \tag{3.8}$$

mostrando que neste caso especial a relação entre w e π é linear, como mostra a figura 3.

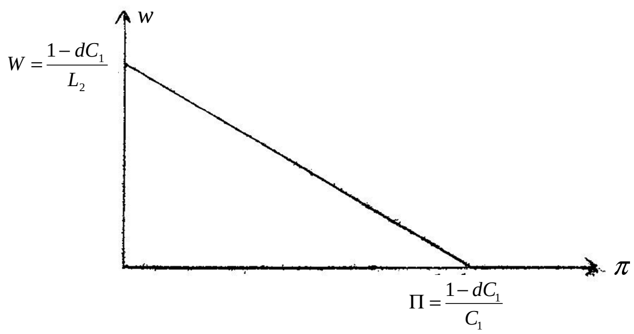


Figura 3. Relação w-π linear.

35 Note-se que da equação (3.1) segue-se que $1 - dC_1 = C_1\pi + \frac{w}{p}L_1$.

E qual é a forma da relação entre w e π se $L_1C_2 - L_2C_1 \neq 0$? De (3.5), dividindo o numerador e o denominador por $L_1C_2 - L_2C_1$, obtemos:

$$w\left(\frac{L_2}{L_1C_2 - L_2C_1} + \pi + d\right) = \frac{1}{L_1C_2 - L_2C_1} - \frac{C_1}{L_1C_2 - L_2C_1}(\pi + d)$$

Adicionando e subtraindo $\frac{L_2C_1}{(L_1C_2 - L_2C_1)^2}$, obtemos:

$$w\left(\frac{L_2}{L_1C_2 - L_2C_1} + \pi + d\right) =$$

$$= -\frac{C_1}{L_1C_2 - L_2C_1}\left(\frac{L_2}{L_1C_2 - L_2C_1} + \pi + d\right) + \frac{L_1C_2}{(L_1C_2 - L_2C_1)^2}$$

e

$$\left(w + \frac{C_1}{L_1C_2 - L_2C_1}\right)\left(\pi + d + \frac{L_2}{L_1C_2 - L_2C_1}\right) =$$

$$= \frac{L_1C_2}{(L_1C_2 - L_2C_1)^2} \qquad (3.9)$$

Comparando essa expressão com (2.1) verifica-se que a relação w-π é um arco de hipérbole com assíntotas

$$w = -\frac{C_1}{L_1C_2 - L_2C_1}$$

e

$$\pi = -d - \frac{L_2}{L_1C_2 - L_2C_1} = -\frac{dL_1C_2 + L_2(1-dC_1)}{L_1C_2 - L_2C_1}$$

A figura 4 mostra a representação gráfica da relação w-π quando $L_1C_2 - L_2C_1 > 0$.

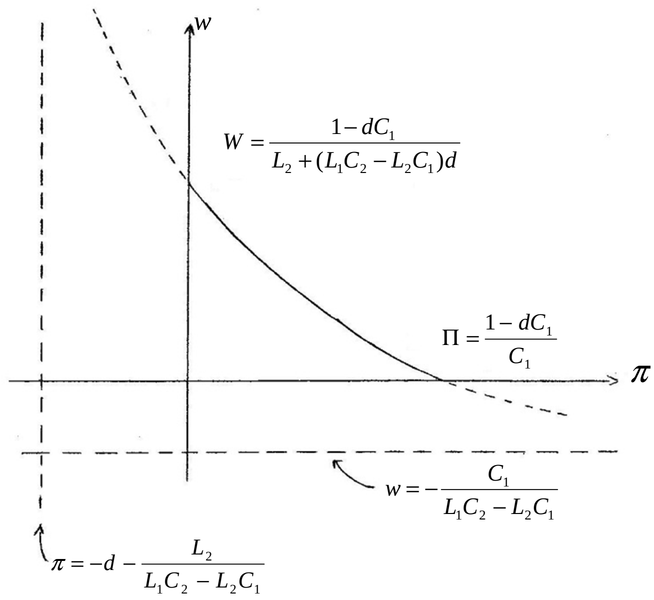


Figura 4. Relação w-π convexa.

Portanto, se $\frac{L_1}{C_1} > \frac{L_2}{C_2}$ o arco de hipérbole relevante é convexo em relação à origem.

Se, por outro lado, $L_1C_2 - L_2C_1 < 0$, isto é, $\frac{L_1}{C_1} < \frac{L_2}{C_2}$, o arco de hipérbole relevante é côncavo, como ilustra a figura 5.

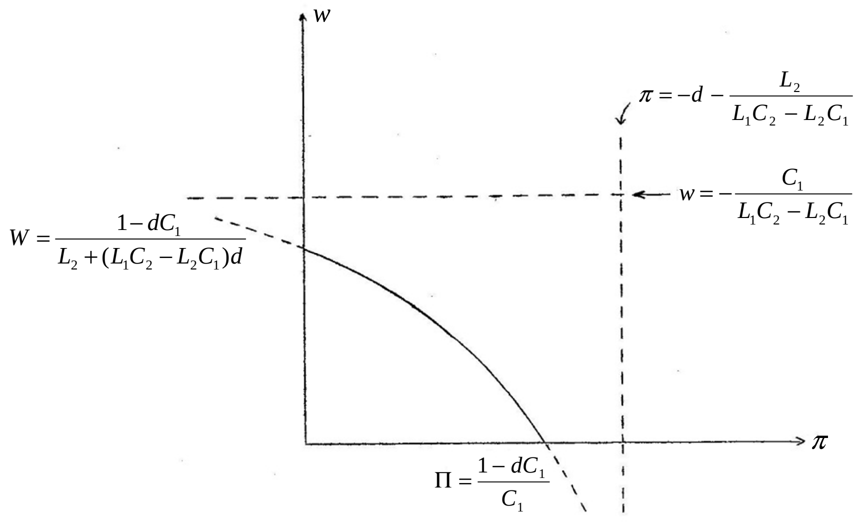


Figura 5. Relação w-π côncava.

A correspondência entre o valor de $L_1C_2 - L_2C_1$ e a forma (côncava ou convexa) da relação w-π pode ser mostrada de uma outra maneira. Comparando (2.1) e (3.9) obtemos as seguintes relações:

$$\alpha = d + \frac{L_2}{L_1C_2 - L_2C_1}$$

$$\beta = \frac{C_1}{L_1C_2 - L_2C_1}$$

$$\gamma = \frac{L_1 C_2}{(L_1 C_2 - L_2 C_1)^2}$$

Substituindo essas expressões em (2.2), fazendo algumas simplificações e considerando (3.6) e (3.7), obtemos

$$\frac{(W - w)(\Pi - \pi)}{w\pi} = \frac{1}{h(1 - dC_1) + dC_1} = m \qquad (3.10)$$

com

$$h = \frac{L_2 C_1}{L_1 C_2} = \frac{\frac{L_2}{C_2}}{\frac{L_1}{C_1}}$$

A interpretação geométrica de (3.10) é feita na figura 6.

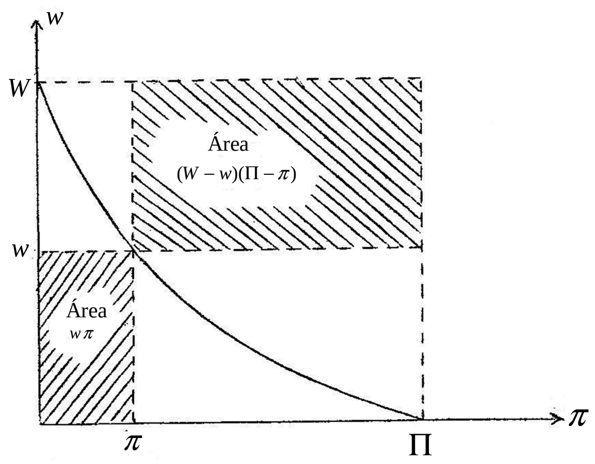


Figura 6. As áreas $w\pi$ e $(W - w)(\Pi - \pi)$ em uma relação w-π convexa.

Se $\frac{L_1}{C_1} > \frac{L_2}{C_2}$, temos $h < 1$, $m > 1$ e a relação w-π é convexa em relação à origem. Se $\frac{L_1}{C_1} < \frac{L_2}{C_2}$, temos $h > 1$, $m < 1$ e a relação w-π é côncava.

Em resumo:

a) se a razão trabalho-capital no setor de produção do bem de capital é igual à do setor de produção do bem de consumo $\left(\frac{L_1}{C_1} = \frac{L_2}{C_2}\right)$ a relação w-π é uma reta;

b) se o setor de produção de bens de capital é mais mão-de-obra intensivo $\left(\frac{L_1}{C_1} > \frac{L_2}{C_2}\right)$ a relação w-π é convexa;

c) se o setor de produção de bens de capital é menos mão-de-obra intensivo $\left(\frac{L_1}{C_1} < \frac{L_2}{C_2}\right)$ a relação w-π é côncava.

Passemos a analisar a relação entre p e π. (Lembremos que o preço do bem de consumo foi fixado em um). De (3.2) temos

$$p = \frac{1 - wL_2}{C_2(\pi + d)}$$

Considerando (3.5) obtemos

$$p = \frac{1}{C_2(\pi + d)} - \frac{L_2[1 - C_1(\pi + d)]}{C_2(\pi + d)[L_2 + (L_1C_2 - L_2C_1)(\pi + d)]}$$

$$p = \frac{L_2 + (L_1C_2 - L_2C_1)(\pi + d) - L_2 + L_2C_1(\pi + d)}{C_2(\pi + d)[L_2 + (L_1C_2 - L_2C_1)(\pi + d)]}$$

$$p = \frac{L_1}{L_2 + (L_1C_2 - L_2C_1)(\pi + d)} \qquad (3.11)$$

Se $L_1C_2 - L_2C_1 > 0$, p é claramente positivo. Se $L_1C_2 - L_2C_1 < 0$ a condição para que p seja positivo é

$$\pi + d < -\frac{L_2}{L_1C_2 - L_2C_1}$$

ou

$$\pi < \frac{L_2}{L_2C_1 - L_1C_2} - d = \frac{1}{C_1 - \frac{L_1}{L_2}C_2} - d$$

Uma vez que, de acordo com (3.7),

$$\Pi = \frac{1}{C_1} - d < \frac{1}{C_1 - \frac{L_1}{L_2}C_2} - d\ ,$$

a condição anterior é satisfeita no intervalo relevante para a relação w-π.

A expressão (3.11) mostra que:

a) se $\frac{L_1}{C_1} = \frac{L_2}{C_2}$, o preço *p* é o mesmo para qualquer taxa de juros $\left(p = \frac{L_1}{L_2}\right)$, sendo igual à razão dos tempos de trabalho diretamente necessários à produção de uma unidade do bem de capital e do bem de consumo;

b) se $\frac{L_1}{C_1} > \frac{L_2}{C_2}$, o preço *p* é uma função decrescente de π;

c) se $\frac{L_1}{C_1} < \frac{L_2}{C_2}$, o preço *p* é uma função crescente de π.

Esses resultados devem ficar claros através de um raciocínio menos algébrico. Consideremos duas situações (I e II) em que a mesma técnica de produção é utilizada. Admitamos que a indústria do bem de capital é menos mão-de-obra intensiva (mais capital intensiva) que a indústria do bem de consumo, isto é, $\frac{L_1}{C_1} < \frac{L_2}{C_2}$.

Na situação I a taxa de lucro é π_I, o nível do salário é w_I, o preço do bem de capital é p_I, e há equilíbrio, com as duas indústrias sendo igualmente lucrativas.

Consideremos, a seguir, uma situação II, com $\pi_{II} > \pi_I$. Então, $w_{II} < w_I$ e o montante de lucros em ambas as indústrias seria maior e o total de salários pagos seria menor que na situação I. Entretanto, se $\frac{L_1}{C_1} < \frac{L_2}{C_2}$, o aumento do montante de lucros devido ao maior valor de π será relativamente maior na indústria de bens de capital (que é, neste exemplo, a mais capital intensiva) e o decréscimo no total de salários será relativamente menor para essa mesma indústria. Conclui-se que o preço do bem de capital será, necessariamente, maior que na situação I, isto é, $p_{II} > p_I$.

A seguir veremos como se pode ler, em um gráfico da relação w-π, os valores de: a) o produto físico líquido por unidade de trabalho (*q*); b) o valor (*k*), em termos do bem de consumo, do capital por unidade de trabalho; e c) a relação capital-produto $\left(\frac{k}{q}\right)$.

Uma vez que *W* é o valor do salário se $\pi = 0$, ele é igual ao valor do produto líquido por unidade de trabalho. Mostremos esse fato mais formalmente:

De (3.6) temos

$$W = \frac{1}{L_2 + \frac{dC_2}{1 - dC_1} L_1}$$

Considerando (3.3) obtemos

$$W = \frac{1}{L_2 + \lambda L_1} \qquad (3.12)$$

Uma vez que $L_2 + \lambda L_1$ é o número total de unidades de trabalho necessárias, direta e indiretamente, para a produção de uma unidade do bem de consumo, e uma vez que essa unidade é o produto líquido de uma unidade da "indústria integrada", a relação (3.12) mostra que W é igual ao produto físico líquido por unidade de trabalho, isto é,

$$W = q \tag{3.13}$$

Lembrando que o preço do bem de consumo é igual a um, conclui-se que q também é o valor do produto líquido por unidade de trabalho.

Segue-se que $W - w$ é a parcela do produto correspondente aos lucros relativos ao capital por unidade de trabalho, isto é,

$$W - w = \pi k\,,$$

onde k é o valor do capital por unidade de trabalho.

Então, para o ângulo θ, na figura 7, temos

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{W - w}{\pi} = \frac{\pi k}{\pi} = k \tag{3.14}$$

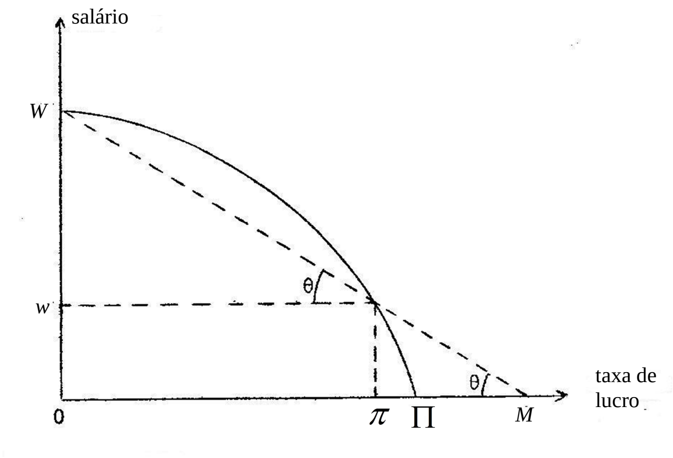


Figura 7. Determinação do valor do capital por unidade de trabalho $(k = \text{tg}\,\theta)$.

De (3.13) e (3.14) segue-se que

$$k = \frac{q - w}{\pi} \tag{3.15}$$

A relação $\dfrac{W - w}{\pi} = k$ também pode ser obtida, algebricamente, considerando que, por definição,

$$k = \frac{(C_2 + \lambda C_1)\,p}{L_2 + \lambda L_1} \tag{3.16}$$

e utilizando (3.11), (3.3), (3.5) e (3.6).

Para uma dada técnica, uma vez que a quantidade de capital físico por unidade de trabalho, dada por $\dfrac{(C_2 + \lambda C_1)\,p}{L_2 + \lambda L_1}$, é constante, as mudanças em k refletem mudanças em p (o preço do bem de capital em termos do bem de consumo). Esse é o chamado efeito-preço de Wicksell.

Considerando o triângulo *WOM* na figura 7 temos

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{q}{\overline{OM}}$$

ou $$\overline{OM} = \frac{q}{k}$$, o inverso da relação capital-produto.

4. PRODUÇÃO COM VÁRIOS 'SISTEMAS'

Consideremos um caso em que existem 3 diferentes sistemas de produção, sendo que, em todos eles, a relação w-π é linear.

Vamos admitir que o bem de consumo é o mesmo em todos os sistemas, que diferem pelo bem de capital (ou meio de produção) utilizado. Uma vez que em todos os sistemas de produção o preço do (mesmo) bem de consumo é fixado em 1, os valores de w e p (preço do bem de capital) de diferentes sistemas podem ser comparados.

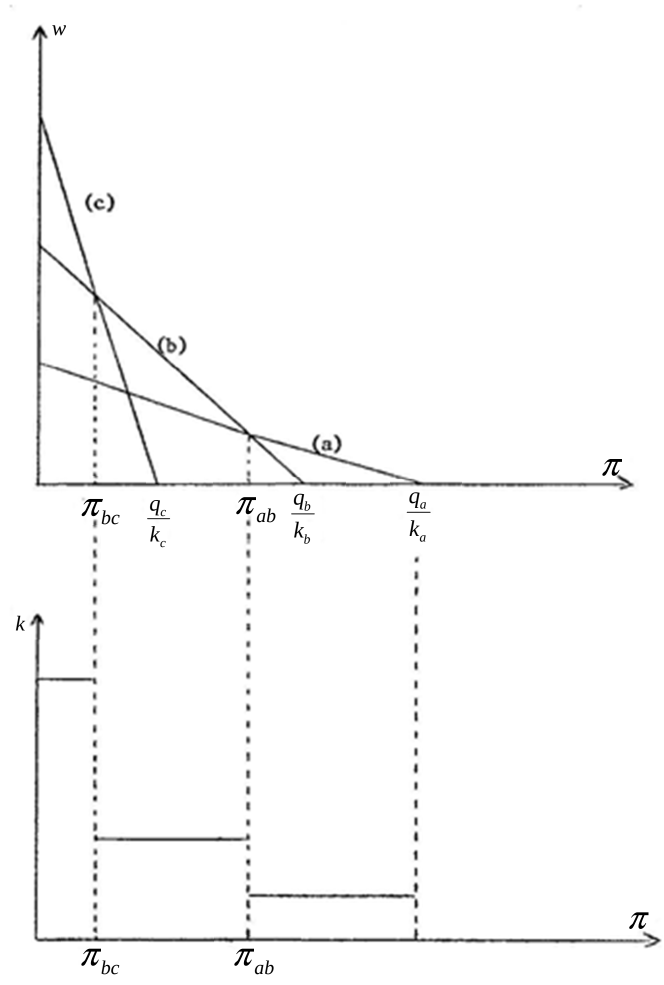


Figura 8. Relações w-π lineares e o respectivo valor do capital por unidade de trabalho (*k*).

Examinando a figura 8, verifica-se que, se $\pi > \pi_{ab}$, o sistema (a) será utilizado, pois neste intervalo ele permite obter, dado o nível do salário, a maior taxa de juros (ou taxa de lucro). Quando $\pi_{bc} < \pi < \pi_{ab}$, o sistema (b) será utilizado, e quando $\pi < \pi_{bc}$, o sistema (c) será utilizado.

Para $\pi = \pi_{ab}$ e $\pi = \pi_{bc}$ temos “pontos de mudança” (switch points).

Neste exemplo verifica-se que, nos pontos de mudança, a uma taxa de juros mais baixa corresponde um maior valor do capital por unidade de trabalho (*k*) e uma relação capital-produto (k/q) mais elevada. É óbvio que o sentido da relação entre os valores de π, *k* e k/q será sempre esse se as relações w-π dos vários sistemas forem todas lineares.

Denomina-se efeito real de Wicksell à variação do valor de *k* num ponto de mudança entre sistemas. Fala-se em efeito real de Wicksell *positivo* se, num ponto de mudança, à menor taxa de juros corresponder um maior valor de *k* e diz-se que esse efeito é *negativo* se à menor taxa de juros corresponder um menor valor de *k*.

Conclui-se, então, que se as relações w-π são todas lineares só podemos ter efeitos reais de Wicksell positivos.

Consideremos, a seguir, um caso com 2 sistemas de produção, sendo que a relação w-π é uma linha reta para um dos sistemas e um arco de hipérbole para outro. Para especificar melhor o exemplo, admitamos que os parâmetros tenham os seguintes valores:

Sistema (a)	Sistema (b)
$C_1 = L_1 = 2$	$C_1 = 2,\ L_1 = 1$
$C_2 = L_2 = 1$	$C_2 = 1,\ L_2 = 2$
d = 0,2	d = 0,22

Então, as equações (3.1) e (3.2), relativas à produção do bem de capital e do bem de consumo, são

$$\begin{cases} 2p_a(\pi + 0{,}2) + 2w_a = p_a & (4.1) \\ p_a(\pi + 0{,}2) + w_a = 1 & (4.2) \end{cases}$$

para o sistema (a), e

$$\begin{cases} 2p_b(\pi + 0{,}22) + w_b = p_b & (4.3) \\ p_b(\pi + 0{,}22) + 2w_b = 1 & (4.4) \end{cases}$$

para o sistema (b).

De acordo com (3.3) temos

$$\lambda_a = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \lambda_b = \frac{0{,}22}{0{,}56} = 0{,}39$$

De (3.5), (3.6) e (3.7) obtemos:

$$w_a = 0{,}6 - 2\pi, \qquad (4.5)$$

$$W_a = 0{,}6,$$

$$\Pi_a = 0{,}3,$$

$$w_b = \frac{0{,}56 - 2\pi}{1{,}34 - 3\pi}, \qquad (4.6)$$

$$W_b = \frac{0,28}{0,67} = 0,418$$

e $$\Pi_b = 0,28$$

No sistema (a) a razão trabalho-capital é a mesma nas duas indústrias $\left(\frac{L_1}{C_1} = \frac{L_2}{C_2}\right)$ e, consequentemente, o preço p_a independe da taxa de juros e é igual à razão entre as quantidades de trabalho diretamente necessárias para a produção de uma unidade do bem de capital e do bem de consumo:

$$p_a = \frac{L_1}{L_2} = 2$$

Considerando (3.13) e (3.15) podemos facilmente verificar que no sistema (a) o valor do capital por unidade de trabalho e a relação capital-produto também são constantes.

$$k_a = 2$$

$$\frac{k_a}{q_a} = \frac{2}{0,6} = \frac{10}{3}$$

No sistema (b) a indústria do bem de capital é mais capital intensiva $\left(\frac{L_1}{C_1} < \frac{L_2}{C_2}\right)$ e, consequentemente, a relação w-π é um arco de hipérbole côncavo em relação à origem, e o preço p_b é uma função crescente da taxa de juros. De acordo com (3.13) e (3.16), conclui-se que k_b e k_b/q_b também são funções crescentes da taxa de juros.

Os valores da taxa de juros nos pontos de mudança entre sistemas (se tais pontos existirem) podem ser determinados igualando (4.5) e (4.6) e resolvendo a equação de segundo grau em π assim obtida.

Neste exemplo as raízes são

$$\pi_{ab} = 0{,}251 \text{ e } \pi_{ba} = 0{,}161$$

As variações de w e k em função de π estão ilustradas na figura 9. Verifica-se que há reversibilidade da técnica (a) de produção ("reswitching"). Se $\pi > 0{,}251$ o sistema (a) será utilizado; se $0{,}161 < \pi < 0{,}251$ o sistema (b) será utilizado, e se $\pi < 0{,}161$ o sistema (a) será, novamente, utilizado.

No ponto de mudança $\pi = \pi_{ab} = 0{,}251$ a taxa de juros mais baixa está associada com um menor valor do capital por unidade de trabalho, isto é, temos um efeito real de Wicksell negativo. Tal fenômeno também é chamado de reversão do capital ("capital-reversing").

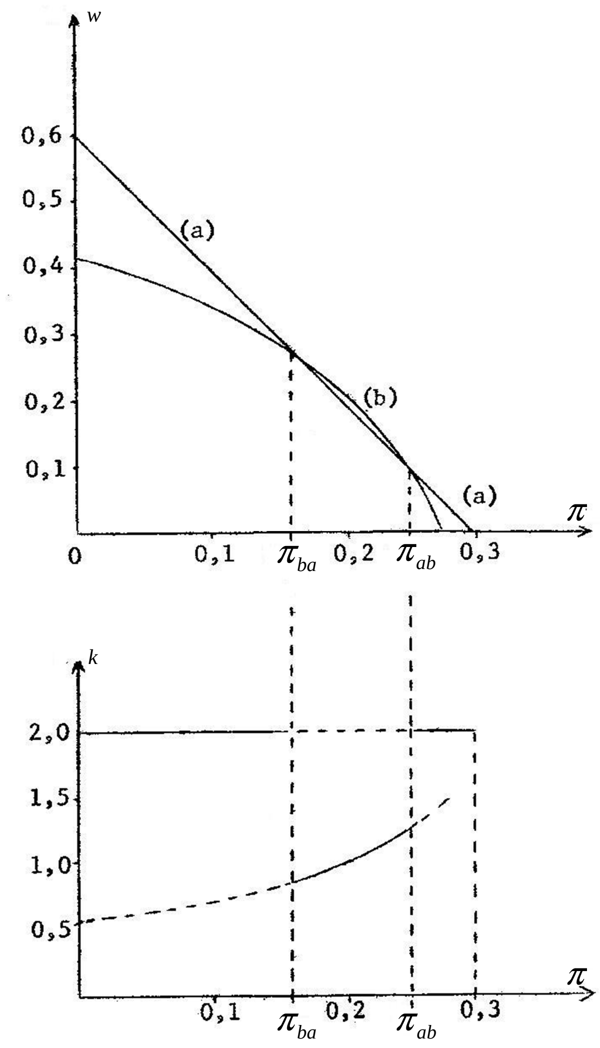


Figura 9. Duas relações w-π e as respectivas mudanças no valor do capital por unidade de trabalho (*k*).

5. A FUNÇÃO DE PRODUÇÃO AGREGADA NA ECONOMIA NEOCLÁSSICA

Tendo em vista as críticas sobre a possibilidade de mensuração do “capital” agregado, Samuelson (1962) apresentou a sua “Surrogate production function” (pseudo-função de produção), que ele pretendia que fosse compatível com a heterogeneidade dos bens de capital; a envolvente de um conjunto de relações w-π (como as da figura 8 deste Apêndice) seria uma isoquanta da pseudo-função de produção.

Garegnani (1970) iria mostrar, entretanto, como veremos no fim desta secção, que a pseudo-função de produção só poderia existir em uma economia onde um único bem fosse produzido.

Recordaremos, inicialmente, algumas das características da função de produção agregada da economia neoclássica, representada por

$$Q = F(K, L),$$

onde Q, K e L representam, respectivamente, o produto total, o capital e a mão-de-obra empregados.

Admite-se que essa função é linearmente homogênea, isto é, se as quantidades de insumos (K e L) forem multiplicadas por uma constante ρ>0 qualquer, o produto será multiplicado pelo mesmo fator:

$$F(\rho K, \rho L) = \rho F(K, L) = \rho Q$$

Fazendo $\rho = \dfrac{1}{L}$ obtemos

$$\frac{Q}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f\left(\frac{K}{L}\right) \qquad (5.1)$$

ou

$$Q = Lf\left(\frac{K}{L}\right)$$

Então

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = f\left(\frac{K}{L}\right) - Lf'\left(\frac{K}{L}\right)\frac{K}{L^2}$$

ou

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = f\left(\frac{K}{L}\right) - \frac{K}{L} f'\left(\frac{K}{L}\right) \qquad (5.3)$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = Lf'\left(\frac{K}{L}\right)\frac{1}{L}$$

ou

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = f'\left(\frac{K}{L}\right) \qquad (5.4)$$

De (5.3), (5.1) e (5.4) segue-se que

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{Q}{L} - \frac{K}{L}\frac{\partial Q}{\partial K}$$

ou

$$Q = \frac{\partial Q}{\partial L} L + \frac{\partial Q}{\partial K} K \qquad (5.5)$$

Esse resultado corresponde ao teorema de Euler e sua interpretação, dentro da economia neoclássica, é que o produto será exatamente suficiente para que sejam pagos os serviços do capital e o trabalho se o preço desses "fatores de produção" for igual à sua produtividade marginal, isto é, se

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = w \qquad (5.6)$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \pi, \qquad (5.7)$$

teremos

$$Q = wL + \pi K$$

Então

$$1 = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} + \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = \frac{wL}{Q} + \frac{\pi K}{Q}, \qquad (5.8)$$

isto é, a elasticidade de produção de cada fator é igual à fração do produto total recebida pelo fator.

Sejam

$$k = \frac{K}{L} \text{ e } q = \frac{Q}{L}$$

Então, de acordo com (5.1), temos

$$q = f(k) \qquad (5.9)$$

De (5.4) e (5.7) segue-se que

$$f'(k) = \frac{\partial Q}{\partial K} = \pi \qquad (5.10)$$

De (5.3), (5.6), (5.9) e (5.10) obtemos

$$w = q - k\pi \tag{5.11}$$

As relações (5.9) a (5.11) são ilustradas na figura 10.

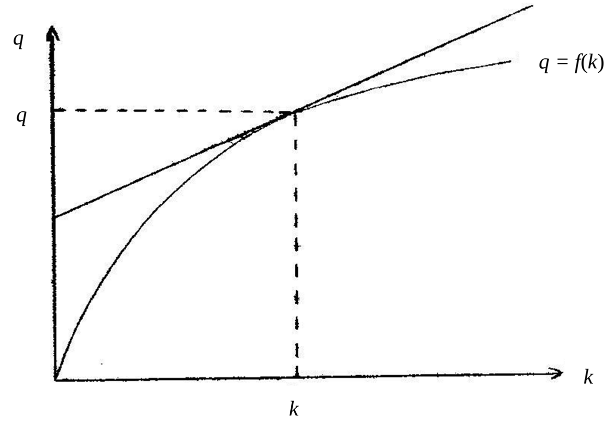


Figura 10. A função de produção agregada.

De (5.3) e (5.6) obtemos

$$w = f\left(\frac{K}{L}\right) - \frac{K}{L} f'\left(\frac{K}{L}\right) \tag{5.12}$$

A relação (5.10) pode ser escrita

$$\pi = f'\left(\frac{K}{L}\right) \tag{5.13}$$

As expressões (5.12) e (5.13) constituem equações paramétricas para a relação w-π. Conclui-se que a declividade da relação w-π derivada de uma função de produção agregada é

$$\frac{dw}{d\pi} = \frac{\dfrac{dw}{d\left(\dfrac{K}{L}\right)}}{\dfrac{d\pi}{d\left(\dfrac{K}{L}\right)}} = \frac{f'\left(\dfrac{K}{L}\right) - f'\left(\dfrac{K}{L}\right) - \dfrac{K}{L} f''\left(\dfrac{K}{L}\right)}{f''\left(\dfrac{K}{L}\right)} = -\frac{K}{L}$$

ou

$$\frac{dw}{d\pi} = -k \qquad (5.14)$$

Sabemos, pelo que foi visto na secção 3, que em geral $\dfrac{dw}{d\pi} \neq -k$

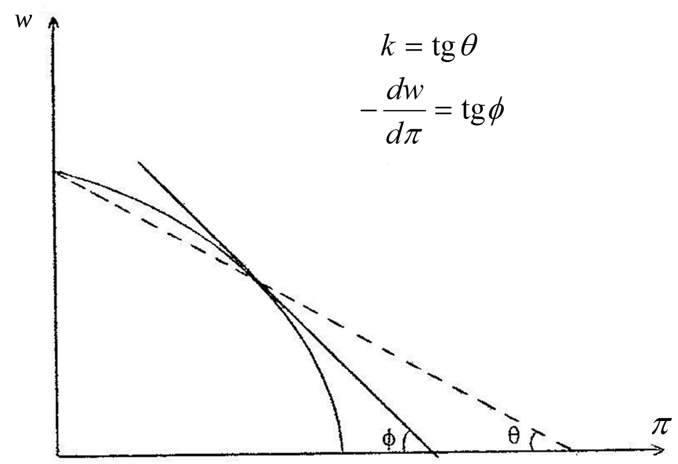


Figura 11. Determinação de k e de $\dfrac{dw}{d\pi}$ em um ponto de uma relação w-π côncava.

Verifica-se que $\frac{dw}{d\pi} = -k$ apenas se a relação w-π for linear.

Vejamos as implicações dessa condição. Sabemos, pelo que foi visto na secção 3, que a relação w-π (ou “curva de salário”) de um sistema é linear se, e somente se, a razão entre trabalho e capital requeridos é a mesma nas duas indústrias (de bens de capital e de bens de consumo), isto é, se $\frac{L_1}{C_1} = \frac{L_2}{C_2}$. Vimos que, neste caso, o preço do bem de capital (fixando-se em um o preço do bem de consumo) é dado por

$$p = \frac{L_1}{L_2}$$

Examinando-se as equações (3.1) e (3.2) verifica-se que, se $p = \frac{L_1}{L_2} = \frac{C_1}{C_2}$, uma equação é um múltiplo da outra. No exemplo dado na secção 4, verifica-se que a equação (4.1) é igual a 2 vezes a equação (4.2) (Lembrar que, neste sistema, $p_a = 2$). Então, se escolhermos convenientemente a unidade do bem de capital, podemos fazer com que as duas equações se tornem idênticas, ou seja, tal sistema não pode ser distinguido de um em que um único bem é produzido utilizando-se o mesmo bem e mão-de-obra. Em resumo, uma vez que heterogeneidade de mercadorias, neste contexto, só pode ser apropriadamente definida através de diferenças nas condições de produção, uma relação w-π linear significa que um único bem (mercadoria) é produzido utilizando-se o mesmo bem e mão-de-obra.

A conclusão é que a pseudo-função de produção só existe numa economia em que um único bem é produzido utilizando-se mão-de-obra e o mesmo bem.

Quatro anos após a publicação do artigo sobre a “pseudo-função de produção”, Samuelson (1966) publica um artigo onde reconhece a importância teórica do fenômeno da reversibilidade de uma técnica de produção (“reswitching”) e alerta para as limitações das “old time parables of neoclassical writing”.

Cabe ressaltar que no artigo clássico de Solow (1956, início da seção II) há menção ao fato de que o modelo representa uma economia com um único produto. Livros textos atuais também reconhecem (sem maior discussão) essa limitação de modelos neoclássicos com função de produção agregada[36].

[36] Ver, por exemplo, o livro-texto de macroeconomia de Branson (1972), no início do capítulo 19. Jones (2000) apenas menciona o fato (no segundo parágrafo do capítulo 2), aparentemente considerando-o irrelevante para uma apresentação do modelo de Solow.

BIBLIOGRAFIA

ARAÚJO JR., J.T. (1973) *Sraffa e a controvérsia recente sobre Teoria do Capital*. CEDEPLAR/UFMG, Associação Nacional de Centros de Pós-Graduação em Economia (I Encontro Anual).

BRANSON, W.H. (1972) *Macroeconomic theory and policy*. Harper & Row, Publishers, New York.

CHIANG, A.C. (1974) *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. 2ª ed. McGraw-Hill, New York.

CUNHA, M. S.; HOFFMANN, R. (2000). Valores-trabalho e preços de produção em um sistema econômico sraffiano com renda extensiva. *Revista de Economia Política*, v. 20, n. 2 (78), abril-junho de 2000, p. 120-140.

DOBB, M. (1973) *Theories of value and distribution since Adam Smith*. Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra.

GAREGNANI, P. (1970) Heterogeneous Capital, the Production Function and the Theory of Distribution. *Review of Economic Studies 37*: 407-436. Reproduzido *in* HUNT, E.K. e SCHWARTZ, J.G. (ed.), (1972). *A critique of Economic Theory*. Penguin Books, Middlesex, Inglaterra, pp.245-291.

GONTIJO, C. (1989) A epistemologia da transformação: uma crítica ao neo-ricardianismo. *Revista de Economia Política*, v. 9, n. 3 (35), p. 84-102.

GONTIJO, C. (1994) A lei do valor em condições de produção conjunta. *Revista Brasileira de Economia*, v. 48, n. 3, p. 389-398.

GONTIJO, C. (2008) A transformação de valores em preços segundo o Sistema Temporal Único: uma apreciação crítica. *Economia*, v. 9, n. 1, p. 215-243.

GONTIJO, C. (2009) O valor-trabalho como fundamento dos preços. *Economia e Sociedade*, v. 18, n. 3 (37), p. 493-511.

GRAZIANO DA SILVA, J.F. (1974) *Interpretação de alguns recentes estudos sobre distribuição da renda no Brasil*. Dissertação de Mestrado apresentada à ESALQ-USP, Piracicaba, SP.

HADLEY, G. (1961) *Linear Algebra*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

HARCOURT, G.C. (1972) *Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital*. Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra.

HARCOURT, G.C.; LAING, N.F. (1971) *Capital and Growth*. Penguin Books, Middlesex, Inglaterra.

HOFFMANN, R. Valores-trabalho e preços de reprodução. *Revista de Economia Política*, no prelo, 2013.

HOFFMANN, R.; CUNHA, M. S. (2001). Valores-trabalho e preços de produção em sistemas econômicos Sraffianos com terra homogênea. *Revista Brasileira de Economia*, v. 55, n. 1, jan.-mar. de 2001, p. 53-76.

HOFFMANN, R.; VENTER, Paulo Régis (1990) A Renda Extensiva da Terra em um Sistema Sraffiano. *Pesquisa e Planejamento Econômico 20*(3): 601-612, dez. de 1990.

HUNT, E.K. e SCHWARTZ, Jesse G. (org.) (1972) *A Critique of Economic Theory*. Penguim Books, Middlesex, Inglaterra.

JOHNSTON, J. (1971) *Métodos Econométricos*. Ed. Atlas, São Paulo.

JONES, C. I. *Introdução à Teoria do Crescimento Econômico.* Editora Campus, Rio de Janeiro.

LANGE, O. (1967) *Introdução à Econometria*. Ed. Fundo de Cultura, Rio de Janeiro.

LANZER, Edgar Augusto (1982) *Programação Linear*: *Conceitos e Aplicações*. Rio de Janeiro, IPEA, Série PNPE-4.

LIMA, L.A. de Oliveira (1974). O conceito de capital e a teoria da distribuição da renda. *Revista de Administração de Empresas*, 14(2):7-20.

MEDIO, A. (1972) Profits and Surplus-Value: Appearance and Reality in Capitalist Production. *In* HUNT, E. K. e SCHWARTZ, J. G. (org.), *A Critique of Economic Theory*, Penguin Books, p.312-346.

MEEK, R.L. (1961) Sraffa e a reabilitação da economica clássica. Artigo publicado simultaneamente no *Scottish Journal of Political Economy*, de junho de 1961, e em *Science and Society*, na primavera de 1961, e reproduzido em MEEK, R. L. (1971) *Economia e Ideologia*. Zahar Editores, Rio de Janeiro, p. 209-30.

MORISHIMA, M.; CATEPHORES, G. (1980). *Valor, Exploração e Crescimento: Marx à luz da Teoria Econômica Moderna*. Zahar Editores, Rio de Janeiro.

MORISHIMA, M. (1973). *Marx's Economics: a dual Theory of Value and Growth*. Cambridge University Press, 1973.

NELL, E. (1972) Property and the means of production: a primer in the Cambridge Controversy. *The Review of Radical Political Economics*, Michigan, 4(2):1-27.

PASINETTI, Luigi L. (1977) *Lectures on the Theory of Production*. New York, Columbia University Press.

POSSAS, M. L. (1982) Valor, Preço e Concorrência: não é preciso recomeçar tudo desde o início. *Revista de Economia Política 2*(4): 71-110.

POSSAS, M. L. (1983) Apresentação da obra de Piero Sraffa. *In Kalecki - Sraffa - Robinson*. Abril Cultural, Coleção *Os Economistas*, pp.151-172.

POSSAS, M. L. (1984) Marx e os fundamentos da dinâmica econômica capitalista. *Revista de Economia Política*, 4(3): 63-84.

POSSAS, M. L. (1989) *Dinâmica e concorrência capitalista: uma interpretação a partir de Marx*. Editora HUCITEC e Editora da UNICAMP.

RICARDO, David (1982) *Princípios de economia política e tributação*. São Paulo, Abril Cultural (Coleção Os Economistas).

ROBINSON, Joan (1953-4) The production function and the theory of capital. *Review of Economic Studies*, vol. 21, p. 81-106. Reproduzido em HARCOURT, G.C. e LAING, N.F. (ed.) (1971) *Capital and Growth*. Penguin Books, Middlesex, Inglaterra, p. 47-64.

ROBINSON, Joan (1973) *Collected Economic Papers, vol. IV*. Humanities Press, New York.

ROBINSON, Joan e EATWELL, John (1973) *An Introduction to Modern Economics*. McGraw-Hill, London.

RONCAGLIA, Alessandro (1978) *Sraffa and The Theory of Prices*. John Wiley & Sons.

ROSINGER, Jean-Luc (1984) Taxa de Mais-Valia, Trabalho Comandado e Taxa de Lucro: uma Abordagem Funcional. *XII Encontro Nacional de Economia*, São Paulo, dezembro de 1984. ANPEC, Anais, vol. 3, pp. 1459-1489.

SAMUELSON, P.A. (1962) Parable and realism in capital theory: the surrogate production function. *Review of Economic Studies*, vol. 39, p. 193-206. Reproduzido em HARCOURT, G.C. e LAING, N.F. (org.) (1971) *Capital and Growth*. Penguin Books, Middlesex, Inglaterra, p. 213-32.

SAMUELSON, P.A. (1966) A summing up. *Quarterly Journal of Economics*, vol. 80, p. 568-83. Reproduzido em HARCOURT, G.C. e LAING, N.F. (org.) (1971) *Capital and Growth*. Penguin Books, Middlesex, Inglaterra, p. 233-50.

SERRA, J. (1973) A reconcentração da renda: crítica a algumas interpretações. *Estudos CEBRAP, 5:* 131-156.

SIMONSEN, Mário Henrique (1984) Marx e a Revolução de Von Neumann. *Revista Brasileira de Economia 38*(2), abr./jun. 1984.

SOLOW, R.M. (1956) Model of Growth. *Quarterly Journal of Economics*, vol. 70, p. 65-94. Reproduzido em SEN, A (org.) (1970) Growth Economics. Penguin Books, Middlesex, Inglaterra, p. 161-92.

SRAFFA, Piero (1983) *Production of Commodities by Means of Commodities - Prelude to a Critique of Economic Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra.

SRAFFA, Piero (1960) *Produção de mercadorias por meio de mercadorias: prelúdio a uma crítica da teoria econômica*. São Paulo, Abril Cultural (Coleção Os Economistas).

STEEDMAN, I. (1977). *Marx after Sraffa*. NLB, Londres.

THEIL, H. (1971) *Principles of Econometrics*. John Wiley, New York.

VENTER, P. R. (1990) A Renda da Terra no Sistema Econômico Sraffiano. Piracicaba, ESALQ-USP, Dissertação de Mestrado.

VENTER, P. R.; HOFFMANN, R. (1991) A Renda Intensiva em Sistemas Sraffianos. *Revista de Economia e Sociologia Rural 29*(3): 183-208, jul./set. de 1991.