

Geometria Olímpica com GeoGebra v. 3

Tangentes
 Segmentos

John Casey (1820-1890)
a Founder of Modern Geometry

$t_{12} = 11.02$
 $t_{13} = 15.05$
 $t_{14} = 11$
 $t_{23} = 10$
 $t_{24} = 13.35$
 $t_{34} = 8.25$

$t_{13} \cdot t_{24} = t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14}$

Juan López Linares

João Paulo Martins dos Santos

Alessandro Firmiano de Jesus

JUAN LÓPEZ LINARES
JOÃO PAULO MARTINS DOS SANTOS
ALESSANDRO FIRMIANO DE JESUS

Geometria Olímpica com GeoGebra v.3

DOI: 10.11606/9786587023243

Pirassununga - SP
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)
2022

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

Vice-Reitora: Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

<http://www.fzea.usp.br>

Diretor: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

Vice-Diretor: Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes de Oliveira

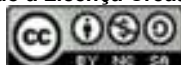
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da
Universidade de São Paulo

L864g	López Linares, Juan Geometria olímpica com GeoGebra. v. 3 / Juan López Linares, João Paulo Martins dos Santos, Alessandro Firmiano de Jesus. -- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2022. 91 p. ISBN 978-65-87023-24-3 (e-book) DOI: 10.11606/9786587023243 1. Geometria. 2. Olimpíadas. 3. GeoGebra. 4. Ensino fundamental. 5. Ensino médio. 6. Formação de professores. I. Santos, João Paulo Martins dos. II. Jesus, Alessandro Firmiano de. III. Título.
-------	--

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.



Dedicamos este livro a nossas famílias.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos Professores-Estudantes do curso de “Geometria Olímpica com GeoGebra” que motivaram a escrever este livro eletrônico.

Agradecemos a nossas famílias pelo incentivo e compreensão.

AUTORES

Prof Dr JUAN LÓPEZ LINARES: <https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>.

Professor Doutor do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Atualmente ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de “Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio” e “Geometria olímpica com GeoGebra” para professores. Desenvolve projetos de pesquisa nas áreas de ensino de Cálculo e na resolução de problemas de Olimpíadas. Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respectivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela UFSCar em 2019. Textos completos e gratuitos das publicações do autor podem ser encontrados [aqui](#).

Prof Dr JOÃO PAULO MARTINS DOS SANTOS: <https://orcid.org/0000-0002-0957-7119>. Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2006), mestre em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2009) e Doutor em Ciências pela Escola de Engenharia de São Carlos - EESC-USP. É professor na Academia da Força Aérea em Pirassununga/SP. Tem experiência na área de Sistemas Dinâmicos não lineares e não ideais com pesquisa desenvolvida em métodos de perturbação. Tem experiência na área de Matemática e interesse nos seguintes temas: método numéricos para solução de equações diferenciais ordinárias e parciais, estimador de erro do tipo residual para a equação do transporte de poluentes, linguagem Python de programação, Computação Científica em Python e métodos numéricos para solução de sistemas lineares. Textos completos e gratuitos das publicações do autor podem ser encontrados [aqui](#).

Prof Dr ALESSANDRO FIRMIANO DE JESUS: <https://orcid.org/0000-0002-7073-2261>. Possui graduação em Matemática pela Universidade de São Paulo (1994), mestrado em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos (1997), doutorado em Engenharia Hidráulica e Saneamento pela Universidade de São Paulo (2010) e pós doutorado pela Fachhochschule Köln - Cologne University of Applied Sciences (2014). Atualmente é regime jurídico único da AFA exercendo a função de Prof Assoc IV e a Coordenação da Área de Ciências Exatas no Curso de Formação de Oficiais da Aeronáutica. Possui experiência na área de Matemática, com ênfase em Modelagem Computacional e Análise Numérica, atuando principalmente nos seguintes temas: Modelos de advecção-difusão-reação, Método dos Elementos Finitos, Transporte de Contaminantes em Águas Subterrâneas e Geocomputação. Textos completos e gratuitos das publicações do autor podem ser encontrados [aqui](#).

Título

















Geometria Olímpica com GeoGebra v.3

Prefácio

















Este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O texto conta com 57 figuras que facilitam acompanhar a resolução. Todas têm como complemento links para os gráficos interativos no site do GeoGebra e, vários, a resolução em vídeo do YouTube. A discussão é organizada em quatro capítulos: Desigualdade de Ptolomeu; Teorema de Casey; Cálculos de Áreas; Teoremas de Menelaus, Pascal e Ceva. Discute-se a teoria associada e resolvem-se problemas. O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa. O GeoGebra também convida o leitor a interagir, a pôr as mãos na massa.




Palavras-chave: Geometria, Olimpíadas, GeoGebra, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Formação de Professores.

Lista de Figuras

2.1	Enunciado do Teorema de Ptolomeu. Para um quadrilátero ser inscritível o produto dos comprimentos das diagonais deve ser igual à soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos e vice-versa. Versão interativa 	16
2.2	Demonstração da forma direta do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa 	17
2.3	Demonstração da recíproca do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa 	18
2.4	Teorema de Ptolomeu no retângulo $ABCD$. Versão interativa 	20
2.5	Construção geométrica para auxiliar na demonstração da Desigualdade de Ptolomeu. Versão interativa 	21
2.6	Uma construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa 	23
2.7	Uma construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa 	25
2.8	Uma construção geométrica inicial para o Problema 3. Versão interativa 	28
2.9	Uma construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa 	29
2.10	Uma construção geométrica inicial para o Problema 5. Versão interativa  . Observe que ao mover o ponto P para diferentes posições somos levados a conjecturar que o mínimo ocorre quando $P = G$.	32
2.11	Uma construção geométrica para o Problema 5. Versão interativa 	35
3.1	Teorema de Casey. A versão interativa  permite verificar diferentes configurações.	37
3.2	Demonstração do Teorema de Casey no caso em que as quatro circunferências são internas a c . Versão interativa 	38
3.3	Caso em que a circunferência c_1 é interna e c_2 externa a c . Versão interativa 	39
3.4	Uma construção para o Problema 6. Versão interativa 	40
3.5	Construção por inversão da circunferência w no Problema 6. Versão interativa 	41

3.6	Resolução do Problema 6. O lugar geométrico do ponto P é o arco ac . Versão interativa 	41
3.7	Construção inicial para o Problema 7. Versão interativa 	42
3.8	Construção final para o Problema 7. Versão interativa 	43
3.9	Teorema de Feuerbach. Versão interativa 	44
3.10	Teorema de Feuerbach, incírculo. Versão interativa 	45
3.11	Teorema de Feuerbach, ex-incírculo. Versão interativa 	46
3.12	Teorema de Sawayama-Thebault. Versão interativa 	47
3.13	Teorema de Sawayama-Thebault, demonstração. Versão interativa 	47
3.14	Teorema de Sawayama-Thebault, todas as construções da demonstração. Versão interativa 	51
4.1	Fórmula tradicional para o cálculo de área de triângulo. Versão interativa 	52
4.2	Triângulos de igual área entre retas paralelas. Versão interativa 	53
4.3	Área de um triângulo com dois lados e o ângulo que eles determinam. Versão interativa 	54
4.4	Área de um triângulo utilizando o incírculo. Demonstração 1. Versão interativa 	56
4.5	Área de um triângulo utilizando o incírculo. Demonstração 2. Versão interativa 	57
4.6	Área de um triângulo utilizando o circuncirculo. Versão interativa 	58
4.7	Área de um triângulo utilizando a fórmula de Heron. Versão interativa 	59
4.8	Relação entre as áreas de triângulos semelhantes. Versão interativa 	60
4.9	Áreas para calcular razão de segmentos. Versão interativa 	62
4.10	Área de quadrilátero convexo arbitrário. Versão interativa 	63
4.11	Áreas, semelhança e triângulos equiláteros. Exercício 1. Versão interativa 	64
5.1	Teorema de Menelaus. Caso em que os pontos X , Y e Z não são colineares. Versão interativa 	67
5.2	Ida do Teorema de Menelaus. Por hipótese os pontos X , Y e Z são colineares. Versão interativa 	67

5.3	Volta do Teorema de Menelaus. Por hipótese vale a equação (5.1.1). Versão interativa 	68
5.4	Colinearidade dos pontos de interseção das bissetrizes externas com os lados. Versão interativa 	69
5.5	Teorema de Monge. Versão interativa  . É possível mudar os centros e raios das circunferências e verificar a colinearidade de X, Y e Z	70
5.6	Teorema de Pascal. Versão interativa  . É possível deslocar os pontos sobre γ e verificar a colinearidade de X, Y e Z . O hexágono $ABCDEF$ não precisa ser convexo.	72
5.7	Demonstração do Teorema de Pascal. Versão interativa  . É possível deslocar os pontos sobre γ e verificar a colinearidade de X, Y e Z . O hexágono $ABCDEF$ não precisa ser convexo.	72
5.8	Teorema de Pascal para Cônicas. Versão interativa  . É possível deslocar os pontos. Os cinco primeiros determinam o tipo de cônica $\gamma, B_3 \in \gamma$	73
5.9	Teorema de Pappus. Versão interativa  . É possível deslocar os pontos.	74
5.10	Teorema de Ceva. Cevianas não concorrentes. Versão interativa  . É possível deslocar os pontos e verificar a validade ou não de (5.4.1).	75
5.11	Ida do Teorema de Ceva. Cevianas concorrentes em P . Versão interativa 	76
5.12	Volta do Teorema de Ceva. Versão interativa 	76
5.13	Segunda demonstração da ida do Teorema de Ceva. Aplica-se o Teorema 17 (Menelaus) ao $\triangle AXC$ e aos pontos colineares $B \in CX, Y \in AC$ e $P \in AX$. Versão interativa 	77
5.14	Segunda demonstração da ida do Teorema de Ceva. Aplica-se o Teorema 17 (Menelaus) ao $\triangle ABX$ e os pontos colineares $C \in BX, P \in AX$ e $Z \in AB$. Versão interativa 	78
5.15	Forma trigonométrica do Teorema de Ceva. Cevianas não concorrentes. Versão interativa  . É possível deslocar os pontos e verificar a validade ou não de (5.4.2).	79
5.16	Forma trigonométrica do Teorema de Ceva. Cevianas concorrentes no ponto P interior ao $\triangle ABC$. Versão interativa 	80
5.17	Ponto de Gergonne. Versão interativa 	81
5.18	Construir o ponto médio do segmento AB utilizando somente uma régua sem escala. Versão interativa 	82

5.19	Utilização dos teoremas de Ceva e Tales. Versão interativa		83
5.20	Construir o ponto que completa a divisão harmônica do segmento AB , utilizando somente uma régua sem escala. Versão interativa		84
5.21	Divisão harmônica e utilização dos teoremas de Ceva e Menelaus. Versão interativa		85

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	13
2	Desigualdade de Ptolomeu	15
2.1	Introdução	15
2.2	Conceitos básicos	16
2.2.1	Teorema de Ptolomeu	16
2.2.2	Desigualdade de Ptolomeu	20
2.3	Problemas	22
2.3.1	Teorema de Ptolomeu. Arco Capaz. Triângulo Equilátero. P5 IMO 1995.	22
2.3.1.1	Resolução do Problema 1.	22
2.3.2	Desigualdade de Ptolomeu. Desigualdade das médias aritmética e harmônica. P7 SL IMO 1997.	24
2.3.2.1	Resolução do Problema 2.	25
2.3.3	Teorema de Ptolomeu. Conjugados Isogonais. Semelhança de triângulos. P4 SL IMO 1998.	27
2.3.3.1	Resolução do Problema 3.	27
2.3.4	Polígono inscritível. Teorema de Ptolomeu. P4 da SL da IMO 2000. . . .	29
2.3.4.1	Resolução do Problema 4.	30
2.3.5	Desigualdades de Ptolomeu e Triangular. Baricentro. Relação de Stewart. P17 SL IMO 2001.	32
2.3.5.1	Resolução do Problema 5.	32
3	Teorema de Casey	36
3.1	Teorema de Casey	36
3.1.1	Problema resolvido por Casey, três pontos e uma circunferência.	39
3.1.1.1	Resolução	40
3.1.2	Problema resolvido por Casey, dois pontos e duas circunferências. . . .	42
3.1.2.1	Resolução	42

3.2	Teorema de Feuerbach provado utilizando a recíproca de Casey	44
3.3	Teorema de Sawayama-Thebault	46
4	Cálculos de Áreas	52
4.1	Fórmula tradicional para a área de triângulo	52
4.2	Área com dois lados e o ângulo que eles determinam	54
4.3	Área de um triângulo utilizando o incírculo	55
4.4	Área de um triângulo utilizando o circuncírculo	57
4.5	Fórmula de Heron	58
4.6	Relação entre as áreas de triângulos semelhantes	60
4.7	Áreas para calcular razão de segmentos	61
4.8	Área de quadrilátero convexo arbitrário	63
4.9	Áreas, semelhança e triângulos equiláteros	64
4.9.1	Solução do Exercício 1	64
5	Teoremas de Menelaus, Pascal e Ceva	66
5.1	Teorema de Menelaus	66
5.1.1	Colinearidade dos pontos de interseção das bissetrizes externas com os lados	69
5.1.1.1	Resolução	69
5.2	Teorema de Monge	70
5.3	Teoremas de Pascal	71
5.4	Teorema de Ceva	74
5.4.1	Ponto de Gergonne	80
5.4.1.1	Resolução	81
5.5	Exercícios de construção geométrica	82
5.5.1	Ponto médio somente com régua sem escala	82
5.5.1.1	Resolução	82
5.5.2	Divisão harmônica somente com régua sem escala	83
5.5.2.1	Resolução	84
6	Referências Bibliográficas	86

Capítulo 1

Introdução

O livro faz parte de um projeto de longo prazo de treinamento de estudante e professores com problemas de Olimpíadas de Matemáticas. Em particular, este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O mesmo aconteceu na modalidade de Ensino à Distância (EaD) pela plataforma de Cultura e Extensão da USP.

Foram utilizadas as notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, curso de Geometria, Nível 2, do Prof. Rodrigo Pinheiro [35] e do Prof. Cícero Thiago [38]. Também serviram como referência os livros de Geometria [27] e Geometria Analítica [2] adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e a dissertação de mestrado de Anderson Reis de Vargas [39].

O texto conta com 57 figuras que facilitam o acompanhamento das resoluções. Como complemento, os links para os gráficos interativos são disponibilizados em páginas do [GeoGebra](#). Vários problemas contam com apresentação em vídeo disponíveis numa [playlist](#) do YouTube.

A discussão é organizada em quatro capítulos: Desigualdade de Ptolomeu; Teorema de Casey; Cálculos de Áreas; Teoremas de Menelaus, Pascal e Ceva. Discute-se a teoria associada e resolvem-se problemas. Escolhemos apresentar alguns exercícios em cada caso, mas sem a pretensão de esgotar o tema.

O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa.

Com uma boa organização e programação adequada discutir problemas na tela do GeoGebra permite ao leitor visualizar simultaneamente gráficos e textos. Em contra partida, na versão impressa tradicional o aprendiz precisa ficar alternando entre páginas para acompanhar uma

resolução.

O GeoGebra também convida o leitor a interagir e aprender fazendo. Isto é, pode movimentar pontos da construção, colorir, modificar parâmetros de entrada, etc. Aos mais obstinados é permitido copiar e melhorar trabalhos já existentes.

Adicionalmente, a versão online do GeoGebra funciona como uma rede social de aprendizado e colaboração. Os profissionais e alunos podem disponibilizar construções, buscar construções, baixar e modificar ou alterar e salvar no próprio site. Em resumo, é um local que fornece materiais e meios alternativos para a troca de conhecimento relacionado ao ensino de Matemática.

Dois livros eletrônicos gratuitos com as notas de aulas da primeira parte do curso Geometria Olímpica com GeoGebra também estão disponíveis em [12] e [13].

Um dos autores também publicou quatro livros eletrônicos dedicados a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática para o Ensino Médio: [8], [9], [10] e [11].

Outros trabalhos da área de Matemática são [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [5], [21], [23], [24], [25], [26], [37] e [22].

Capítulo 2

Desigualdade de Ptolomeu

2.1 Introdução

Cláudio Ptolomeu (85-165 d.C., Alexandria, Egito) publicou o tratado “Almagesto” de treze livros defendendo a teoria geocêntrica do movimento dos planetas, a Lua e o Sol. Esta prevaleceu por mais de 1400 anos, até que Nicolau Copérnico revolucionou a Astronomia com o modelo heliocêntrico em 1543. No livro I do “Almagesto”, Ptolomeu enunciou o teorema que leva seu nome. A partir do mesmo ele conseguiu calcular a função comprimento de corda (análoga a função seno atual) com intervalo de meio grau e cinco casas decimais de precisão [1]. A fórmula do Teorema de Ptolomeu, quando aplicada a um retângulo, transforma-se na fórmula do Teorema de Pitágoras.

O Teorema e a Desigualdade de Ptolomeu raramente são sequer citados para os estudantes de Ensino Médio no Brasil. Porém, seu conhecimento é importante para o sucesso em Olimpíadas. Neste capítulo discutem-se detalhadamente cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), mas sem a pretensão de esgotar o tema.

Embora úteis e proveitosas, as resoluções apresentadas nos fóruns de problemas da IMO não detalham muitas deduções, as quais ficam para o leitor. Os autores parecem supor que todos têm conhecimentos matemáticos suficientemente avançados. Adicionalmente, essas discussões encontram-se frequentemente em inglês.

A apresentação neste capítulo visa que o material possa de fato ser lido e estudado por estudantes de língua portuguesa (e talvez espanhola) que preparam-se para as fases finais das olimpíadas nacionais ou internacionais. Espera-se também que a presente abordagem sirva de apoio aos professores do Ensino Médio que aventuram-se em tópicos mais avançados. Em comparação com outras soluções disponíveis, as apresentadas aqui utilizam argumentos menos rebuscados e um número menor de passagens a serem preenchidas pelo leitor. Anteriormente discutimos outros conjuntos de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática em [20], [19] e [21]. Inicia-se com uma introdução dos conceitos básicos sobre a igualdade e Desigualdade

de Ptolomeu.

2.2 Conceitos básicos

2.2.1 Teorema de Ptolomeu

Definição 1. Um quadrilátero é dito *inscrito* ou *cíclico* quando seus quatro vértices pertencem a uma mesma circunferência.

Teorema 1 (Teorema de Ptolomeu). Em um quadrilátero inscrito $ABCD$ o produto dos comprimentos das diagonais é igual a soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos (Figura 2.1). Isto é, vale

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC. \quad (2.2.1)$$

A forma recíproca também é verdadeira. Se (2.2.1) for verdade para o quadrilátero convexo $ABCD$, então ele é inscrito.



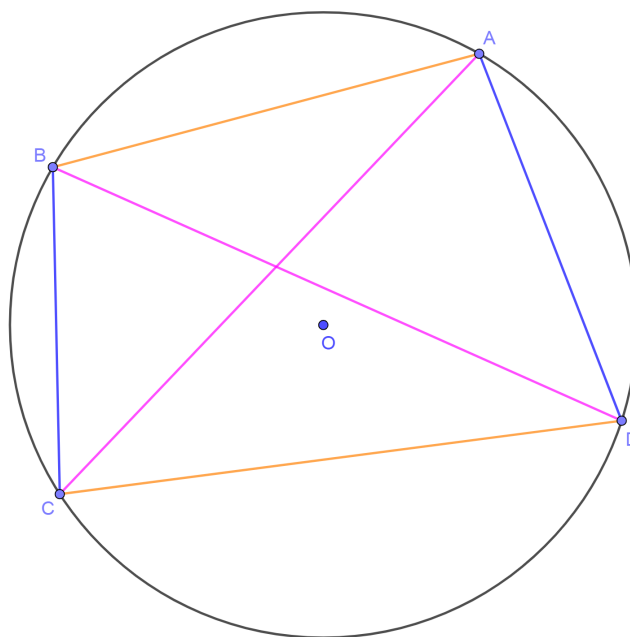

O link interativo , ilustrado na Figura 2.1, mostra uma avaliação numérica do Teorema de Ptolomeu. Neste caso, os produtos a direita formam dois retângulos de áreas $AB \cdot CD$ e $AD \cdot BC$, respectivamente.

Figura 2.1: Enunciado do Teorema de Ptolomeu. Para um quadrilátero ser inscrito o produto dos comprimentos das diagonais deve ser igual à soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos e vice-versa. Versão interativa .

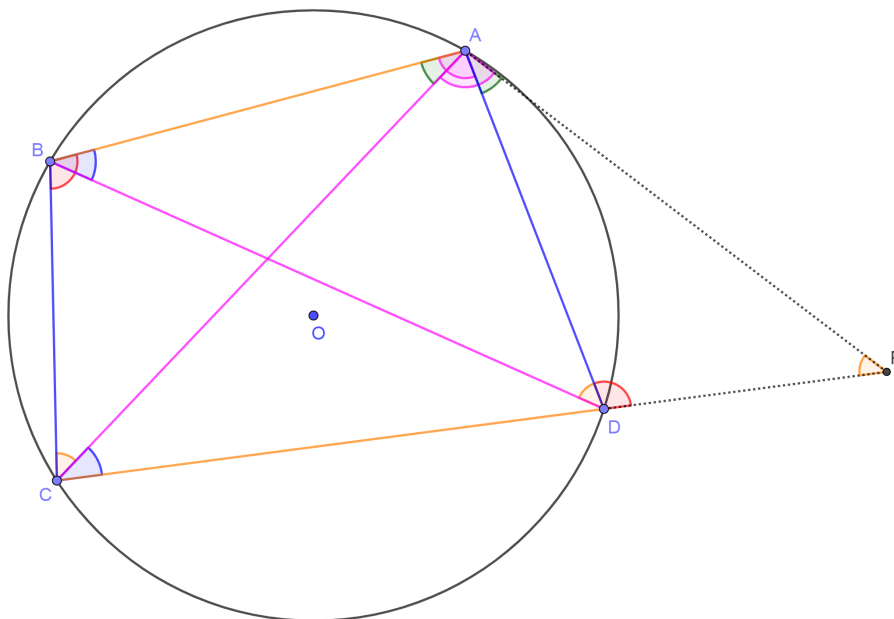


Fonte: Os autores.

A Figura 2.2, com versão interativa , serve de guia para a demonstração da forma direta do Teorema de Ptolomeu.

Demonstração. i) Forma direta do Teorema de Ptolomeu. Suponha-se que $ABCD$ seja um quadrilátero inscritível. Tem-se que $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$. Estende-se a reta CD e coloca-se o ponto $P \in CD$, tal que $\angle BAC = \angle PAD$ (Figura 2.2).

Figura 2.2: Demonstração da forma direta do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

Como $\angle ADP + \angle ADC = 180^\circ$ segue que $\angle ABC = \angle ADP$. Logo,

$$\triangle ABC \sim \triangle ADP,$$

pele critério de semelhança ângulo-ângulo. Consequentemente:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DP} = \frac{AC}{AP} \Rightarrow DP = \frac{AD \cdot BC}{AB}. \quad (2.2.2)$$

Adicionalmente, $\angle BAD = \angle PAC$, pois $\angle DAC$ é comum aos dois anteriores, e $\angle ABD = \angle ACD$, devido a "enxergarem", a mesma corda AD . Com isto

$$\triangle ABD \sim \triangle ACP,$$

pelo critério de semelhança ângulo-ângulo. Segue que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AP} = \frac{BD}{CP} \Rightarrow CP = \frac{AC \cdot BD}{AB}. \quad (2.2.3)$$

De (2.2.2) e (2.2.3) tem-se

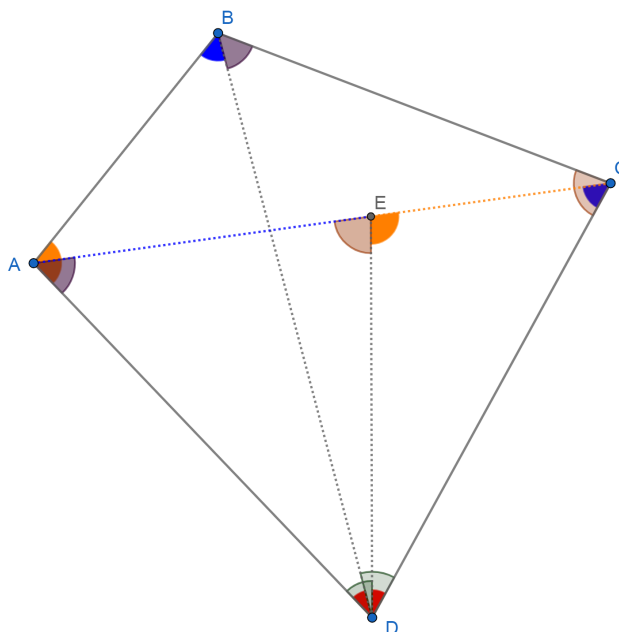
$$CP = CD + DP = CD + \frac{AD \cdot BC}{AB} = \frac{AC \cdot BD}{AB}.$$

Multiplicando a última igualdade por AB encontra-se (2.2.1).

ii) Recíproca do Teorema de Ptolomeu. A Figura 2.3 ilustra a construção. Suponha-se que $ABCD$ seja um quadrilátero convexo e vale (2.2.1). Esboça-se um ponto E , no interior de $ABCD$, tal que $\angle EDC = \angle ADB$ e

$$\frac{ED}{DC} = \frac{AD}{DB}. \quad (2.2.4)$$

Figura 2.3: Demonstração da recíproca do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

Como $\angle EDC = \angle ADB$ e, por (2.2.4), os lados correspondentes são proporcionais, pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado, tem-se:

$$\triangle EDC \sim \triangle ADB.$$

Logo, $\angle DAB = \angle DEC$, $\angle ABD = \angle ECD$ e

$$\frac{ED}{AD} = \frac{DC}{DB} = \frac{EC}{AB}. \quad (2.2.5)$$

Nota-se que $\angle BDC = \angle ADE$, pois $\angle EDB$ é comum. Logo, por um par de ângulos congruentes e lados correspondentes proporcionais, (2.2.5), tem-se:

$$\triangle BDC \sim \triangle ADE.$$

Segue que $\angle DAE = \angle DBC$, $\angle AED = \angle BCD$ e

$$\frac{BD}{AD} = \frac{DC}{DE} = \frac{BC}{AE}. \quad (2.2.6)$$

Partindo de (2.2.1) escreve-se:

$$AC = \frac{AD \cdot BC}{BD} + \frac{AB \cdot CD}{BD}.$$

Comparando o lado direito da equação anterior com (2.2.5) e (2.2.6) segue que:

$$AC = AE + EC.$$

Isto é, A, E e C são colineares. Como $\angle ABD = \angle ACD$, conclui-se que o quadrilátero $ABCD$ é cíclico. \square

Corolário 2. *O Teorema de Ptolomeu aplicado em um retângulo $ABCD$ equivale ao Teorema de Pitágoras aplicado nos triângulos retângulos ABC , BCD , CDA e DAB (Figura 2.4).*


Demonstração. Todo retângulo $ABCD$ é inscritível pois a soma dos ângulos opostos é 180° (Figura 2.4). Pelo Teorema de Ptolomeu vale:

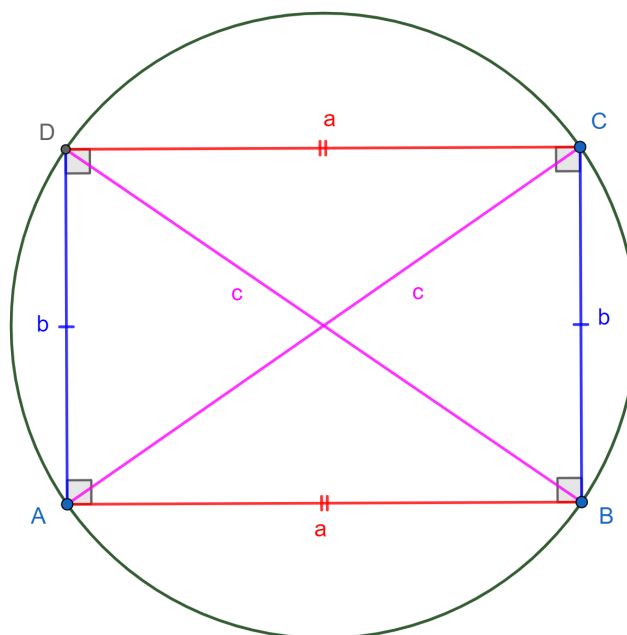
$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD.$$

Mas num retângulo $ABCD$ os lados opostos e as diagonais são congruentes entre si. Isto é, $AB = CD = a$, $BC = DA = b$ e $AC = BD = c$. Segue a fórmula do Teorema de Pitágoras relativa aos triângulos retângulos ABC , BCD , CDA e DAB :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

\square

Figura 2.4: Teorema de Ptolomeu no retângulo $ABCD$. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

2.2.2 Desigualdade de Ptolomeu

A Desigualdade de Ptolomeu generaliza o resultado anterior.

Teorema 3 (Desigualdade de Ptolomeu). *Se $ABCD$ é um quadrilátero convexo (não necessariamente inscritível) o produto dos comprimentos das diagonais é menor ou igual a soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos. Isto é, vale:*


$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD. \quad (2.2.7)$$

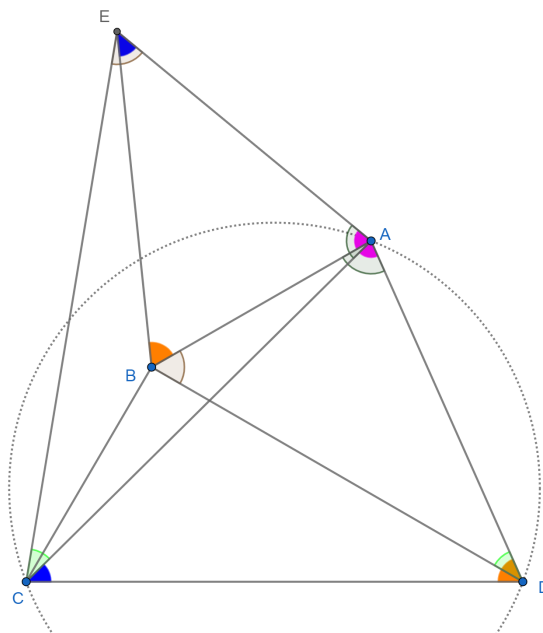
Ocorre a igualdade se, e somente se, $ABCD$ é um quadrilátero inscritível, conforme o Teorema 1 (Ptolomeu).

Demonstração. A Figura 2.5 permite acompanhar a explicação. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo (não necessariamente inscritível), com diagonais AC e BD .

Inicia-se construindo um ponto E tal que $\angle ADC = \angle ABE$ e $\angle ACD = \angle AEB$. Pelo critério de semelhança ângulo-ângulo segue que $\triangle ACD \sim \triangle AEB$. Com o qual resulta na proporcionalidade dos lados:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{EB}{CD}. \quad (2.2.8)$$

Figura 2.5: Construção geométrica para auxiliar na demonstração da Desigualdade de Ptolomeu. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

Da segunda igualdade em (2.2.8) encontra-se:

$$EB = \frac{AB \cdot CD}{AD}. \quad (2.2.9)$$

Por outro lado, tem-se que $\angle BAD = \angle EAC$. Adicionalmente, da primeira igualdade em (2.2.8) segue que:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE}. \quad (2.2.10)$$

Pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado pode-se afirmar que:

$$\triangle BAD \sim \triangle EAC.$$

Segue que $\angle AEC = \angle ABD$ e $\angle ACE = \angle ADB$. Adicionalmente, além de (2.2.10), ganha-se outra proporcionalidade de lados:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{EC}. \quad (2.2.11)$$

De (2.2.11) segue que:

$$EC = \frac{AC \cdot BD}{AD}. \quad (2.2.12)$$

A seguir foca-se no triângulo EBC . Utilizando a Desigualdade Triangular tem-se:


$$EC \leq EB + BC. \quad (2.2.13)$$

Substituindo (2.2.12) e (2.2.9) em (2.2.13) encontra-se:

$$\frac{AC \cdot BD}{AD} \leq \frac{AB \cdot CD}{AD} + BC. \quad (2.2.14)$$

Multiplicando (2.2.14) por AD concluí-se a validade de (2.2.7).

A igualdade ocorre se, e somente se, $EC = EB + BC$. Ou seja, E , B e C são colineares. Isso equivale ao quadrilátero $ABCD$ ser inscrito. \square

A desigualdade também é válida se o quadrilátero não é convexo [1]. Uma verificação numérica no site do GeoGebra pode ser vista . Outra demonstração da Desigualdade de Ptolomeu encontra-se, por exemplo, em [27].

2.3 Problemas

2.3.1 Teorema de Ptolomeu. Arco Capaz. Triângulo Equilátero. P5 IMO 1995.

Problema 1. *Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo com:*

$$AB = BC = CD,$$

$$DE = EF = FA,$$

$$\angle BCD = \angle EFA = \pi/3.$$

Sejam G e H dois pontos no interior do hexágono, tais que os ângulos AGB e DHE são ambos $2\pi/3$. Provar que:


$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

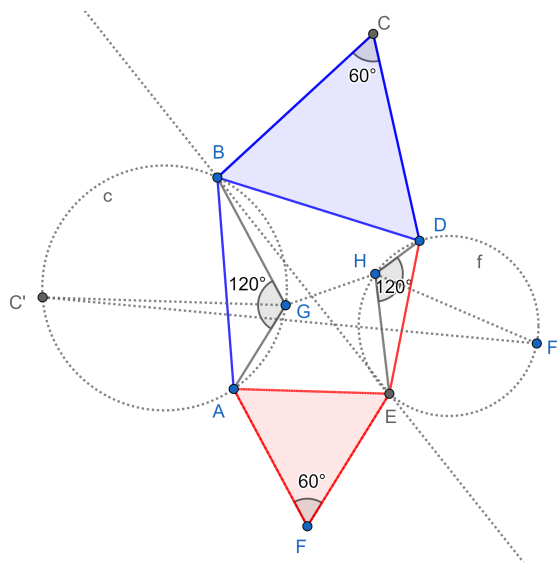
A IMO 1995 foi realizada na cidade de Toronto, Canada. O problema acima foi proposto por A. McNaughton da delegação da Nova Zelândia, P11 da lista curta (SL) e escolhido como o quinto da competição [3].

2.3.1.1 Resolução do Problema 1.

A Figura 2.6 mostra uma construção geométrica. Os triângulos BCD e EFA são equiláteros pelas hipóteses do problema. Para poder "encaixar" a parte superior ($ABCD$, em azul)

com a parte inferior ($DEFA$, em vermelho) a linha BE deve ser a mediatriz dos pontos A e D . Isto é, os triângulos ABD e AED são isósceles de base AD . Para localizar as posições dos pontos G e H deve ser feita a construção do **Arco Capaz** (parte das circunferências c e f no interior do hexágono) sobre os segmentos AB e DE , respectivamente.

Figura 2.6: Uma construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

Para resolver o problema são construídos os pontos C' e F' , simétricos de C e F em relação a reta BE , respectivamente. Nota-se que $CF = C'F'$.

Pela simetria em relação a linha BE os triângulos ABC' e DEF' são equiláteros. Segue que os ângulos $BC'A$ e $DF'E$ medem 60° , com o qual os quadriláteros $AGBC'$ e $DHEF'$ são inscritíveis ($\angle AGB + \angle BC'A = 180^\circ$ e $\angle DHE + \angle EF'D = 180^\circ$).

Utilizando o Teorema 1 (Ptolomeu) no quadrilátero inscritível $AGBC'$ tem-se:

$$AG \cdot BC' + BG \cdot AC' = GC' \cdot AB.$$

Como $BC' = AC' = AB$ segue:

$$AG + BG = GC'. \tag{2.3.1}$$

Analogamente, utilizando o Teorema 1 (Ptolomeu) no quadrilátero inscritível $DHEF'$ tem-se:

$$HE \cdot DF' + HD \cdot EF' = HF' \cdot DE.$$

Como $DF' = EF' = DE$ segue:

$$HE + HD = HF'. \tag{2.3.2}$$

Somando (2.3.1) e (2.3.2) encontra-se:

$$AG + BG + HE + HD = GC' + HF'.$$

Adicionando GH nos dois lados da equação anterior tem-se:

$$AG + BG + GH + HE + HD = GC' + GH + HF'. \quad (2.3.3)$$

Pela Desigualdade Triangular aplicada nos triângulos HGC' e $HC'F'$ segue que:

$$(GC' + GH) + HF' \geq HC' + HF' \geq C'F' = CF. \quad (2.3.4)$$

A igualdade acontece quando os pontos G e H pertencem ao segmento $C'F'$.

De (2.3.3) e (2.3.4) encontra-se o que queria-se demonstrar:

$$AG + BG + GH + HE + HD \geq CF. \quad (2.3.5)$$

Pela Desigualdade de Ptolomeu (Teorema 3) pode ser eliminada a restrição dos ângulos AGB e DHE serem 120° . Neste caso, os quadriláteros $AGBC'$ e $DHEF'$ não serão necessariamente inscritíveis nem convexos. As igualdades (2.3.1) e (2.3.2) devem ser substituídas por:

$$AG + BG \geq GC',$$

$$HE + HD \geq HF'.$$

Repetindo o raciocínio feito anteriormente a desigualdade (2.3.5) continuará sendo válida.

2.3.2 Desigualdade de Ptolomeu. Desigualdade das médias aritmética e harmônica. P7 SL IMO 1997.

Problema 2. *Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo tal que $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Provar que:*


$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

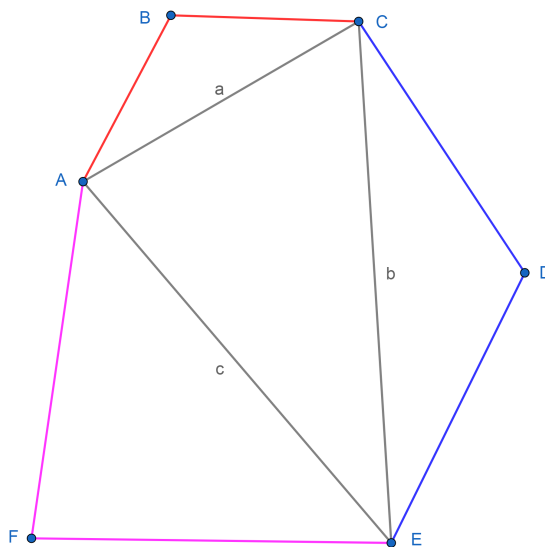
Quando acontece a igualdade?

A IMO 1997 foi realizada na cidade de Mar del Plata, Argentina. O problema acima foi proposto por Valentina Kirichenko da delegação da Rússia, P7 da SL [3].

2.3.2.1 Resolução do Problema 2.

A Figura 2.7 mostra uma construção geométrica. Para facilitar a interpretação também foram construídos os segmentos $AC = a$, $CE = b$ e $AE = c$.

Figura 2.7: Uma construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

Inicia-se aplicando a Desigualdade de Ptolomeu (Teorema 3) ao quadrilátero $ACEF$:

$$AC \cdot EF + FA \cdot CE \geq AE \cdot FC.$$

Como $FA = EF$ segue que:

$$\frac{FA}{FC} \geq \frac{c}{a+b}. \quad (2.3.6)$$

Analogamente, aplicando a Desigualdade de Ptolomeu (Teorema 3) no quadrilátero $AEDC$ tem-se:

$$AE \cdot CD + AC \cdot DE \geq DA \cdot CE.$$

Mas $CD = DE$, logo

$$\frac{DE}{DA} \geq \frac{b}{a+c}. \quad (2.3.7)$$

Mais uma vez, aplicando a Desigualdade de Ptolomeu (Teorema 3) no quadrilátero $ABCE$ segue:

$$AB \cdot CE + AE \cdot BC \geq AC \cdot BE.$$

Com $AB = BC$, encontra-se:

$$\frac{BC}{BE} \geq \frac{a}{b+c}. \quad (2.3.8)$$

Somando (2.3.6), (2.3.7) e (2.3.8) tem-se:

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}.$$

Para resolver o problema basta provar a Desigualdade de Nesbitt:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \quad (2.3.9)$$

Sejam

$$x = b + c, \quad (2.3.10)$$

$$y = a + c, \quad (2.3.11)$$

$$z = a + b, \quad (2.3.12)$$

$$p = a + b + c. \quad (2.3.13)$$

Das quatro equações anteriores pode-se escrever a , b e c como função de x , y , z e p :

$$a = p - x, \quad (2.3.14)$$

$$b = p - y, \quad (2.3.15)$$

$$c = p - z. \quad (2.3.16)$$

Substituindo (2.3.10), (2.3.11), (2.3.12), (2.3.14), (2.3.15) e (2.3.16) em (2.3.9) encontra-se que (2.3.9) equivale a:

$$p \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 3 \geq \frac{3}{2}.$$

E após algumas manipulações fica-se com a desigualdade:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{2p}. \quad (2.3.17)$$

Da soma de (2.3.10), (2.3.11), (2.3.12) e da definição de p em (2.3.13) tem-se que o valor $2p$ pode ser escrito como:

$$2p = x + y + z. \quad (2.3.18)$$

Substituindo (2.3.18) em (2.3.17) e reagrupando conclui-se que (2.3.17) é equivalente a:

$$M.A. \{x, y, z\} = \frac{x + y + z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = M.H. \{x, y, z\}. \quad (2.3.19)$$

Em (2.3.19) reconhece-se a desigualdade (verdadeira) entre as médias aritmética (M.A.) e harmônica (M.H.) do conjunto de valores positivos $\{x, y, z\}$.

A igualdade em (2.3.6), (2.3.7) e (2.3.8) acontece, pelo Teorema 1 (Ptolomeu), quando os quadriláteros $ACEF$, $AEDC$ e $ABCE$ são inscritíveis. Da igualdade em (2.3.9) segue que $a = b = c$, isto equivale a $x = y = z$ (igualdade na [Desigualdade das Médias](#)). Neste caso o hexágono é regular.

2.3.3 Teorema de Ptolomeu. Conjugados Isogonais. Semelhança de triângulos. P4 SL IMO 1998.

Problema 3. *Sejam M e N pontos no interior do $\triangle ABC$, tais que $\angle MAB = \angle NAC$ e $\angle MBA = \angle NBC$. Provar que:*

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1.$$

A IMO 1998 foi realizada na cidade de Taipé, Taiwan. O problema acima foi proposto pela delegação da Armênia, P4 da lista curta [3].

2.3.3.1 Resolução do Problema 3.

A Figura 2.8 mostra uma construção geométrica inicial.

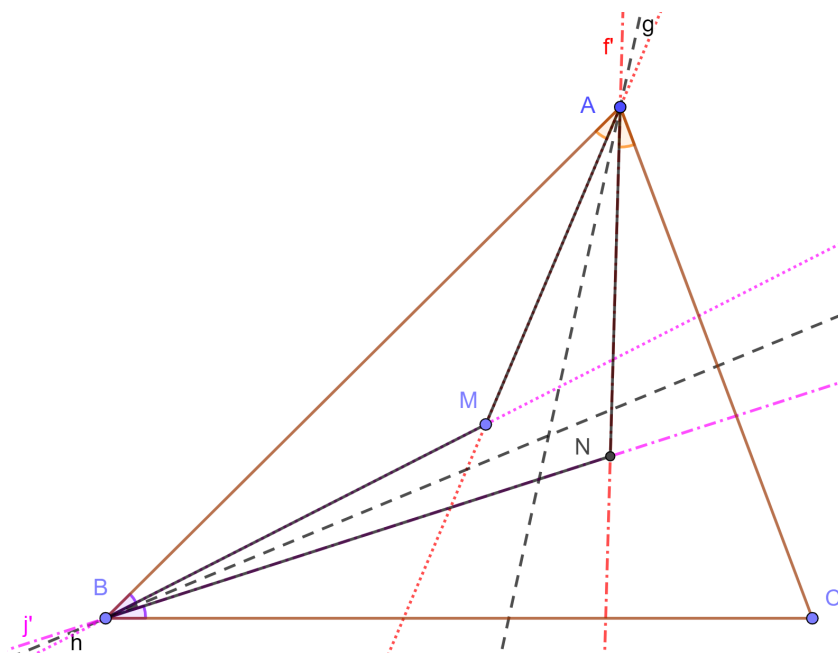
Devido as igualdades $\angle MAB = \angle NAC$ e $\angle MBA = \angle NBC$, os pontos M e N são [conjugados isogonais](#). Pelo Teorema Fundamental dos conjugados isogonais também é válido que $\angle MCB = \angle NCA$.

Para a construção posiciona-se um ponto M no interior do $\triangle ABC$. Traçam-se as retas AM , BM e as bissetrizes g e h dos ângulos CAB e ABC , respectivamente. A seguir encontra-se a reflexão f' da reta AM relativo a g e a reflexão j' da reta BM relativo a h . Marca-se o ponto $N = f' \cap j'$.

Seja um ponto $K \in BN$ tal que $\angle BCK = \angle BMA$ (Figura 2.9). Como $\angle KBC = \angle ABM$, tem-se $\triangle BCK \sim \triangle BMA$. Segue que $\angle BKC = \angle BAM$ e

$$\frac{BC}{BM} = \frac{BK}{BA} = \frac{CK}{MA}. \quad (2.3.20)$$

Figura 2.8: Uma construção geométrica inicial para o Problema 3. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

Da primeira igualdade em (2.3.20) e $\angle MBC = \angle ABK$, pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado, segue que $\triangle MBC \sim \triangle ABK$. Logo, $\angle MCB = \angle AKB$, $\angle BMC = \angle BAK$ e

$$\frac{MB}{AB} = \frac{MC}{AK} = \frac{BC}{BK}. \tag{2.3.21}$$

Como $\angle NKC = \angle BKC = \angle BAM = \angle NAC$, então o quadrilátero $ANCK$ é inscritível. Aplicando o Teorema 1 (Ptolomeu) tem-se:

$$\begin{aligned} AC \cdot NK &= AC \cdot (BK - BN) = AN \cdot CK + CN \cdot AK, \\ AC \cdot BK &= AC \cdot BN + AN \cdot CK + CN \cdot AK. \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

De (2.3.20) e (2.3.21) encontra-se:


$$\begin{cases} AK = \frac{AB \cdot CM}{BM} \\ BK = \frac{AB \cdot BC}{BM} \\ CK = \frac{AM \cdot BC}{BM} \end{cases} .$$

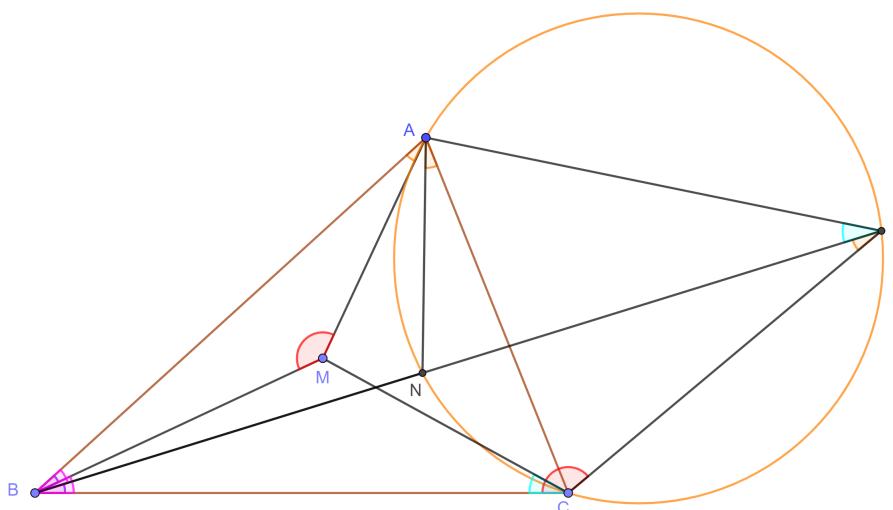
Substituindo os resultados anteriores para AK , BK e CK em (2.3.22) tem-se:

$$\frac{AC \cdot AB \cdot BC}{BM} = AC \cdot BN + \frac{AN \cdot AM \cdot BC}{BM} + \frac{CN \cdot AB \cdot CM}{BM}. \tag{2.3.23}$$

Multiplicando (2.3.23) por $\frac{BM}{AB \cdot BC \cdot CA}$ chega-se a:

$$1 = \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB}.$$

Figura 2.9: Uma construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

2.3.4 Polígono inscritível. Teorema de Ptolomeu. P4 da SL da IMO 2000.

Problema 4. *Seja $A_1A_2\dots A_n$ um polígono convexo com $n \geq 4$. Provar que $A_1A_2\dots A_n$ é inscritível por uma circunferência se, e somente se, a cada vértice A_j pode ser associado um par de números reais (b_j, c_j) , $j = 1, 2, \dots, n$, tais que*

$$A_iA_j = b_jc_i - b_ic_j, \tag{2.3.24}$$

para todo i, j com $1 \leq i < j \leq n$. A_iA_j é a distância entre os pontos A_i e A_j .

A IMO 2000 foi realizada na cidade Daejeon, Coreia do Sul. Problema proposto pela delegação da Rússia, P4 da lista curta [3].

2.3.4.1 Resolução do Problema 4.

Primeiro, suponha-se que a cada vértice A_j pode ser associado um par de números reais (b_j, c_j) , $j = 1, 2, \dots, n$, tal que $A_i A_j = b_j c_i - b_i c_j$ para todo i, j , com $1 \leq i < j \leq n$.

Para provar que o polígono $A_1 A_2 \dots A_n$ é inscrito basta provar que os quadriláteros $A_1 A_2 A_3 A_i$, com $4 \leq i \leq n$, são inscritíveis. Ou, pela forma recíproca do Teorema 1 (Ptolomeu), que:

$$A_1 A_3 \cdot A_2 A_i = A_1 A_i \cdot A_2 A_3 + A_1 A_2 \cdot A_3 A_i. \quad (2.3.25)$$

Nota-se, de (2.3.24), que:

$$A_1 A_3 = b_3 c_1 - b_1 c_3,$$

$$A_2 A_i = b_i c_2 - b_2 c_i,$$

$$A_1 A_i = b_i c_1 - b_1 c_i,$$

$$A_2 A_3 = b_3 c_2 - b_2 c_3,$$

$$A_1 A_2 = b_2 c_1 - b_1 c_2,$$

$$A_3 A_i = b_i c_3 - b_3 c_i.$$

Substituindo-se as seis equações anteriores em (2.3.25)

$$(b_3 c_1 - b_1 c_3) \cdot (b_i c_2 - b_2 c_i) = (b_i c_1 - b_1 c_i) \cdot (b_3 c_2 - b_2 c_3) + (b_2 c_1 - b_1 c_2) \cdot (b_i c_3 - b_3 c_i),$$

$$b_3 c_1 b_i c_2 - b_3 c_1 b_2 c_i - b_1 c_3 b_i c_2 + b_1 c_3 b_2 c_i = b_i c_1 b_3 c_2 - b_i c_1 b_2 c_3 - b_1 c_i b_3 c_2 + b_1 c_i b_2 c_3 + \\ + b_2 c_1 b_i c_3 - b_2 c_1 b_3 c_i - b_1 c_2 b_i c_3 + b_1 c_2 b_3 c_i,$$

$$b_3 b_i c_1 c_2 - b_2 b_3 c_1 c_i - b_1 b_i c_2 c_3 + b_1 b_2 c_3 c_i = b_3 b_i c_1 c_2 - \cancel{b_2 b_i c_1 c_3} - \cancel{b_1 b_3 c_2 c_i} + b_1 b_2 c_3 c_i + \\ + \cancel{b_2 b_i c_1 c_3} - b_2 b_3 c_1 c_i - b_1 b_i c_2 c_3 + \cancel{b_1 b_3 c_2 c_i},$$

verifica-se a igualdade.

Segundo, suponha-se que $A_1 A_2 \dots A_n$ seja inscrito. Logo, os quadriláteros $A_1 A_2 A_i A_j$ com $3 \leq i < j \leq n$ são inscritíveis. Pela forma direta do Teorema 1 (Ptolomeu) vale que:

$$A_1 A_i \cdot A_2 A_j = A_1 A_j \cdot A_2 A_i + A_1 A_2 \cdot A_i A_j.$$

Segue que:

$$A_i A_j = A_2 A_j \cdot \frac{A_1 A_i}{A_1 A_2} - A_2 A_i \cdot \frac{A_1 A_j}{A_1 A_2}.$$

A equação anterior sugere que basta utilizar:

$$b_i = \begin{cases} -A_1A_2, & \text{se } i = 1 \\ A_2A_i, & \text{se } 2 \leq i \leq n \end{cases},$$

$$c_i = \frac{A_1A_i}{A_1A_2}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Fazendo isto, segue que para todo i, j , com $1 \leq i < j \leq n$,

$$A_iA_j = b_jc_i - b_ic_j.$$

Isso conclui a prova do problema.

Como exemplo da segunda parte nota-se que a associação de pares para os quatro primeiros pontos de um polígono inscritível seria da forma:

$$A_1 \rightarrow (-A_1A_2, 0),$$

$$A_2 \rightarrow (0, 1),$$

$$A_3 \rightarrow (A_2A_3, \frac{A_1A_3}{A_1A_2}),$$

$$A_4 \rightarrow (A_2A_4, \frac{A_1A_4}{A_1A_2}).$$

Este problema faz lembrar a definição do operador Rotacional do Cálculo Vetorial. Seja o campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\vec{F}(x, y, z) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)).$$

Seja ainda o operador $\vec{\nabla}$ formalmente representado como um vetor de derivadas parciais:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

O Rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ é um campo vetorial calculado como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y, \frac{\partial}{\partial z}F_x - \frac{\partial}{\partial x}F_z, \frac{\partial}{\partial x}F_y - \frac{\partial}{\partial y}F_x \right).$$

Isto é, cada uma das componentes do Rotacional é da forma:

$$\frac{\partial}{\partial j}F_i - \frac{\partial}{\partial i}F_j,$$

com $i, j \in \{x, y, z\}$ e $i \neq j$. Ou seja, uma fórmula que lembra a (2.3.24).

2.3.5 Desigualdades de Ptolomeu e Triangular. Baricentro. Relação de Stewart. P17 SL IMO 2001.

Problema 5. Denotar o ponto G , centroide do $\triangle ABC$. Determinar a posição de um ponto P tal que


$$AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG \quad (2.3.26)$$

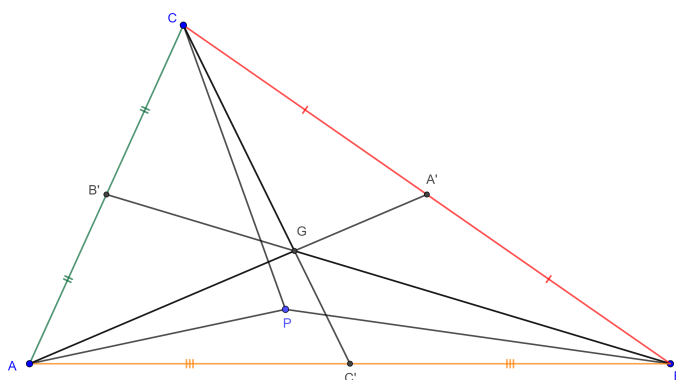
seja mínimo. Expressar este mínimo em função dos comprimentos dos lados do triângulo ABC .

A IMO 2001 foi realizada na cidade de Washington, EUA. O problema acima foi proposto pela delegação do Reino Unido, P17 da lista curta [3].

2.3.5.1 Resolução do Problema 5.

A Figura 2.10 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 2.10: Uma construção geométrica inicial para o Problema 5. Versão interativa . Observe que ao mover o ponto P para diferentes posições somos levados a conjecturar que o mínimo ocorre quando $P = G$.



Fonte: Os autores.

Sejam C' , B' e A' os pontos médios dos segmentos $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$, respectivamente. Considera-se a circunferência k circunscrita ao $\triangle BCG$ e o ponto F a segunda interseção da reta AG com k (Figura 2.11). Como o quadrilátero $BFCG$ é inscrito têm-se:

$$\angle BFC = \angle BGC' = \alpha,$$

$$\angle FBC = \angle FGC = \angle C'GA = \beta.$$

Pela Lei dos Senos aplicada no $\triangle BCF$ segue:

$$\frac{BC}{CF} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\beta)}. \quad (2.3.27)$$

Seja $\angle GC'B = \gamma$. Pela Lei dos Senos aplicada nos $\triangle GC'B$ e $\triangle GC'A$ encontram-se:

$$\frac{BC'}{BG} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\gamma)}, \quad (2.3.28)$$

$$\frac{AC'}{AG} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(180^\circ - \gamma)} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\gamma)}. \quad (2.3.29)$$

Como $AC' = BC'$, dividindo (2.3.28) por (2.3.29) resulta em:

$$\frac{AG}{BG} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\beta)}. \quad (2.3.30)$$

Logo, da comparação de (2.3.27) e (2.3.30) chega-se a:

$$\frac{BC}{CF} = \frac{AG}{BG}. \quad (2.3.31)$$

Analogamente, mostra-se que:

$$\frac{BC}{BF} = \frac{AG}{CG}. \quad (2.3.32)$$

Reescrevem-se os dois últimos somandos de (2.3.26) utilizando (2.3.31) e (2.3.32):

$$\begin{aligned} BP \cdot BG + CP \cdot CG &= BP \cdot \frac{CF \cdot AG}{BC} + CP \cdot \frac{BF \cdot AG}{BC}, \\ BP \cdot BG + CP \cdot CG &= \frac{AG}{BC}(BP \cdot CF + CP \cdot BF). \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Aplica-se a Desigualdade de Ptolomeu (Teorema 3) ao quadrilátero $PBFC$:

$$BP \cdot CF + CP \cdot BF \geq PF \cdot BC. \quad (2.3.34)$$

Vale a igualdade quando $PBFC$ é inscritível.

De (2.3.33) e (2.3.34) segue:

$$BP \cdot BG + CP \cdot CG \geq \frac{AG}{BC}(PF \cdot BC) = AG \cdot PF. \quad (2.3.35)$$

Para recuperar (2.3.26) adiciona-se $AP \cdot AG$ nos dois lados de (2.3.35):

$$AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG \geq AP \cdot AG + AG \cdot PF = AG(AP + PF). \quad (2.3.36)$$

Pela Desigualdade Triangular aplicada no $\triangle APF$ tem-se:

$$AP + PF \geq AF. \quad (2.3.37)$$

Vale a igualdade quando $P \in AF$.

De (2.3.36) e (2.3.37) segue:

$$AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG \geq AG \cdot AF. \quad (2.3.38)$$

A utilização das duas desigualdades (Ptolomeu e Triangular) leva a concluir que o mínimo de (2.3.26) acontece quando $P = G$. Isto é, (2.3.38) pode ser escrito como:

$$AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG \geq AG^2 + BG^2 + CG^2.$$

O anterior implica que

$$(AP - AG)^2 + (BP - BG)^2 + (CP - CG)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow AP^2 + BP^2 + CP^2 &\geq 2(AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG) - (AG^2 + BG^2 + CG^2) \geq \\ &\geq AG^2 + BG^2 + CG^2, \end{aligned}$$

de onde segue que o baricentro é o ponto que minimiza a soma dos quadrados das distâncias aos vértices.

Com o auxílio da [Relação de Stewart](#) calcula-se o quadrado da mediana AA' :

$$AA'^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}. \quad (2.3.39)$$

De (2.3.39) e $AG = \frac{2}{3}AA'$, então:

$$AG^2 = \frac{2}{9}(b^2 + c^2) - \frac{a^2}{9}. \quad (2.3.40)$$


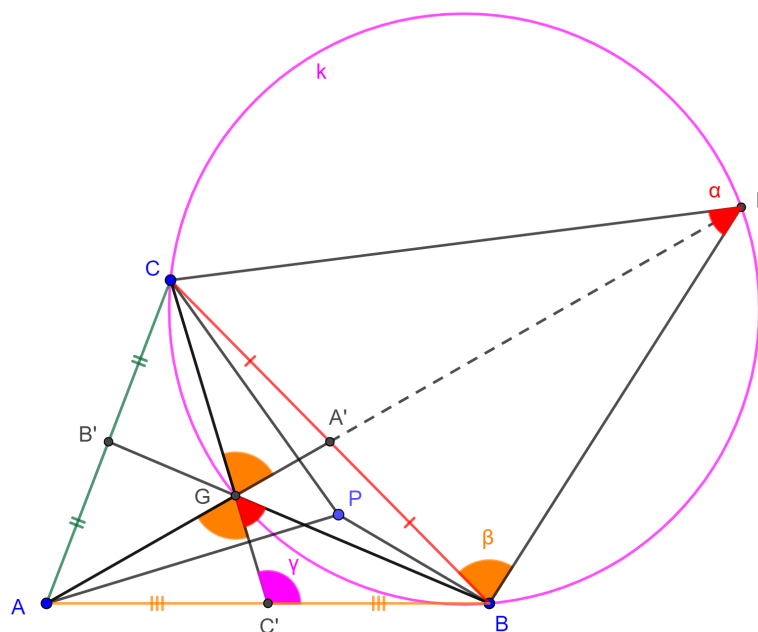
Analogamente, vale que:

$$BG^2 = \frac{2}{9}(a^2 + c^2) - \frac{b^2}{9}, \quad (2.3.41)$$

$$CG^2 = \frac{2}{9}(a^2 + b^2) - \frac{c^2}{9}. \quad (2.3.42)$$

Somando (2.3.40), (2.3.41) e (2.3.42) encontra-se:

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Figura 2.11: Uma construção geométrica para o Problema 5. Versão interativa .

Fonte: Os autores.

Capítulo 3

Teorema de Casey

3.1 Teorema de Casey

John Casey foi um geômetra irlandês, mundialmente reconhecido por seus trabalhos sobre a geometria de triângulos e circunferências. Nasceu em 1820 e morreu em 1891 [4].


Teorema 4 (Teorema de Casey). *Sejam $c_i(O_i, r_i)$, com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, quatro circunferências que tangenciam um determinado círculo $c(O, r)$ nos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 , respectivamente. Os pontos são tomados nessa ordem em sentido anti-horário. Seja t_{ij} o comprimento de um segmento determinado por uma tangente comum dos círculos c_i e c_j . Se c_i e c_j tocam c ambos internamente, ou ambos externamente, a tangente comum é externa. Caso contrário, t_{ij} é definido como a tangente comum interna. Então:*

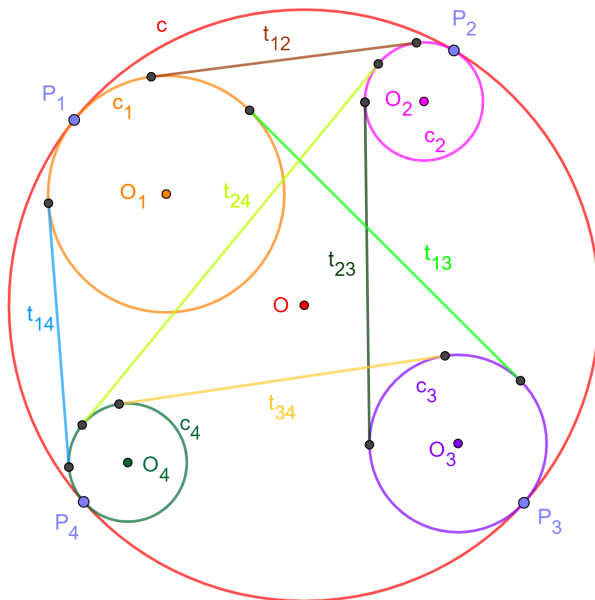
$$t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}.$$

Algumas das circunferências c_1, c_2, c_3, c_4 podem ser degeneradas (Figura 3.1). No caso em que todas são degeneradas o Teorema de Casey coincide com o Teorema de Ptolomeu. O enunciado também vale quando c é uma reta, pois uma reta é um caso especial de circunferência com $r \rightarrow \infty$.

Demonstração. Caso em que as quatro circunferências são internas a c . A Figura 3.2 permite acompanhar a explicação. Seja AB uma corda de c e tangente comum externa de c_1 e c_2 em Q_1 e Q_2 , respectivamente.

Esboça-se a reta P_1Q_1 que intersecta c no ponto S . Como os $\triangle P_1O_1Q_1$ e $\triangle P_1OS$ são isósceles, com um ângulo das bases coincidentes, por ângulo-ângulo, são semelhantes. Segue que $O_1Q_1 \parallel OS$ e, como $\angle O_1Q_1B = 90^\circ$, $OS \perp AB$. Logo, S é o ponto médio do arco AB . Analogamente se mostra que a reta P_2Q_2 intercepta c em S .

Figura 3.1: Teorema de Casey. A versão interativa  permite verificar diferentes configurações.



Fonte: Os autores.

Por opostos pelo vértice, ângulos centrais e de segmento e a semelhança vista vale:

$$\angle SQ_1Q_2 = \angle P_1Q_1A = \frac{1}{2}\angle P_1O_1Q_1 = \frac{1}{2}\angle P_1OS = \angle SP_2P_1.$$

Analogamente, $\angle SQ_2Q_1 = \angle SP_1P_2$.

Logo, por ângulo-ângulo, $\triangle SQ_1Q_2 \sim \triangle SP_2P_1$. Com isso pode-se escrever a proporcionalidade dos lados:

$$\frac{Q_1Q_2}{P_2P_1} = \frac{SQ_1}{SP_2} = \frac{SQ_2}{SP_1}.$$

A igualdade anterior é equivalente a:

$$\frac{Q_1Q_2}{P_2P_1} = \sqrt{\frac{SQ_1 \cdot SQ_2}{SP_2 \cdot SP_1}} = \sqrt{\frac{OO_1 \cdot OO_2}{OP_2 \cdot OP_1}}.$$

A última igualdade é resultado das semelhanças dos $\triangle P_1O_1Q_1$ e $\triangle P_1OS$ e $\triangle P_2O_2Q_2$ e $\triangle P_2OS$. Segue que

$$t_{12} = Q_1Q_2 = P_2P_1 \sqrt{\frac{(r - r_1)(r - r_2)}{r^2}}.$$

Analogamente, para os pares de subíndices ij , com $i \neq j$ e $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, pode ser

escrito:

$$t_{ij} = P_j P_i \frac{\sqrt{(r - r_i)(r - r_j)}}{r}. \tag{3.1.1}$$

Pelo Teorema 1 (Ptolomeu), no quadrilátero inscrito $P_1 P_2 P_3 P_4$, vale que:

$$P_1 P_2 \cdot P_3 P_4 + P_2 P_3 \cdot P_1 P_4 = P_1 P_3 \cdot P_2 P_4. \tag{3.1.2}$$


Em cada um dos somandos de (3.1.2) aparecem todos os subíndices. Portanto, multiplicando (3.1.2) por

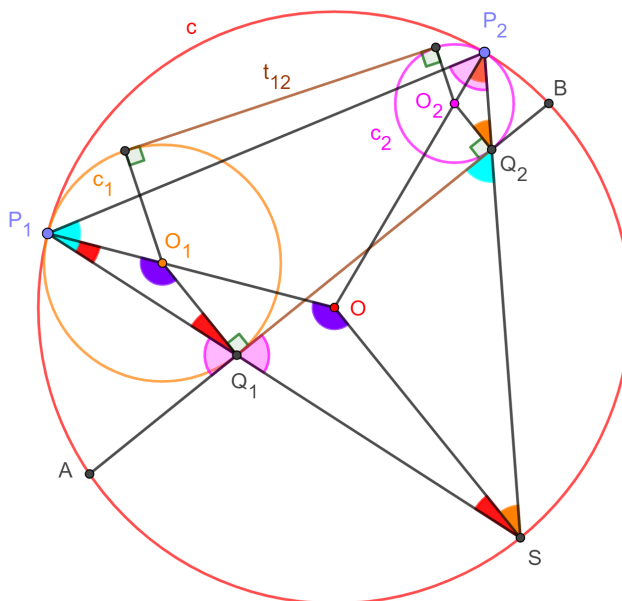
$$\frac{\sqrt{(r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)(r - r_4)}}{r},$$

e utilizando (3.1.1) encontra-se:

$$t_{12} t_{34} + t_{23} t_{14} = t_{13} t_{24}.$$


□

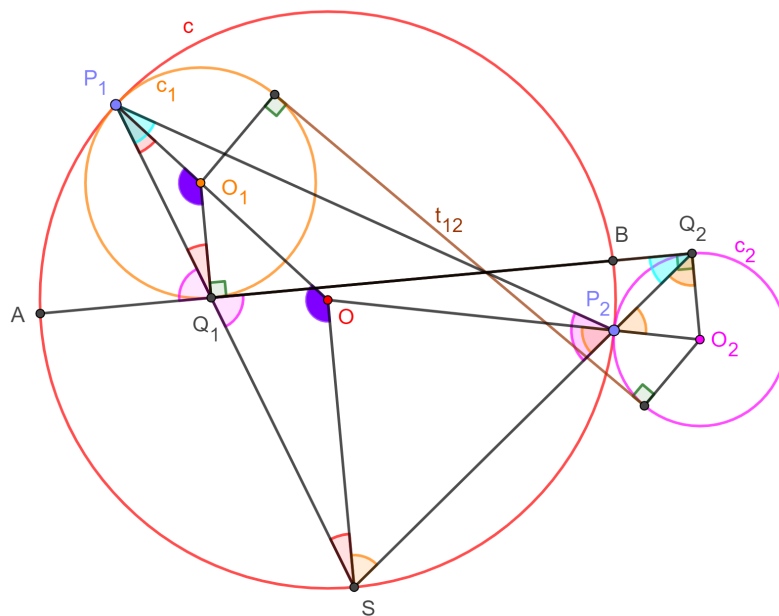
Figura 3.2: Demonstração do Teorema de Casey no caso em que as quatro circunferências são internas a c . Versão interativa .



Fonte: Os autores.

A Figura 3.3 ilustra o caso em que a circunferência c_1 é interna e c_2 externa a c . A demonstração é análoga, mas deve-se trocar $(r - r_k)$ por $(r + r_k)$ quando c_k tangencia c externamente.

Figura 3.3: Caso em que a circunferência c_1 é interna e c_2 externa a c . Versão interativa .



Fonte: Os autores.

A recíproca do Teorema 4 (Casey) também é válida.

Teorema 5 (Recíproca do Teorema de Casey). *Dadas quatro circunferências c_1, c_2, c_3, c_4 , caso exista uma escolha de sinais e tangentes comuns interna (ou externas) t_{ij} que satisfazem a equação*

$$\pm t_{12}t_{34} \pm t_{23}t_{14} \pm t_{13}t_{24} = 0,$$

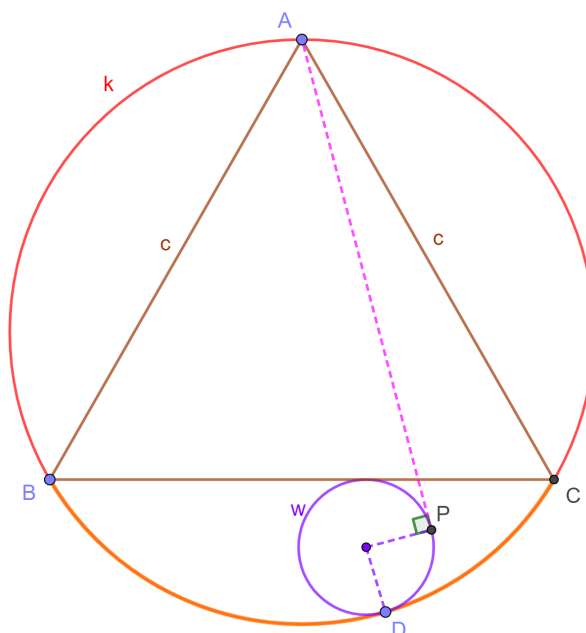
então existe uma circunferência c que tangencia as quatro anteriores.

A demonstração utiliza o conceito de inversão relativa a uma circunferência e não será apresentada aqui.

3.1.1 Problema resolvido por Casey, três pontos e uma circunferência.

Problema 6. *Seja ABC um triângulo isósceles, de circuncírculo k , com $AB = AC = c$. Uma circunferência w é tangente a BC e ao arco BC de k que não contém A . Uma tangente por A até w toca w em P . Descrever o lugar geométrico de P (Figura 3.4).*

Figura 3.4: Uma construção para o Problema 6. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

3.1.1.1 Resolução

A circunferência w é construída com o auxílio de uma circunferência de inversão i , centrada em B e de raio BC . Como k passa pelo centro de inversão sua inversa k' é uma reta passando por C e perpendicular a reta BO_k . A inversa da reta BC é ela mesma (Figura 3.5).

Seja D um ponto do menor arco BC e D' seu inverso. Construa-se uma bissetriz j das retas BC e k' e a perpendicular h , passando por D' , a k' . Marca-se o ponto $O_{w'} = j \cap h$. A inversa da circunferência w' , de centro $O_{w'}$ e raio h , é a circunferência w procurada.

Seja o ponto $F = BC \cap w$ (Figura 3.6). Aplica-se o teorema de Casey considerando os pontos $A, B, C \in k$ como círculos de raio zero. A quarta circunferência tangente a k é w . Pensando no Teorema de Ptolomeu aplicado no quadrilátero $ACDB$ troca-se D pelas tangentes a w :

$$AC \cdot BD + AB \cdot CD = BC \cdot AD,$$

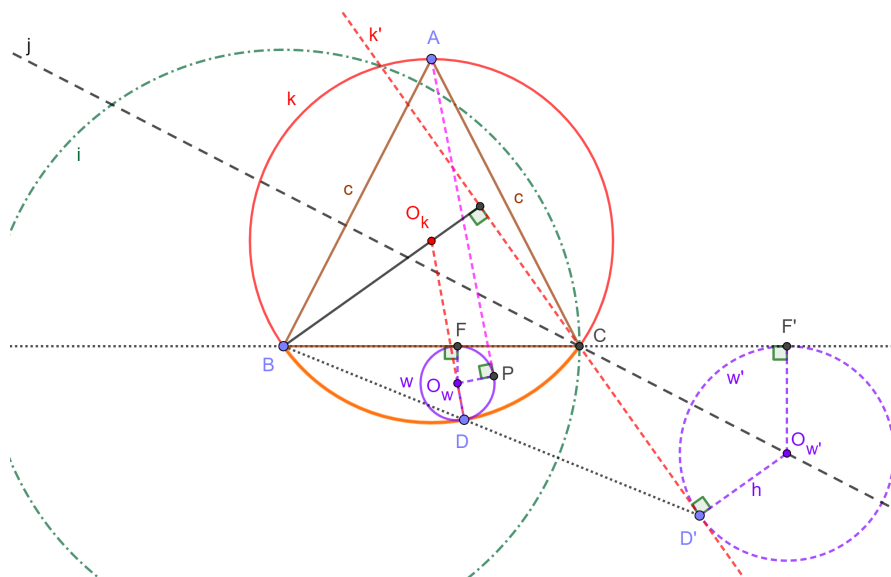
$$AC \cdot BF + AB \cdot CF = BC \cdot AP.$$

Utilizando que $AC = AB = c$ e que $BF + CF = BC$ segue:

$$c(BF + CF) = BC \cdot AP,$$


$$c = AP.$$

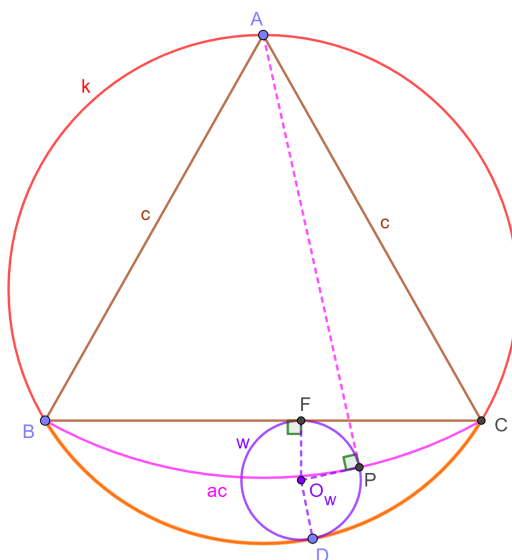
Figura 3.5: Construção por inversão da circunferência w no Problema 6. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

A última igualdade significa que P está no arco de circunferência ac , de centro A e raio c , entre os pontos B e C (Figura 3.6).

Figura 3.6: Resolução do Problema 6. O lugar geométrico do ponto P é o arco ac . Versão interativa .




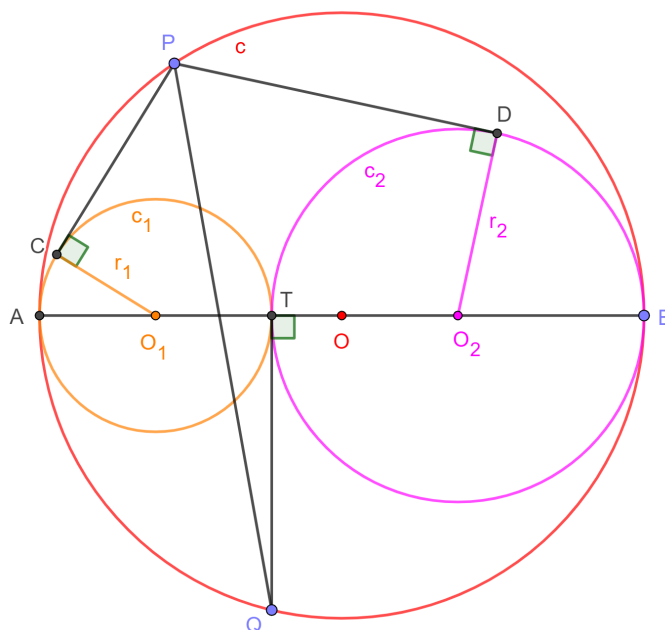
Fonte: Os autores.

3.1.2 Problema resolvido por Casey, dois pontos e duas circunferências.

Problema 7. *Sejam c uma circunferência com diâmetro AB e centro O e P e Q dois pontos em c , em lados diferentes de AB . O ponto T é a projeção ortogonal de Q em AB . Consideram-se as circunferências $c_1(O_1, r_1)$ e $c_2(O_2, r_2)$, de diâmetros TA e TB . Os segmentos PC e PD são tangentes a c_1 e c_2 , respectivamente (Figura 3.7). Mostrar que:*

$$PC + PD = PQ.$$

Figura 3.7: Construção inicial para o Problema 7. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

3.1.2.1 Resolução

Seja EF um segmento tangente externo comum de c_1 e c_2 (Figura 3.8). Como o quadrilátero $PAQB$ é inscrito, pelo Teorema de Ptolomeu, pode-se escrever:

$$PA \cdot QB + PB \cdot QA = PQ \cdot AB. \tag{3.1.3}$$

A seguir utiliza-se o Teorema de Casey. Para tal consideram-se os pontos P e Q como circunferências de raio zero. As outras duas circunferências são c_1 e c_2 . Em (3.1.3) os segmentos

onde aparecem os pontos $A \in c_1$ e $B \in c_2$ são trocados pelas medidas das tangentes respectivas:

$$PC \cdot QT + PD \cdot QT = PQ \cdot EF. \tag{3.1.4}$$

Uma reta paralela ao segmento EF passando por O_1 intersepta o segmento O_2F no ponto G . Aplica-se o Teorema de Pitágoras no $\triangle O_1GO_2$, retângulo em G :

$$EF^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2, \tag{3.1.5}$$

$$EF^2 = 4r_1r_2.$$

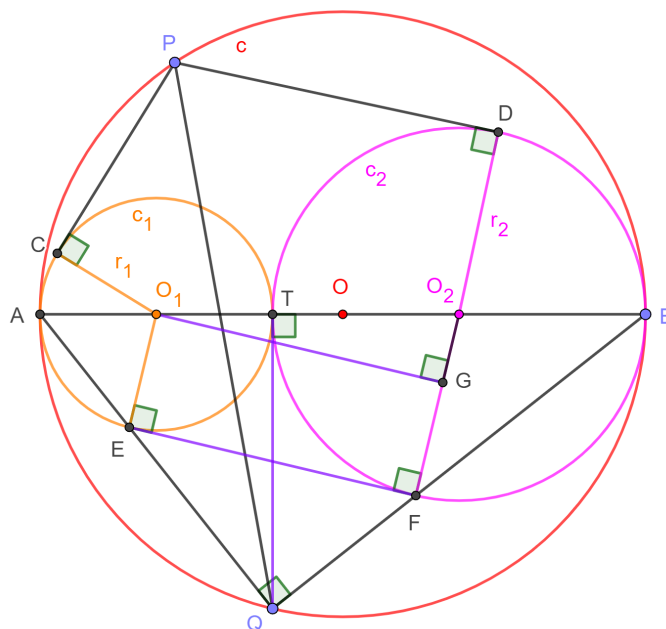
Por outro lado, uma das relações métricas do $\triangle AQB$, retângulo em Q , afirma que $QT^2 = AT \cdot TB$, ou seja:

$$QT^2 = 2r_1 \cdot 2r_2 = 4r_1r_2. \tag{3.1.6}$$

De (3.1.5) e (3.1.6) encontra-se $QT = EF$. Substituindo o resultado anterior em (3.1.4) e simplificando termina-se a demonstração:

$$PC + PD = PQ.$$

Figura 3.8: Construção final para o Problema 7. Versão interativa .



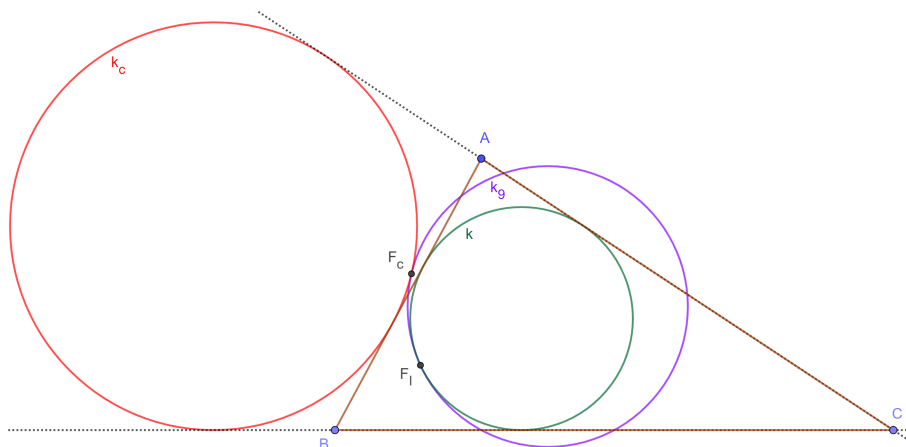
Fonte: Os autores.

3.2 Teorema de Feuerbach provado utilizando a recíproca de Casey

Karl Feuerbach foi um geômetra que descobriu o círculo de nove pontos de um triângulo. Nasceu em 1800 e morreu em 1834 [32].

Teorema 6 (Feuerbach). *Num $\triangle ABC$ seu círculo de nove pontos k_9 é tangente ao incírculo k e aos três ex-incírculos k_a, k_b e k_c (Figura 3.9).*

Figura 3.9: Teorema de Feuerbach. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

Demonstração. Sejam R, S e T e A', B' e C' os pontos médios e interseções de k com os lados $BC = a, CA = b$ e $AB = c$, respectivamente (Figura 3.10). Considera-se, sem perda de generalidade, que $a > b > c$.

Imaginam-se os pontos $R, S, T \in k_9$ como circunferências de raio zero. Será utilizada a recíproca do teorema de Casey. Para tal deve-se mostrar que:

$$t_{TSt_{kR}} + t_{RS t_{Tk}} = t_{TR t_{Sk}}. \tag{3.2.1}$$


Os segmentos TS, RS e TR são bases médias. Logo,

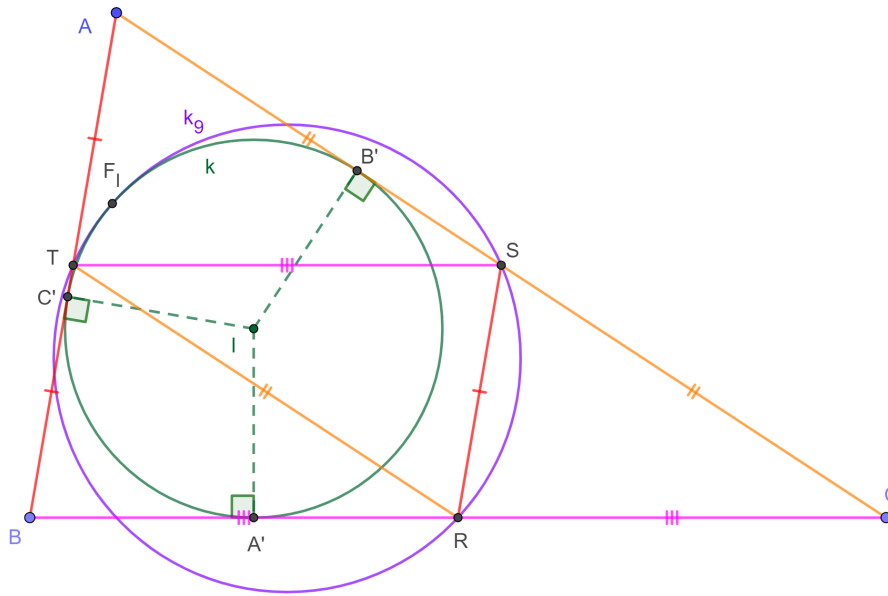
$$t_{TS} = \frac{a}{2}, \quad t_{RS} = \frac{c}{2}, \quad t_{TR} = \frac{b}{2}. \tag{3.2.2}$$

Pelas relações métricas do triângulo devido ao incírculo [21] têm-se:

$$t_{kR} = A'R = \frac{b-c}{2}, \quad t_{Tk} = TC' = \frac{a-b}{2}, \quad t_{Sk} = SB' = \frac{a-c}{2}. \tag{3.2.3}$$

Substituindo (3.2.2) e (3.2.3) em (3.2.1) verifica-se a validade de (3.2.1). Pela recíproca do Teorema de Casey as circunferências k_9 e k são tangentes. O ponto de tangência anterior é denotado por F_I .

Figura 3.10: Teorema de Feuerbach, incírculo. Versão interativa .



Fonte: Os autores.


Sejam A'' , B'' e C'' os pontos de interseções da circunferência ex-inscrita k_c com as retas BC , CA e AB , respectivamente (Figura 3.11). Novamente, imaginam-se os pontos $R, S, T \in k_9$ como circunferências de raio zero. Será utilizada a recíproca do teorema de Casey. Para tal deve-se mostrar que:

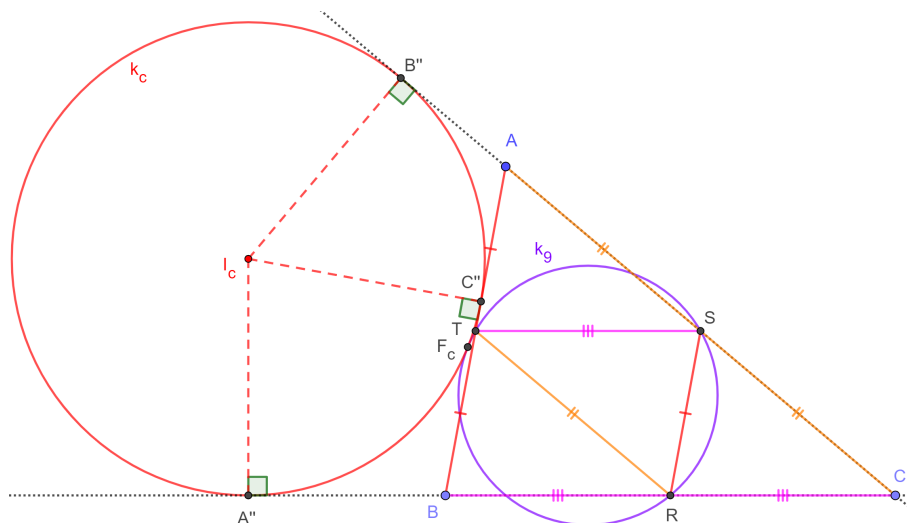
$$t_{TR}t_{k_c S} + t_{RS}t_{T k_c} = t_{T S}t_{R k_c}. \tag{3.2.4}$$

Seja p o semiperímetro do $\triangle ABC$. Pelas relações métricas do triângulo devido ao excírculo [21] têm-se:

$$t_{k_c S} = B''S = p - \frac{b}{2}, \quad t_{T k_c} = TC'' = \frac{a - b}{2}, \quad t_{R k_c} = RA'' = p - \frac{a}{2}. \tag{3.2.5}$$

Substituindo (3.2.2) e (3.2.5) em (3.2.4) verifica-se a validade de (3.2.4). Pela recíproca do Teorema de Casey as circunferências k_9 e k_c são tangentes. O ponto de tangência anterior é denotado por F_c .

Figura 3.11: Teorema de Feuerbach, ex-incírculo. Versão interativa .




Fonte: Os autores.

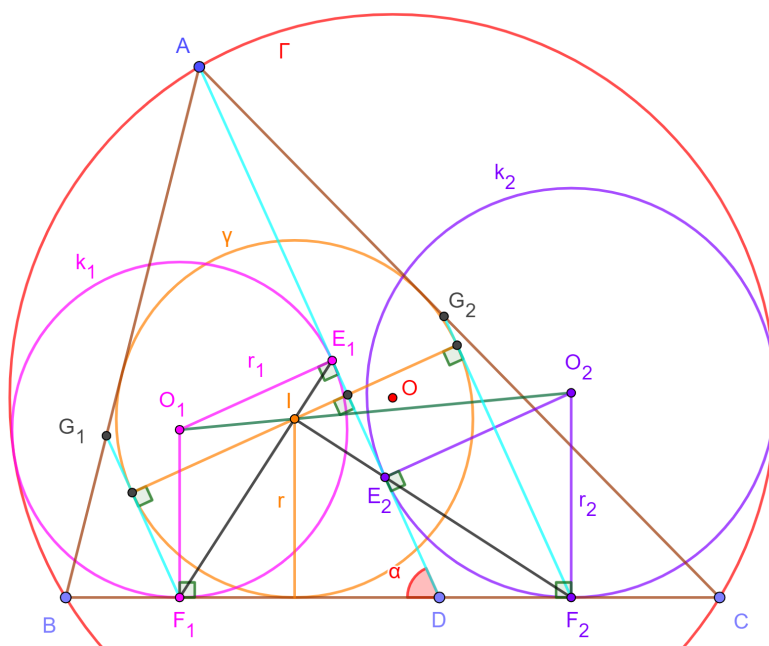
□

3.3 Teorema de Sawayama-Thebault

Teorema 7 (Sawayama-Thebault). *Seja o $\triangle ABC$ cujo círculo circunscrito é $\Gamma(O, R)$. D é um ponto arbitrário sobre o lado BC , $k_1(O_1, r_1)$ é uma circunferência tangente aos segmentos AD e DB , em E_1 e F_1 , respectivamente, e ao arco menor AB de Γ . $k_2(O_2, r_2)$ é uma circunferência tangente aos segmentos AD e DC , em E_2 e F_2 , respectivamente, e ao arco menor AC de Γ . $\gamma(I, r)$ é o incírculo do $\triangle ABC$ (Figura 3.12). Se $\angle ADB = \alpha$, então as afirmações a seguir são verdadeiras:*

1. $r = r_1 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + r_2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$;
2. As paralelas a AD por F_1 e F_2 são tangentes a γ ;
3. E_1, F_1 e I e E_2, F_2 e I são colineares;
4. O_1, O_2 e I são colineares;
5. $\frac{O_1 I}{O_2 I} = \tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$.

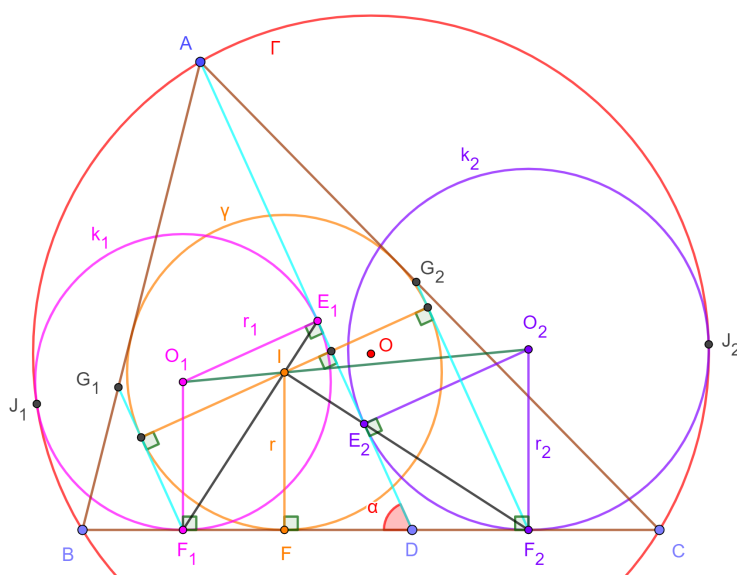
Figura 3.12: Teorema de Sawayama-Thebault. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

Demonstração. Sejam $S = [ABC]$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $2p = a + b + c$, $x = DF_1 = DE_1$, $y = DF_2 = DE_2$, F o ponto de tangência de γ com BC e J_1 e J_2 os pontos de tangência de k_1 e k_2 com Γ (Figura 3.13).

Figura 3.13: Teorema de Sawayama-Thebault, demonstração. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

1) Pelo Teorema de Ptolomeu no quadrilátero AJ_1BC tem-se:

$$AJ_1 \cdot BC + BJ_1 \cdot AC = CJ_1 \cdot AB.$$

Consideram-se os pontos $A, B, C \in \Gamma$ circunferências de raio zero. Aplicando o teorema de Casey para A, B, C, k_1 , trocam-se na equação anterior os segmentos onde aparece J_1 pela tangente correspondente, segue:

$$\begin{aligned} AE_1 \cdot BC + BF_1 \cdot AC &= CF_1 \cdot AB, \\ (AD - x)a + (BD - x)b &= (CD + x)c, \\ x(a + b + c) &= 2px = a \cdot AD + b \cdot BD - c \cdot CD. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Analogamente, pelo teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABCJ_2$ tem-se:

$$AJ_2 \cdot BC + CJ_2 \cdot AB = BJ_2 \cdot AC.$$

Consideram-se os pontos $A, B, C \in \Gamma$ circunferências de raio zero. Aplicando o teorema de Casey para A, B, C, k_2 , trocam-se na equação anterior os segmentos onde aparece J_2 pela tangente correspondente, segue:

$$\begin{aligned} AE_2 \cdot BC + CF_2 \cdot AB &= BF_2 \cdot AC, \\ (AD - y)a + (CD - y)c &= (BD + y)b, \\ y(a + b + c) &= 2py = a \cdot AD - b \cdot BD + c \cdot CD. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Somando (3.3.1) e (3.3.2) encontra-se:

$$p(x + y) = a \cdot AD. \quad (3.3.3)$$

Por outro lado, dos $\triangle O_1E_1D$ e $\triangle O_2E_2D$ têm-se:

$$x = r_1 \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad y = r_2 \frac{\cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = r_2 \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (3.3.4)$$

Substituindo (3.3.4) em (3.3.3) segue:

$$\begin{aligned} \frac{r_1 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r_2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} &= \frac{a \cdot AD}{p}, \\ r_1 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r_2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{a \cdot AD \cdot \sin(\alpha)}{2p}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Mas $a \cdot AD \cdot \text{sen}(\alpha) = 2S = 2pr$ logo, de (3.3.5),

$$r_1 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r_2 \text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = r.$$

2) Mostra-se que a paralela a AD por F_1 tangencia γ . A análise da outra paralela é análoga. Seja $G_1 \in AB$ tal que $F_1G_1 \parallel AD$. Basta provar que γ é ex-incírculo do $\triangle BF_1G_1$. Ou seja, $r_b(\triangle BF_1G_1) = r$. Será utilizada a fórmula de área relacionada com o raio r_b do ex-incírculo:

$$2[BF_1G_1] = r_b(BF_1 + BG_1 - F_1G_1). \quad (3.3.6)$$

Como os segmentos F_1G_1 e AD são paralelos e B é um vértice comum segue que $\triangle BF_1G_1 \sim \triangle BDA$. Seja

$$k = \frac{BF_1}{BD}$$

a razão de semelhança. Pode-se ainda escrever:

$$BF_1 = k \cdot BD, \quad BG_1 = k \cdot c, \quad F_1G_1 = k \cdot AD, \quad (3.3.7)$$

$$[BF_1G_1] = k^2 \cdot [BDA]. \quad (3.3.8)$$

Como os triângulos ABD e ABC compartilham a mesma altura relativa aos lados BD e BC segue que:

$$[BDA] = \frac{BD}{a}[ABC]. \quad (3.3.9)$$

Substituindo (3.3.7), (3.3.8) e (3.3.9) em (3.3.6) encontra-se:

$$\frac{2[ABC]kBD}{a} = r_b(BD + c - AD). \quad (3.3.10)$$

Em (3.3.10) escreve-se a área do $\triangle ABC$ utilizando o raio r do seu incírculo γ . Isto é, $[ABC] = pr$:

$$\frac{2prkBD}{a} = r_b(BD + c - AD). \quad (3.3.11)$$

Como quer-se demonstrar que $r = r_b$, de (3.3.11), resta provar que:

$$2pkBD = a(BD + c - AD). \quad (3.3.12)$$

Em (3.3.12) substituem-se os valores de p e k :

$$(a + b + c)BF_1 = a(BD + c - AD). \quad (3.3.13)$$

Por outro lado, em (3.3.1) são feitas as substituições

$$BD = BF_1 + x, \quad CD = a - BF_1 - x.$$

Ou seja:

$$x(a + b + c) = aAD + b(BF_1 + x) - c(a - BF_1 - x).$$

Reagrupando e simplificando encontra-se:

$$(BD + c - AD)a = (a + b + c)BF_1. \quad (3.3.14)$$

A comparação das igualdades (3.3.13) e (3.3.14) termina a prova.

3) Quer-se provar que F_1 , I e E_1 são colineares. Como $F_1G_1 \parallel DA$ segue que $\angle G_1F_1D = 180^\circ - \alpha$. Mas viu-se que I é ex-incentro do $\triangle BF_1G_1$, logo

$$\angle IF_1D = \frac{\angle G_1F_1D}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Por outro lado, pela tangencia a k_1 tem-se $DF_1 = DE_1$. Logo, o $\triangle DF_1E_1$ é isósceles e da soma dos seus ângulos internos segue que:

$$\angle E_1F_1D = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle IF_1D.$$

Analogamente demonstra-se que $\angle IF_2F = \frac{\alpha}{2}$ e F_2 , I e E_2 são colineares.

4) Como $\angle FIF_1 = \frac{\alpha}{2}$ e o $\triangle FIF_1$ é retângulo em F segue que:

$$F_1F = r \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (3.3.15)$$

Analogamente, como $\angle FF_2I = \frac{\alpha}{2}$ e o $\triangle FIF_2$ é retângulo em F segue que:

$$F_2F = \frac{r}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (3.3.16)$$

De (3.3.15) e (3.3.16) encontra-se:

$$\frac{F_1F}{F_2F} = \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (3.3.17)$$

Como $O_1F_1 \parallel IF \parallel O_2F_2$ quer-se mostrar que:

$$\frac{O_1I}{O_2I} = \frac{F_1F}{F_2F}.$$

Neste caso, pela recíproca do Teorema de Tales, fica provada a colinearidade de O_1 , I e O_2 e a

afirmação 5).

Traçam-se perpendiculares a reta O_2F_2 passando por O_1 e I para determinar as interseções nos pontos M e N , respectivamente (Figura 3.14). Como $O_1M \parallel IN$ pelo Teorema de Tales tem-se:

$$\frac{O_1I}{O_2I} = \frac{MN}{O_2N} = \frac{r - r_1}{r_2 - r}. \tag{3.3.18}$$

Em (3.3.18) é substituído o valor de r que foi provado na afirmação 1):

$$\frac{O_1I}{O_2I} = \frac{r_1 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r_2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - r_1}{r_2 - r_1 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r_2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{(r_2 - r_1) \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(r_2 - r_1) \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \tag{3.3.19}$$


De (3.3.19) segue que:

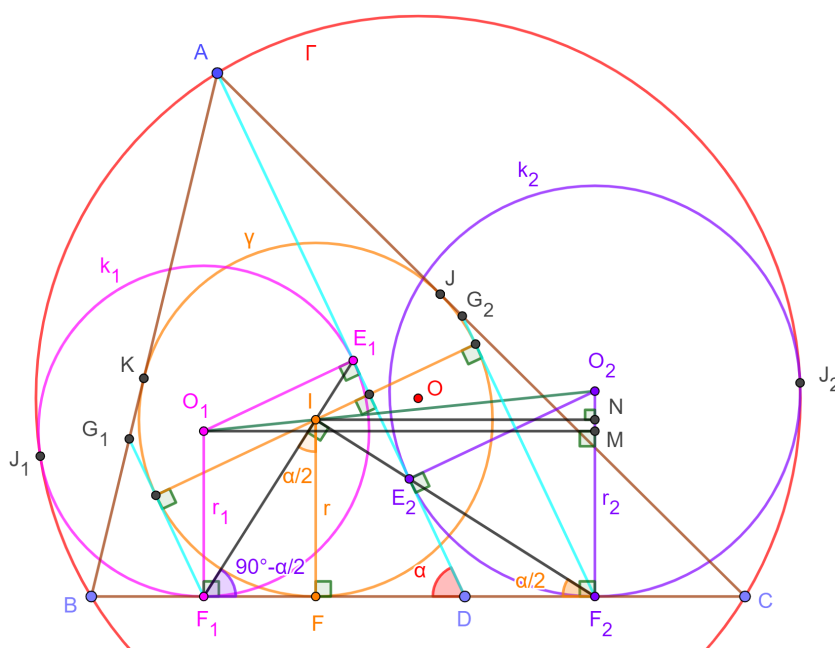
$$\frac{O_1I}{O_2I} = \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{3.3.20}$$

Comparando (3.3.17) e (3.3.20) vale que:

$$\frac{O_1I}{O_2I} = \frac{F_1F}{F_2F}.$$

Pela recíproca do Teorema de Tales, aplicado aos segmentos $O_1F_1 \parallel IF \parallel O_2F_2$, fica provada a colinearidade de O_1 , I e O_2 e a afirmação 5). □

Figura 3.14: Teorema de Sawayama-Thebault, todas as construções da demonstração. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

Capítulo 4


Cálculos de Áreas

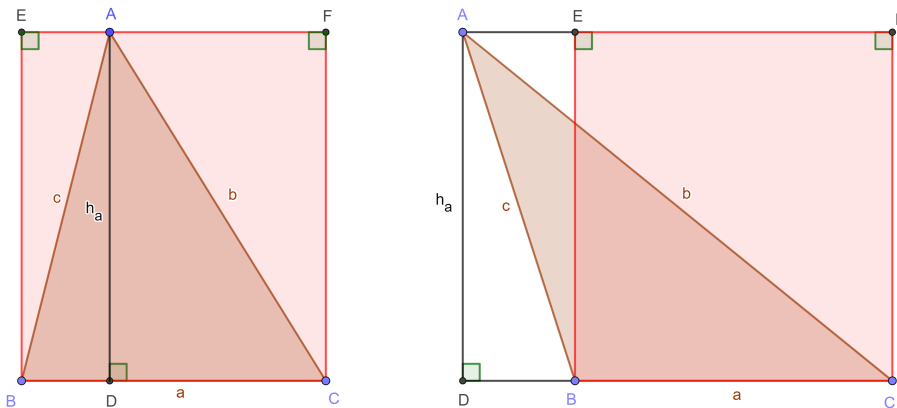
4.1 Fórmula tradicional para a área de triângulo

Utiliza-se a notação $[A_1A_2\cdots A_n]$ para denotar a área de um polígono de n lados.

Proposição 8. *Seja o $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e alturas h_a , h_b e h_c . Então vale que:*

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c.$$

Figura 4.1: Fórmula tradicional para o cálculo de área de triângulo. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

Demonstração. Seja o ponto D pé da altura do vértice A . Serão considerados dois casos: i) O ponto D está no interior do segmento BC (esquerda da Figura 4.1) e ii) O ponto D está no exterior do segmento BC (direita da Figura 4.1).

i) O ponto D está no interior do segmento BC (esquerda da Figura 4.1). Neste caso vale

que:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}[BDAE] - \frac{1}{2}[DCFA],$$

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}BD \cdot h_a - \frac{1}{2}(a - BD) \cdot h_a,$$

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot h_a.$$

ii) O ponto D está no exterior do segmento BC (direita da Figura 4.1). Suponha-se, sem perda de generalidade, que D esteja a esquerda do ponto B . Neste caso vale que:

$$[\triangle ABC] = [ADCF] - \frac{1}{2}[ADBE] - \frac{1}{2}[ADCF],$$

$$[\triangle ABC] = (DB + a)h_a - \frac{1}{2}DB \cdot h_a - \frac{1}{2}(a + DB) \cdot h_a,$$

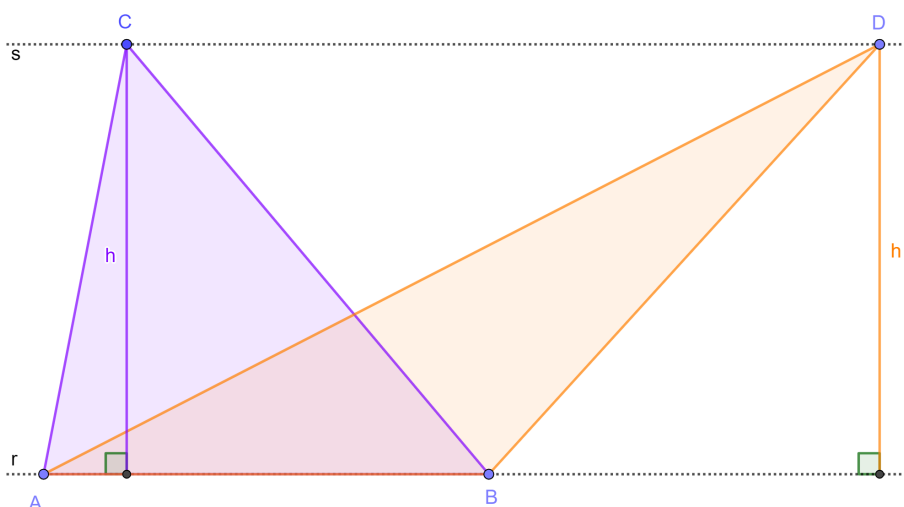
$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot h_a.$$

Analogamente demonstra-se a fórmula utilizando outro par de lado e altura correspondente. \square

Corolário 9. *Sejam r e s retas paralelas e A e B pontos distintos sobre a reta r e C e D pontos distintos sobre a reta s . Então,*

$$[\triangle ABC] = [\triangle ABD].$$

Figura 4.2: Triângulos de igual área entre retas paralelas. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

Demonstração. Como os dois triângulos têm a mesma medida da base e altura, pela Proposição 8, as áreas são iguais:


$$\frac{AB \cdot h}{2}.$$

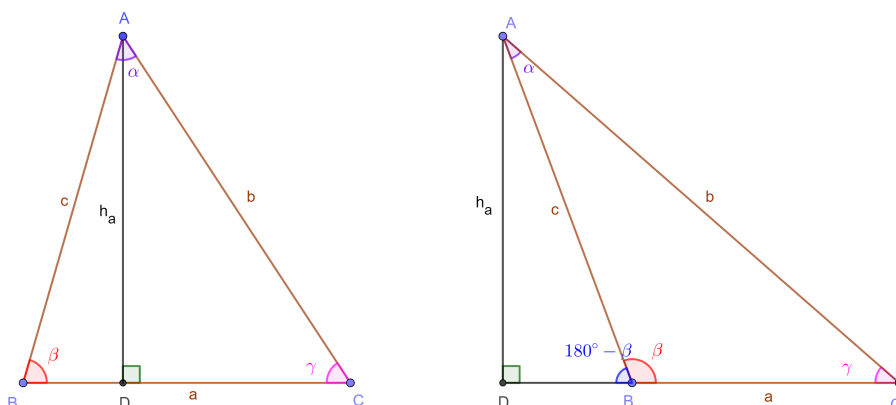
□

4.2 Área com dois lados e o ângulo que eles determinam

Proposição 10. *Seja o $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ e $\angle C = \gamma$. Então vale que:*

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \text{sen}(\beta) = \frac{1}{2}b \cdot a \cdot \text{sen}(\gamma) = \frac{1}{2}c \cdot b \cdot \text{sen}(\alpha).$$

Figura 4.3: Área de um triângulo com dois lados e o ângulo que eles determinam. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

Demonstração. Seja o ponto D pé da altura do vértice A . Serão considerados dois casos: i) O ponto D está no interior do segmento BC (esquerda da Figura 4.3) e ii) O ponto D está no exterior do segmento BC (direita da Figura 4.3).

i) O ponto D está no interior do segmento BC (esquerda da Figura 4.3). No $\triangle ADB$ vale que:

$$h_a = c \cdot \text{sen}(\beta).$$

Pela Proposição 8 tem-se:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot h_a.$$

Segue que:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \text{sen}(\beta).$$

ii) O ponto D está no exterior do segmento BC (direita da Figura 4.3). Suponha-se, sem perda de generalidade, que D esteja a esquerda do ponto B . No $\triangle ADB$ vale que:

$$h_a = c \cdot \text{sen}(180^\circ - \beta) = c \cdot \text{sen}(\beta).$$

Pela Proposição 8 tem-se:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot h_a$$

Segue que:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \text{sen}(\beta).$$

Analogamente demonstra-se a fórmula utilizando os outros pares de lados e ângulos correspondentes. \square

4.3 Área de um triângulo utilizando o incírculo

Definição 2 (Semiperímetro do $\triangle ABC$). O semiperímetro do $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ é denotado por p e calculado:

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

Proposição 11. Seja o $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e r o raio da circunferência inscrita neste (Figura 4.4). Então vale que:

$$[\triangle ABC] = p \cdot r.$$

Seguem duas demonstrações da Proposição 11.

Demonstração 1. Nota-se na Figura 4.4 que a área do $\triangle ABC$ pode ser calculada como a soma das áreas de outros três triângulos que utilizam, como um dos seus vértices, o incentro I :

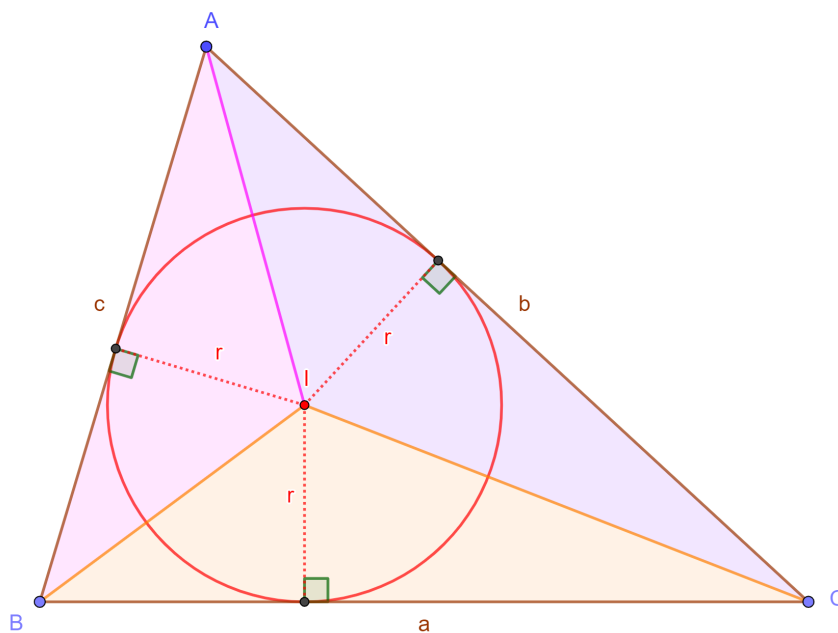
$$[\triangle ABC] = [\triangle BCI] + [\triangle CAI] + [\triangle ABI],$$

$$[\triangle ABC] = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2},$$

$$[\triangle ABC] = \left(\frac{a + b + c}{2} \right) \cdot r = p \cdot r.$$

□

Figura 4.4: Área de um triângulo utilizando o incírculo. Demonstração 1. Versão interativa



Fonte: Os autores.

Demonstração 2. Na Figura 4.5 sejam D , E e F as projeções ortogonais do incentro I nos lados AB , BC e CA , respectivamente. Como AI , BI e CI são bissetrizes, pelo critério de congruência ALA, obtêm-se:

$$\triangle ADI \equiv \triangle AFI,$$

$$\triangle BDI \equiv \triangle BEI,$$

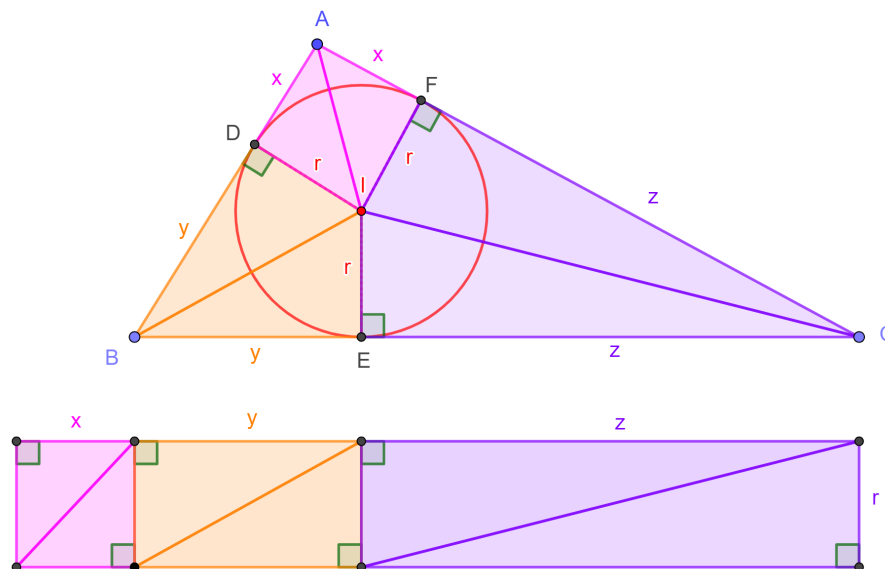
$$\triangle CEI \equiv \triangle CFI.$$

Isto permite definir $AD = AF = x$, $BD = BE = y$ e $CE = CF = z$. Nota-se que $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ e $p = x + y + z$. A área do $\triangle ABC$ pode ser calculada como a soma das áreas de outros três retângulos de altura r e comprimentos x , y e z :

$$[\triangle ABC] = x \cdot r + y \cdot r + z \cdot r = (x + y + z)r = p \cdot r.$$

□

Figura 4.5: Área de um triângulo utilizando o incírculo. Demonstração 2. Versão interativa



Fonte: Os autores.

4.4 Área de um triângulo utilizando o circuncírculo

Proposição 12. *Seja o $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$, $\angle B = \beta$ e R o raio da circunferência circunscrita k neste (Figura 4.6). Então vale que:*

$$[\triangle ABC] = \frac{abc}{4R}.$$

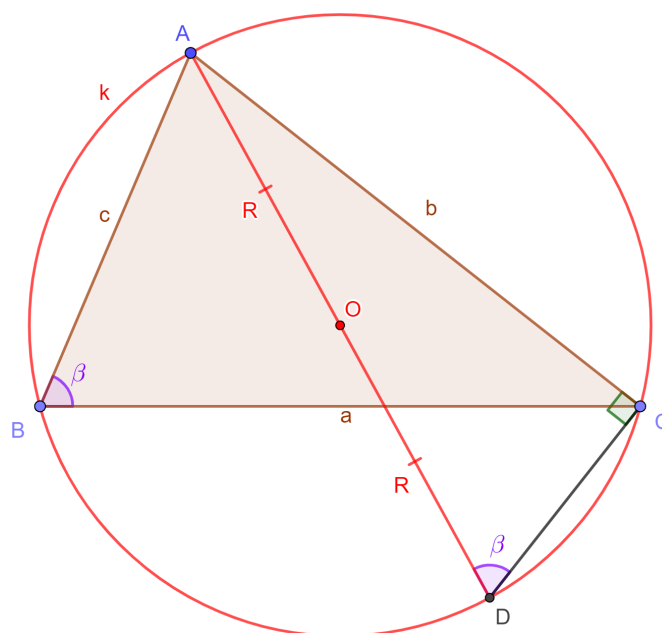
Demonstração. Sabe-se pela Proposição 10 que:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \text{sen}(\beta). \tag{4.4.1}$$

Estende-se a semirreta AO e marca-se o ponto D na interseção desta com k . Por enxergar o mesmo arco de circunferência vale que:

$$\angle ABC = \angle ADC = \beta.$$

Figura 4.6: Área de um triângulo utilizando o circuncírculo. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

Como o segmento AD é diâmetro de k o $\triangle ADC$ é retângulo no vértice C . Segue que:

$$\text{sen}(\beta) = \frac{b}{2R}. \quad (4.4.2)$$

Substituindo (4.4.2) em (4.4.1) encontra-se:

$$[\triangle ABC] = \frac{abc}{4R}.$$


□

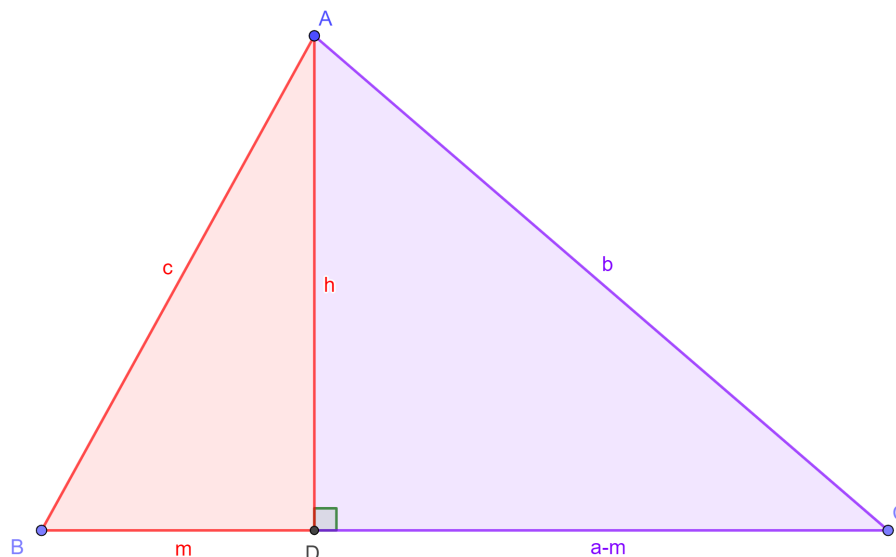
4.5 Fórmula de Heron

Heron de Alexandria foi um importante geômetra e pesquisador em mecânica que inventou muitas máquinas, incluindo uma turbina a vapor. Seu trabalho matemático mais conhecido é a fórmula para a área de um triângulo em termos dos comprimentos de seus lados. Nasceu aproximadamente no ano 10 d.C e morreu no ano 75 d.C [33].

Proposição 13. *Seja o $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e p o semiperímetro. Então vale que:*

$$[\triangle ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Figura 4.7: Área de um triângulo utilizando a fórmula de Heron. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

Demonstração. Sejam o ponto D e o segmento $BD = m$ as projeções ortogonais do ponto A e do lado AB sobre BC , respectivamente (Figura 4.7). Aplicando o Teorema de Pitágoras nos $\triangle ADB$ e $\triangle ADC$ encontra-se:

$$h^2 = c^2 - m^2, \quad (4.5.1)$$

$$h^2 = b^2 - (a - m)^2. \quad (4.5.2)$$

Igualando as equações (4.5.1) e (4.5.2) pode ser colocado m em evidência:

$$\begin{aligned} c^2 - m^2 &= b^2 - (a - m)^2, \\ c^2 - m^2 &= b^2 - a^2 + 2am - m^2, \\ m &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

A equação (4.5.3) é substituída em (4.5.1) e a expressão simplificada:

$$\begin{aligned} h^2 &= c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2, \\ 4a^2 h^2 &= 4a^2 c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2. \end{aligned}$$

Utilizando as propriedades da diferença de quadrados e do binômio quadrado perfeito encontra-se:

$$\begin{aligned} 4a^2h^2 &= (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2), \\ 4a^2h^2 &= ((a + c)^2 - b^2)(b^2 - (a - c)^2), \\ 4a^2h^2 &= (a + c + b)(a + c - b)(b - a + c)(b + a - c). \end{aligned} \quad (4.5.4)$$


Cada um dos parêntesis no lado direito de (4.5.4) pode ser escrito em função do semiperímetro p :

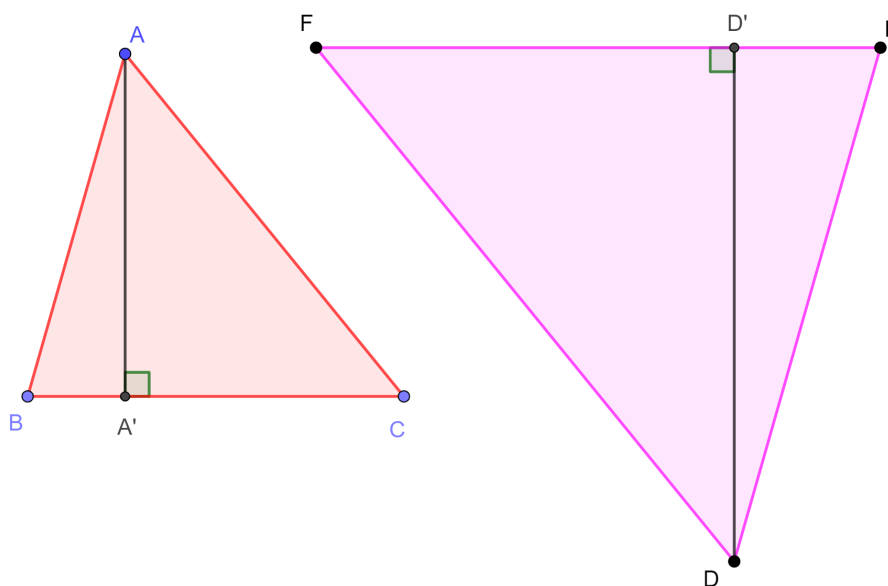
$$\begin{aligned} 4a^2h^2 &= 2p \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - a) \cdot 2(p - c), \\ \frac{a^2h^2}{4} &= p(p - b)(p - a)(p - c), \\ [\triangle ABC] &= \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. \end{aligned}$$

□

4.6 Relação entre as áreas de triângulos semelhantes

Proposição 14. *Se dois triângulos são semelhantes com razão de semelhança k , então a razão das áreas é k^2 .*

Figura 4.8: Relação entre as áreas de triângulos semelhantes. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

Demonstração. Por hipótese $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (Figura 4.8). Sejam os pontos A' e D' as projeções ortogonais dos pontos A e D sobre os lados BC e EF , respectivamente. Suponha-se, sem perda de generalidade, que:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AA'}{DD'} = k.$$

Segue que:

$$\frac{[\triangle ABC]}{[\triangle DEF]} = \frac{\frac{BC \cdot AA'}{2}}{\frac{EF \cdot DD'}{2}} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AA'}{DD'} = k^2.$$

□

O resultado anterior vale para figuras (não somente triângulos) semelhantes em geral.

4.7 Áreas para calcular razão de segmentos

Proposição 15. *Seja ABC um triângulo, P um ponto no interior deste e D , E e F os pontos de interseção das semirretas AP , BP e CP com os lados BC , CA e AB , respectivamente. Defina-se $K_A = [PBC]$, $K_B = [PCA]$ e $K_C = [PAB]$. Então*

1.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{K_C}{K_B}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{K_A}{K_C}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{K_B}{K_A}.$$

2.

$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A}, \quad \frac{BP}{PE} = \frac{K_A + K_C}{K_B}, \quad \frac{CP}{PF} = \frac{K_A + K_B}{K_C}.$$

Demonstração. Sejam A' e P' as projeções ortogonais dos pontos A e P sobre a reta BC (Figura 4.9).

1. Como os triângulos ABD e ACD têm a mesma altura AA' pode ser escrito:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[ABD]}{[ACD]}. \quad (4.7.1)$$


Analogamente, como os triângulos PBD e PCD têm a mesma altura PP' tem-se:

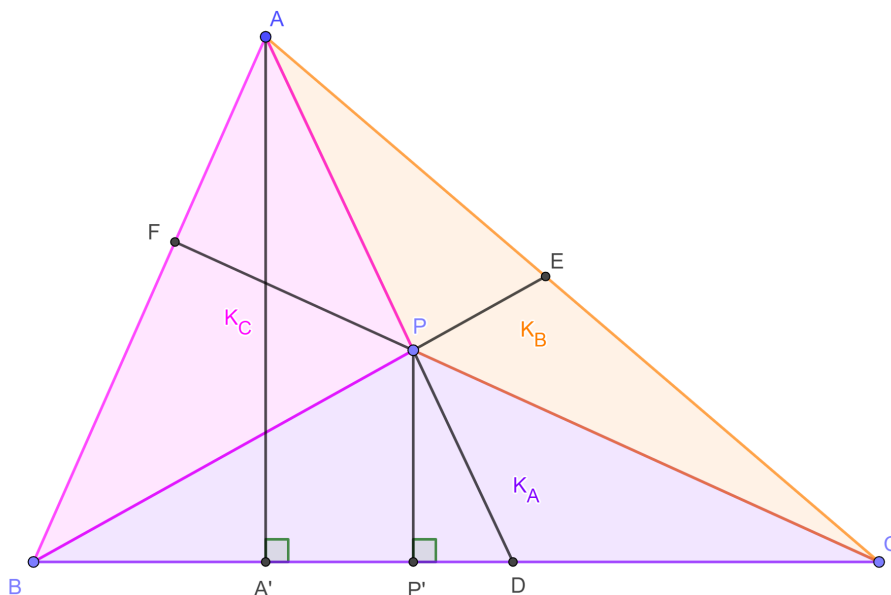
$$\frac{BD}{DC} = \frac{[PBD]}{[PCD]}. \quad (4.7.2)$$

Combinando as razões em (4.7.1) e (4.7.2) encontra-se:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[ABD] - [PBD]}{[ACD] - [PCD]} = \frac{K_C}{K_B}.$$

Similarmente demonstram-se as outras duas frações.

Figura 4.9: Áreas para calcular razão de segmentos. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

2. Pelo critério de semelhança AA vale que $\triangle ADA' \sim \triangle PDP'$. Segue que:

$$\frac{AP}{PD} + 1 = \frac{AP + PD}{PD} = \frac{AD}{PD} = \frac{AA'}{PP'}. \tag{4.7.3}$$

Por definição vale que $[ABC] = K_A + K_B + K_C$. Como os triângulos ABC e PBC têm a mesma base pode ser escrito:

$$\frac{AA'}{PP'} = \frac{[ABC]}{[PBC]} = \frac{K_A + K_B + K_C}{K_A} = 1 + \frac{K_B + K_C}{K_A}. \tag{4.7.4}$$

Substituindo (4.7.4) em (4.7.3) e simplificando encontra-se:

$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A}.$$

Da mesma maneira demonstram-se as outras duas frações.

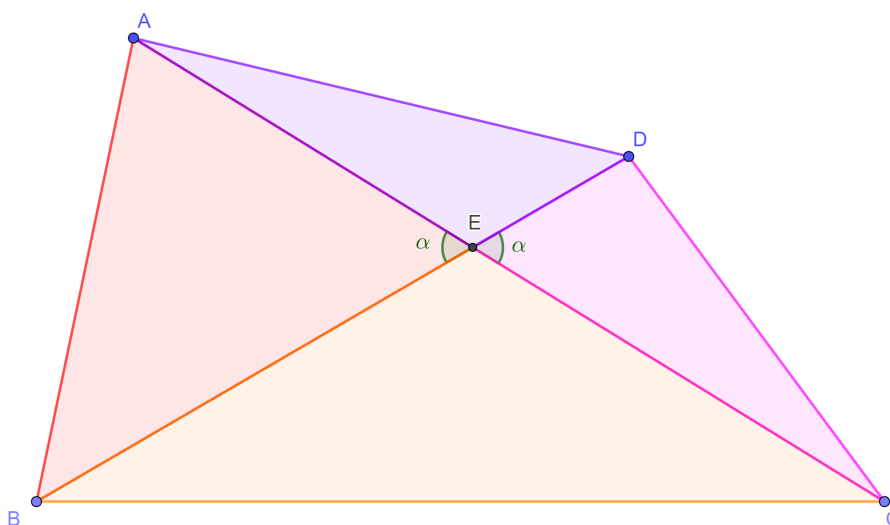
□

4.8 Área de quadrilátero convexo arbitrário

Proposição 16. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo arbitrário e α o ângulo entre as diagonais AC e BD (Figura 4.10). Então,*

$$[ABCD] = \frac{AC \cdot BD \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}.$$

Figura 4.10: Área de quadrilátero convexo arbitrário. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

Demonstração. Seja o ponto E a interseção entre as diagonais AC e BD (Figura 4.10). A área do quadrilátero pode ser calculada como a soma das áreas de quatro triângulos:

$$[ABCD] = [AEB] + [BEC] + [CED] + [DEA],$$

$$[ABCD] = \frac{AE \cdot EB \text{sen}(\alpha)}{2} + \frac{BE \cdot EC \text{sen}(180^\circ - \alpha)}{2} + \frac{CE \cdot ED \text{sen}(\alpha)}{2} + \frac{DE \cdot EA \text{sen}(180^\circ - \alpha)}{2}.$$

Como $\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(180^\circ - \alpha)$ a equação anterior simplifica-se:

$$[ABCD] = (AE \cdot EB + BE \cdot EC + CE \cdot ED + DE \cdot EA) \frac{\text{sen}(\alpha)}{2}.$$

Lembrando-se que $AE = EA$, $BE = EB$, $CE = EC$ e $DE = ED$ segue:

$$[ABCD] = (AE(EB + DE) + EC(BE + ED)) \frac{\text{sen}(\alpha)}{2},$$

$$[ABCD] = (AE + EC)(BE + ED) \frac{\text{sen}(\alpha)}{2},$$

$$[ABCD] = \frac{AC \cdot BD \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}.$$


□

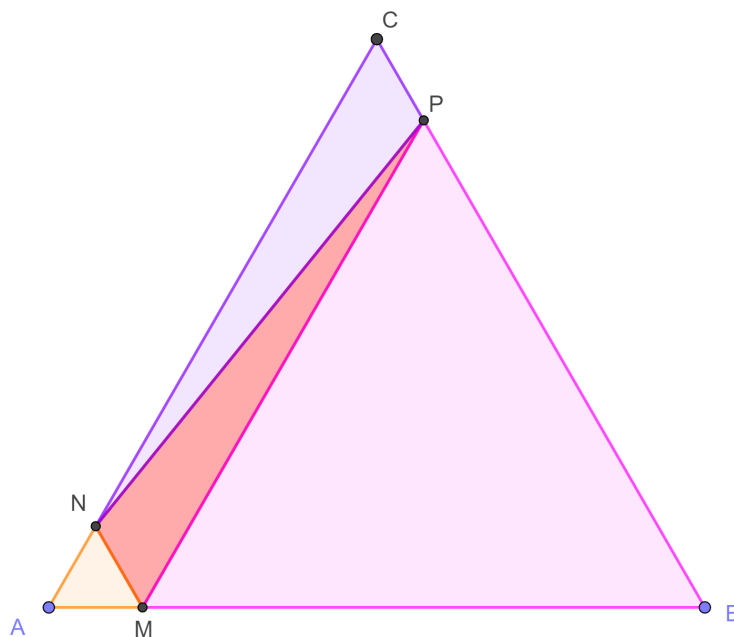
4.9 Áreas, semelhança e triângulos equiláteros

Exercício 1. *Sejam ABC um triângulo equilátero, N o ponto do lado AC tal que $AC = 7AN$, M o ponto do lado AB tal que MN é paralelo a BC e P o ponto do lado BC tal que MP é paralelo a AC . Determinar a razão das áreas $\frac{[MNP]}{[ABC]}$.*

4.9.1 Solução do Exercício 1

A Figura 4.11 mostra uma construção geométrica.

Figura 4.11: Áreas, semelhança e triângulos equiláteros. Exercício 1. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

O quadrilátero $CPMN$ é um paralelogramo, pois $MP \parallel AC$ e $MN \parallel BC$. Logo,

$$[MNP] = \frac{1}{2}[CPMN].$$

Como o $\triangle ABC$ é equilátero e $MN \parallel BC$, então $AN = AM = MN$. Segue que $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ e:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{1}{7}.$$

Pela Proposição 14 tem-se:

$$\frac{[AMN]}{[ABC]} = \left(\frac{1}{7}\right)^2.$$

Analogamente, como o $\triangle ABC$ é equilátero e $MP \parallel AC$, então $MB = BP = PM$. Segue que $\triangle MBP \sim \triangle ABC$ e:

$$\frac{MB}{AB} = \frac{6}{7}.$$

Pela Proposição 14 tem-se:

$$\frac{[MBP]}{[ABC]} = \left(\frac{6}{7}\right)^2.$$

Mas $2[MNP] = [ABC] - [AMN] - [MBP]$. Logo,

$$\frac{[MNP]}{[ABC]} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{49} - \frac{36}{49}\right) = \frac{6}{49}.$$

Capítulo 5

Teoremas de Menelaus, Pascal e Ceva

Alguns bons trabalhos abordaram estes teoremas anteriormente e foram o ponto de partida para este capítulo: [38], [36] e [7].

5.1 Teorema de Menelaus

Pelos registros históricos acredita-se que Menelaus de Alexandria, nasceu em 70 d.C., no norte do Egito. Morreu perto do ano 130 d.C. Entre outras coisas fez importantes contribuições na geometria de triângulos esféricos, segundo relatou Ptolomeu anos mais tarde [28].

O Teorema a seguir lida com critérios necessários e suficientes para que três pontos sejam colineares.

Teorema 17 (Menelaus). *Sejam ABC um triângulo e X, Y e Z pontos (diferentes de A, B e C) sobre as retas BC, CA e AB , respectivamente. Então os pontos X, Y e Z são colineares se, e somente se,*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1. \quad (5.1.1)$$

Na versão interativa da Figura 5.1 é possível deslocar os pontos sobre as retas BC, CA e AB , e verificar a validade ou não da equação (5.1.1).


Demonstração. (Ida) Inicialmente suponha-se que os pontos X, Y e Z são colineares (Figura 5.2). Sejam AP, BQ e CR as perpendiculares traçadas a partir de A, B e C , respectivamente, à reta XZ .

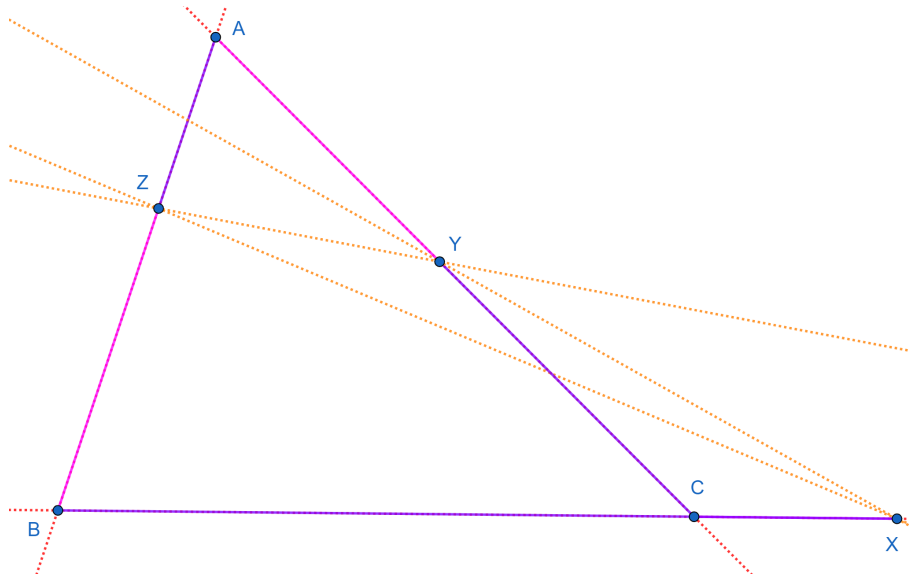
Os pares de triângulos retângulos BQX e CRX , APY e CRY e APZ e BQZ , são semelhantes pelo critério AA. Então,

$$\frac{BX}{CX} = \frac{BQ}{CR}, \quad \frac{CY}{AY} = \frac{CR}{AP}, \quad \text{e} \quad \frac{AZ}{BZ} = \frac{AP}{BQ}.$$


Segue que:

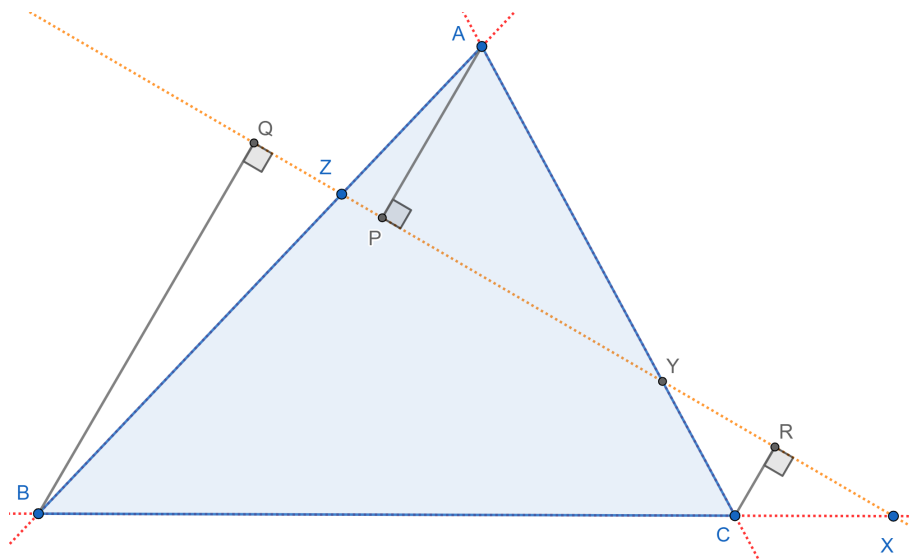
$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{BQ}{CR} \cdot \frac{CR}{AP} \cdot \frac{AP}{BQ} = 1.$$

Figura 5.1: Teorema de Menelaus. Caso em que os pontos X, Y e Z não são colineares. Versão interativa . É possível deslocar os pontos sobre as retas e verificar a validade ou não de (5.1.1).




Fonte: Os autores.

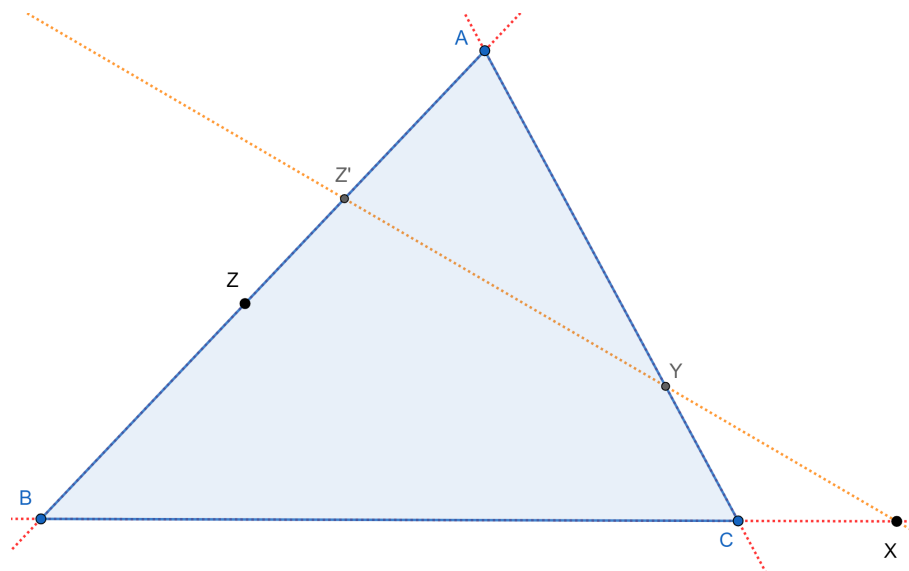
Figura 5.2: Ida do Teorema de Menelaus. Por hipótese os pontos X, Y e Z são colineares. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

(Volta) Agora suponha-se, por absurdo, que os pontos X , Y e Z não são colineares, mas vale a equação (5.1.1). Seja o ponto $Z' = XY \cap AB$ (Figura 5.3).

Figura 5.3: Volta do Teorema de Menelaus. Por hipótese vale a equação (5.1.1). Versão interativa .



Fonte: Os autores.

Pela ida do Teorema de Menelaus vale que:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = 1.$$

Logo, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} &= \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB}, \\ \frac{AZ'}{Z'B} &= \frac{AZ}{ZB}. \end{aligned}$$

Como Z e Z' pertencem a reta AB o resultado anterior é uma contradição. Ou seja, $Z = Z'$. \square


No caso em que mais de um dos pontos X , Y e Z pertencem aos prologamentos dos lados do triângulo ABC , o teorema anterior ainda é válido.

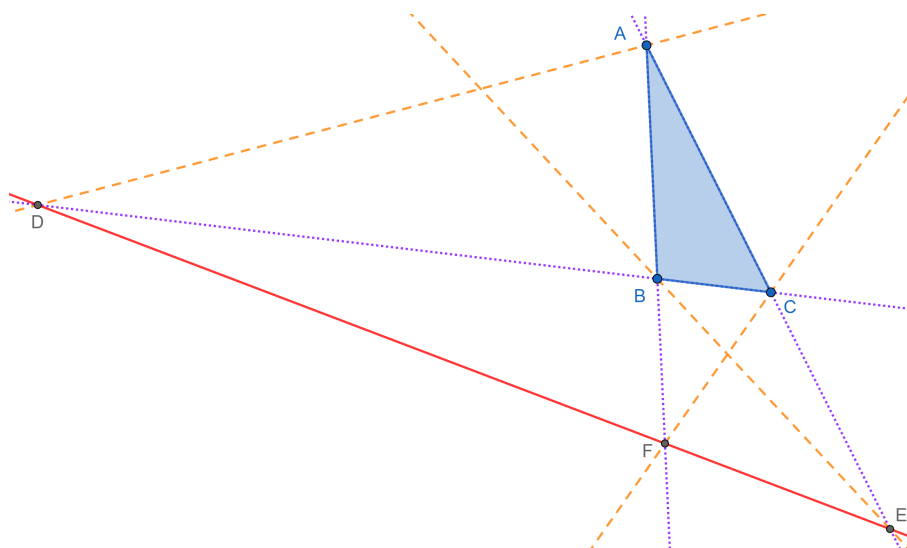
A próxima subseção mostra uma aplicação direta da recíproca do Teorema de Menelaus, apresentada na forma de exercício, para as bissetrizes externas de um triângulo qualquer.

5.1.1 Colinearidade dos pontos de interseção das bissetrizes externas com os lados

Exercício 2. *Seja um triângulo não isósceles ABC e D , E e F os pontos de interseção das bissetrizes externas dos ângulos nos vértices A , B e C com os lados BC , CA e AB , respectivamente. Provar que D , E e F são colineares.*

5.1.1.1 Resolução

Figura 5.4: Colinearidade dos pontos de interseção das bissetrizes externas com os lados. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

A Figura 5.4 permite acompanhar a discussão. AD é uma bissetriz externa no vértice A do triângulo ABC . Pelo Teorema da bissetriz externa tem-se:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Similarmente, BE é uma bissetriz externa no vértice B do triângulo ABC . Pelo Teorema da bissetriz externa segue:

$$\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB}.$$

Analogamente, CF é uma bissetriz externa no vértice C do triângulo ABC . Pelo Teorema da bissetriz externa encontra-se:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC}.$$

Multiplicando as três equações anteriores conclui-se:


$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

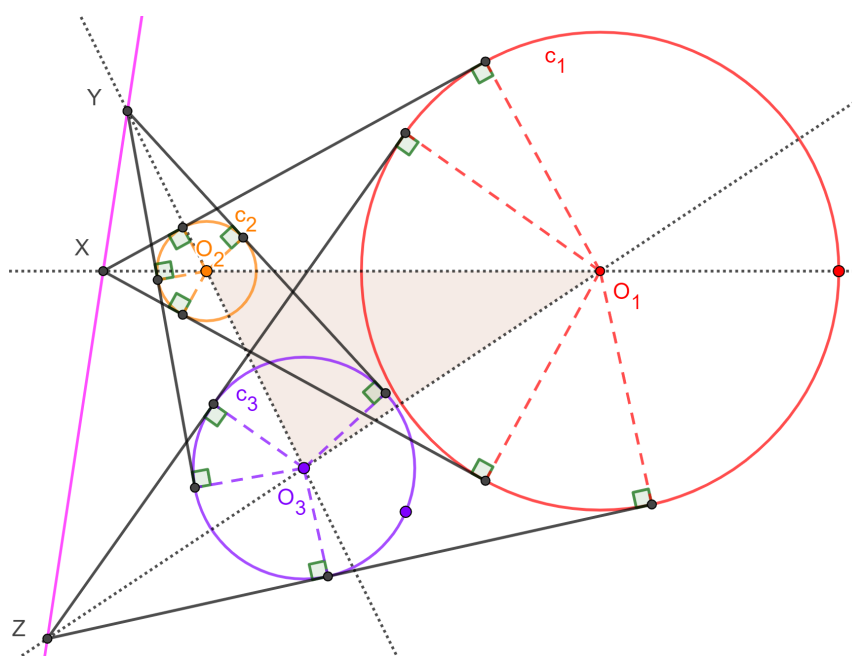
Pela recíproca do Teorema 17 (Menelaus), aplicado ao $\triangle ABC$, os pontos $D \in BC$, $E \in AC$ e $F \in AB$ são colineares.

5.2 Teorema de Monge

Gaspard Monge foi um matemático francês. Atualmente é considerado o pai da geometria diferencial, pois introduziu o conceito de linhas de curvatura de uma superfície. Nasceu em 1746 e morreu em 1818 [31].

Teorema 18 (Monge). *Sejam dadas três circunferências disjuntas $c_1(O_1, r_1)$, $c_2(O_2, r_2)$ e $c_3(O_3, r_3)$. Sejam X , Y e Z as interseções das tangentes comuns externas de c_1 e c_2 , c_2 e c_3 , e c_3 e c_1 , respectivamente. Então os pontos X , Y e Z são colineares (Figura 5.5).*

Figura 5.5: Teorema de Monge. Versão interativa . É possível mudar os centros e raios das circunferências e verificar a colinearidade de X , Y e Z .



Fonte: Os autores.

Demonstração. Como X é o centro de homotetia externo das circunferências c_1 e c_2 vale que:

$$\frac{O_1X}{O_2X} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Analogamente para os pontos Y e Z . Isto é,

$$\frac{O_2Y}{O_3Y} = \frac{r_2}{r_3},$$

$$\frac{O_3Z}{O_1Z} = \frac{r_3}{r_1}.$$

Segue que:

$$\frac{O_1X}{O_2X} \cdot \frac{O_2Y}{O_3Y} \cdot \frac{O_3Z}{O_1Z} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_1} = 1.$$

Pela recíproca do Teorema 17 (Menelaus), aplicado ao $\triangle O_1O_2O_3$, os pontos $X \in O_1O_2$, $Y \in O_2O_3$ e $Z \in O_3O_1$ são colineares. \square

A restrição de circunferências disjuntas pode ser relaxada. Para existirem as tangentes externas comuns basta que uma das circunferências não fique completamente no interior da outra. Neste caso o Teorema 18 (Monge) continua sendo válido.

No caso em que duas circunferências tenham o mesmo raio suas tangentes externas comuns interceptam-se no infinito e formalmente o Teorema 18 (Monge) pode ser considerado como válido.

5.3 Teoremas de Pascal


Blaise Pascal foi um matemático e filósofo francês muito influente que contribuiu para variadas áreas da Matemática e Física. Trabalhou em seções cônicas e geometria projetiva e, em correspondência com Fermat, lançou as bases para a teoria das probabilidades. Nasceu em 1623 e morreu em 1662 [30].

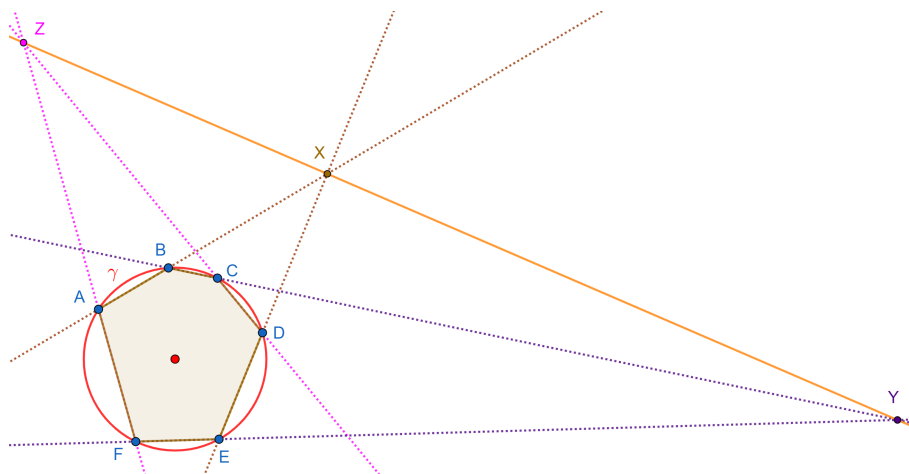
Teorema 19 (Pascal). *Se A, B, C, D, E e F são pontos distintos sobre uma circunferência γ , então os pontos $X = AB \cap DE$, $Y = BC \cap EF$ e $Z = CD \cap FA$ são colineares.*

Na versão interativa da Figura 5.6 é possível deslocar os pontos sobre uma circunferência γ e verificar a colinearidade de X, Y e Z . O hexágono $ABCDEF$ não precisa ser convexo.


Demonstração. Sejam os pontos $M = CD \cap EF$, $N = AB \cap CD$ e $O = AB \cap EF$ (Figura 5.7). Como os pontos X, Y e Z pertencem aos prolongamentos dos lados do $\triangle MNO$ quer-se mostrar que:

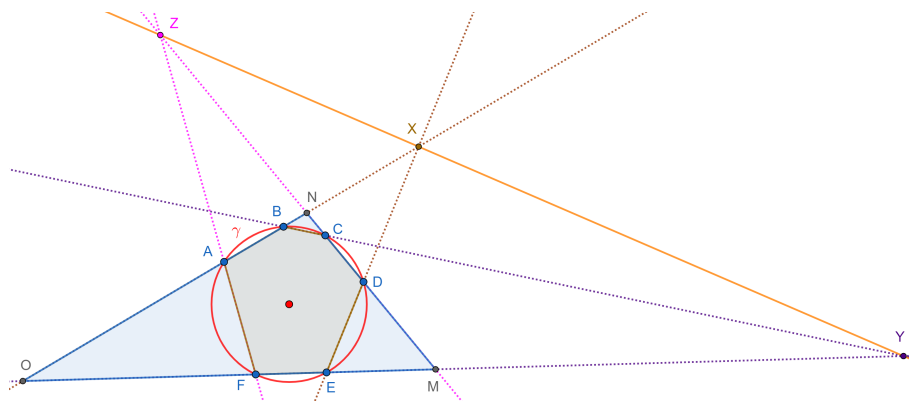
$$\frac{MZ}{ZN} \cdot \frac{NX}{XO} \cdot \frac{OY}{YM} = 1.$$

Figura 5.6: Teorema de Pascal. Versão interativa . É possível deslocar os pontos sobre γ e verificar a colinearidade de X, Y e Z . O hexágono $ABCDEF$ não precisa ser convexo.



Fonte: Os autores.

Figura 5.7: Demonstração do Teorema de Pascal. Versão interativa . É possível deslocar os pontos sobre γ e verificar a colinearidade de X, Y e Z . O hexágono $ABCDEF$ não precisa ser convexo.



Fonte: Os autores.

Nesse caso, pelo Teorema 17 (Menelaus), os pontos X, Y e Z são colineares.

Para tal aplica-se três vezes o Teorema 17 (Menelaus) ao $\triangle MNO$ e os pontos colineares:

$$X, D, E \rightarrow \frac{MD}{DN} \frac{NX}{XO} \frac{OE}{EM} = 1,$$

$$Y, C, B \rightarrow \frac{MC}{CN} \frac{NB}{BO} \frac{OY}{YM} = 1,$$

$$Z, A, F \rightarrow \frac{MZ}{ZN} \frac{NA}{AO} \frac{OF}{FM} = 1.$$

Multiplicam-se as três equações anteriores e agrupam-se as frações:

$$\left(\frac{MZ}{ZN} \frac{NX}{XO} \frac{OY}{YM}\right) \left(\frac{MD}{DN} \frac{OE}{EM} \frac{MC}{CN} \frac{NB}{BO} \frac{NA}{AO} \frac{OF}{FM}\right) = 1.$$

A potência dos pontos M , N e O relativos a γ pode ser escrita de duas formas equivalentes em cada caso. Isso justifica reescrever o segundo parenteses na equação anterior:


$$\left(\frac{MZ}{ZN} \frac{NX}{XO} \frac{OY}{YM}\right) \left(\frac{MC \cdot MD}{ME \cdot MF}\right) \left(\frac{NA \cdot NB}{NC \cdot ND}\right) \left(\frac{OE \cdot OF}{OA \cdot OB}\right) = 1.$$

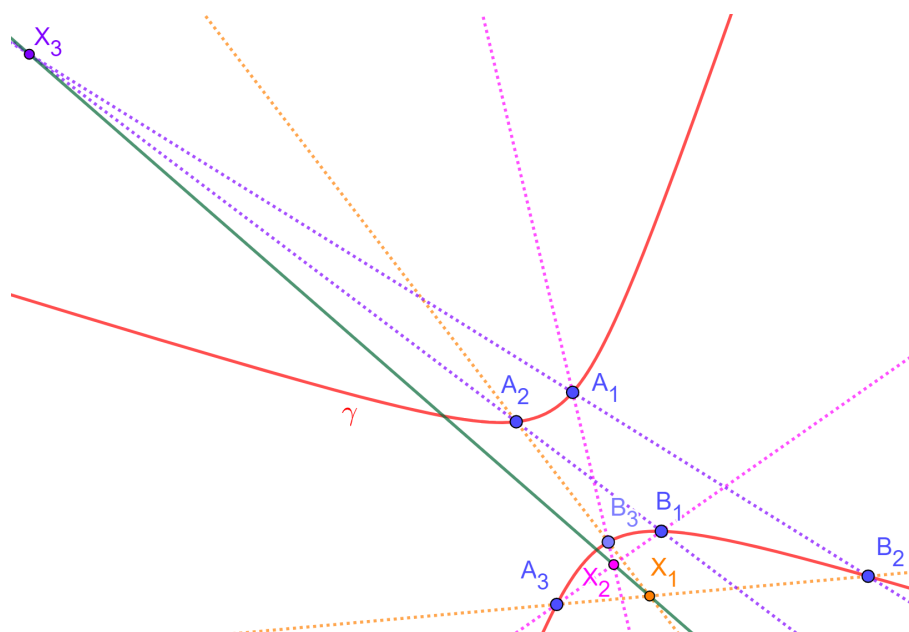
Como os três últimos parêntesis são todos iguais a um, o teorema fica provado. □

O Teorema de Pascal pode ser enunciado de uma forma mais ampla, valendo para seis pontos distintos sobre uma cônica qualquer.

Teorema 20 (Pascal para cônicas). *Se A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 e B_3 são pontos distintos sobre uma cônica γ , então os pontos $X_1 = A_2B_3 \cap A_3B_2$, $X_2 = A_1B_3 \cap A_3B_1$ e $X_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1$ são colineares.*

Na versão interativa da Figura 5.8 é possível deslocar os pontos. Os cinco primeiros determinam o tipo de cônica γ , $B_3 \in \gamma$.

Figura 5.8: Teorema de Pascal para Cônicas. Versão interativa . É possível deslocar os pontos. Os cinco primeiros determinam o tipo de cônica γ , $B_3 \in \gamma$.



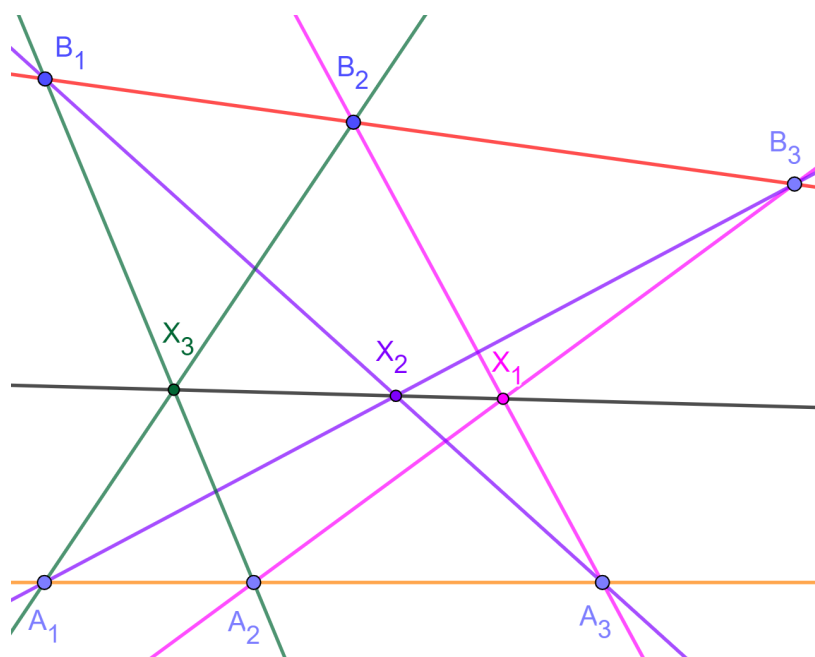
Fonte: Os autores.

O caso especial quando γ consiste de duas retas é chamado Teorema de Pappus.

Teorema 21 (Pappus). *Se $A_1, A_2, e A_3, e B_1, B_2 e B_3$ são pontos distintos sobre duas retas, então os pontos $X_1 = A_2B_3 \cap A_3B_2, X_2 = A_1B_3 \cap A_3B_1$ e $X_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1$ são colineares.*

Na versão interativa da Figura 5.9 é possível deslocar os pontos.

Figura 5.9: Teorema de Pappus. Versão interativa . É possível deslocar os pontos.



Fonte: Os autores.

5.4 Teorema de Ceva

Giovanni Benedetto Ceva nasceu em 1647 e morreu em 1734 na Itália. Ceva publicou *Opuscula mathematica* em 1682. Nela investiga questões de geometria pura, bem como aplicações da matemática, particularmente à hidrodinâmica. Em *Geometria motus, opusculum geometricum in gratiam aquarum excogitatum* (1692), até certo ponto, antecipou o cálculo infinitesimal. Também foi um dos primeiros a escrever sobre economia matemática. Ceva redescobriu o Teorema de Menelaus e o utilizou para provar o análogo que ficou conhecido com seu nome [29].


Definição 3 (Cevianas). *Dado um triângulo é denominada ceviana a qualquer segmento de reta que liga um dos vértices a um ponto do lado oposto a esse vértice ou ao prolongamento desse lado.*

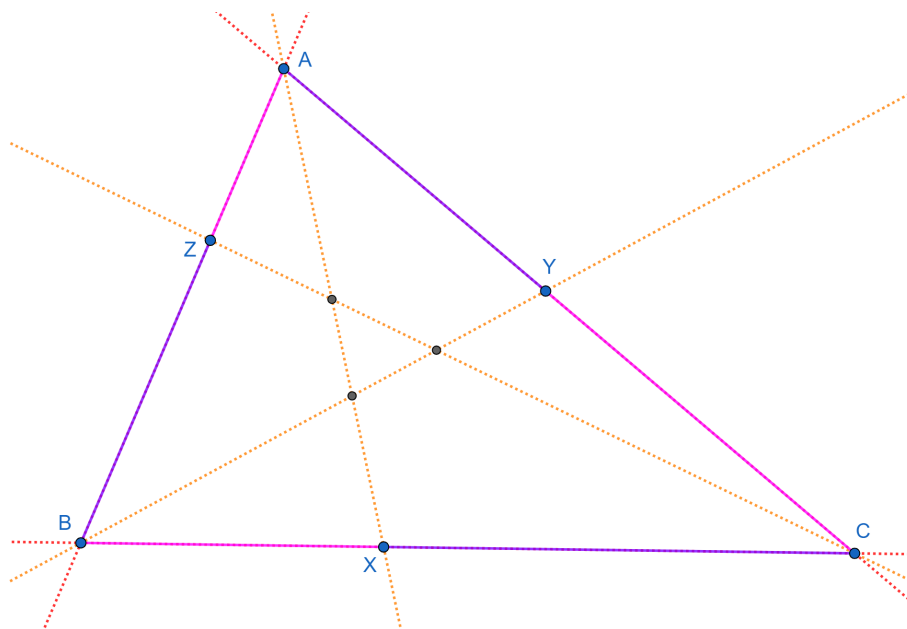
O Teorema a seguir lida com critérios necessários e suficientes para que três cevianas sejam concorrentes.

Teorema 22 (Ceva). *Sejam ABC um triângulo e X, Y e Z pontos (diferentes de A, B e C) sobre as retas BC, CA e AB , respectivamente. Então as retas AX, BY e CZ são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1. \quad (5.4.1)$$

A Figura 5.10 mostra o caso de cevianas não concorrentes. Na versão interativa é possível deslocar os pontos e verificar a validade ou não da equação (5.4.1).

Figura 5.10: Teorema de Ceva. Cevianas não concorrentes. Versão interativa . É possível deslocar os pontos e verificar a validade ou não de (5.4.1).



Fonte: Os autores.

Demonstração 1. (Ida) Inicialmente suponha-se que as retas AX, BY e CZ são concorrentes num ponto P interior ao $\triangle ABC$ (Figura 5.11).

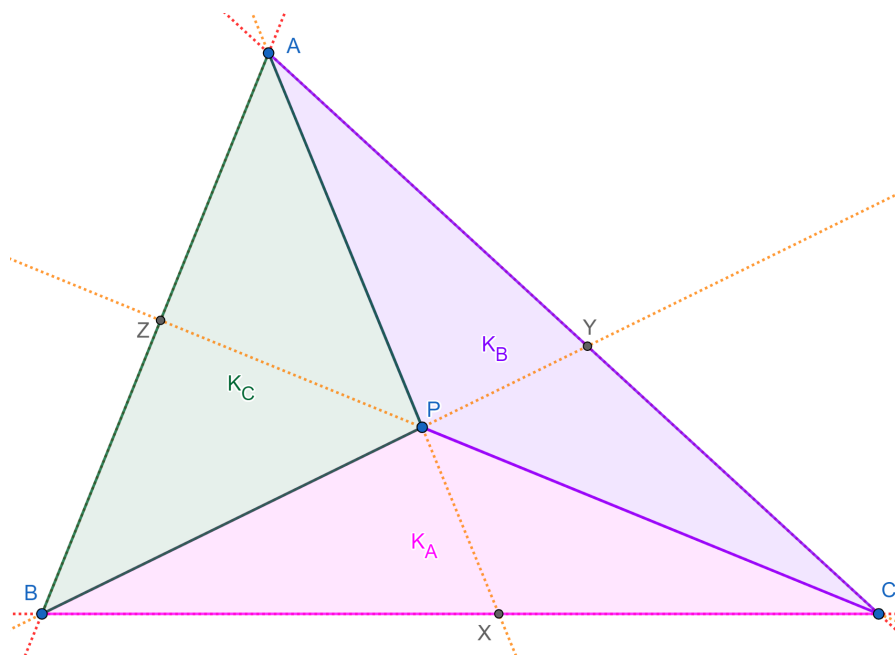
Define-se $K_A = [PBC]$, $K_B = [PCA]$ e $K_C = [PAB]$. Pela Proposição 15 vale que:

$$\frac{BX}{XC} = \frac{K_C}{K_B}, \quad \frac{CY}{YA} = \frac{K_A}{K_C}, \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{K_B}{K_A}.$$

Segue que:


$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{K_C}{K_B} \cdot \frac{K_A}{K_C} \cdot \frac{K_B}{K_A} = 1.$$

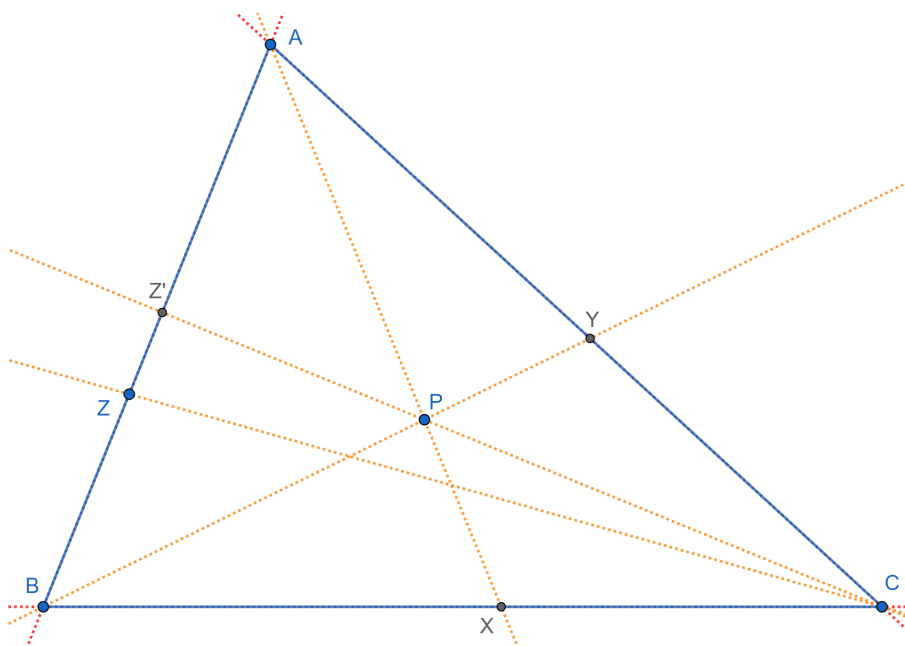
Figura 5.11: Ida do Teorema de Ceva. Cevianas concorrentes em P . Versão interativa  .



Fonte: Os autores.

(Volta) Agora suponha-se, por absurdo, que as retas AX , BY e CZ não são concorrentes, mas vale a equação (5.4.1). Sejam os pontos $P = AX \cap BY$ e $Z' = CP \cap AB$ (Figura 5.12).

Figura 5.12: Volta do Teorema de Ceva. Versão interativa  .



Fonte: Os autores.

Pela ida do Teorema de Ceva vale que:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = 1.$$

Tem-se:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB},$$

$$\frac{AZ'}{Z'B} = \frac{AZ}{ZB}.$$

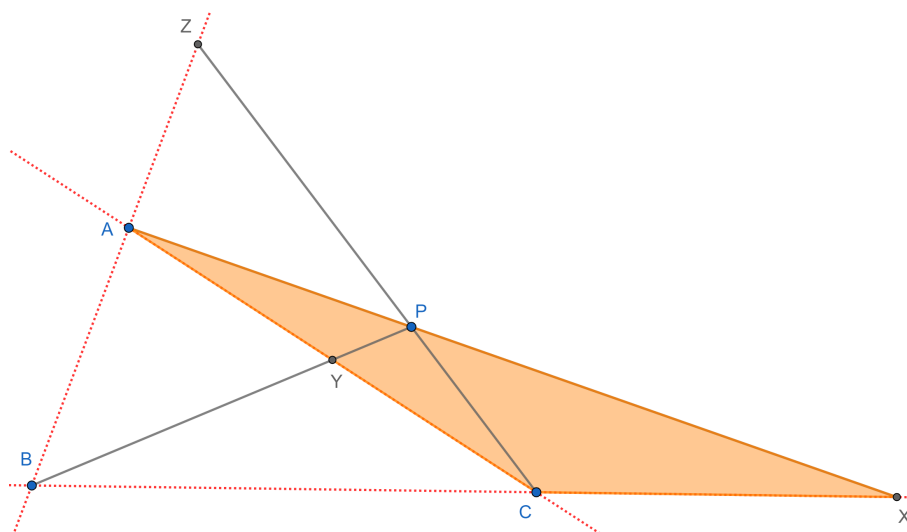
Como Z e Z' pertencem ao segmento AB o resultado anterior é uma contradição. Ou seja, $Z = Z'$. \square

A segunda demonstração utiliza o Teorema 17 (Menelaus).

Demonstração 2. (Ida) Suponha-se que as retas AX , BY e CZ são concorrentes num ponto P . Primeiro, considera-se o $\triangle AXC$ e os pontos colineares $B \in CX$, $Y \in AC$ e $P \in AX$ (Figura 5.13). Pelo Teorema 17 (Menelaus) vale que:

$$\frac{AY}{YC} \frac{CB}{BX} \frac{XP}{PA} = 1.$$

Figura 5.13: Segunda demonstração da ida do Teorema de Ceva. Aplica-se o Teorema 17 (Menelaus) ao $\triangle AXC$ e aos pontos colineares $B \in CX$, $Y \in AC$ e $P \in AX$. Versão interativa



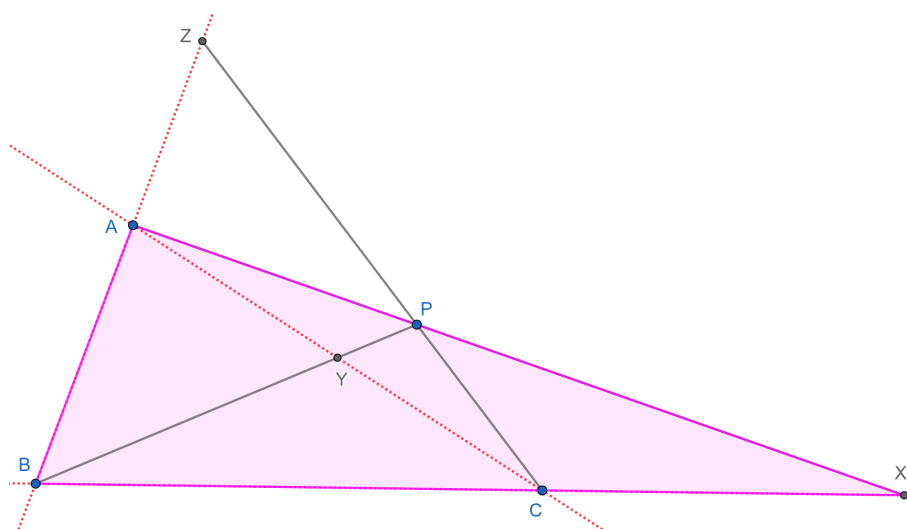
Fonte: Os autores.

Segundo, considera-se o $\triangle ABX$ e os pontos colineares $C \in BX$, $P \in AX$ e $Z \in AB$

(Figura 5.14). Pelo Teorema 17 (Menelaus) vale que:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BC}{CX} \cdot \frac{XP}{PA} = 1.$$

Figura 5.14: Segunda demonstração da ida do Teorema de Ceva. Aplica-se o Teorema 17 (Menelaus) ao $\triangle ABX$ e os pontos colineares $C \in BX$, $P \in AX$ e $Z \in AB$. Versão interativa



Fonte: Os autores.

Igualando e simplificando as duas equações anteriores segue que:

$$\frac{AY}{YC \cdot BX} = \frac{AZ}{ZB \cdot CX},$$


$$\frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} = 1.$$

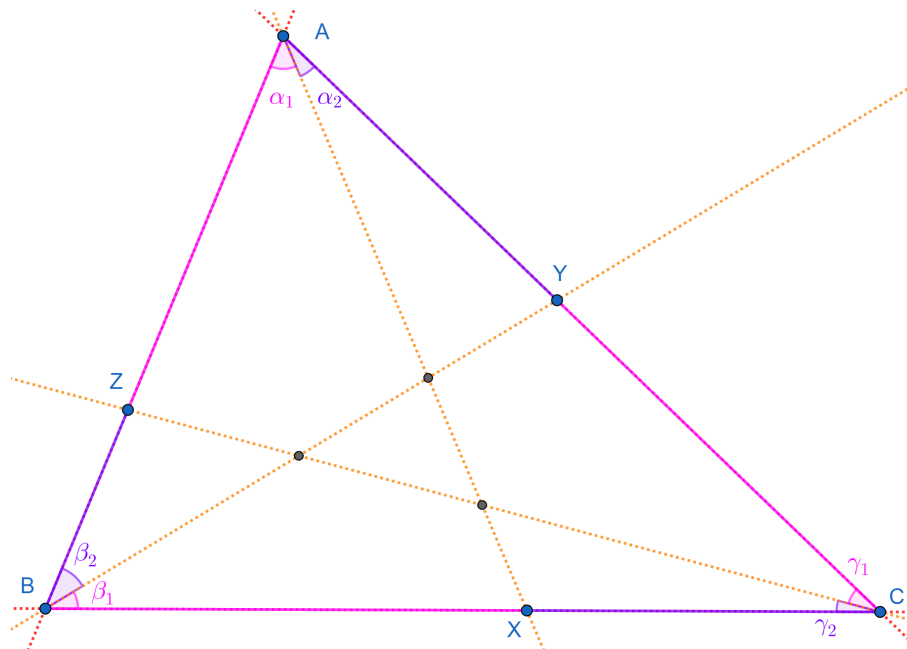
(Volta) Análoga a feita na demonstração 1. □

Teorema 23 (Forma trigonométrica de Ceva). *Sejam ABC um triângulo e X, Y e Z pontos (diferentes de A, B e C) sobre as retas BC, CA e AB , respectivamente. Então as retas AX, BY e CZ são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{\text{sen}(\angle BAX)}{\text{sen}(\angle XAC)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle CBY)}{\text{sen}(\angle YBA)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle ACZ)}{\text{sen}(\angle ZCB)} = 1. \tag{5.4.2}$$

A Figura 5.15 mostra o caso de cevianas não concorrentes. Na versão interativa é possível deslocar os pontos e verificar a validade ou não da equação (5.4.2).

Figura 5.15: Forma trigonométrica do Teorema de Ceva. Cevianas não concorrentes. Versão interativa . É possível deslocar os pontos e verificar a validade ou não de (5.4.2).



Fonte: Os autores.

Demonstração. A Figura 5.16 mostra o caso de cevianas concorrentes no ponto P interior ao $\triangle ABC$.

Pelo Teorema 22 (Ceva), as cevianas AX , BY e CZ são concorrentes se, e somente se,

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

O resultado anterior, pela Proposição 15, é equivalente a:


$$\frac{[APB]}{[APC]} \cdot \frac{[BPC]}{[BPA]} \cdot \frac{[CPA]}{[CPB]} = 1.$$

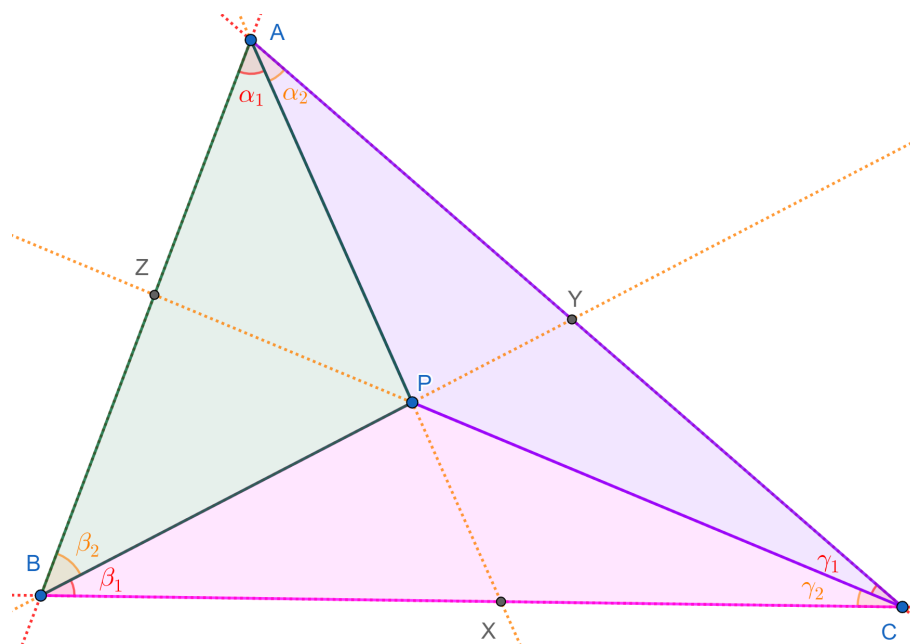
Cada uma das áreas é calculada pela fórmula trigonométrica (Proposição 10):

$$\frac{AP \cdot AB \cdot \text{sen}(\angle BAX)}{AP \cdot AC \cdot \text{sen}(\angle XAC)} \cdot \frac{BP \cdot BC \cdot \text{sen}(\angle CBY)}{BP \cdot AB \cdot \text{sen}(\angle YBA)} \cdot \frac{CP \cdot AC \cdot \text{sen}(\angle ACZ)}{CP \cdot BC \cdot \text{sen}(\angle ZCB)} = 1.$$

Simplificando conclui-se:

$$\frac{\text{sen}(\angle BAX)}{\text{sen}(\angle XAC)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle CBY)}{\text{sen}(\angle YBA)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle ACZ)}{\text{sen}(\angle ZCB)} = 1.$$

Figura 5.16: Forma trigonométrica do Teorema de Ceva. Cevianas concorrentes no ponto P interior ao $\triangle ABC$. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

□

Corolário 24. Com referência a Figura 5.16, sejam $\angle BAX = \alpha_1$, $\angle XAC = \alpha_2$, $\angle CBY = \beta_1$, $\angle YBA = \beta_2$, $\angle ACZ = \gamma_1$ e $\angle ZCB = \gamma_2$. A fórmula trigonométrica do Teorema de Ceva se, e somente se, as cevianas são concorrentes pode ser reescrita como:

$$\operatorname{sen}(\alpha_1) \operatorname{sen}(\beta_1) \operatorname{sen}(\gamma_1) = \operatorname{sen}(\alpha_2) \operatorname{sen}(\beta_2) \operatorname{sen}(\gamma_2).$$

5.4.1 Ponto de Gergonne

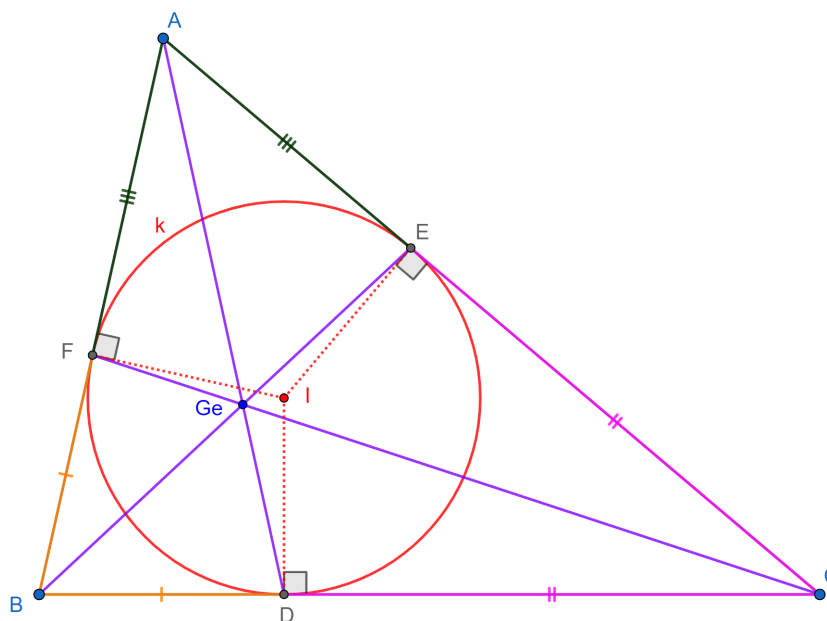
Joseph Diaz Gergonne nasceu em 1771 e morreu em 1859 na França. Encontrando problemas para publicar seus trabalhos de matemática, Gergonne estabeleceu seu próprio jornal, a primeira parte aparecendo em 1810. Os interesses matemáticos de Gergonne estavam na geometria, então não é de surpreender que tenha sido esse tópico que apareceu com mais destaque em seu diário. De fato, muitos matemáticos famosos publicaram nos vinte e um volumes dos "Annales de Gergonne" que apareceram durante um período de vinte e dois anos [34].

Exercício 3. Sejam D , E e F os pontos de contato da circunferência inscrita k com os lados BC , CA e AB , respectivamente, do triângulo ABC . Provar que AD , BE e CF são concorrentes em um ponto, chamado de Gergonne.

O ponto de Gergonne é o $X(7)$ na lista de centros de triângulos de Clark Kimberling [6]. Para a construção rápida no GeoGebra, relativa ao $\triangle ABC$, do ponto de Gergonne, pode ser utilizado o comando:

$$\text{CentroDoTriângulo}(A, B, C, 7).$$

Figura 5.17: Ponto de Gergonne. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

5.4.1.1 Resolução

A Figura 5.17 permite acompanhar a discussão. Como os pares de segmentos FB e BD , DC e CE e EA e AF , são tangentes a k obtêm-se:

$$\frac{FB}{BD} = 1,$$

$$\frac{DC}{CE} = 1,$$

$$\frac{EA}{AF} = 1.$$

Multiplicando as equações anteriores segue:


$$\frac{FB}{BD} \cdot \frac{DC}{CE} \cdot \frac{EA}{AF} = 1.$$

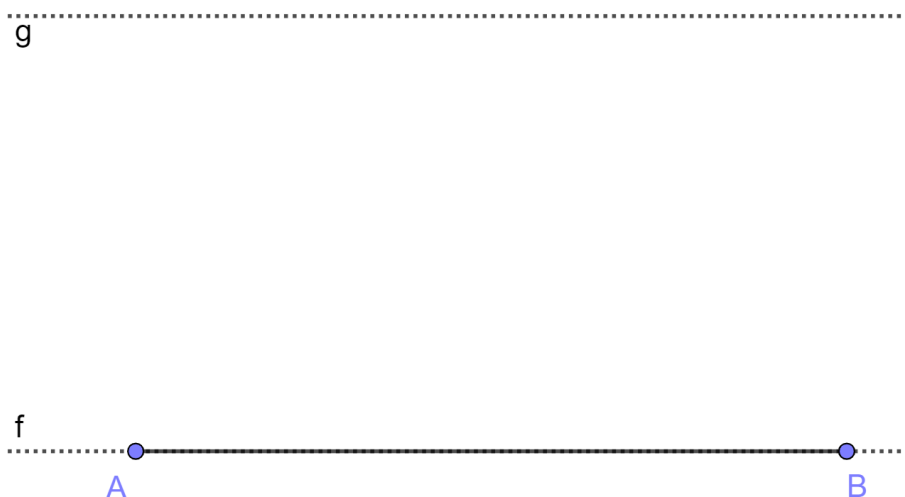
Pela recíproca do Teorema 22 (Ceva) no $\triangle ABC$, encontra-se que as cevianas AD , BE e CF são concorrentes.

5.5 Exercícios de construção geométrica

5.5.1 Ponto médio somente com régua sem escala

Exercício 4. *Sejam dadas duas retas $f \parallel g$ e dois pontos $A, B \in f$ (Figura 5.18). Construir o ponto médio do segmento AB utilizando somente uma régua sem escala.*

Figura 5.18: Construir o ponto médio do segmento AB utilizando somente uma régua sem escala. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

5.5.1.1 Resolução

A Figura 5.19 permite acompanhar a construção e justificativa posterior.

1. Esboça-se um ponto D no semiplano acima da reta g .
2. Constroem-se os segmentos AD e BD .
3. Marcam-se os pontos $E = AD \cap g$ e $F = BD \cap g$.
4. Constroem-se os segmentos AF e BE .

5. Marca-se o ponto $P = AF \cap BE$.
6. Traça-se a semirreta DP e marca-se o ponto $M = DP \cap f$.

Pelo Teorema 22 (Ceva) no $\triangle ABD$, com as cevianas AF , BE e DM que concorrem em P , segue:

$$\frac{AM}{MB} \frac{BF}{FD} \frac{DE}{EA} = 1,$$

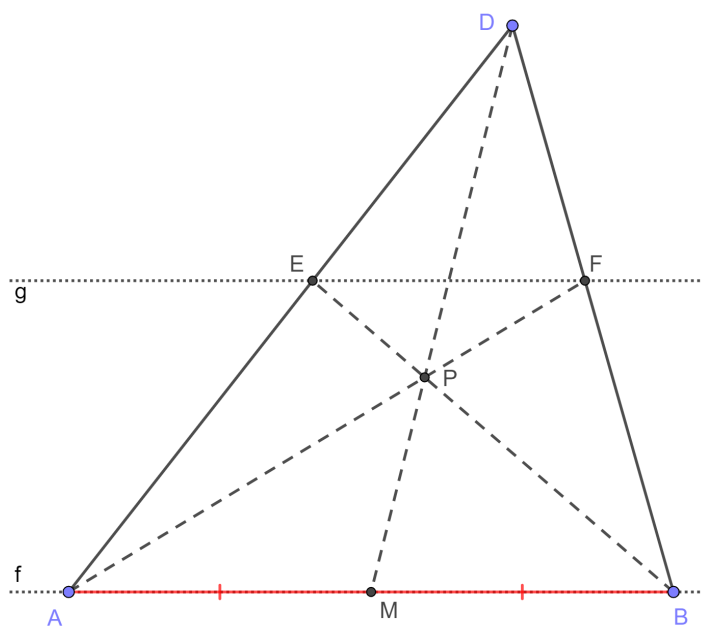
$$\frac{AM}{MB} = \frac{FD}{BF} \frac{EA}{DE}.$$

Devido ao paralelismo das retas f e g aplica-se o Teorema de Tales para obter:

$$\frac{BF}{FD} = \frac{EA}{DE}.$$

Das duas últimas equações encontra-se que $AM = MB$. Ou seja, M é ponto médio do segmento AB .

Figura 5.19: Utilização dos teoremas de Ceva e Tales. Versão interativa .



Fonte: Os autores.


5.5.2 Divisão harmônica somente com régua sem escala

Exercício 5. *Sejam uma reta f e três pontos distintos $A, B, P \in f$ (Figura 5.20). Seja ainda P diferente do ponto médio de AB . Construir o ponto Q , utilizando somente uma régua sem*

escala, tal que:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}.$$

Isto é, os pontos P e Q dividem harmonicamente o segmento AB .

Figura 5.20: Construir o ponto que completa a divisão harmônica do segmento AB , utilizando somente uma régua sem escala. Versão interativa .



Fonte: Os autores.

5.5.2.1 Resolução

A Figura 5.21 permite acompanhar a construção e justificativa posterior.

1. Esboça-se um ponto C tal que $C \notin f$.
2. Traçam-se as retas AC e BC .
3. Constrói-se o segmento CP .
4. Coloca-se um ponto $D \in CP$, $D \neq C$ e $D \neq P$.
5. Marcam-se os pontos $E = AD \cap BC$ e $F = BD \cap AC$.
6. Identifica-se o ponto $Q = EF \cap AB$.

Pode ser verificado na versão interativa da Figura 5.21 que a posição do ponto Q não depende do local escolhido para os pontos C e D .

Pelo Teorema 22 (Ceva) aplicado no $\triangle ABC$, com as cevianas AE , BF e CP que concorrem em D , segue:

$$\frac{AP}{PB} \frac{BE}{EC} \frac{CF}{FA} = 1.$$

Devido ao Teorema 17 (Menelaus) aplicado no $\triangle ABC$, com os pontos colineares $Q \in AB$, $E \in BC$ e $F \in CA$, tem-se:

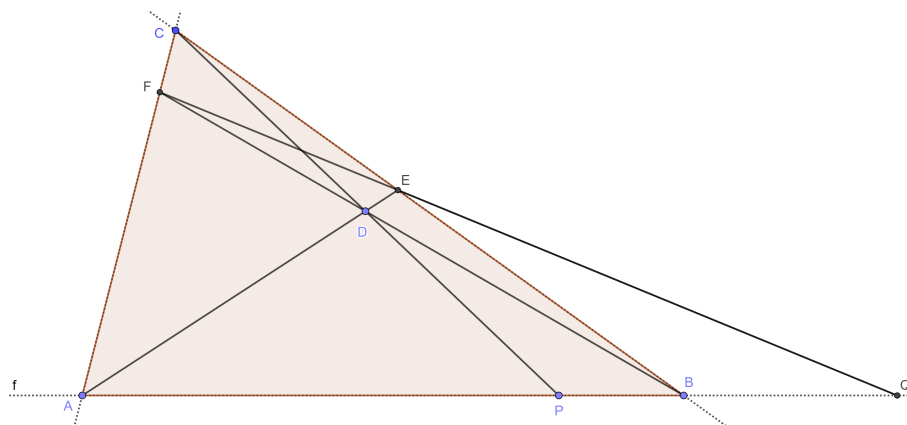
$$\frac{AQ}{QB} \frac{BE}{EC} \frac{CF}{FA} = 1.$$

Das duas últimas equações encontra-se que:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}.$$

Ou seja, os pontos P e Q dividem harmonicamente o segmento AB .

Figura 5.21: Divisão harmônica e utilização dos teoremas de Ceva e Menelaus. Versão interativa



Fonte: Os autores.

Capítulo 6

Referências Bibliográficas

- [1] APOSTOL, TOM M. Ptolemy's Inequality and the Chordal Metric. **Mathematics Magazine**, v. 40, p. 233–235, 1967. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0025570X.1967.11975804>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção [2.1](#), [2.2.2](#))
- [2] DELGADO, J. *et al.* **Geometria Analítica**, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, ISBN: 9788583371212, 2017. (Seção [1](#))
- [3] DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium**: a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2009. New York: Springer, 2011. (Seção [2.3.1](#), [2.3.2](#), [2.3.3](#), [2.3.4](#), [2.3.5](#))
- [4] GOW, R. **John Casey**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2007. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Casey/>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção [3.1](#))
- [5] JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas**. Livro: Conhecimentos pedagógicos e conteúdos disciplinares das ciências exatas e da terra, DOI do Livro: 10.22533/at.ed.242213108, ISBN: 978-65-5983-424-2, 2021. Páginas: 161-175. Disponível em [DOI do Capítulo: 10.22533/at.ed.24221310814](https://doi.org/10.22533/at.ed.24221310814). Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção [1](#))
- [6] KIMBERLING, C. **Encyclopedia of Triangle Centers**, 1998. Disponível em: <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção [5.4.1](#))

- [7] LOPES, D. **O Quarteto Harmônico e o Problema 6 da OBM**, XIX Semana Olímpica de Matemática, Nível 2, 2017. Disponível em: <https://www.obm.org.br>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 5)
- [8] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023045>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [9] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023106>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [10] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023113>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [11] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática v.3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023144>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [12] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.1**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 86 p. ISBN 978-65-87023-21-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023212>. Acesso em: 28 fev. 2022. (Seção 1)
- [13] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 115 p. ISBN 978-65-87023-23-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 28 fev. 2022. (Seção 1)

- [14] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática**. 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [15] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. ISSN: 2319-023X. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [16] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdv17ermac202023169664jllabagfb127138. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [17] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdv18202023169664jllabagfb7888. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [18] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdv19202023169664jll118127. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [19] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 20, p. 22-40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdv20202123169664jlljpmsafj2240. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1, 2.1)

- [20] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1, 2.1)
- [21] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:117-139, nov. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1, 2.1, 3.2, 3.2)
- [22] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; BRUNO-ALFONSO, A. Desigualdade de Ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:15-37, abr. 2022. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5396/4012>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [23] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023175>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [24] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023205>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [25] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três Problemas sobre Recorrências na Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA EM FOCO**, v. 8 n. 1 (2020), p. 1-11. Publicado em 2021-12-21, ISSN: 2318-0552. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/58967>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [26] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, ISSN 2316-9664, v. 21, p. 36–51, dez. 2021. ISSN 2316-9664. DOI:

- 10.21167/cqdv0l21202123169664jlljpmsafj3651. Disponível em:
<https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [27] NETO, A. C. M. **Geometria**, Coleção ProfMat, SBM, Primeira Edição, ISBN: 9788585818937, 2013. (Seção 1, 2.2.2)
- [28] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Menelaus of Alexandria**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1999. Disponível em:
<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Menelaus/>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 5.1)
- [29] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Giovanni Benedetto Ceva**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2012. Disponível em:
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ceva_Giovanni/. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 5.4)
- [30] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Blaise Pascal**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1996. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pascal/>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 5.3)
- [31] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Gaspard Monge**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Monge/>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 5.2)
- [32] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Karl Wilhelm Feuerbach**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2010. Disponível em:
<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Feuerbach/>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 3.2)
- [33] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Heron of Alexandria**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 1999. Disponível em:
<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Heron/>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 4.5)

- [34] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Joseph Diaz Gergonne**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2000. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gergonne/>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 5.4.1)
- [35] PINHEIRO, R. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2006. (Seção 1)
- [36] SANTOS, J. A.; FREITAS, P. V. S.; FERREIRA, G. Jr.; TANAKA, T. Y. Explorando os teoremas de Menelaus e Ceva em questões de olimpíadas de matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 9, n. 3, p. 464-485, 2021. ISSN: 2319-023X. Disponível em: https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/dlm_uploads/2021/06/art32_PMO_SBM_FLUXO2021.pdf. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 5)
- [37] SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A.; LÓPEZ LINARES, J. Retas de Euler e o esquema aditivo RGB: construções dinâmicas no GeoGebra, **Revista do Instituto GeoGebra internacional de São Paulo**, v. 10 n. 2 (2021), p. 026–039. Publicado em 2021-12-27, ISSN: 2237-9657, DOI: 10.23925/2237-9657.2021.v10i2p026-039. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/52286/38626>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1)
- [38] THIAGO, C. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria-Nível 2, 2006. (Seção 1, 5)
- [39] VARGAS, A.R. **O teorema de Miquel revisitado por Clifford**. 2016. 64 f. Dissertação (mestrado)-Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/27550/27550.PDF>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Seção 1)

