

Geometria Olímpica
com GeoGebra v.1

Juan López Linares
João Paulo Martins dos Santos
Alessandro Firmiano de Jesus

JUAN LÓPEZ LINARES
JOÃO PAULO MARTINS DOS SANTOS
ALESSANDRO FIRMIANO DE JESUS

Geometria Olímpica com GeoGebra v.1

DOI: 10.11606/9786587023212

Pirassununga - SP
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)
2022

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

Vice-Reitora: Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

<http://www.fzea.usp.br>

Diretor: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

Vice-Diretor: Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes de Oliveira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da
Universidade de São Paulo

L864g	López Linares, Juan Geometria olímpica com GeoGebra. v. 1 / Juan López Linares, João Paulo Martins dos Santos, Alessandro Firmiano de Jesus. -- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2022. 86 p. ISBN 978-65-87023-21-2 (e-book) DOI: 10.11606/9786587023212 1. Geometria. 2. Olimpíadas. 3. GeoGebra. 4. Ensino fundamental. 5. Ensino médio. 6. Formação de professores. I. Santos, João Paulo Martins dos. II. Jesus, Alessandro Firmiano de. III. Título.
-------	--

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.



Dedicamos este livro a nossas famílias.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos Professores-Estudantes do curso de “Geometria Olímpica com GeoGebra” que motivaram a escrever este livro eletrônico.

Agradecemos a nossas famílias pelo incentivo e compreensão.

AUTORES

Dr. JUAN LÓPEZ LINARES: <https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>.

Professor Doutor 2 do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Atualmente ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de “Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio” e “Geometria olímpica com GeoGebra” para professores. Desenvolve projetos de pesquisa nas áreas de ensino de Cálculo e na resolução de problemas de Olimpíadas. Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respectivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela UFSCar em 2019. Textos completos e gratuitos das publicações do autor podem ser encontrados [aqui](#).

Dr. JOÃO PAULO MARTINS DOS SANTOS: <https://orcid.org/0000-0002-0957-7119>.

Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2006), mestre em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2009) e Doutor em Ciências pela Escola de Engenharia de São Carlos - EESC-USP. É professor na Academia da Força Aérea em Pirassununga/SP. Tem experiência na área de Sistemas Dinâmicos não lineares e não ideais com pesquisa desenvolvida em métodos de perturbação. Tem experiência na área de Matemática e interesse nos seguintes temas: método numéricos para solução de equações diferenciais ordinárias e parciais, estimador de erro do tipo residual para a equação do transporte de poluentes, linguagem Python de programação, Computação Científica em Python e métodos numéricos para solução de sistemas lineares. Textos completos e gratuitos das publicações do autor podem ser encontrados [aqui](#).

Dr. ALESSANDRO FIRMIANO DE JESUS: <https://orcid.org/0000-0002-7073-2261>.

Possui graduação em Matemática pela Universidade de São Paulo (1994), mestrado em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos (1997), doutorado em Engenharia Hidráulica e Saneamento pela Universidade de São Paulo (2010) e pós doutorado pela Fachhochschule Köln - Cologne University of Applied Sciences (2014). Atualmente é regime jurídico único da Academia da Força Aérea AFA exercendo a função de Prof. Associado IV. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Modelagem Computacional e Análise Numérica, atuando principalmente nos seguintes temas: Modelos de advecção-difusão-reação, Método dos Elementos Finitos, Transporte de Contaminantes em Águas Subterrâneas e Geocomputação. Coordenador da Área de Ciências Exatas no Curso de Formação de Oficiais da Aeronáutica na Academia da Força Aérea (AFA). Textos completos e gratuitos das publicações do autor podem

ser encontrados [aqui](#).

Título

Geometria Olímpica com GeoGebra v.1

Prefácio

Este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O texto conta com 75 figuras que facilitam acompanhar a resolução. Todas têm como complemento links para os gráficos interativos no site do GeoGebra e, vários, a resolução em vídeo do YouTube. A discussão é organizada em quatro capítulos: Construções geométricas básicas; Semelhança de triângulos e homotetia; Ângulos e áreas na circunferência; Teorema de Miquel, Conjugados Isogonais e triângulo Pedal. Inicia-se com um desafio de construção geométrica e depois discute-se a teoria associada e resolvem-se problemas. O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa. O GeoGebra também convida o leitor a interagir, a pôr as mãos na massa.

Palavras-chave: Geometria, Olimpíadas, GeoGebra, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Formação de Professores.

Sumário

1	Introdução	10
2	Construções geométricas básicas	12
2.1	Desafio inicial de construção ao vivo: Pentagrama	12
2.2	Triângulo retângulo	13
2.3	Cinco tipos de triângulos isósceles	15
2.4	Triângulos escaleno acutângulo e escaleno obtusângulo	16
2.5	Algumas proposições	17
2.6	Ponto de Fermat.	22
2.6.1	Todos os ângulos internos do $\triangle ABC$ são menores que 120°	22
2.6.2	$\triangle ABC$ com $\angle BAC \geq 120^\circ$	23
3	Semelhança de triângulos e homotetia	25
3.1	Desafio inicial de construção ao vivo: Sequência de quadrados inscritos e giratórios	25
3.1.1	Solução	25
3.2	Cálculo com a Figura 3.1	28
3.2.1	Solução	28
3.3	Incomensurabilidade do lado e a diagonal de um quadrado	28
3.4	Semelhança Espiral: Mapeando dois segmentos.	30
3.4.1	Solução	30
3.5	Homotetia.	31
3.6	Homotetia e centros de homotetia de circunferências.	32
3.7	Problema inverso: dadas duas circunferências encontrar os centros de homotetia.	33
3.7.1	Solução	33
3.8	Circunferências tangentes internamente.	34
3.8.1	Solução	35
3.9	Triângulos inversamente semelhantes, ilustrado com a transformação de inversão.	36
3.10	Duas homotetias com centro no Baricentro de um triângulo.	37

4	Ângulos e áreas na circunferência	39
4.1	Desafio inicial de construção: cálculo de π pelo método da exaustão.	39
4.2	Ângulos na circunferência.	40
4.3	Centro de Circunferência	47
4.3.1	Solução	47
4.4	Construção de circunferência tangente a uma reta e passando por um ponto dado.	47
4.4.1	Solução	48
4.5	Solução do desafio do cálculo de π	48
5	Teorema de Miquel, Conjugados Isogonais e Triângulo Pedal	53
5.1	Teorema de Miquel para triângulos	53
5.2	Conjugados isogonais	57
5.3	Problema resolvido pelo uso de isogonais	69
5.3.1	Resolução	69
5.4	Teorema de Morley	70
5.5	Conjugados isotômicos	71
5.6	Triângulo Pedal	72
5.7	Pontos isogônicos e isodinâmicos	74
5.8	Problema envolvendo o primeiro ponto isodinâmico	76
5.8.1	Resolução	76
5.9	Teorema de Erdős-Mordell	77
5.10	Desigualdade de Erdős-Mordell, trigonometria e demonstração por contradição. P5 IMO 1991.	81
5.10.1	Resolução	81
6	Referências Bibliográficas	83

Capítulo 1

Introdução

O livro faz parte de um projeto de longo prazo de treinamento de estudante e professores com problemas de Olimpíadas de Matemáticas. Em particular, este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O mesmo aconteceu na modalidade de Ensino à Distância (EaD) pela plataforma de Cultura e Extensão da USP.

Foram utilizadas as notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, curso de Geometria, Nível 2, do Prof. Rodrigo Pinheiro [1] e do Prof. Cícero Thiago [2]. Também serviram como referência os livros de Geometria [3] e Geometria Analítica [4] adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e a dissertação de mestrado de Anderson Reis de Vargas [5].

O texto conta com 75 figuras que facilitam o acompanhamento das resoluções. Como complemento, os links para os gráficos interativos são disponibilizados em páginas do [GeoGebra](#). Vários problemas contam com apresentação em vídeo disponíveis numa [playlist](#) do YouTube.

A discussão é organizada em quatro capítulos: Construções geométricas básicas; Semelhança de triângulos e homotetia; Ângulos e áreas na circunferência; Teorema de Miquel, Conjugados Isogonais e triângulo Pedal. Inicia-se com um desafio de construção geométrica e depois discute-se a teoria associada e resolvem-se problemas. Escolhemos apresentar alguns exercícios em cada caso, mas sem a pretensão de esgotar o tema.

O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa.

Com uma boa organização e programação adequada discutir problemas na tela do GeoGebra permite ao leitor visualizar simultaneamente gráficos e textos. Em contra partida, na versão

impressa tradicional o aprendiz precisa ficar alternando entre páginas para acompanhar uma resolução.

O GeoGebra também convida o leitor a interagir e aprender fazendo. Isto é, pode movimentar pontos da construção, colorir, modificar parâmetros de entrada, etc. Aos mais obstinados é permitido copiar e melhorar trabalhos já existentes.

Adicionalmente, a versão online do GeoGebra funciona como uma rede social de aprendizado e colaboração. Os profissionais e alunos podem disponibilizar construções, buscar construções, baixar e modificar ou alterar e salvar no próprio site. Em resumo, é um local que fornece materiais e meios alternativos para a troca de conhecimento relacionado ao ensino de Matemática.

Um dos autores também publicou quatro livros eletrônicos dedicados a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática para o Ensino Médio: [6], [7], [8] e [9]. Outros trabalhos da área de Matemática são [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22] e [23].

Capítulo 2

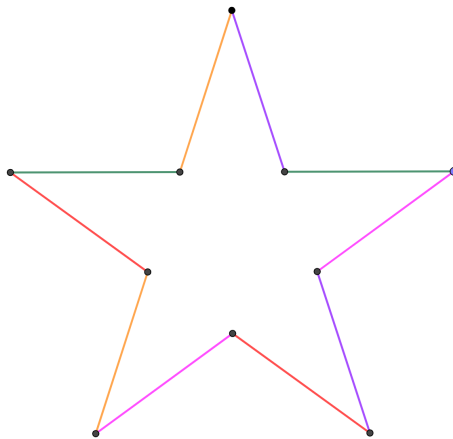
Construções geométricas básicas

2.1 Desafio inicial de construção ao vivo: Pentagrama

O símbolo da Escola Pitagórica é o pentagrama. Conta a lenda que para entrar na sociedade secreta dos Pitagóricos era preciso mostrar que sabia construir perfeitamente uma estrela de cinco pontas.

Usar o GeoGebra para construir primeiro um pentágono regular e depois a estrela pitagórica (Figura 2.1). Não vale usar a ferramenta “Polígono Regular” e a construção deve ser dinâmica, o pentagrama deve girar.

Figura 2.1: Estrela Pitagórica. Versão interativa [aqui](#).



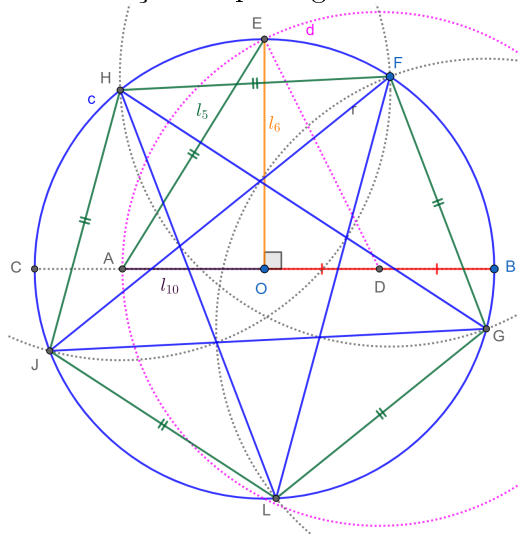
Fonte: Os autores.

Passos para a construção do pentagrama animado (Figura 2.2).

1. Construir uma circunferência c , centrada em O e de diâmetro BC .
2. Encontrar o ponto médio D do segmento OB . Isto é, $OD = DB$.

3. Traçar uma perpendicular a BC passando por O e marcar o ponto E na interseção desta com c . O comprimento do lado do hexágono regular l_6 coincide com o raio de c .
4. Com centro em D e raio DE traçar a circunferência d . Marcar o ponto $A = BC \cap d$.
5. O segmento $l_5 = AE$ permite construir um pentágono regular e o segmento $l_{10} = AO$ um decágono regular.
6. Com a ferramenta “Ponto em Objeto” colocar $F \in c$ e $F \neq B$, $F \neq C$ e $F \neq E$.
7. Usar a ferramenta “Compasso”, clicar, na sequência, em A , E e F . A seguir, marcar os pontos de interseção H e G da nova circunferência p com c .
8. Com centro nos pontos H e G traçar outras duas circunferências de raio l_5 . Marcar os pontos de interseção J e L com c . O pentágono $FHJLG$ fica determinado.
9. Conectar as diagonais LH , LF , GJ , GH e FJ . Animar o ponto F .

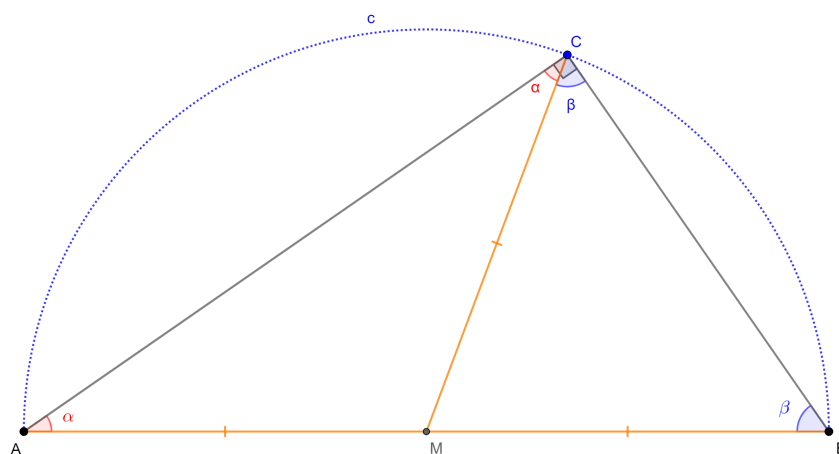
Figura 2.2: Elementos da construção do pentagrama animado. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

2.2 Triângulo retângulo

Consideramos o segmento AB e o arco de circunferência c determinado por este. Seja M o ponto médio de AB e o ponto $C \in c$. Por construção $MA = MB = MC$. Logo, os $\triangle AMC$ e $\triangle BMC$ são isósceles e $\angle MAC = \angle MCA = \alpha$ e $\angle MBC = \angle MCB = \beta$. A soma dos ângulos internos do $\triangle ABC$ é: $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$. Ou seja, temos que $\alpha + \beta = \angle ACB = 90^\circ$. A Figura 2.3 permite acompanhar a demonstração anterior.

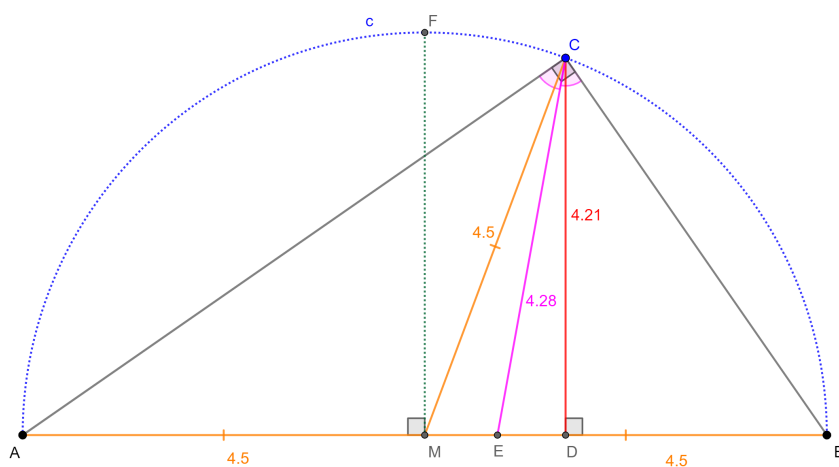
Figura 2.3: Construção de triângulo retângulo e propriedades. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: Os autores.

Definimos o ponto F como a interseção da mediatriz do segmento AB com c (Figura 2.4). Estudaremos agora as cevianas principais do triângulo retângulo:

- A mediana CM é sempre igual a metade de AB .
- Seja o ponto $E \in AB$ tal que $\angle ACE = \angle BCE = 45^\circ$. A ceviana CE é chamada bissetriz.
- Seja o ponto $D \in AB$ tal que $\angle BDC = \angle ADC = 90^\circ$. A ceviana CD é chamada altura.

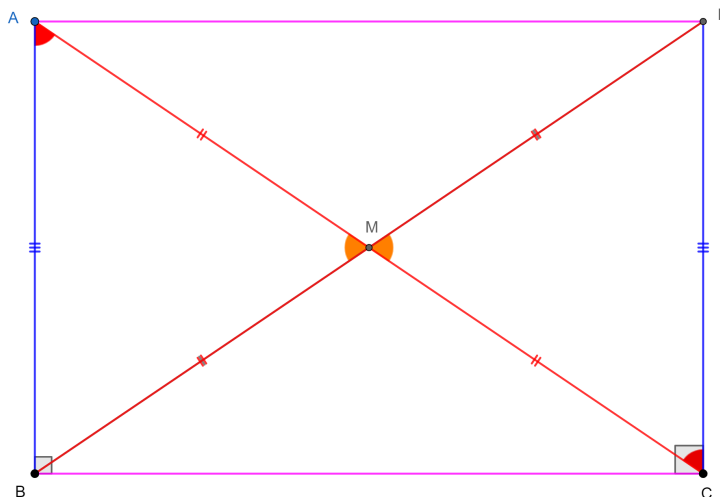
Em geral temos $CM \neq CE \neq CD$. Somente quando $C = F$ as medidas das três cevianas principais são iguais. O $\triangle AFB$ é retângulo e isósceles (Figura 2.4).

Figura 2.4: Cevianas principais num triângulo retângulo. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: Os autores.

Proposição 1 (Mediana no triângulo retângulo). *Num triângulo ABC , retângulo em B , a mediana BM mede metade da hipotenusa AC .*

Figura 2.5: Guia para a demonstração da Proposição 1. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. A Figura 2.5 mostra um triângulo ABC , retângulo em B . Seja M o ponto médio de AC e um ponto $D \in BM$ tal que $BM = MD$. Por serem opostos pelo vértice temos $\angle AMB = \angle CMD$. Pelo critério de congruência LAL segue que $\triangle AMB \equiv \triangle CMD$. Logo, $AB = CD$ e $\angle BAC = \angle DCA$.

A última igualdade de ângulos e a recíproca de ângulo alternos entre paralelas leva a que $AB \parallel CD$. Como AB e CD são segmentos de igual medida e paralelos concluímos $ABCD$ é um paralelogramo. Ou seja, $AD = BC$ e $ABCD$ é um retângulo com $\angle DCB = 90^\circ$. Por LAL também temos $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$. Isto é, $AC = BD$ e $BM = AM = MB$. \square

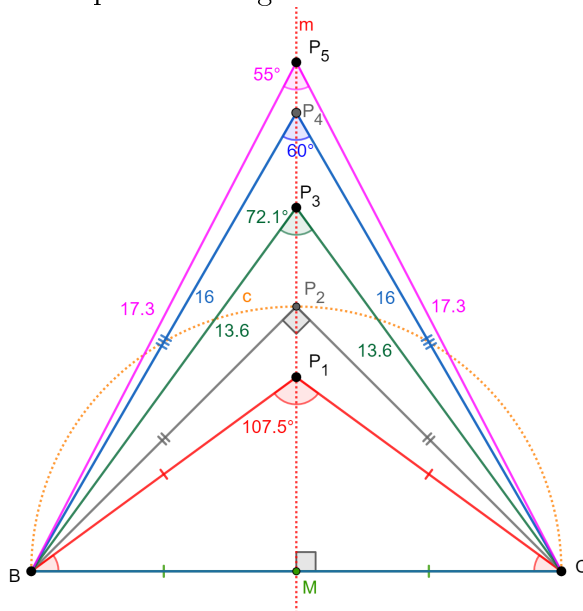
Em outras palavras, o ponto médio M da hipotenusa AC do $\triangle ABC$ é o centro da circunferência circunscrita (que passa pelos três pontos) ou circuncentro.

2.3 Cinco tipos de triângulos isósceles

Na Figura 2.6 a reta m é mediatriz de BC . Ou seja, $BM = MC$ e $m \perp BC$. Logo $P_iB = P_iC$, com $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Os triângulos P_iBC são isósceles e $\angle P_iBC = \angle P_iCB$. A semicircunferência c é determinada pelo segmento BC . O ponto $P_2 = c \cap m$. Com isto o $\triangle P_2BC$ é retângulo e isósceles. O $\angle BP_4C = 60^\circ$ e, conseqüentemente, o $\triangle P_4BC$ é equilátero.

Se $P_1 \in MP_2$, $P_1 \neq M$ e $P_1 \neq P_2$, então o $\triangle P_1BC$ é obtusângulo e isósceles. Se $P_3 \in P_2P_4$, $P_3 \neq P_2$ e $P_3 \neq P_4$, então o $\triangle P_3BC$ é acutângulo e isósceles e $P_3B = P_3C < BC$. Se $P_5M > P_4M$, então o $\triangle P_5BC$ é acutângulo e isósceles e $P_5B = P_5C > BC$.

Figura 2.6: Cinco tipos de triângulos isósceles. Versão interativa [aqui](#).



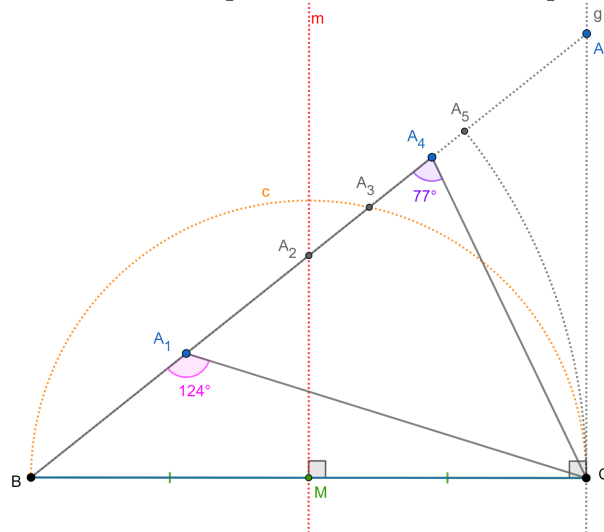
Fonte: Os autores.

2.4 Triângulos escaleno acutângulo e escaleno obtusângulo

Na Figura 2.7 a reta m é mediatriz de BC . Ou seja, $BM = MC$ e $m \perp BC$. Seja g uma reta perpendicular a BC que passa pelo ponto C e um ponto $A_6 \in g$ tal que $A_6C < BC$. Sejam $A_2 = m \cap BA_6$ e $A_3 = c \cap BA_6$. Adicionalmente, consideramos $A_5 \in BA_6$ tal que $BA_5 = BC$.

Com o ponto $A_1 \in BA_3$ e $A_1 \neq A_2$, no interior do semicírculo cBC , o $\triangle A_1BC$ é escaleno obtusângulo. Se $A_4 \in A_3A_6$ e $A_4 \neq A_5$ o $\triangle A_4BC$ é escaleno acutângulo.

Figura 2.7: Triângulos escaleno acutângulo e escaleno obtusângulo. Versão interativa [aqui](#).

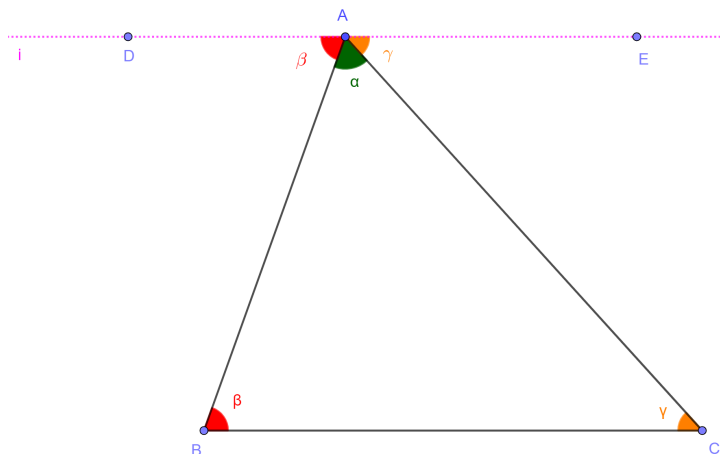


Fonte: Os autores.

2.5 Algumas proposições

Proposição 2 (Ângulos internos de um triângulo). *A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .*

Figura 2.8: Guia para a demonstração da Proposição 2. Versão interativa [aqui](#).



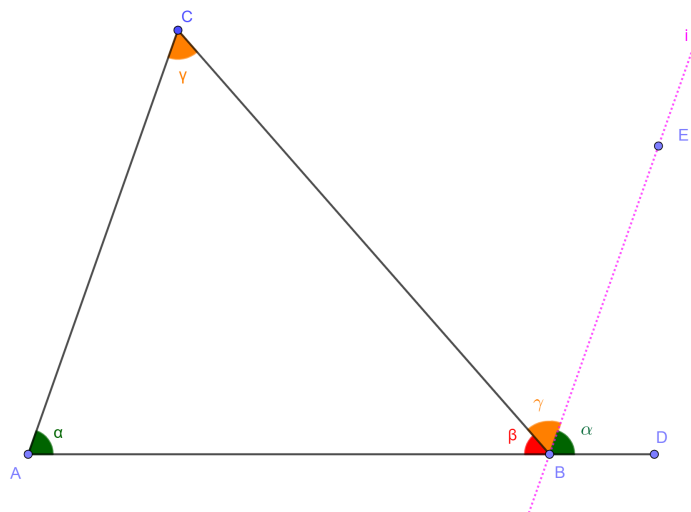
Fonte: Os autores.

Demonstração. A Figura 2.8 mostra o $\triangle ABC$. Construímos a reta i passando por A e paralela ao segmento BC . Seja um ponto $D \in i$ e a esquerda de A . Por alternos entre paralelas temos

$\angle DAB = \angle ABC = \beta$. Adicionalmente, seja um ponto $E \in i$ e a direita de A . Por alternos entre paralelas segue que $\angle CAE = \angle ACB = \gamma$. Como $\angle DAE = 180^\circ$ (raso) encontramos que $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. \square

Proposição 3 (Ângulos externos de um triângulo). *A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Figura 2.9: Guia para a demonstração da Proposição 3. Versão interativa [aqui](#).

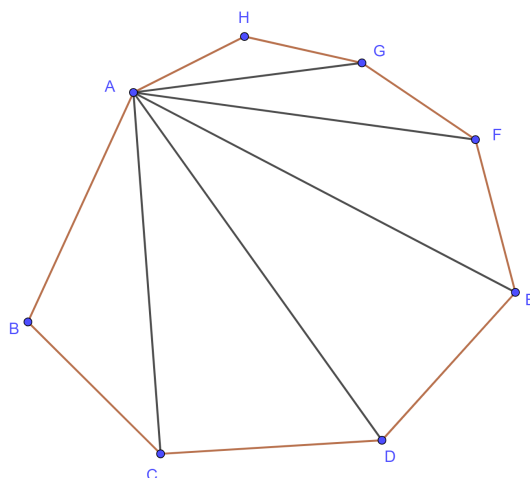


Fonte: Os autores.

Demonstração. A Figura 2.9 mostra o $\triangle ABC$. Seja D um ponto no prolongamento do segmento AB e a direita de B . Construímos uma reta i passando por B e paralela com o segmento AC . Adicionalmente, seja $E \in i$ e no semiplano superior relativo ao segmento AD . Por alternos internos entre paralelas temos $\angle ACB = \angle CBE = \gamma$. Por ângulos correspondentes entre paralelas vale que $\angle CAB = \angle EBD = \alpha$. Ou seja, $\angle CBD = \alpha + \gamma$. \square

Proposição 4 (Soma dos ângulos internos de um polígono convexo). *A soma de todos os ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $180^\circ \cdot (n - 2)$.*

Figura 2.10: Ilustração da demonstração da Proposição 4, caso $n = 8$. Versão interativa [aqui](#).

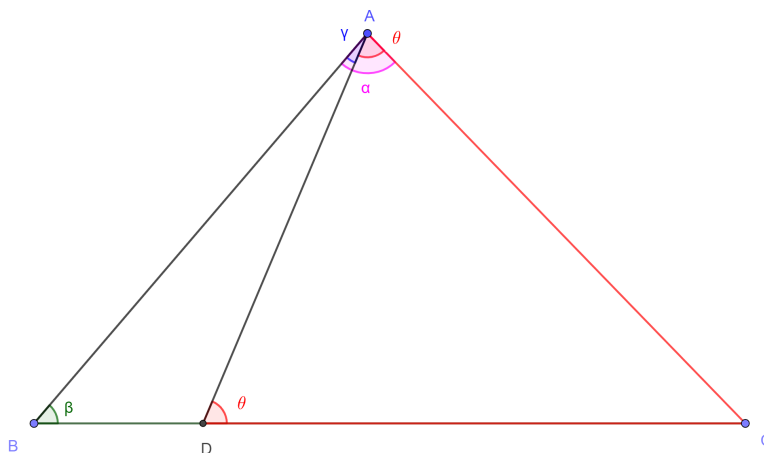


Fonte: Os autores.

Demonstração. A partir de um vértice do polígono, traçaremos todas as suas $n - 3$ diagonais. Isto é, dividimos o polígono em $n - 2$ triângulos. Com isto, a soma de todos os ângulos internos do polígono é igual a soma de todos os ângulos internos de todos os triângulos: $180^\circ \cdot (n - 2)$. A Figura 2.10 ilustra o caso $n = 8$. \square

Proposição 5 (Maior ângulo oposto ao maior lado). *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a estes lados não são congruentes, e o maior ângulo é oposto ao maior lado.*

Figura 2.11: Guia para a demonstração da Proposição 5. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

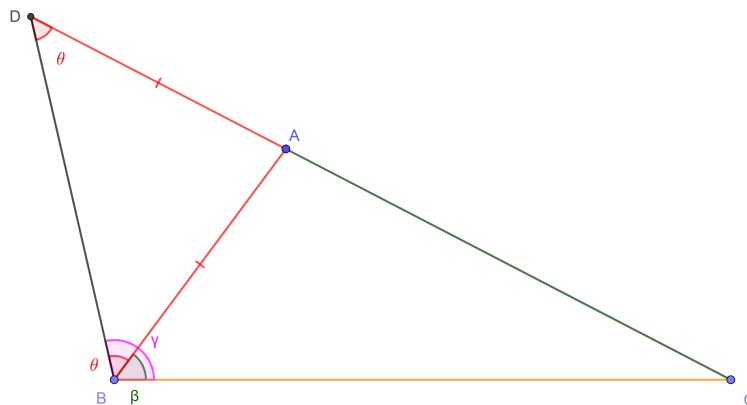
Demonstração. A Figura 2.11 mostra um triângulo ABC . Iremos supor que $BC > AC$. Marcamos sobre BC o ponto D tal que $AC = CD$. Logo, o $\triangle CAD$ é isósceles de base AD e $\angle CAD = \angle CDA = \theta$.

Sejam $\angle CBA = \beta$ e $\angle BAD = \gamma$. Pelo teorema do ângulo externo temos $\theta = \beta + \gamma$. Portanto, $\theta > \beta$. Além disso, como $\angle BAC = \alpha = \theta + \gamma$, então $\alpha > \beta$. Isto é, oposto ao maior lado corresponde o maior ângulo. \square

Por redução ao absurdo e a Proposição anterior se prova a recíproca. Isto é, o maior lado é oposto ao maior ângulo.

Proposição 6 (Desigualdade triangular). *A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado.*

Figura 2.12: Guia para a demonstração da Proposição 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. Basta mostrar que o maior lado é menor que a soma dos outros dois. A Figura 2.12 mostra um triângulo ABC com $\angle ABC = \beta$. Iremos supor, sem perda de generalidade, $BC > CA > AB$. Estendemos a semirreta CA e marcamos o ponto $D \in CA$ de tal forma que $AD = AB$, $\angle ABD = \theta$ e $\angle DBC = \gamma$. Como o $\triangle ABD$ é isósceles de base BD temos $\angle ABD = \angle ADB = \theta$. Adicionalmente, de

$$\angle DBC = \gamma = \theta + \beta > \theta = \angle BDA$$

e da Proposição 5, segue que:

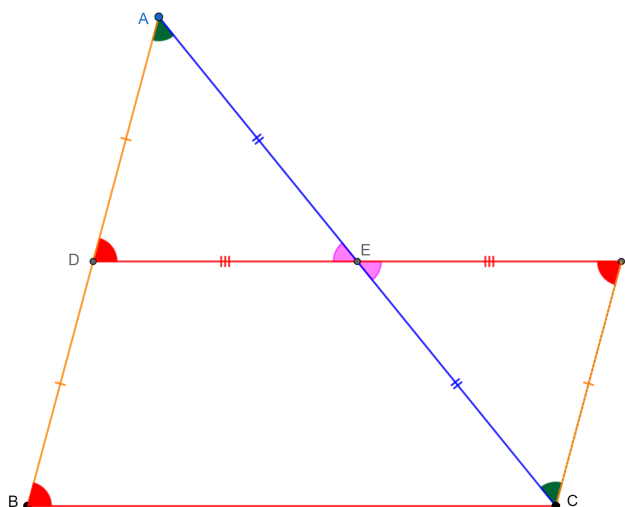
$$CD = CA + AD = CA + AB > BC.$$

□

Definição 1 (Base média). *É chamada **base média** de um triângulo a um segmento que une os pontos médios de dois de seus lados.*

Proposição 7 (Base média). *Sejam ABC um triângulo e D e E os pontos médios dos lados AB e AC , respectivamente. Então $DE \parallel BC$ e $DE = \frac{BC}{2}$.*

Figura 2.13: Guia para a demonstração da Proposição 7. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. A Figura 2.13 mostra um triângulo ABC e D e E os pontos médios dos lados AB e AC , respectivamente. Prolongamos o segmento DE até um ponto F tal que $DE = EF$. Em seguida, construímos o $\triangle CEF$.

Temos que $\angle DEA = \angle FEC$ (opostos pelo vértice) e pelo critério de congruência lado-ângulo-lado (LAL) segue $\triangle DEA \equiv \triangle FEC$. Consequentemente, $FC = DA = BD$, $\angle ADE = \angle CFE$ e $\angle DAE = \angle FCE$.

Da última igualdade de ângulos segue $AB \parallel CF$ (alternos entre paralelas). Adicionalmente, por BD e CF serem congruentes e paralelos vale que $BDFC$ é um paralelogramo. Ou seja, $DE \parallel BC$ e $DE = \frac{BC}{2}$. \square

2.6 Ponto de Fermat.

Problema 1. *Encontrar o ponto P , no interior do $\triangle ABC$, que minimiza a soma $AP+BP+CP$.*

Serão discutidos dois casos: o primeiro quando todos os ângulos internos do triângulo são menores que 120° e o segundo quando um dos ângulo é maior ou igual a 120° .

2.6.1 Todos os ângulos internos do $\triangle ABC$ são menores que 120° .

Seja P um ponto arbitrário no interior do $\triangle ABC$. Construímos o $\triangle AQ_B B'$ com uma rotação de 60° no sentido anti-horário, com centro em A , do $\triangle APC$. Adicionalmente, construímos o $\triangle BQ_A A'$ com uma rotação de 60° no sentido horário, com centro em B , do $\triangle BPC$.

Também construímos o $\triangle AQ_C C'$ com uma rotação de 60° no sentido horário, com centro em A , do $\triangle APB$ (Figura 2.14).

Temos, por construção, que $\triangle AQ_B B' \equiv \triangle APC$, $\triangle BQ_A A' \equiv \triangle BPC$ e $\triangle AQ_C C' \equiv \triangle APB$. Adicionalmente, os triângulos ACB' , BCA' , ABC' , APQ_B , BPQ_A e APQ_C são equiláteros.

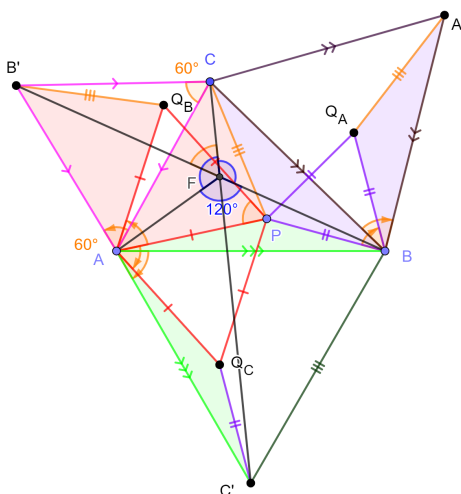
Pela desigualdade triangular vale que:

$$PC + PB + PA = PC + PQ_C + Q_C C' \geq CC',$$

$$PC + PB + PA = B'Q_B + PB + Q_B P \geq BB'.$$

As igualdades acontecem quando os pontos C, P, Q_C e C' e os pontos B', Q_B, P e B são colineares. Isto é, quando $P = F = CC' \cap BB'$.

Figura 2.14: Construção geométrica para o caso em que todos os ângulos internos do $\triangle ABC$ são menores que 120° . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Como $\angle BAB' = \angle CAC'$, $BA = C'A$ e $B'A = CA$, por LAL temos $\triangle BAB' \equiv \triangle CAC'$ e $BB' = CC'$. Logo, o mínimo da soma $PA + PB + PC$ acontece quando $P = F$. Neste caso $\angle B'PA = \angle B'FA = \angle Q_B PA = \angle B'CA = 60^\circ$. Ou seja, F é concíclico com A, B' e C e $\angle AFC = 120^\circ$. Analogamente se mostra que $\angle AFB = \angle BFC = 120^\circ$.

2.6.2 $\triangle ABC$ com $\angle BAC \geq 120^\circ$.

Num $\triangle ABC$ com ângulo interno $\angle BAC \geq 120^\circ$ o ponto que minimiza as somas das distâncias aos vértices (Ponto de Fermat) é o ponto A .

Seja P um ponto do interior do $\triangle ABC$. Construimos o $\triangle AP'C'$ por uma rotação do $\triangle APC$ em torno ao vértice A e de tal forma que B , A e C' sejam colineares (Figura 2.15).

Como $\angle BAC \geq 120^\circ$, então $\angle CAC' = \angle PAP' \leq 60^\circ$ e $P'A = PA \geq PP'$. Segue que

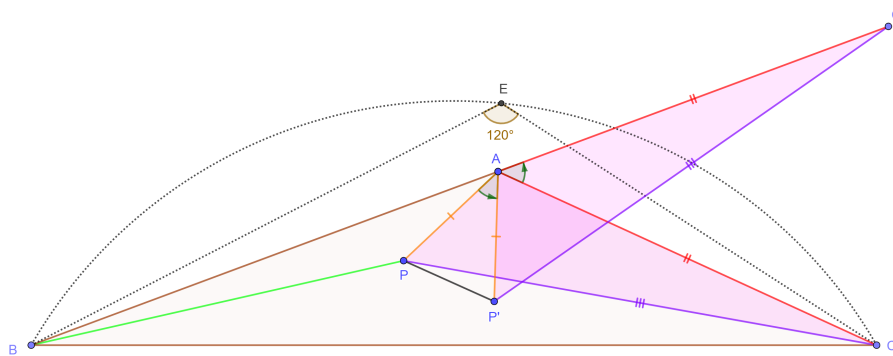
$$PA + PB + PC \geq PP' + PB + P'C'.$$

A poligonal $BPP'C'$ tem comprimento maior o igual ao segmento BC' , logo

$$PA + PB + PC \geq BC' = AB + AC'.$$

Finalmente, $AC = AC'$ e $PA + PB + PC \geq AB + AC$.

Figura 2.15: Construção geométrica para o caso em que $\angle BAC \geq 120^\circ$. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

O conteúdo desta aula está disponível em [vídeo](#).

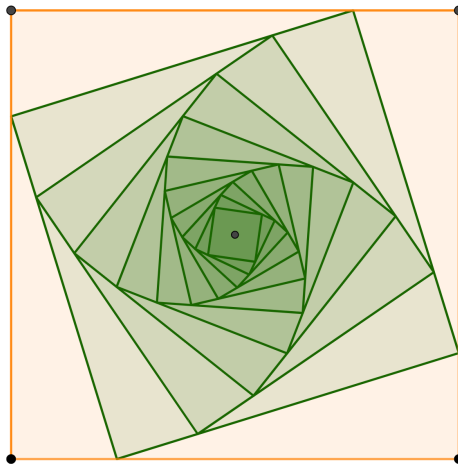
Capítulo 3

Semelhança de triângulos e homotetia

3.1 Desafio inicial de construção ao vivo: Sequência de quadrados inscritos e giratórios

Problema 2. Construir uma sequência de $n \in \mathbb{N}$ quadrados q_n , com $0 \leq n \leq 10$. De tal forma que o quadrado q_{n+1} está inscrito no quadrado q_n e girado um ângulo β , com $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ (Figura 3.1). Animar os parâmetros n e β .

Figura 3.1: Sequência de quadrados inscritos e giratórios. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

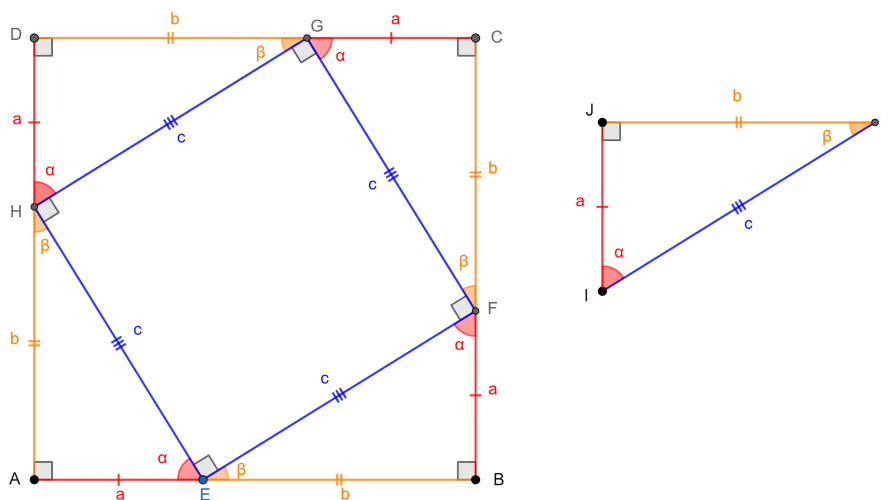
3.1.1 Solução

Iniciamos lembrando a ida do Teorema de Pitágoras, pois a construção utilizada em uma das suas demonstrações é o ponto de partida do desafio.

Teorema 8 (Ida do Teorema de Pitágoras). *Num triângulo IJK , retângulo em J , de catetos $IJ = a$ e $JK = b$ e hipotenusa $IK = c$ vale:*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Figura 3.2: Guia para a demonstração do Teorema 8. Versão interativa [aqui](#). Pode-se movimentar o ponto E.



Fonte: Os autores.

Demonstração. A Figura 3.2 mostra um triângulo IJK , retângulo em J . Construir um quadrado $ABCD$, de lado $a + b$, e posicionar quatro cópias do $\triangle IJK$ com o ângulo reto coincidindo com os vértices de A, B, C e D . Essa construção determina o quadrilátero $EFGH$. Como $\angle JIK + \angle JKI = \alpha + \beta = 90^\circ$ segue que $\angle EFG = \angle FGH = \angle GHE = \angle HEF = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Logo, o quadrilátero $EFGH$ é um quadrado.

Têm-se duas formas para calcular a área do quadrado $ABCD$: i) multiplicando seu lado $a + b$ por ele mesmo e ii) somando quatro vezes a área do $\triangle IJK$ com a área do quadrado $EFGH$. Ou seja,

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= 4 \left(\frac{ab}{2} \right) + c^2, \\ a^2 + b^2 + 2ab &= 2ab + c^2, \\ a^2 + b^2 &= c^2. \end{aligned}$$

□

Ainda com referência a Figura 3.2, para a construção a seguir, será necessário calcular a

razão (fator de homotetia) entre o lado do quadrado $EFGH$ e o lado do quadrado $ABCD$:

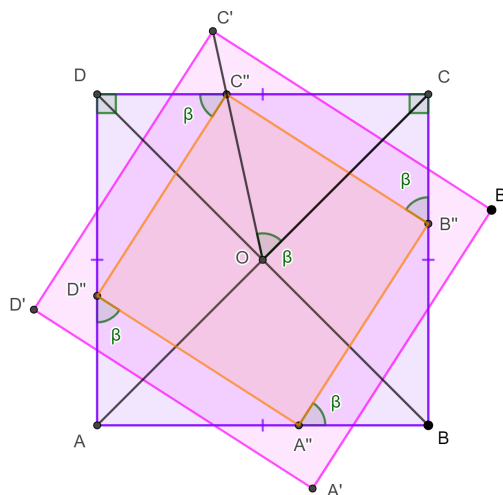
$$k(\beta) = \frac{c}{a+b}.$$

Utiliza-se que $a = c \cos(\beta)$ e $b = c \sin(\beta)$ para encontrar

$$k(\beta) = \frac{1}{\cos(\beta) + \sin(\beta)}. \quad (3.1.1)$$

A Figura 3.3 ilustra a construção do quadrado $A''B''C''D''$ inscrito no quadrado $ABCD$. Seja O a interseção das diagonais AC e BD . Utilizam-se duas transformações geométricas. i) Girar o quadrado $ABCD$, com centro em O e ângulo de rotação β , gerando o quadrado $A'B'C'D'$ ii) Homotetia do quadrado $A'B'C'D'$, com centro em O e razão (3.1.1), gerando o quadrado $A''B''C''D''$.

Figura 3.3: Passos na construção da sequência de quadrados inscritos e giratórios. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Ou seja, devido a rotação têm-se: $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'D' = DC$ e $D'A' = DA$. Como consequência da homotetia segue que:

$$\frac{A''O}{A'O} = \frac{B''O}{B'O} = \frac{C''O}{C'O} = \frac{D''O}{D'O} = k(\beta).$$

Para o restante basta implementar uma sequência que repita as duas etapas anteriores.

3.2 Cálculo com a Figura 3.1

Problema 3. a) Supor que $l_0 = 1$ é a medida do lado do quadrado q_0 (em amarelo) e $\beta = 30^\circ$. Determinar a medida do lado l_{10} do quadrado q_{10} (menor quadrado em verde). b) Para qual ângulo β a medida do lado l_n é mínima e qual é o mínimo?

3.2.1 Solução

a) No Problema 3 tem-se $\beta = 30^\circ$. Segue de (3.1.1) que

$$k(30^\circ) = \frac{1}{\cos(30^\circ) + \sin(30^\circ)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1}.$$

Ou seja, a medida do lado l_{10} do quadrado q_{10} é:

$$l_{10} = l_0 \cdot k^{10},$$

$$l_{10} = \left(\frac{2}{\sqrt{3} + 1} \right)^{10}.$$

b) Como $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ considera-se o conjunto de números positivos $\{\cos(\beta), \sin(\beta)\}$. Utiliza-se a desigualdade entre a média aritmética e a média quadrática:

$$\frac{\cos(\beta) + \sin(\beta)}{2} \leq \sqrt{\frac{\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)}{2}},$$

$$\cos(\beta) + \sin(\beta) \leq 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Acontece a igualdade quando $\cos(\beta) = \sin(\beta)$ ou $\beta = 45^\circ$. Do resultado anterior e de (3.1.1), o valor mínimo de $k(\beta)$ e $l_n(\beta)$ também acontece para $\beta = 45^\circ$:

$$k(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$l_n(45^\circ) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n.$$

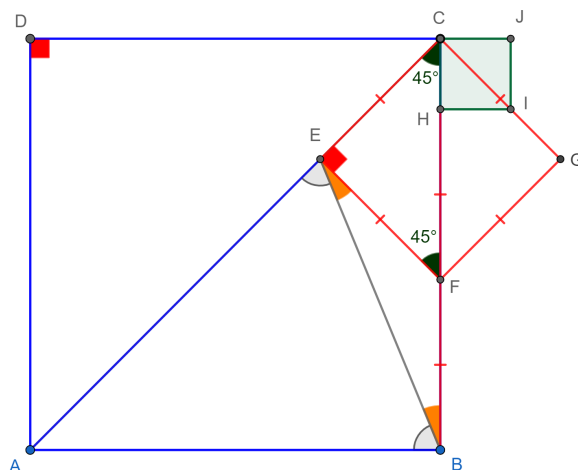
3.3 Incomensurabilidade do lado e a diagonal de um quadrado

Definição 2. Dois segmentos AB e AC são ditos comensuráveis quando suas medidas podem ser escritas como um múltiplo de alguma medida comum $c \in \mathbb{R}$. Ou seja, sendo $m, n \in \mathbb{N}$ pode

ser escrito $AB = n \cdot c$ e $AC = m \cdot c$.

Teorema 9 (Incomensurabilidade do lado e a diagonal de um quadrado). *As medidas do lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis.*

Figura 3.4: Incomensurabilidade do lado e a diagonal de um quadrado. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. A Figura 3.4 mostra um quadrado $ABCD$. Suponha-se, por absurdo, que existam $m, n \in \mathbb{N}$ e primos entre si, tais que:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{m}{n}.$$

Sobre a diagonal AC marca-se o ponto E de tal forma que $AE = AB$. Segue que o $\triangle ABE$ é isósceles e $\angle ABE = \angle AEB$. Constrói-se uma perpendicular a AC passando por E e marca-se o ponto de interseção F com BC . Como AC é a diagonal de um quadrado tem-se que $\angle ACB = 45^\circ$. Logo, no $\triangle ECF$ encontra-se que $\angle EFC = 45^\circ$ e $EF = CE$. Adicionalmente,

$$\angle FBE = 90^\circ - \angle ABE = 90^\circ - \angle AEB = \angle FEB.$$

Com isso, o $\triangle FBE$ é isósceles e $EF = FB$. Para concluir um ciclo de construção, posiciona-se o ponto G de tal forma que o quadrilátero $EFGC$ seja um quadrado.

Têm-se que

$$CE = AC - AE = AC - AB. \quad (3.3.1)$$

Segue que $CF = BC - BF = AB - CE$ e

$$CF = 2AB - AC. \quad (3.3.2)$$

Os quadrados $ABCD$ e $EFGC$ são semelhantes. Com isso, a razão diagonal/lado nos dois é a mesma e utilizando (3.3.1) e (3.3.2) encontra-se:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CF}{CE} = \frac{2AB - AC}{AC - AB}. \quad (3.3.3)$$

Mas, $AB > AC - AB = CE \geq 1$ e $AC > 2AB - AC = CF \geq 1$. Ou seja, a razão diagonal/lado é escrita no quadrado $EFGC$ com números naturais menores. Como o processo de construção pode ser repetido infinitamente, e cada vez com quadrados menores, os números naturais que aparecem na razão (3.3.3) devem diminuir infinitamente. Contradição. \square

3.4 Semelhança Espiral: Mapeando dois segmentos.

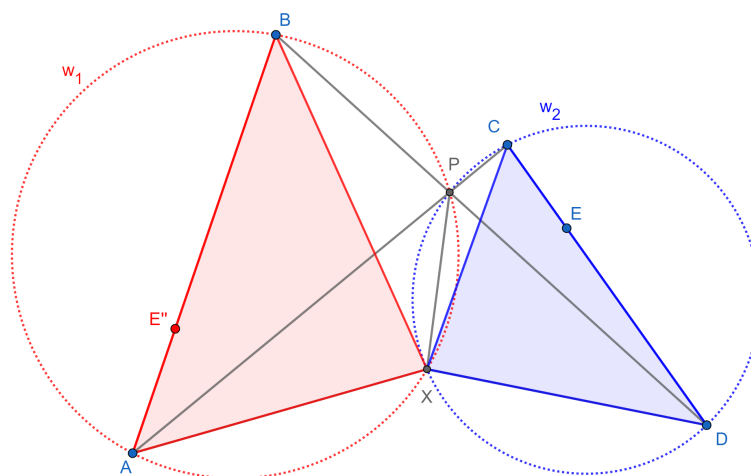
Problema 4. Dados os segmentos AB e CD encontrar para cada ponto $E \in CD$ seu correspondente $E'' \in AB$.

3.4.1 Solução

Semelhança Espiral (Spiral Similarity) são duas transformações: uma rotação, seguida de uma homotetia. A mesma já foi utilizada na construção com quadrados do Problema 2.

Traçam-se os segmentos ligando os vértices opostos. Na Figura 3.5 estes são AC e BD e marca-se o ponto $P = AC \cap BD$. Esboça-se a circunferência w_1 circunscrita ao triângulo PAB e a circunferência w_2 circunscrita ao triângulo PCD . Seja o ponto $X = (w_1 \cap w_2) \neq P$. Por construção, os quadriláteros $PXAB$ e $PXDC$ são cíclicos.

Figura 3.5: Construção inicial. Mapeando os segmentos AB e CD pelo uso da Semelhança Espiral. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Será provado pelo critério de semelhança ângulo-ângulo (AA) que $\triangle XAB \sim \triangle XCD$. Isto é, existe uma Semelhança Espiral entre eles. De fato,

$$\alpha = \angle XAB = 180^\circ - \angle BPX = \angle XPD.$$

Adicionalmente, por enxergarem a mesma corda XD vale que $\angle XPD = \angle XCD$. Com isso tem-se que:

$$\alpha = \angle XAB = \angle XCD.$$

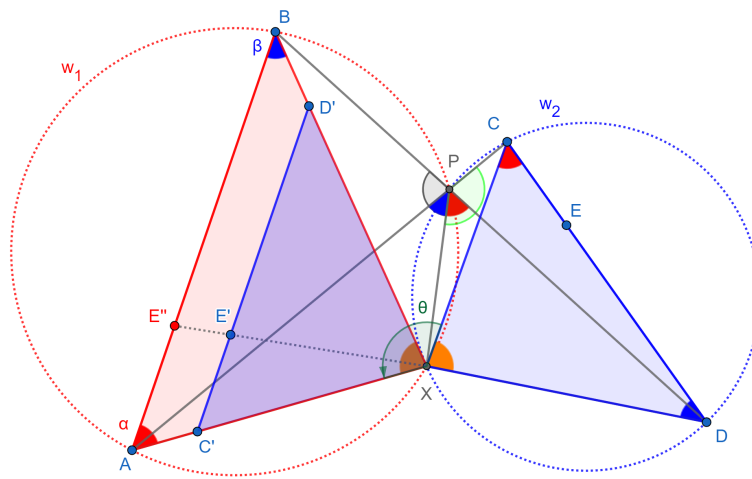
Analogamente,

$$\beta = \angle ABX = \angle APX = 180^\circ - \angle XPC = \angle CDX.$$

Ou seja, $\triangle XAB \sim \triangle XCD$ e $\angle BXA = \angle DXC$. Com uma rotação anti-horária, de centro no ponto X , e ângulo $\theta = \angle CXA$ o triângulo XCD é transformado em outro congruente $XC'D'$ e o ponto $E \in CD$ no ponto $E' \in C'D'$.

Uma homotetia com centro em X e fator $\frac{AX}{CX}$ transforma o $\triangle XC'D'$ no $\triangle XAB$ e o ponto E' no ponto E'' . Isto é, E'' é o correspondente em AB de E em CD . A Figura 3.6 mostra todos os elementos da construção.

Figura 3.6: Mapeando os segmentos AB e CD pelo uso da Semelhança Espiral. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

3.5 Homotetia.

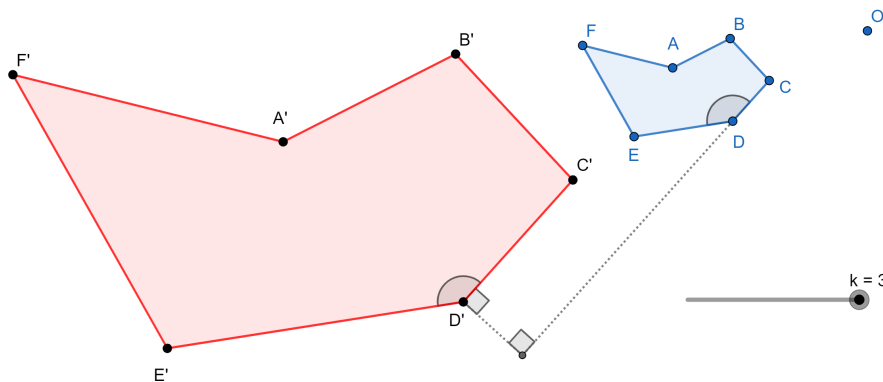
A palavra Homotetia é derivada do grego e significa Homo (similar, semelhante) e Tetia (posição). É uma transformação que se aplica ponto a ponto. Por exemplo, a homotetia de

centro O e razão k transforma o ponto A no ponto A' e vale que:

$$OA' = k \cdot OA.$$

Porém, também pode ser aplicada a formas mais complexas. A Figura 3.7 mostra uma homotetia para o polígono $ABCDEF$.

Figura 3.7: Homotetia do polígono $ABCDEF$ com centro O e fator k . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Toda homotetia preserva: ângulos, razões entre os segmentos de reta e o paralelismo. Exemplos: $\angle CDE = \angle C'D'E'$, $CD \parallel C'D'$ e

$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{A'F'}{AF} = k.$$

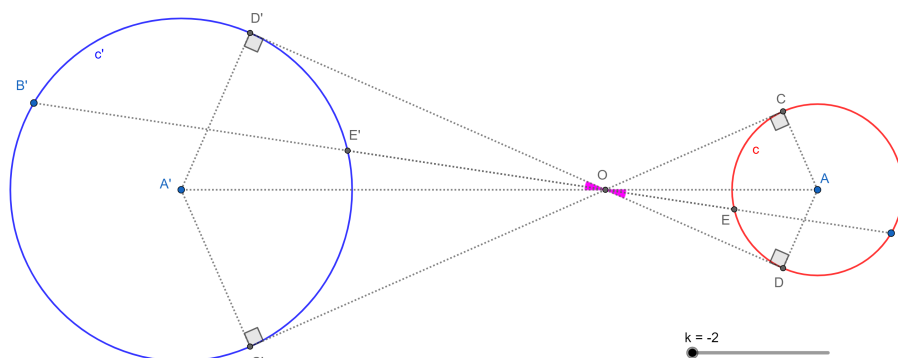
A área do polígono $A'B'C'D'E'F'$ é k^2 vezes a área do polígono $ABCDEF$.

3.6 Homotetia e centros de homotetia de circunferências.

A Figura 3.8 mostra uma homotetia para a circunferência c com centro em O e fator $k = -2$. Como $\angle ODA = \angle OD'A' = 90^\circ$ e $\angle DOA = \angle D'O'A'$ tem-se que $\triangle OAD \sim \triangle OA'D'$. Segue que

$$\frac{OD'}{OD} = \frac{A'D'}{AD} = k.$$

Figura 3.8: Homotetia para a circunferência c com centro em O e fator $k = -2$. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

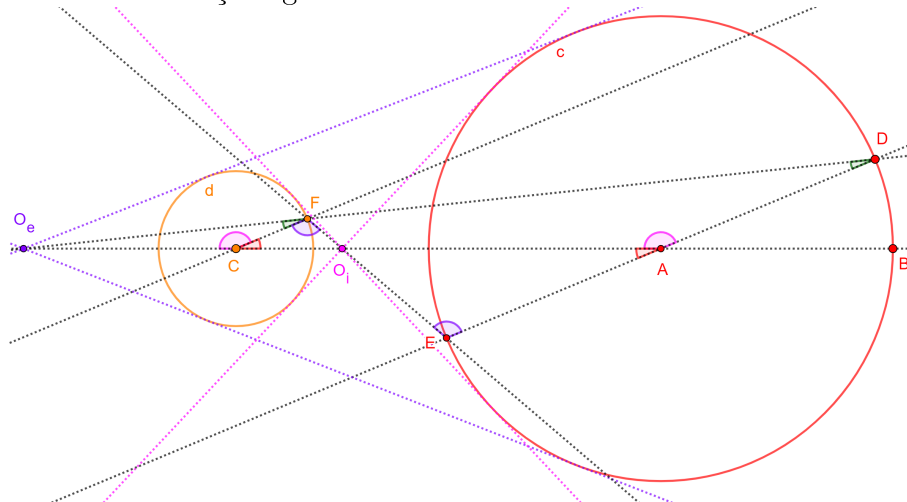
Os pontos B e B' e E e E' são chamados homólogos e os pontos B e E' e E e B' anti-homólogos.

3.7 Problema inverso: dadas duas circunferências encontrar os centros de homotetia.

Problema 5. *Dadas as circunferências c e d encontrar os centros de homotetia. Construir as tangentes comuns externas e internas.*

3.7.1 Solução

A Figura 3.9 mostra as construções geométricas do Problema 5. Posiciona-se um ponto $D \in c$, $D \notin AB$, traça-se a reta AD e marca-se o ponto $E = AD \cap c$. Passando por C traça-se uma reta paralela com a reta AD . Marca-se o ponto F na interseção com d .

Figura 3.9: Construções geométricas do Problema 5. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: Os autores.

Traça-se a reta EF e marca-se o ponto O_i na interseção com a reta AC . Analogamente, traça-se a reta DF e marca-se o ponto O_e na interseção com a reta AC .

Como $CF \parallel AD$ têm-se $\angle O_eFC = \angle O_eDA$ e $\angle O_eCF = \angle O_eAD$ (correspondentes). Logo, por AA os triângulos O_eFC e O_eDA são semelhantes. Do fato de AD e CF serem constantes independentemente da posição do ponto $D \in c$ segue que O_eC e O_eA são constantes. Ou seja, O_e é o ponto de homotetia externo das duas circunferências.

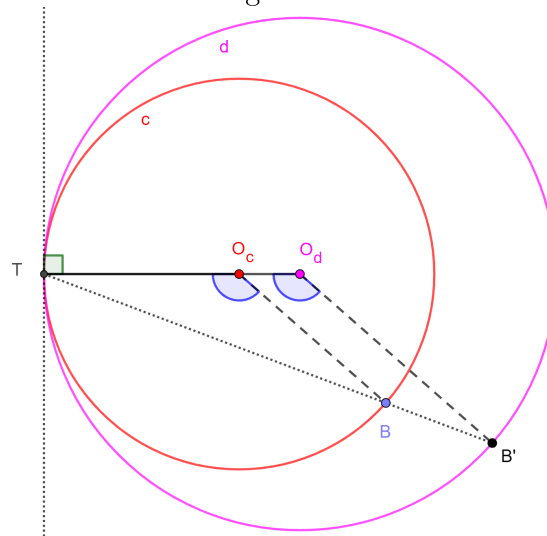
Analogamente, como $CF \parallel AE$ têm-se $\angle O_iFC = \angle O_iEA$ e $\angle O_iCF = \angle O_iAE$ (alternos internos). Com isso, O_i é o centro de homotetia interno de c e d .

Partindo de O_e é possível esboçar as duas retas tangentes externas comuns a c e d . Analogamente, com O_i traçam-se as duas retas tangentes internas comuns as duas circunferências.

3.8 Circunferências tangentes internamente.

A Figura 3.10 mostra o caso em que as circunferências c e d são tangentes internamente em T . Em particular, os pontos T , O_c e O_d são colineares. Elas são homotéticas com centro em T e fator $k = \frac{TO_d}{TO_c}$. Ou seja, qualquer ponto $B \in c$ tem imagem $B' \in d$ e vale que $TB' = k \cdot TB$ e $O_cB \parallel O_dB'$.

Figura 3.10: As circunferências c e d são tangentes internamente em T . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

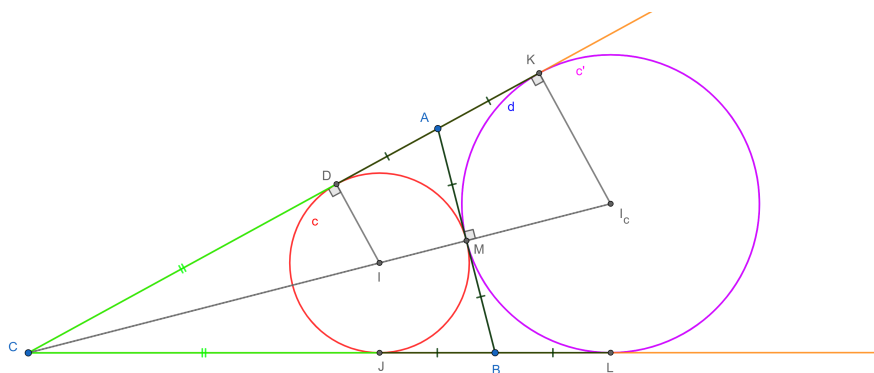
No caso em que as circunferências são tangentes externamente o ponto de tangência é o centro de homotetia interno.

Problema 6. *Construir uma circunferência homotética ao incírculo do $\triangle ABC$ e tangente externamente ao lado AB .*

3.8.1 Solução

Considera-se um triângulo ABC isósceles de base AB . Sejam $AB = c$, $BC = CA = b$, o semi-perímetro $p = \frac{2b+c}{2}$ e M ponto médio de AB . A semirreta CM é bissetriz do ângulo ACB e mediatriz do segmento AB . As circunferências c e d são inscritas e ex-inscritas no triângulo ABC , respectivamente. A Figura 3.11 mostra uma construção geométrica.

Figura 3.11: Guia para o Problema 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Das relações métricas para a bissetriz têm-se $CD = CJ = p - c$,

$$AD = AM = BJ = BM = BL = AK = AM = p - b$$

e $CK = CL = p$. Como $\angle CKI_c = \angle CDI = 90^\circ$ e $\angle I_cCK = \angle ICD$ (comum), segue que $\triangle CKI_c \sim \triangle CDI$. Logo,

$$\frac{KI_c}{DI} = \frac{CK}{CD} = \frac{p}{p - c},$$

$$\frac{KI_c}{DI} = \frac{2b + c}{2b - c}.$$

Isto é, com uma homotetia de c , com centro em C , e fator $\frac{2b+c}{2b-c}$ encontra-se $c' = d$.

3.9 Triângulos inversamente semelhantes, ilustrado com a transformação de inversão.

Os triângulos inversamente semelhantes ocorrem em diversos contextos, não necessariamente relacionados a uma transformação de inversão. Mas aproveita-se a oportunidade para introduzir esta.

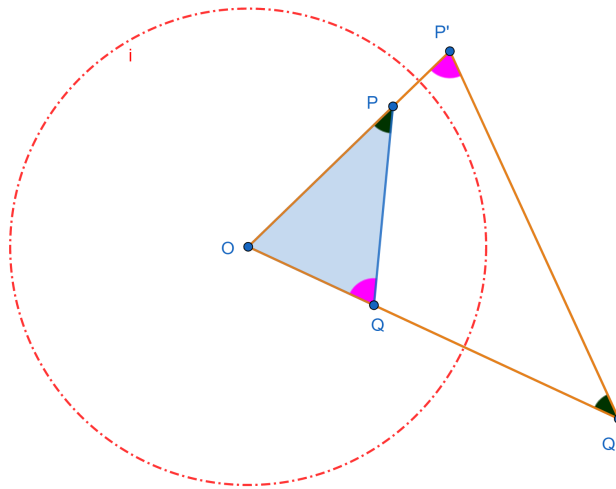
Definição 3. *Dado um plano l , uma circunferência $i \in l$, com centro O e raio r , e um ponto $P \in l$, o ponto P' que pertence a semirreta OP e satisfaz*

$$OP' \cdot OP = r^2$$

é chamado inverso de P em relação a i .

Proposição 10 (Propriedade dos inversos de dois pontos). *Considerar uma circunferência de inversão i de centro O e raio r (Figura 3.12). Sejam os pontos $P, Q, P' = \text{Inv}(P, i)$ e $Q' = \text{Inv}(Q, i)$ (todos diferentes de O). Então $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$ e*

$$Q'P' = \frac{r^2}{OP \cdot OQ} PQ.$$

Figura 3.12: Guia para a demonstração da Proposição 10. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: Os autores.

Demonstração. Temos,

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = r^2. \quad (3.9.1)$$

Isto é,

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}.$$

Como $\angle POQ = \angle Q'OP'$ (comum), pelo critério de semelhança LAL, segue que $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$. Com isto $\angle OPQ = \angle OQ'P'$ e $\angle OQP = \angle OP'Q'$. Também vale que

$$\frac{OQ}{OP'} = \frac{PQ}{Q'P'}.$$

Na equação anterior colocamos em evidência $Q'P'$ e de (3.9.1) usamos $OP' = \frac{r^2}{OP}$ para concluir que

$$Q'P' = \frac{r^2}{OP \cdot OQ} PQ.$$

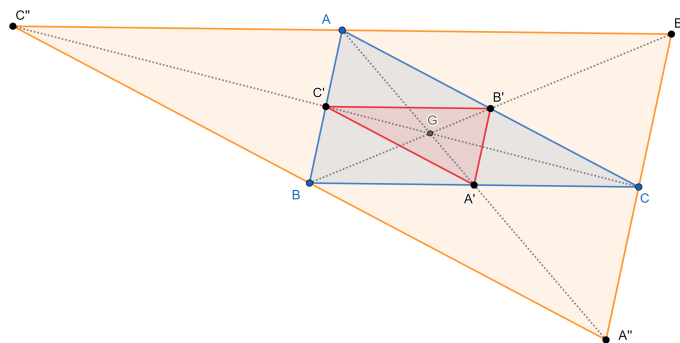
□

3.10 Duas homotetias com centro no Baricentro de um triângulo.

A homotetia do triângulo ABC com centro em G , baricentro do mesmo, e fator $-\frac{1}{2}$ é o triângulo $A'B'C'$ (medial), com vértices nos pontos médios dos lados do $\triangle ABC$.

A homotetia do triângulo ABC com centro em G e fator -2 é o triângulo $A''B''C''$. O $\triangle ABC$ é medial do $\triangle A''B''C''$. O ponto G é o baricentro comum dos triângulos ABC , $A'B'C'$ e $A''B''C''$. A Figura 3.13 mostra uma construção geométrica.

Figura 3.13: Duas homotetias com centro no Baricentro de um triângulo. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

O conteúdo desta aula está disponível em [vídeo](#).

Capítulo 4

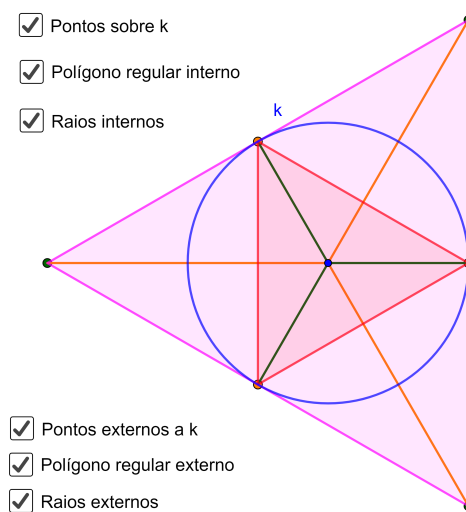
Ângulos e áreas na circunferência

4.1 Desafio inicial de construção: cálculo de π pelo método da exaustão.

O número π sempre inspirou uma certa estranheza. Resulta difícil para o professor explicar com detalhes como se calcula e para o estudante entender como aparece.

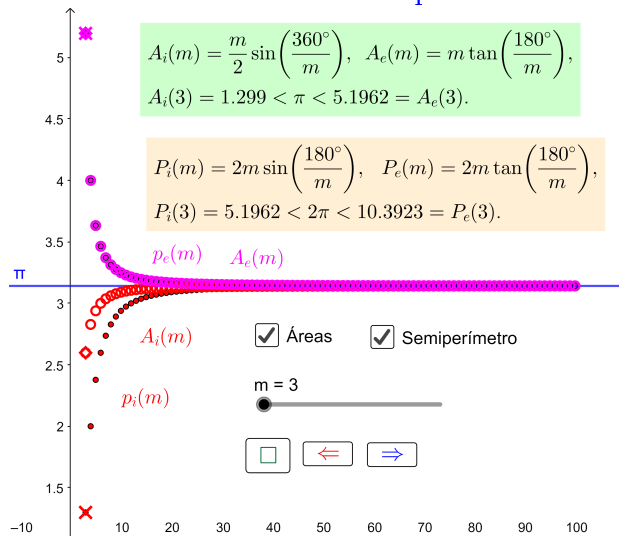
O desafio inicial é fazer uma construção análoga a Figura 4.1 e a Figura 4.2. Isto é, partindo de uma circunferência k de raio um (unitário ou trigonométrica) construir sequências de polígonos regulares inscritos (dentro) e circunscritos (fora). Encontrar as sequências das áreas e dos perímetros dos polígonos. Mostrar com um gráfico que estas convergem para o número π .

Figura 4.1: Cálculo de π . Sequências de polígonos regulares inscritos e circunscritos. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Figura 4.2: Cálculo de π . Gráfico das áreas e os semiperímetros das sequências de polígonos regulares inscritos e circunscritos. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

4.2 Ângulos na circunferência.

Seja uma circunferência k de centro O e raio r e dois pontos $A, B, D \in k$ (Figura 4.3). Quando o $\angle AOB = \theta$ é dado em radianos o comprimento do arco correspondente é:

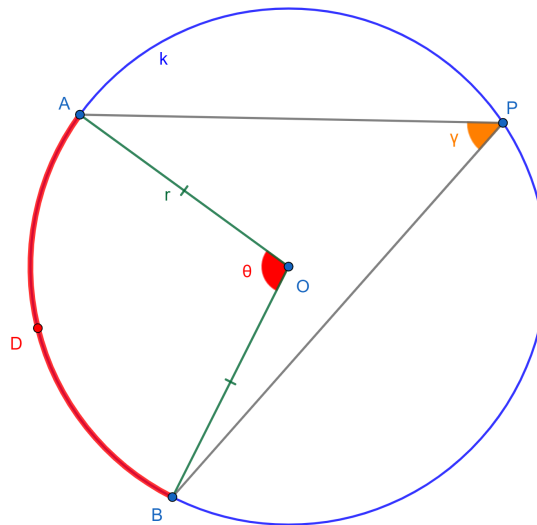
$$l_{\widehat{ADB}} = \theta \cdot r. \tag{4.2.1}$$

No caso particular em que $\theta = 2\pi$ a equação anterior resulta no comprimento da circunferência. O resultado em (4.2.1) também motiva a definição a seguir.

Definição 4. O arco \widehat{ADB} tem a mesma medida angular do ângulo central AOB (Figura 4.3). Ou seja:

$$\widehat{AB} = \angle AOB = \theta.$$

Figura 4.3: Medida angular de um arco coincide com a do ângulo central correspondente. Definição de ângulo inscrito em k . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Definição 5. Seja o ponto $P \in k$, diferente de A e B (Figura 4.3). O $\angle APB = \gamma$ é chamado inscrito em k .

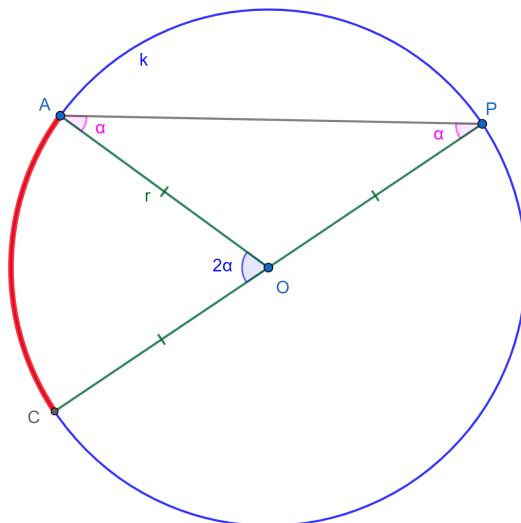
Proposição 11. A medida do ângulo central AOB é duas vezes a medida do ângulo inscrito APB correspondente ao mesmo arco:

$$\angle AOB = 2\angle APB.$$

Demonstração. A demonstração será dividida em três casos: i) $B = C$ e PC é diâmetro de k , ii) A e B estão em lados opostos em relação ao diâmetro CP e iii) A e B estão no mesmo lado em relação a reta OP .

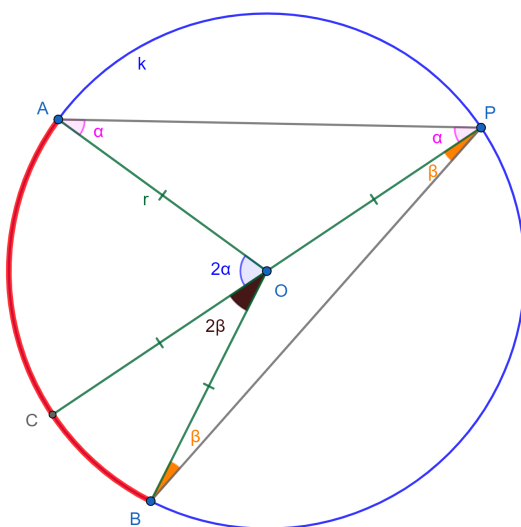
i) $B = C$ e PC é diâmetro de k (Figura 4.4). Como $OA = OP$ o $\triangle OAP$ é isósceles de base AP . Segue que os ângulos da base são congruentes: $\angle OAP = \angle OPA = \alpha$. Logo, $\angle AOC = 2\alpha$ por ser ângulo externo em O do $\triangle AOP$.

Figura 4.4: Caso i) $B = C$ e PC é diâmetro de k . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

ii) A e B estão em lados opostos em relação ao diâmetro CP (Figura 4.5). Como o $\triangle BOP$ é isósceles de base BP , segue que $\angle OBP = \angle OPB = \beta$. Logo, o ângulo externo em O ao $\triangle OPB$ é $\angle BOC = 2\beta$. Com isso, $\angle AOB = 2(\alpha + \beta) = 2\angle APB$.

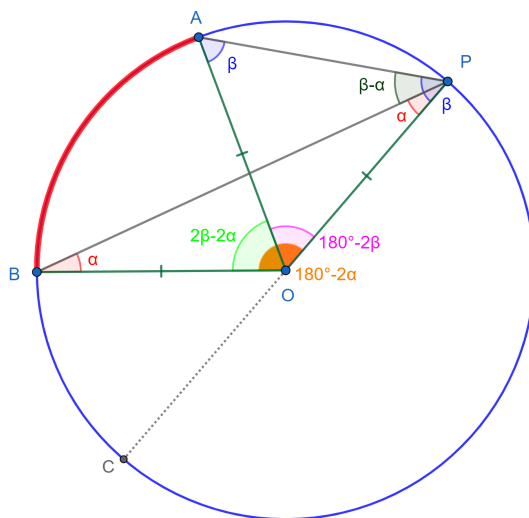


Fonte: Os autores.

Figura 4.5: Caso ii) A e B estão em lados opostos em relação ao diâmetro CP . Versão interativa [aqui](#).

iii) A e B estão no mesmo lado em relação a reta OP (Figura 4.6). O $\triangle OBP$ é isósceles de base BP , logo $\angle OBP = \angle OPB = \alpha$. Segue que $\angle POB = 180^\circ - 2\alpha$. O $\triangle OAP$ é isósceles de base AP , portanto $\angle OAP = \angle OPA = \beta$. Com isso $\angle POA = 180^\circ - 2\beta$. Adicionalmente, $\angle APB = \beta - \alpha$. Como $\angle AOB = 2\beta - 2\alpha$ conclui-se que $\angle AOB = 2\angle APB$.

Figura 4.6: Caso iii) A e B estão no mesmo lado em relação ao diâmetro CP . Versão interativa [aqui](#).

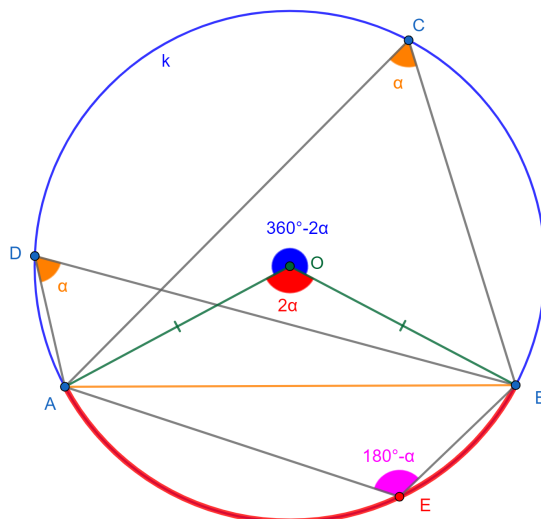


Fonte: Os autores.

□

Se os pontos D e C “enxergam” o mesmo arco menor \widehat{AB} ou a mesma corda AB de uma circunferência (Figura 4.7), então $\angle ADB = \angle ACB$. Ou seja, são dois ângulos inscritos com o mesmo ângulo central AOB . Reciprocamente, se os pontos $A, B, C,$ e D são tais que $\angle ADB = \angle ACB$, então os pontos são concíclicos. Isto é, pertencem a uma mesma circunferência.

Figura 4.7: Relação entre ângulos de quadriláteros cíclicos ou inscritíveis. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Se o ponto E (Figura 4.7) pertence ao arco menor \widehat{AB} , então ele “enxerga” o arco maior \widehat{AB} . O ângulo central correspondente ao arco maior \widehat{AB} é $360^\circ - \angle AOB$. Ou seja, $\angle AEB =$

$180^\circ - \angle ACB$. Pois os ângulos inscritos valem metade do central associado. Reciprocamente, se os pontos A , E , B , e C são tais que $\angle ACB = 180^\circ - \angle AEB$, então o quadrilátero $AEBC$ é cíclico ou inscritível.

Quando utiliza-se o termo “como ângulo orientado” isto significa que

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle (180^\circ - \alpha).$$

Com isso evita-se discutir dois casos separados de quadriláteros cíclicos. O ponto $E \in k$ (Figura 4.7) pode estar em qualquer posição, diferente de A e B , e vale que $\angle BEA = \angle ACB$.

Definição 6. Uma reta l é chamada tangente a uma circunferência k se l intersecta k em um único ponto. A reta é chamada secante se intersecta k em dois pontos.

Proposição 12. Seja uma circunferência k , de centro O e um ponto $A \in k$. Toda reta l perpendicular em A a um raio OA é tangente à k .

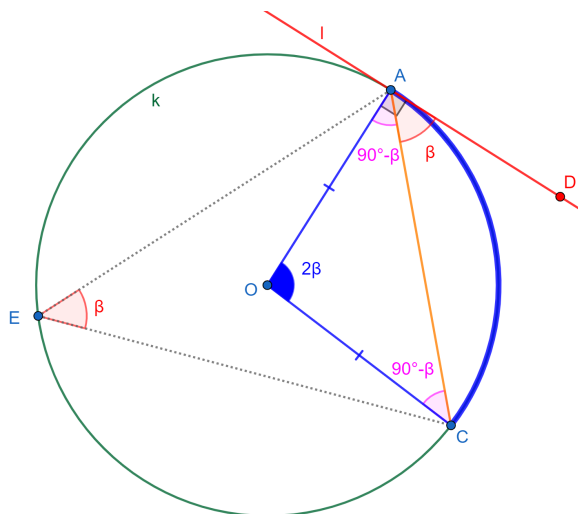
Demonstração. Suponha-se, por absurdo, que existe um ponto $B \neq A$ tal que $B \in l \cap k$. Como $OA = OB$, o $\triangle OAB$ é isósceles e $\angle OAB = 90^\circ = \angle OBA$. Contradição. \square

Também vale a recíproca. Ou seja, se l é tangente a k em A , então $OA \perp l$.

Definição 7. Um ângulo de segmento relativo a uma circunferência k é um ângulo que tem o vértice em k , um lado secante e outro lado tangente à k .

Proposição 13. Um ângulo de segmento é a metade do ângulo central correspondente (Figura 4.8).

Figura 4.8: Ângulo de segmento e sua relação com o ângulo central e inscrito. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. Seja uma circunferência k , de centro O e dois pontos $A, C \in k$ (Figura 4.8). A reta $l \perp OA$ e o ponto $D \in l$. O $\angle CAD = \beta$ é um ângulo de segmento. O $\angle CAO = 90^\circ - \beta$ por ser complementar. Como o $\triangle OAC$ é isósceles vale que $\angle ACO = 90^\circ - \beta$.

Pela soma dos ângulos no $\triangle AOC$ e encontra que $\angle AOC = 2\beta$. Ou seja, o ângulo central é duas vezes o ângulo de segmento: $\angle AOC = 2\angle CAD$. \square

Corolário 14. *Seja $E \in k$ um ponto que “enxerga” o arco menor \widehat{AC} (Figura 4.8). O ângulo inscrito é igual ao ângulo de segmento: $\angle AEC = \angle CAD = \beta$.*

Demonstração. Segue da Proposição 11 e da Proposição 13. \square

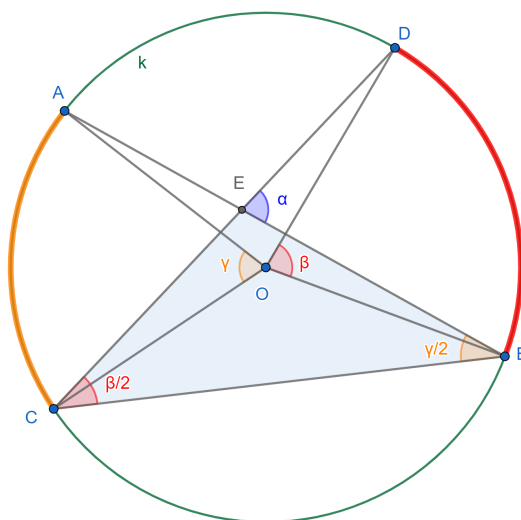
Ainda com referência na Figura 4.8, pode ser provado que se $\angle CAD = \angle AEC$, então $OA \perp l$.

Definição 8. *Um ângulo excêntrico interior é formado por duas cordas de uma circunferência k que intersectam-se em um ponto interior a k , diferente do centro.*

Proposição 15. *Seja uma circunferência k , de centro O , duas cordas AB e CD de k e o ponto $E = AB \cap CD$ (Figura 4.9). A medida do ângulo excêntrico interior BED é a semi-soma das medidas dos ângulos centrais correspondentes aos arcos \widehat{AC} e \widehat{BD} :*

$$\angle BED = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} = \frac{\angle AOC + \angle BOD}{2}.$$

Figura 4.9: Ângulo excêntrico interior. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. Sejam $\angle BED = \alpha$, $\angle BOD = \beta$ o ângulo central correspondente ao arco \widehat{BD} e $\angle AOC = \gamma$ o ângulo central correspondente ao arco \widehat{AC} (Figura 4.9). Os ângulos DCB e ABC

são inscritos em k e enxergam os arcos \widehat{BD} e \widehat{AC} , respectivamente. Segue que $\angle DCB = \frac{\beta}{2}$ e $\angle ABC = \frac{\gamma}{2}$. No $\triangle EBC$ o ângulo BED é externo, logo mede a soma dos internos não adjacentes:

$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

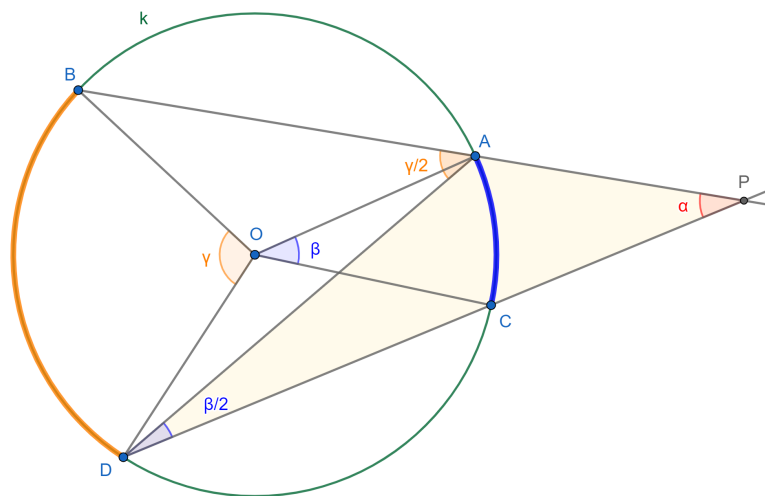
□

Definição 9. Um ângulo excêntrico exterior é formado por duas retas secantes de uma circunferência k que intersectam-se em um ponto exterior a k .

Proposição 16. Seja uma circunferência k , de centro O , quatro pontos $A, B, C, D \in k$ e o ponto $P = BA \cap DC$ externo a k (Figura 4.10). A medida do ângulo excêntrico exterior APC é a semi-diferença das medidas dos ângulos centrais correspondentes aos arcos \widehat{BD} e \widehat{AC} :

$$\angle APC = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} = \frac{\angle BOD - \angle AOC}{2}.$$

Figura 4.10: Ângulo excêntrico exterior. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. Sejam $\angle APC = \alpha$, $\angle AOC = \beta$ o ângulo central correspondente ao arco \widehat{AC} e $\angle BOD = \gamma$ o ângulo central correspondente ao arco \widehat{BD} (Figura 4.10). Os ângulos ADC e BAD são inscritos em k e enxergam os arcos \widehat{AC} e \widehat{BD} , respectivamente. Segue que $\angle ADC = \frac{\beta}{2}$ e $\angle BAD = \frac{\gamma}{2}$. No $\triangle ADP$ o ângulo BAD é externo, logo mede a soma dos internos não adjacentes:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2} + \alpha,$$

$$\alpha = \frac{\gamma - \beta}{2}.$$

□

4.3 Centro de Circunferência

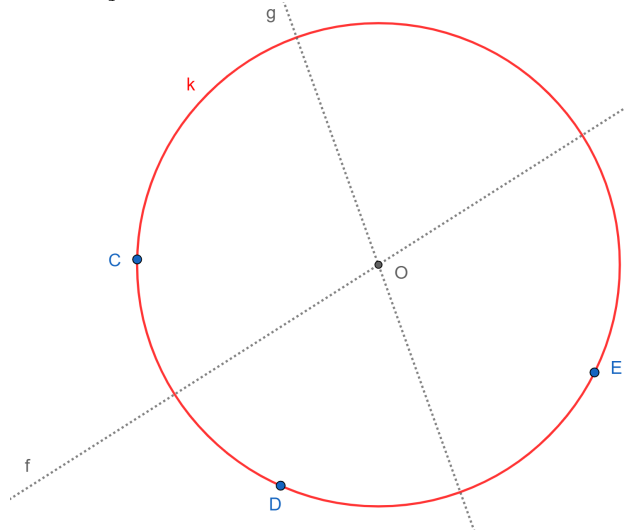
Exercício 1. *Seja uma circunferência na qual o centro no foi apagado. Encontrar o centro de forma precisa.*

4.3.1 Solução

A Figura 4.11 ilustra os passos da resolução.

1. Posicionar três pontos $C, D, E \in k$.
2. Construir a mediatriz f de C e D .
3. Construir a mediatriz g de D e E .
4. Batizar o centro $O = f \cap g$.

Figura 4.11: Determinação do centro da circunferência. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

4.4 Construção de circunferência tangente a uma reta e passando por um ponto dado.

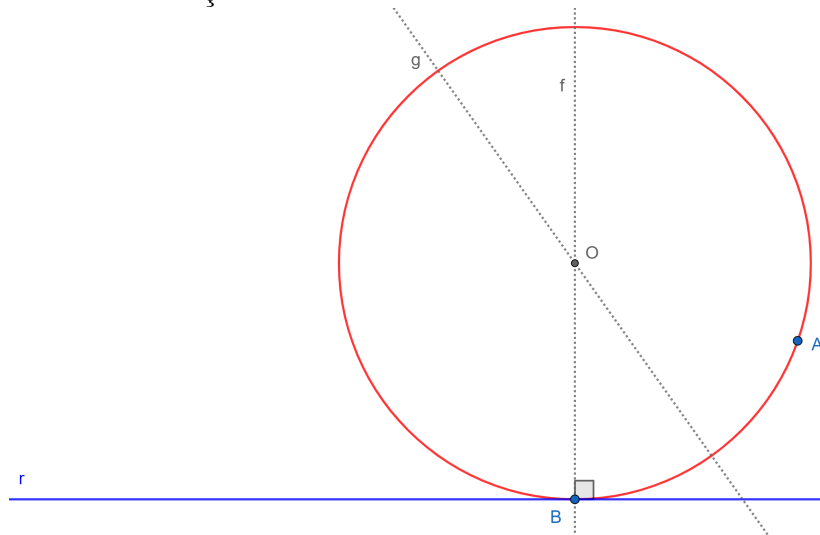
Exercício 2. *Dado um ponto A e uma reta r construir uma circunferência que seja tangente a r em B e passe por A .*

4.4.1 Solução

A Figura 4.12 ilustra os passos da resolução.

1. Construir uma perpendicular f a r passando por B .
2. Construir a mediatriz g dos pontos A e B .
3. Batizar o ponto $O = f \cap g$.
4. Construir a circunferência de centro em O e raio $R = OA = OB$.

Figura 4.12: Determinação do centro da circunferência. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

4.5 Solução do desafio do cálculo de π .

A Figura 4.13 mostra uma circunferência k de centro O e raio r . A área de um setor circular OAB com $\angle AOB = \theta$ é:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\theta r^2.$$

O comprimento do arco \widehat{AB} é:

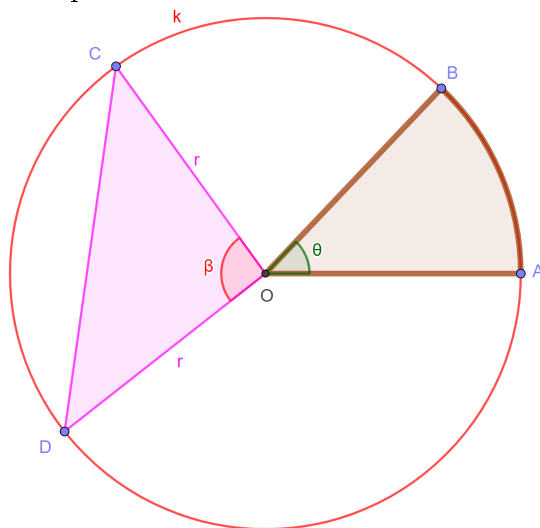
$$l_{\widehat{AB}} = \theta r.$$

No caso particular em que $\theta = 2\pi$ (uma volta completa) recuperam-se as fórmulas conhecidas:

$$S_k = \pi r^2,$$

$$l_k = P_k = 2\pi r.$$

Figura 4.13: Áreas e comprimentos numa circunferência. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Sejam os pontos $C, D \in k$ tais que $\angle COD = \beta$. A área do $\triangle CDO$ calcula-se como:

$$S_{\triangle CDO} = \frac{1}{2}r^2 \text{sen}(\beta). \quad (4.5.1)$$

Para o cálculo do comprimento da corda CD utiliza-se inicialmente a Lei dos Cossenos no $\triangle CDO$:

$$\begin{aligned} l_{CD}^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2 \cos(\beta), \\ l_{CD}^2 &= 2r^2(1 - \cos(\beta)). \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Pela identidade trigonométrica do cosseno do ângulo duplo e fundamental vale:

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right), \\ \cos(\beta) &= 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right), \\ 1 - \cos(\beta) &= 2\text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Substituindo (4.5.3) em (4.5.2) e simplificando encontra-se:

$$l_{CD} = 2r \text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right). \quad (4.5.4)$$

Para os polígonos regulares m -ésimos, inscrito e circunscrito, o ângulo central (definido

pelos raios a dois vértices consecutivos) pode ser escrito como:

$$\beta = \frac{360^\circ}{m}. \tag{4.5.5}$$

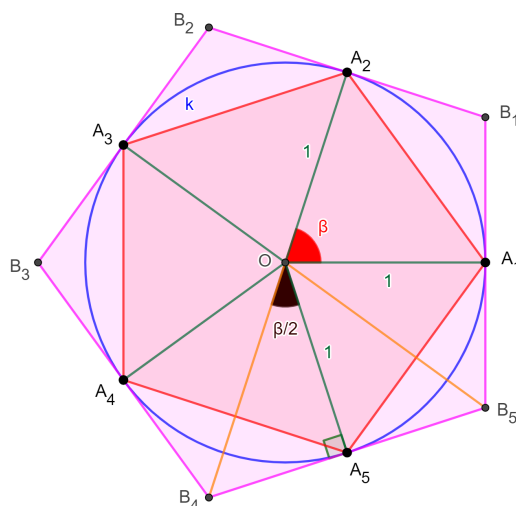
No caso do polígono regular inscrito (interno) o raio é $r_i = 1$. Substituindo (4.5.5) em (4.5.1) e (4.5.4) e multiplicando por m encontram-se a área e o perímetro:

$$A_i(m) = \frac{m}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{360^\circ}{m} \right). \tag{4.5.6}$$

$$P_i(m) = 2m \operatorname{sen} \left(\frac{180^\circ}{m} \right). \tag{4.5.7}$$

A Figura 4.14 mostra o pentágono regular inscrito e circunscrito a uma circunferência unitária k . Neste caso $m = 5$ e $\beta = 72^\circ = \angle A_1OA_2$.

Figura 4.14: Pentágono regular inscrito e circunscrito a uma circunferência unitária k . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Como o polígono circunscrito é tangente a k vale $OA_5 \perp B_4B_5$ e $\angle B_4OA_5 = \frac{\beta}{2}$. De $OA_5 = r_i = 1$ segue que

$$B_4A_5 = A_5B_5 = \tan \left(\frac{\beta}{2} \right).$$

A área do pentágono $B_1B_2B_3B_4B_5$ é:

$$A_e(5) = 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot \tan(36^\circ).$$

Conjetura-se que a área do polígono circunscrito (externo) m -ésimo é:

$$A_e(m) = m \tan \left(\frac{180^\circ}{m} \right). \quad (4.5.8)$$

Como

$$B_4 B_5 = 2 \tan \left(\frac{\beta}{2} \right),$$

conjetura-se que o perímetro do polígono circunscrito m -ésimo será:

$$P_e(m) = 2m \tan \left(\frac{180^\circ}{m} \right). \quad (4.5.9)$$

Portanto, a área e o perímetro de uma circunferência de raio um podem ser delimitadas inferiormente e superiormente pelo uso das equações (4.5.6), (4.5.7), (4.5.8) e (4.5.9):

$$A_i(m) = \frac{m}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{360^\circ}{m} \right) < \pi < m \tan \left(\frac{180^\circ}{m} \right) = A_e(m),$$

$$P_i(m) = 2m \operatorname{sen} \left(\frac{180^\circ}{m} \right) < 2\pi < 2m \tan \left(\frac{180^\circ}{m} \right) = P_e(m).$$

Nas desigualdades anteriores foi definida a área da circunferência unitária como π e o perímetro como 2π . Este procedimento, conhecido como método da exaustão, pode ser usado para estimar π . Quanto maior o valor de m mais precisa a estimativa.

Existem outras sequências que também permitem calcular o valor de π . Uma delas é pela utilização da [série de Maclaurin da função arco-tangente](#):

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right], \quad x \in (-1, 1].$$

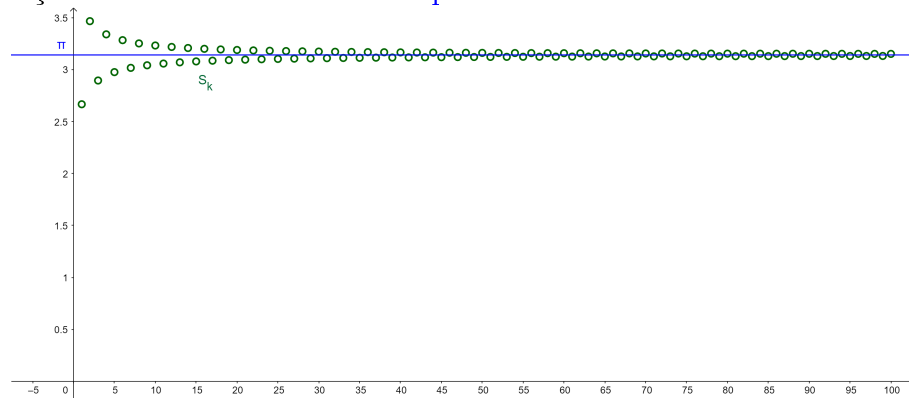
Como $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ estima-se:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2n+1} \right] = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

$$S_k = 4 \sum_{n=0}^k \left[\frac{(-1)^n}{2n+1} \right] \approx \pi.$$

A Figura 4.15 mostra um gráfico de S_k como função de k .

Figura 4.15: Estimativa de π utilizando a série de Maclaurin da função arco-tangente. Gráfico de S_k como função de k . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

O conteúdo desta aula está disponível em [vídeo](#).

Capítulo 5

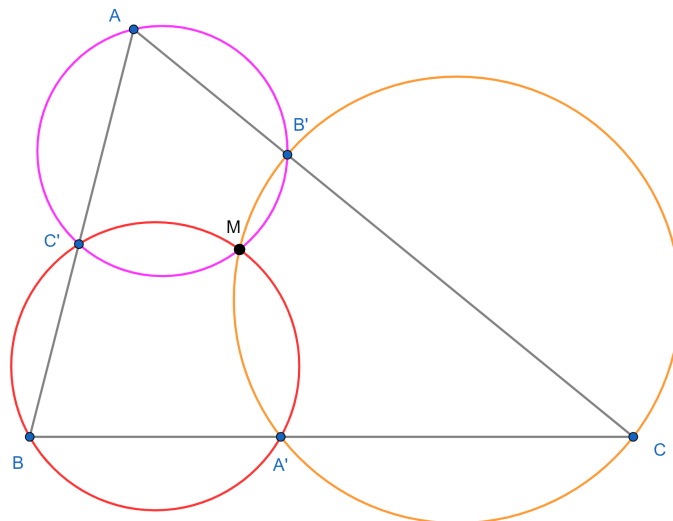
Teorema de Miquel, Conjugados Isogonais e Triângulo Pedal

5.1 Teorema de Miquel para triângulos

Teorema 17 (Teorema de Miquel para triângulos). *Seja ABC um triângulo, com pontos arbitrários A' , B' e C' nos lados BC , CA e AB , respectivamente. Trace as circunferências circunscritas (círculos de Miquel) aos triângulos $AB'C'$, $BA'C'$ e $CA'B'$. As três circunferências interceptam-se num único ponto M , o ponto de Miquel.*

A Figura 5.1 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 5.1: Construção geométrica inicial do Teorema 17. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. Caso M no interior do $\triangle ABC$. Seja o ponto M a segunda interseção dos circuncírculos aos triângulos $BA'C'$ e $CA'B'$. Queremos provar que o circuncírculo do $\triangle AB'C'$

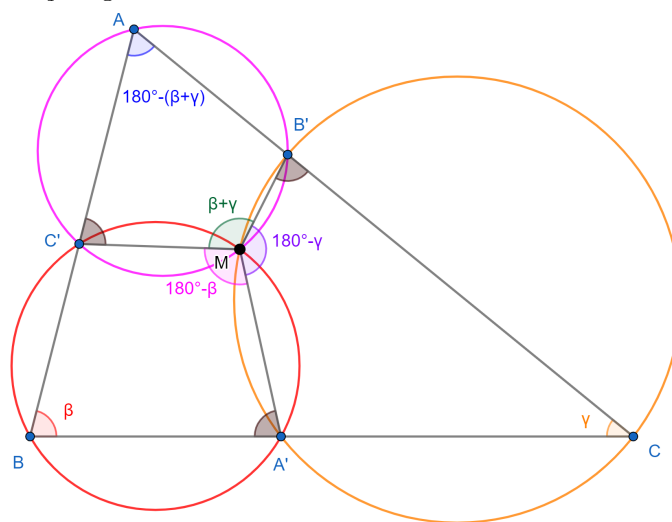
intercepta aos outros dois em M . Sejam $\angle ABC = \beta$ e $\angle BCA = \gamma$. Como os quadriláteros $MC'BA'$ e $MA'CB'$ são cíclicos vale que $\angle C'MA' = 180^\circ - \beta$ e $\angle B'MA' = 180^\circ - \gamma$.

A soma dos ângulos internos no $\triangle ABC$ implica que $\angle BAC = 180^\circ - (\beta + \gamma)$. Por outro lado, a soma dos ângulos em torno ao ponto M permite calcular o $\angle C'MB' = \beta + \gamma$. Do resultado anterior conclui-se que o quadrilátero $AC'MB'$ é inscrivível. Logo, o ponto M pertence ao circuncírculo do $\triangle AB'C'$. Como os quadriláteros $BA'MC'$, $CB'MA'$ e $AC'MB'$ são cíclicos também vale que $\angle AC'M = \angle BA'M = \angle MB'C$.

Quando M está no exterior do $\triangle ABC$ o teorema também é válido, mas isso será demonstrado no Teorema 19. □

A Figura 5.2 mostra uma construção geométrica final para o Teorema 17.

Figura 5.2: Construção geométrica final para o Teorema 17. Versão interativa [aqui](#).

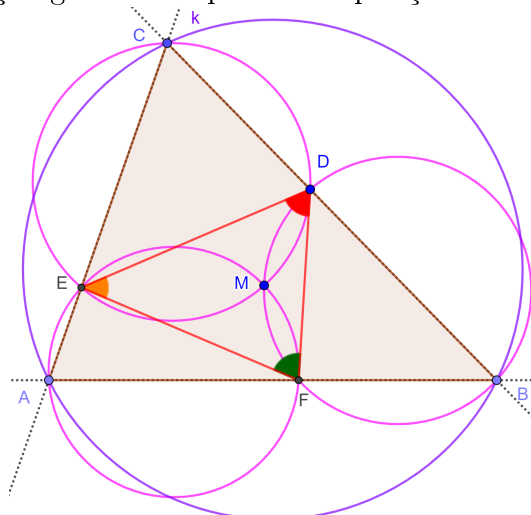


Fonte: Os autores.

Proposição 18 (Recíproca de Miquel para triângulos). *Dados o $\triangle ABC$ e os pontos M e $D \in BC$ é possível encontrar os pontos $F \in AB$ e $E \in AC$ tais que os quadriláteros $AEMF$, $ECDM$ e $MFBD$ são cíclicos. Para M fixo e o ponto D variando na reta BC todos os $\triangle DEF$ são semelhantes.*

A Figura 5.3 mostra uma construção geométrica para a Proposição 18.

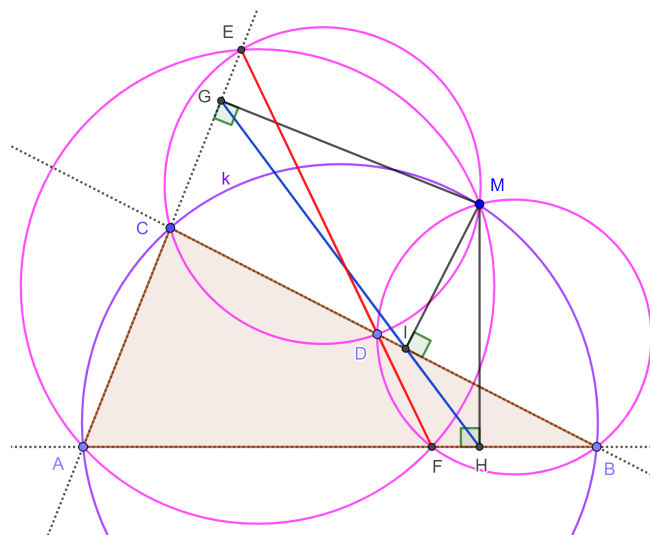
Figura 5.3: Construção geométrica para a Proposição 18. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Seja k o circuncírculo do $\triangle ABC$. A Figura 5.4 compara o triângulo Pedal com o triângulo de Miquel no caso em que $M \in k$. Os dois são diferentes e degenerados. Os pontos D , E e F , interseções das circunferências de Miquel com os lados do $\triangle ABC$, são colineares. Adicionalmente, quando $M \in k$ os pontos G , H e I , projeções ortogonais do ponto M sobre os lados do $\triangle ABC$, são colineares.

Figura 5.4: Comparação do triângulo Pedal com o triângulo de Miquel no caso em que M pertence ao circuncírculo do $\triangle ABC$. Os dois são diferentes e degenerados. Versão interativa [aqui](#).



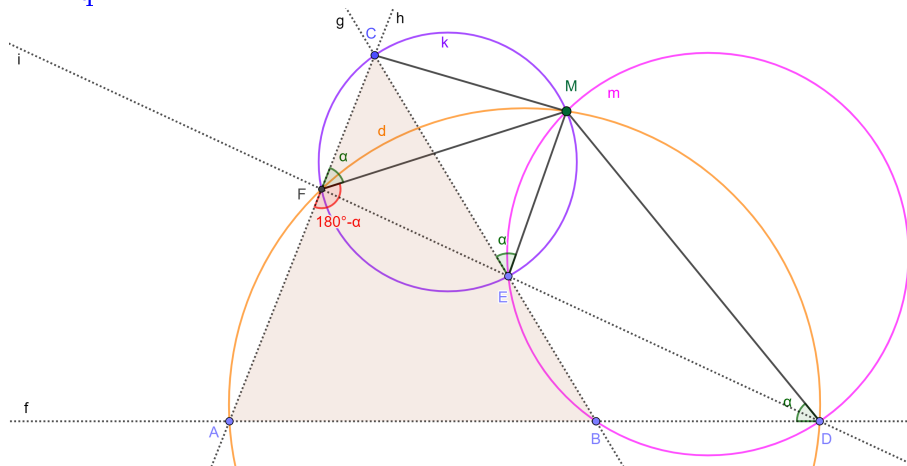
Fonte: Os autores.

Teorema 19 (Teorema de Miquel para quadrilátero completo). *Sejam f, g, h, i quatro retas coplanares, de modo que não há duas paralelas nem três concorrentes. Os circuncírculos dos*

quatro triângulos determinados pelas quatro retas passam por um mesmo ponto, denominado ponto de Miquel.

A Figura 5.5 mostra uma construção geométrica para a demonstração que a circunferência d passa por M .

Figura 5.5: Construção geométrica para a demonstração que a circunferência d passa por M . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. Sejam $A = f \cap h$, $B = f \cap g$, $C = g \cap h$, $D = f \cap i$, $E = g \cap i$ e $F = h \cap i$ (Figura 5.4). Seja M a interseção do circuncírculo m do $\triangle BDE$ com o circuncírculo k do $\triangle CEF$.

O teorema de Miquel pode ser aplicado ao triângulo ABC e os pontos $D \in AB$, $E \in BC$ e $F \in AC$. Neste caso, por definição, os pontos D , E e F são colineares. Mas isso não é usado na primeira parte da demonstração.

Como o quadrilátero $MDBE$ é cíclico temos:

$$\angle MDA = \angle MDB = \angle CEM = \alpha.$$

Do quadrilátero inscrito $MCFE$ segue $\angle CEM = \angle CFM$. Logo,

$$\angle AFM = 180^\circ - \alpha.$$

Com isto o quadrilátero $AFMD$ é cíclico e a circunferência d circunscrita ao $\triangle AFD$ passa por M .

Devido a colinearidade dos pontos D , E e F , o teorema de Miquel pode ser aplicado também ao triângulo ADF e os pontos $C \in AF$, $B \in AD$ e $E \in DF$ (Figura 5.4). Seja

$\angle FCM = \beta$. Do quadrilátero cíclico $FCME$ segue que

$$\angle MED = \angle FCM = \beta.$$

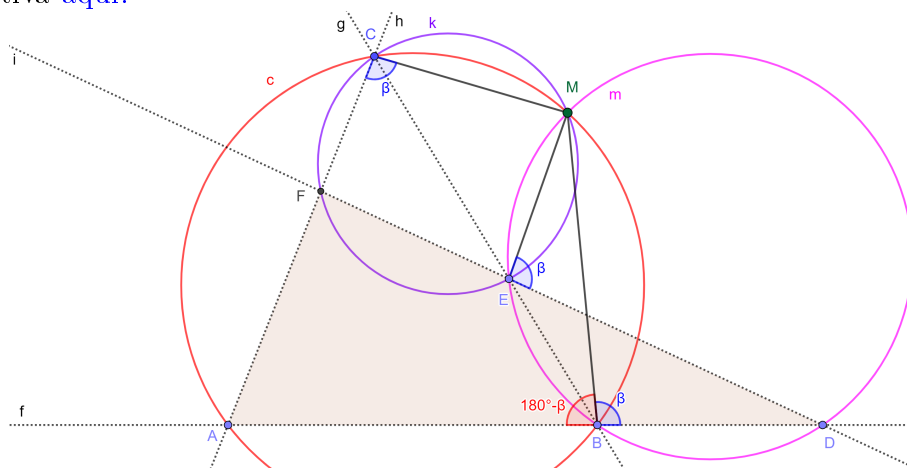
Adicionalmente, da circunferência m e a corda MD tem-se que

$$\angle MED = \angle MBD = \beta.$$

Logo, $\angle MBA = 180^\circ - \beta$. Pelo fato de $\angle ACM + \angle ABM = 180^\circ$ a circunferência c , circunscrita ao $\triangle ABC$, também passa por M . \square

A Figura 5.6 mostra uma construção geométrica para a demonstração que a circunferência c passa por M .

Figura 5.6: Construção geométrica para a demonstração que a circunferência c passa por M . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

5.2 Conjugados isogonais

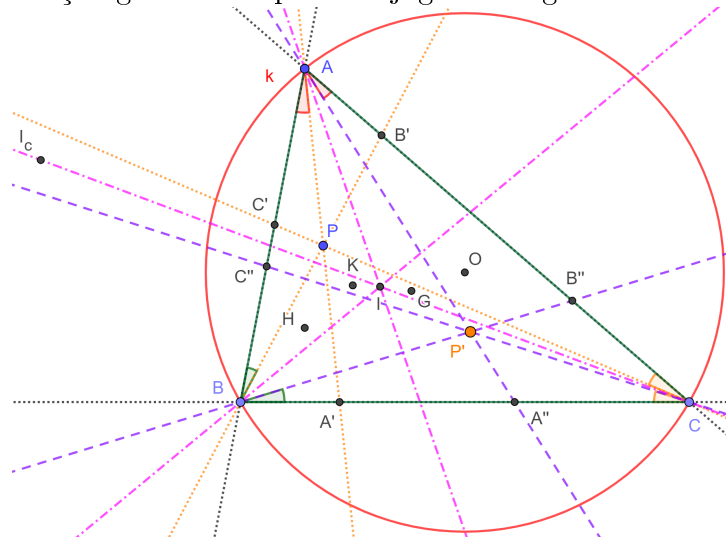
Definição 10. *Sejam um triângulo ABC e k seu circuncírculo. O conjugado isogonal P' do ponto $P \notin k$ é obtido refletindo as retas PA , PB e PC em relação às bissetrizes internas de ABC , que passam por A , B e C , respectivamente. Isto é, P' é tal que valem as igualdades de ângulos a seguir (Figura 5.7):*

$$\angle BAP = \angle CAP',$$

$$\angle ABP = \angle CBP',$$

$$\angle ACP = \angle BCP'.$$

Figura 5.7: Construção geométrica para conjugados isogonais. Versão interativa [aqui](#).



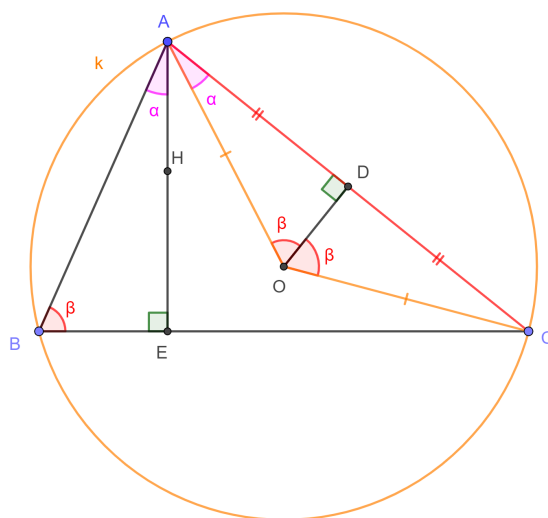
Fonte: Os autores.

Os conjugados isogonais (Figura 5.7) de alguns pontos notáveis são:

- Do incentro I é ele mesmo.
- Dos ex-incentros I_a , I_b e I_c também são eles mesmos.
- Do circuncentro O é o ortocentro H e vice-versa (Proposição 20).
- Do baricentro G é o ponto K , chamado simedianos ou de Lemoine, e vice-versa (Proposição 26).

Proposição 20. *O circuncentro O e o ortocentro H são conjugados isogonais (Figura 5.8).*

Figura 5.8: Construção geométrica para provar que circuncentro O e o ortocentro H são conjugados isogonais. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. Como O é o centro da circunferência k , circunscrita ao $\triangle ABC$, então:

$$\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta.$$

Isto é, o ângulo central é duas vezes o ângulo inscrito (Figura 5.8).

Por construção, $AD = DC$, $AO = OC$ e $OD \perp AC$. Logo, por lado-lado-lado vale que:

$$\triangle ADO \cong \triangle CDO$$

e $\angle DOA = \angle DOC = \beta$. Tem-se que $H \in AE$ e $AE \perp BC$. Segue pelo critério ângulo-ângulo que:

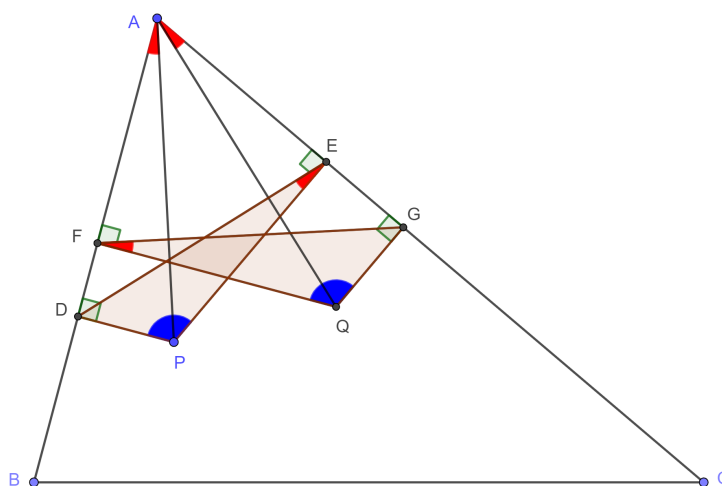
$$\triangle ADO \sim \triangle AEB$$

e $\angle DAO = \angle EAB = \alpha$. Em outras palavras, as retas AO e AE são simétricas em relação a bissetriz ao $\angle BAC$. Uma construção análoga pode ser feita partindo dos outros dois vértices. \square

Lema 21 (Critério de isogonalidade relativo a um vértice). *Sejam um $\triangle ABC$, dois pontos P e Q e D e E (F e G) as projeções ortogonais de P (Q) sobre os lados AB e AC , respectivamente (Figura 5.9). As retas AP e AQ são isogonais se, e somente se,*

$$\frac{PD}{PE} = \frac{QG}{QF}.$$

Figura 5.9: Critério de isogonalidade relativo a um vértice. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. Inicia-se supondo que AP e AQ são isogonais (Figura 5.9). Isto é,

$$\angle PAB = \angle QAC = \alpha.$$

Como $\angle ADP = \angle AEP = 90^\circ$ o quadrilátero $ADPE$ é inscritível e

$$\angle DEP = \angle DAP = \alpha.$$

Analogamente, como

$$\angle AFQ = \angle AGQ = 90^\circ$$

o quadrilátero $AFQG$ é cíclico e

$$\angle GFQ = \angle GAQ = \alpha.$$

Adicionalmente,

$$\angle DPE = 180^\circ - \angle A = \angle GQF = \beta.$$

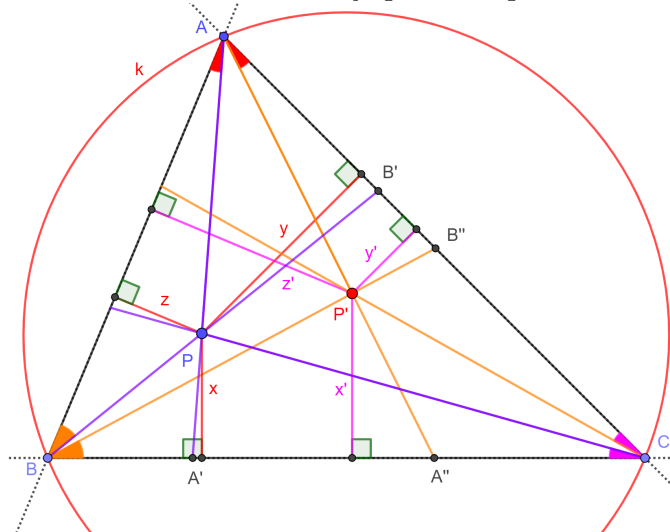
Pelo critério de semelhança ângulo-ângulo segue que $\triangle DPE \sim \triangle GQF$. Logo,

$$\frac{PD}{PE} = \frac{QG}{QF}.$$

Revertendo os passos prova-se a recíproca. □

Teorema 22 (Teorema fundamental dos conjugados isogonais). *Dado um triângulo ABC , k seu circuncírculo e três cevianas AA' , BB' e CC' que concorrem em um ponto $P \notin k$, as cevianas isogonais a elas AA'' , BB'' e CC'' , obtidas através da reflexão em relação às bissetrizes internas, são concorrentes no conjugado isogonal P' (Figura 5.10).*

Figura 5.10: Teorema fundamental dos conjugados isogonais. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. Sejam x , y e z as distâncias de P aos lados BC , CA e AB , respectivamente (Figura 5.10). Analogamente, Sejam x' , y' e z' as distâncias de P' aos lados BC , CA e AB , respectivamente.

Supondo que $AA'' \cap BB'' = P'$, quer-se provar que $BB'' \cap CC'' = P'$. Como P e P' são conjugados isogonais, pela ida do Lema 21, relativo ao vértice A vale que

$$\frac{z}{y} = \frac{y'}{z'} \Leftrightarrow zz' = yy',$$

e relativo ao vértice B

$$\frac{z}{x} = \frac{x'}{z'} \Leftrightarrow zz' = xx'.$$

Segue que $yy' = xx' \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{x'}{y'}$. Ou seja, pela volta do Lema 21, têm-se:

$$BB'' \cap CC'' = P'.$$

Logo,

$$AA'' \cap BB'' \cap CC'' = P'.$$

□

Proposição 23. *As cevianas isogonais AA'' , BB'' e CC'' são paralelas se, e somente se, P está sobre o circuncírculo k do $\triangle ABC$. Nesse caso, o conjugado isogonal P' é um ponto do infinito.*

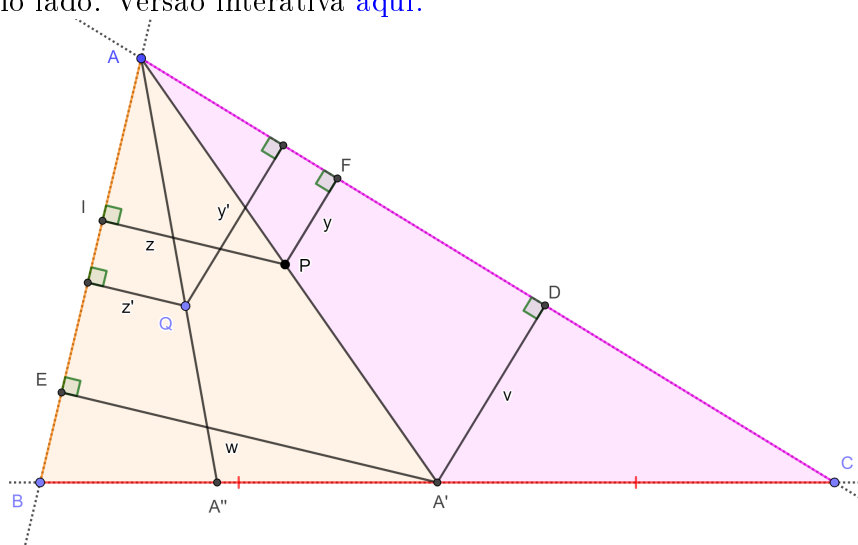
Definição 11. *As simedianas de um triângulo são as cevianas isogonais a suas medianas. As simedianas concorrem no ponto simediano K (ou de Lemoine).*

Proposição 24 (Distância da simediana a dois lados). *Considera-se um $\triangle ABC$ e um ponto Q que pertence a simediana AA'' . Sejam y' e z' as distâncias do ponto Q aos lados CA e AB , respectivamente (Figura 5.11). Então vale:*

$$\frac{z'}{y'} = \frac{AB}{AC}.$$

Isto é, a distância de um ponto sobre a simediana a um lado é proporcional ao comprimento do mesmo lado.

Figura 5.11: A distância de um ponto sobre a simediana a um lado é proporcional ao comprimento do mesmo lado. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. Como Q está sobre a simediana a reflexão dele, relativo a bissetriz interna em A , isto é, o ponto P , deve estar sobre a mediana AA' (Figura 5.11). Logo, A' é o ponto médio de BC . Sejam y e z (v e w) as distâncias do ponto P (A') aos lados CA e AB , respectivamente. Pelo Lema 21 vale que:

$$\frac{z'}{y'} = \frac{y}{z}. \tag{5.2.1}$$

Pela semelhança dos pares de triângulos APF e $AA'D$ e API e $AA'E$ encontra-se:

$$\frac{y}{v} = \frac{AP}{AA'} = \frac{z}{w}.$$

Ou seja,

$$\frac{y}{z} = \frac{v}{w}. \tag{5.2.2}$$

Substituindo (5.2.2) em (5.2.1) tem-se:

$$\frac{z'}{y'} = \frac{v}{w}. \tag{5.2.3}$$

Como AA' é a mediana do $\triangle ABC$, relativa ao segmento BC , vale a igualdade de áreas:

$$[ABA'] = \frac{1}{2}AB \cdot w = \frac{1}{2}AC \cdot v = [ACA'].$$

Segue que:

$$\frac{v}{w} = \frac{AB}{AC}. \tag{5.2.4}$$

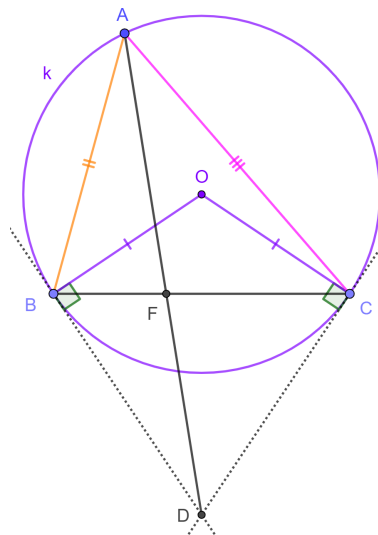
Substituindo (5.2.4) em (5.2.3) encontra-se:

$$\frac{z'}{y'} = \frac{AB}{AC}.$$

□

Proposição 25 (Construção alternativa de simediana). *Seja D a interseção das retas tangentes ao circuncírculo k do triângulo ABC por B e C . Então a reta AD contém a simediana AF que passa por A (Figura 5.12).*

Figura 5.12: Construção alternativa de simediana. Versão interativa [aqui](#).

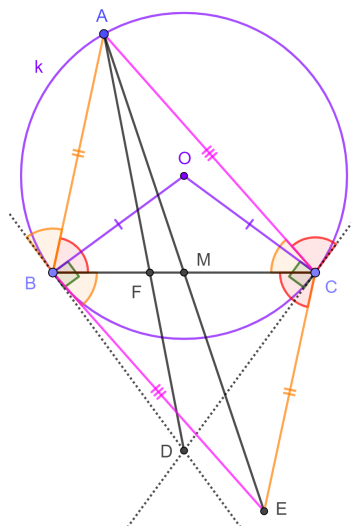


Fonte: Os autores.

Demonstração. Construir o paralelogramo $ABEC$. Por alternos entre paralelas, $\angle BCE = \angle ABC$ e $\angle CBE = \angle BCA$ (Figura 5.13). Seja o ponto M a interseção das diagonais AE e BC do paralelogramo $ABEC$. Com isso, AM é mediana.

O ângulo entre AC e CD , pela tangência, é igual ao inscrito $\angle ABC$. Assim, as retas CD e CE são conjugadas isogonais respeito a bissetriz interna no vértice C . Analogamente, as retas BD e BE são conjugadas isogonais respeito a bissetriz interna no vértice B . Logo, pelo Teorema 22 as retas AD e AE são conjugadas isogonais respeito a bissetriz interna no vértice A . O resultado segue. \square

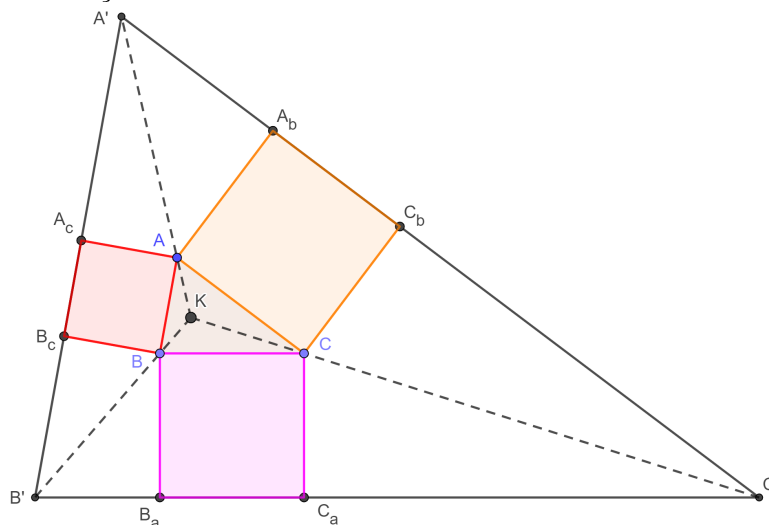
Figura 5.13: Construção alternativa de simediana, demonstração. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Proposição 26 (Construção alternativa do simediano do $\triangle ABC$). *Construir quadrados ABB_cA_c , BCC_aB_a e CAA_bC_b externamente sobre os lados do triângulo ABC . Prolongar A_cB_c , B_aC_a e C_bA_b para obter o triângulo $A'B'C'$. Então as retas AA' , BB' e CC' concorrem no ponto simediano K de ABC (Figura 5.14).*

Figura 5.14: Construção alternativa do simediano do $\triangle ABC$. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. Como os pares de segmentos AB e $A'B'$, BC e $B'C'$ e CA e $C'A'$ são paralelos, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes (Figura 5.14). Seja k a razão de semelhança:

$$k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Também pelo paralelismo citado anteriormente os pares de triângulos KAB e $KA'B'$, KBC e $KB'C'$ e KCA e $KC'A'$ são semelhantes e com a mesma razão k . Sejam k_a , k_b e k_c as distâncias do ponto simediano K aos lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$, respectivamente (Figura 5.14 e Figura 5.15). Logo, a proporcionalidade das alturas em relação ao vértice K pode ser escrita como:

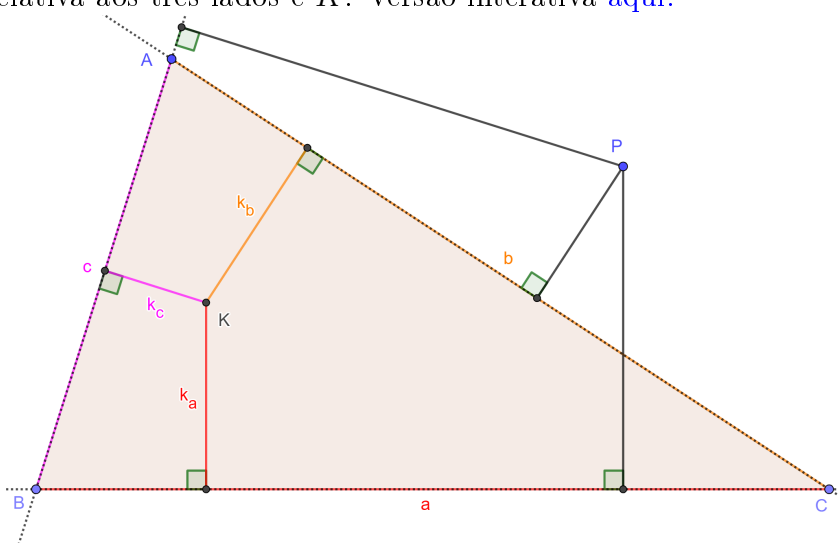
$$\frac{k_a}{k_a + a} = \frac{k_b}{k_b + b} = \frac{k_c}{k_c + c} = k.$$

A equação anterior pode ser reescrita como:

$$\frac{k_a}{a} = \frac{k_b}{b} = \frac{k_c}{c} = \frac{k}{1 - k} = t.$$

Isto é, $k_a = ta$, $k_b = tb$ e $k_c = tc$. O único ponto P do plano ABC com a propriedade da Proposição 24 relativa aos três lados é o simediano K (versão interativa da Figura 5.15). \square

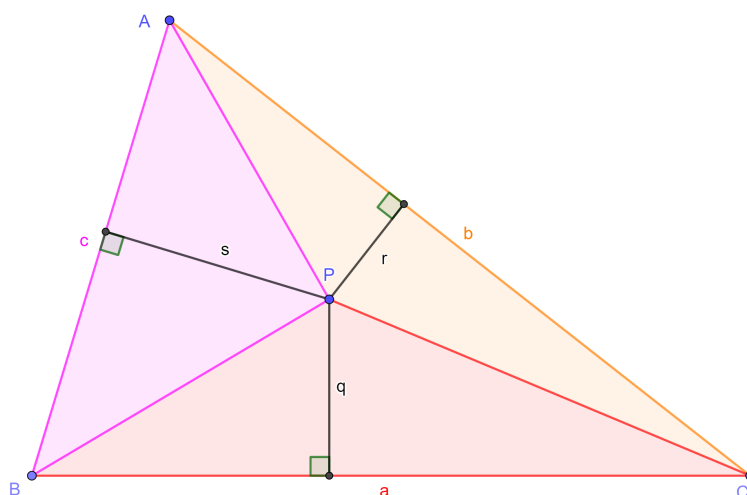
Figura 5.15: A distância do simediano K a cada lado é diretamente proporcional ao comprimento do lado correspondente. O único ponto P do plano ABC com a propriedade da Proposição 24 relativa aos três lados é K . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Proposição 27 (Mínimo da soma dos quadrados das distâncias aos lados). *Considera-se um triângulo ABC . Sejam q , r e s as distâncias do ponto P aos lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$, respectivamente. Então $q^2 + r^2 + s^2$ é mínimo quando P é o ponto simediano K do $\triangle ABC$ (Figura 5.16).*

Figura 5.16: O simediano minimiza a soma dos quadrados das distâncias aos lados do $\triangle ABC$. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. Seja P um ponto no interior do $\triangle ABC$ (Figura 5.16). Pode-se escrever a

igualdade de áreas:

$$\begin{aligned} S &= [ABC] = [BPC] + [CPA] + [APB], \\ 2S &= aq + br + cs. \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz aplicada nas sequências (a, b, c) e (q, r, s) tem-se:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(q^2 + r^2 + s^2) \geq (aq + br + cs)^2. \tag{5.2.6}$$

Substituindo (5.2.5) em (5.2.6) encontra-se:

$$q^2 + r^2 + s^2 \geq \frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{5.2.7}$$

A igualdade em (5.2.7), mínimo da soma dos quadrados das distâncias de P aos lados, acontece quando:

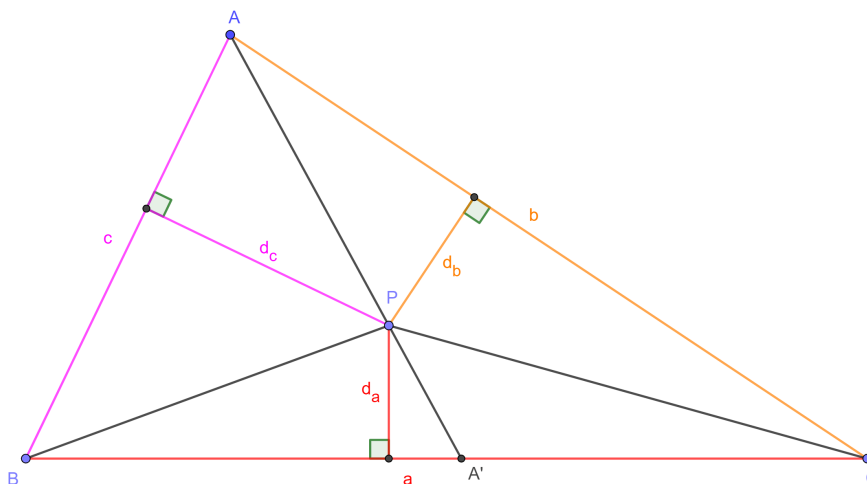
$$\frac{q}{a} = \frac{r}{b} = \frac{s}{c}.$$

Pela Proposição 26 esta última condição somente é satisfeita quando P coincide com o simediano K . □

Proposição 28 (Razão de lados determinados por uma ceviana). *Seja o $\triangle ABC$, a ceviana AA' e um ponto $P \in AA'$ e interior ao $\triangle ABC$ (Figura 5.17). Sejam d_a , d_b e d_c as distâncias do ponto P aos lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$, respectivamente. Então vale que:*

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{c \cdot d_c}{b \cdot d_b}.$$

Figura 5.17: Razão de lados determinados por uma ceviana. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. A altura dos triângulos ABA' e $AA'C$ relativa ao vértice A é a mesma. Portanto, a razão entre os segmentos da base pode ser escrita utilizando as áreas:

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{[ABA']}{[AA'C]}. \tag{5.2.8}$$

Analogamente, a altura dos triângulos PBA' e $PA'C$ relativa ao vértice P é d_a . Portanto, a razão entre os segmentos da base pode ser escrita utilizando suas áreas:

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{[PBA']}{[PA'C]}. \tag{5.2.9}$$

De (5.2.8) e (5.2.9) segue:

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{[ABA'] - [PBA']}{[AA'C] - [PA'C]} = \frac{[ABP]}{[ACP]} = \frac{c \cdot d_c}{b \cdot d_b}.$$

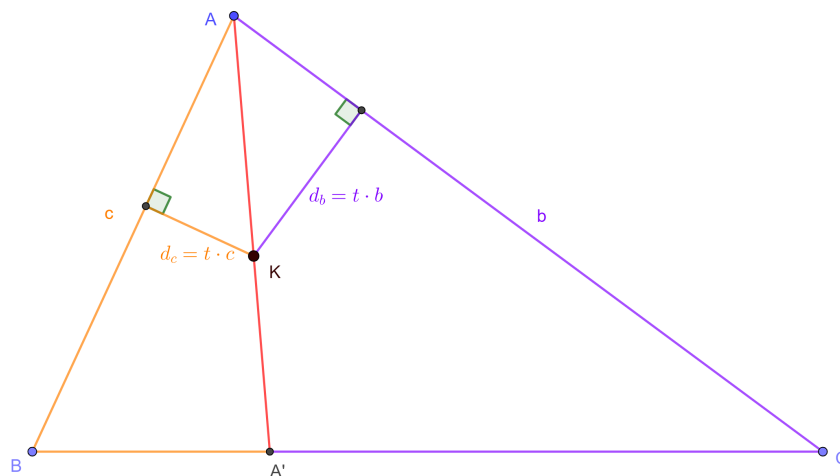
□

O análogo do Teorema da Bissetriz Interna para o simediano segue como consequência da Proposição-28.

Corolário 29 (Razão de lados determinados pelo simediano). *Seja o $\triangle ABC$ e AA' uma simediana (Figura 5.18). Sejam $CA = b$ e $AB = c$, respectivamente. Então vale que:*

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Figura 5.18: Razão de lados determinados pelo simediano. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. Sejam d_b e d_c as distâncias do ponto simediano K aos lados $CA = b$ e $AB = c$, respectivamente. Pela Proposição 26 existe t tal que $d_b = t \cdot b$ e $d_c = t \cdot c$. Consequentemente, da Proposição 28 tem-se:

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{c \cdot d_c}{b \cdot d_b} = \frac{c \cdot t \cdot c}{b \cdot t \cdot b} = \frac{c^2}{b^2}.$$

□

5.3 Problema resolvido pelo uso de isogonais

Problema 7. No triângulo ABC , P e Q são pontos no interior tais que:

$$\angle CBP = \angle PBQ = \angle QBA = \frac{1}{3}\angle ABC,$$

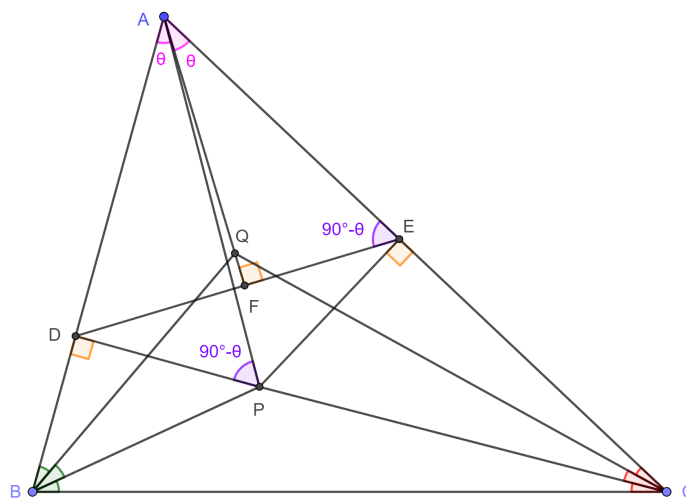
$$\angle BCP = \angle PCQ = \angle QCA = \frac{1}{3}\angle ACB.$$

Sejam D e E as projeções ortogonais de P sobre AB e AC , respectivamente. Provar que AQ é perpendicular a DE .

5.3.1 Resolução

A Figura 5.19 permite acompanhar a resolução do Problema 7.

Figura 5.19: Resolução do Problema 7. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Seja $\angle PAD = \theta$. Então $\angle APD = 90^\circ - \theta$ e, como $\angle ADP = \angle AEP = 90^\circ$, o quadrilátero $ADPE$ é inscritível. Logo, $\angle AED = \angle APD = 90^\circ - \theta$.

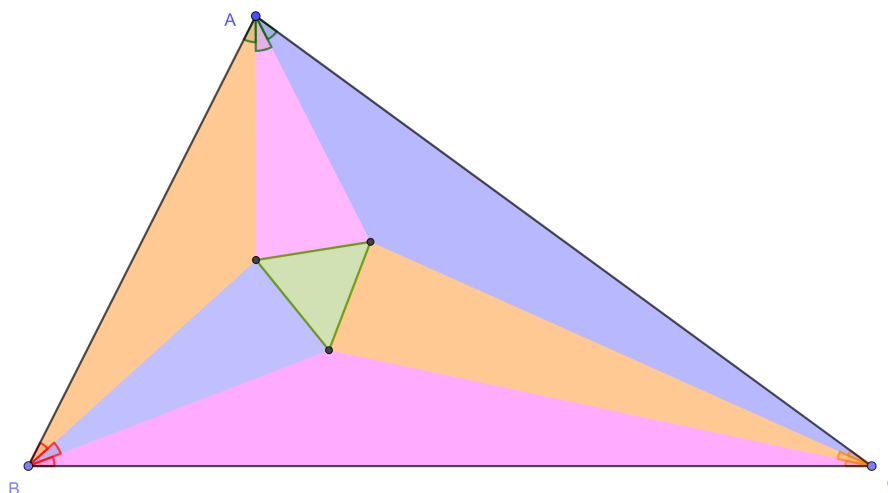
Seja o ponto $F = AQ \cap DE$. Pelo $\triangle AFE$ resta provar que $\angle EAQ = \theta$. Como $\angle PBC = \angle QBA$ e $\angle BCP = \angle QCA$, os pares de retas BP e BQ e CP e CQ são simétricos entre si em relação às bissetrizes de $\angle ABC$ e $\angle ACB$, respectivamente. Ou seja, P e Q são conjugados isogonais e $\angle PAB = \angle QAE = \theta$.

O conteúdo anterior desta aula está disponível em [vídeo](#).

5.4 Teorema de Morley

Teorema 30. *Os três pontos de intersecção dos trissetores adjacentes dos ângulos de qualquer triângulo formam um triângulo equilátero (Figura 5.20).*

Figura 5.20: Teorema de Morley. Versão interativa [aqui](#).



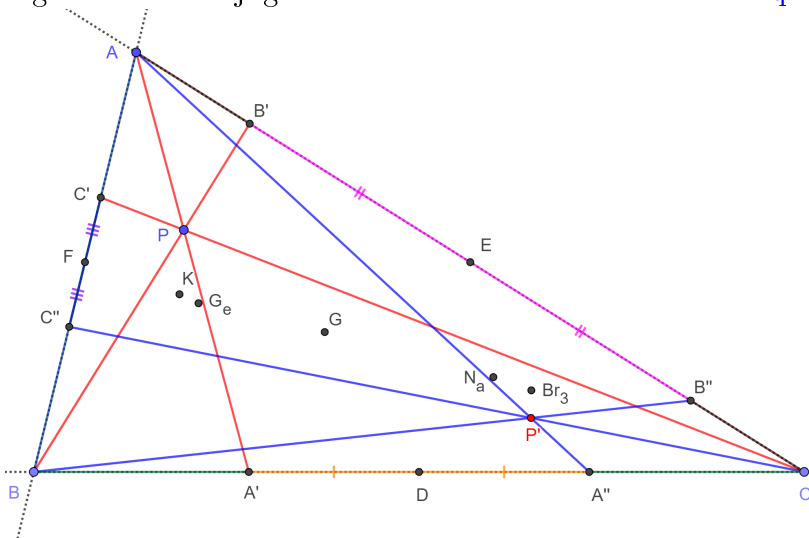
Fonte: Os autores.

5.5 Conjugados isotômicos

Definição 12. Assume-se que P não seja colinear com quaisquer dois vértices do $\triangle ABC$. Sejam A' , B' e C' os pontos em que as linhas AP , BP e CP encontram as retas BC , CA e AB (estendidas se necessário). Sejam ainda D , E e F pontos médios dos lados BC , CA e AB . Refletindo A' , B' , e C' em D , E e F , respectivamente, encontram-se os pontos A'' , B'' e C'' . As retas AA'' , BB'' e CC'' são chamadas isotômicas de AA' , BB' e CC' , respectivamente, e concorrem no ponto P' , nomeado conjugado isotômico do ponto P .

A Figura 5.21 permite acompanhar a Definição 12 e a Proposição 31.

Figura 5.21: Conjugados isotômicos. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

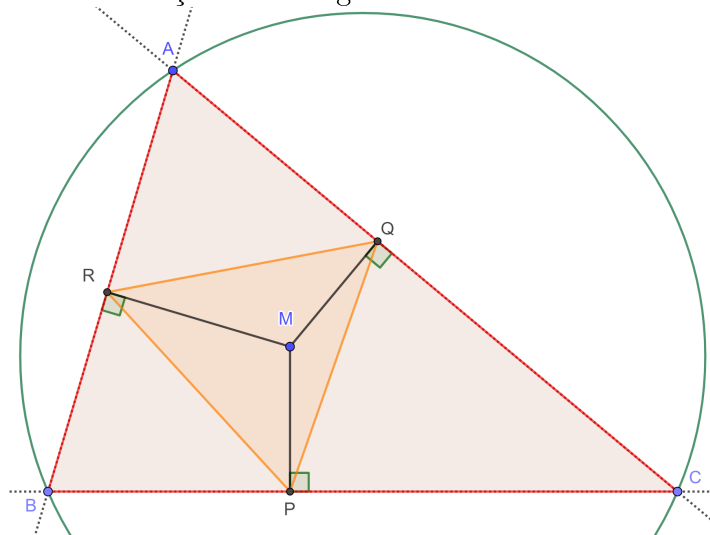
Proposição 31. *Isotômicos de alguns pontos notáveis.*

- Do baricentro G é ele mesmo.
- Do simediano K é o terceiro ponto de Brocard Br_3 .
- Do ponto de Gergonne G_e é o ponto de Nagel N_a .

5.6 Triângulo Pedal

Definição 13. *Seja M um ponto no plano do triângulo ABC e P , Q e R as projeções de M sobre as retas BC , CA e AB . O $\triangle PQR$ é chamado pedal de M em relação ao $\triangle ABC$ (Figura 5.22).*

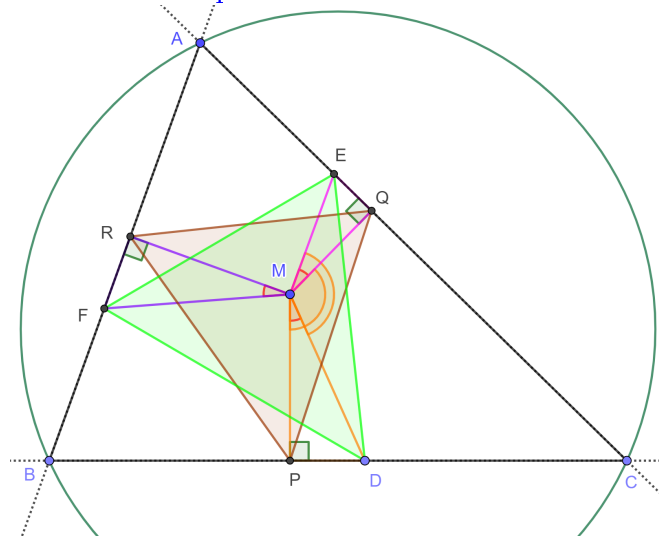
Figura 5.22: Definição de triângulo Pedal. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Proposição 32 (Área mínima do triângulo Pedal). *São dados um triângulo ABC , um ponto M no mesmo plano e um ponto $D \in BC$. Posicione $E \in CA$ e $F \in AB$ tais que os quadriláteros $CDME$ e $BDMF$ sejam cíclicos. Sejam P , Q e R as projeções ortogonais do ponto M sobre as retas BC , CA e AB , respectivamente. Dentre todos os triângulos DEF possíveis para um M fixo o de menor área é o triângulo pedal PQR (Figura 5.23).*

Figura 5.23: Para M fixo e D variando, de todos os $\triangle DEF$ possíveis o triângulo Pedal PQR tem área mínima. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. Os quadriláteros $CDME$ e $CPMQ$ são cíclicos. Como $\angle DME = 180^\circ - \angle C$ e $\angle PMQ = 180^\circ - \angle C$ chega-se a $\angle DME = \angle PMQ$ e $\angle DMP = \angle EMQ$. Analogamente, $\angle DMP = \angle FMR$. Com isso,

$$\angle DMP = \angle EMQ = \angle FMR = \theta.$$

Adicionalmente, têm-se:

$$\angle MPD = \angle MQE = \angle MRF = 90^\circ.$$

Logo, pelo critério de semelhança ângulo-ângulo vale que:

$$\triangle DMP \sim \triangle EMQ \sim \triangle FMR.$$

Segue:

$$k = \frac{MP}{MD} = \frac{MQ}{ME} = \frac{MR}{MF} \leq 1.$$

A última semelhança de triângulos permite que, por uma rotação de ângulo θ , seguida de uma homotetia de centro em M e fator k (roto-homotetia), o $\triangle DEF$ transforme-se no $\triangle PQR$. Como $k \leq 1$ a área do triângulo Pedal é mínima. \square

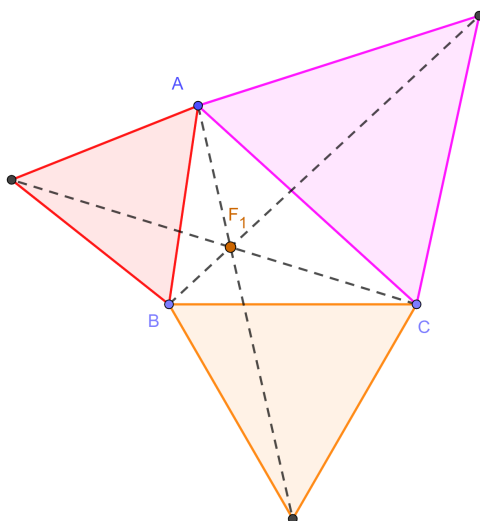
O conteúdo da parte intermediária desta aula está disponível em [vídeo](#).

5.7 Pontos isogônicos e isodinâmicos

$F_1 = X(13)$ e $F_2 = X(14)$ são os pontos isogônicos ou primeiro e segundo pontos de Fermat. Dado um triângulo ABC constroem-se triângulos equiláteros externa e internamente sobre os lados.

As três retas que unem os vértices do ABC com os novos vértices dos triângulos equiláteros externos e opostos correspondentes concorrem em F_1 (Figura 5.24). No caso em que todos os ângulo interno do $\triangle ABC$ são menores que 120° o primeiro ponto de Fermat minimiza a soma das distâncias aos vértices.

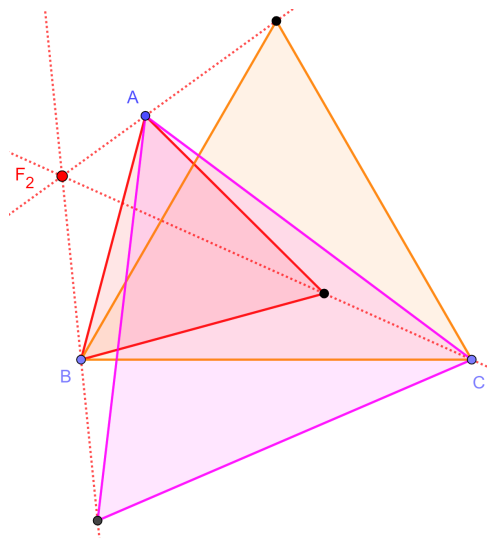
Figura 5.24: $F_1 = X(13)$ é o primeiro ponto isogônico ou primeiro ponto de Fermat. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Analogamente, as três retas que unem os vértices do ABC com os novos vértices dos triângulos equiláteros internos e opostos correspondentes concorrem em F_2 (Figura 5.25).

Figura 5.25: $F_2 = X(14)$ é o segundo ponto isogônico ou segundo ponto de Fermat. Versão interativa [aqui](#).

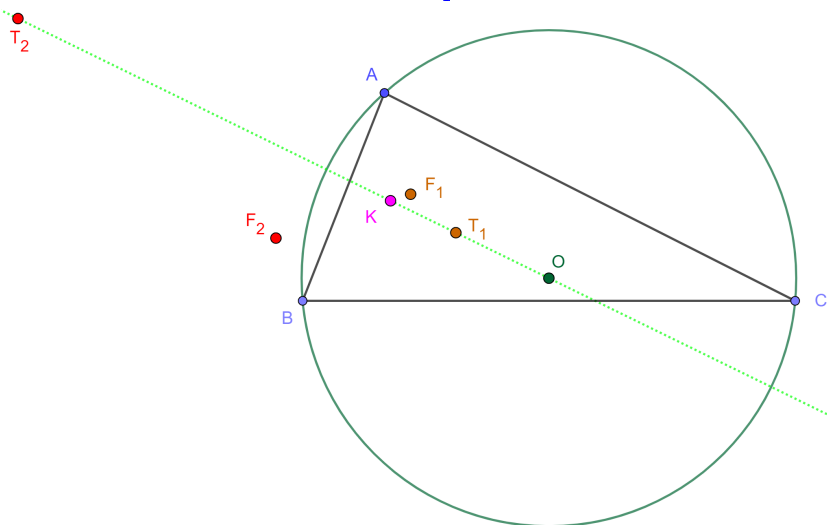


Fonte: Os autores.

Os pontos $T_1 = X(15)$ e $T_2 = X(16)$ são isogonais de F_1 e F_2 , respectivamente, e chamados primeiro e segundo pontos isodinâmicos. T_1 e T_2 estão alinhados com o circuncentro $O = X(3)$ e o simediano $K = X(6)$ e dividem harmonicamente o segmento OK (Figura 5.26). Isto é,

$$\frac{T_1O}{T_1K} = \frac{T_2O}{T_2K}.$$

Figura 5.26: $T_1 = X(15)$ e $T_2 = X(16)$, primeiro e segundo pontos isodinâmicos, são isogonais de F_1 e F_2 , respectivamente. Versão interativa [aqui](#).

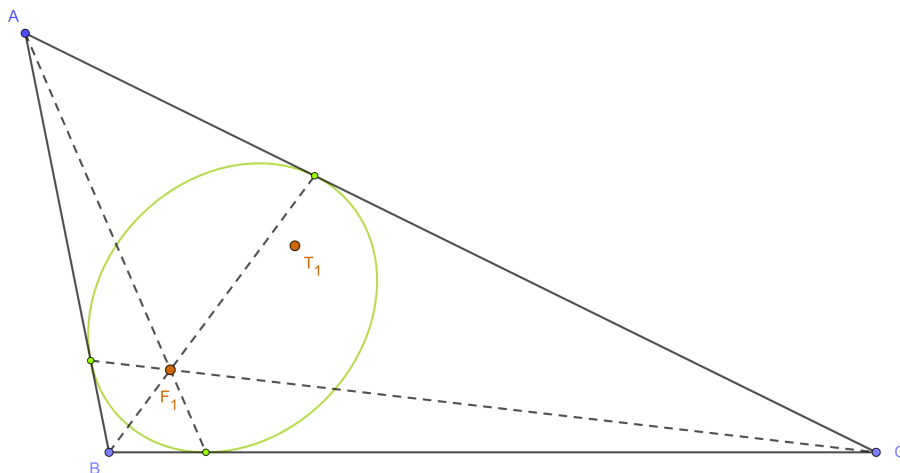


Fonte: Os autores.

As projeções do ponto F_1 , partindo de um vértices para o lado oposto respectivo, deter-

minam três pontos de uma elipse inscrita no $\triangle ABC$ e de focos F_1 e T_1 (Figura 5.27).

Figura 5.27: Elipse inscrita no $\triangle ABC$ e de focos F_1 e T_1 . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

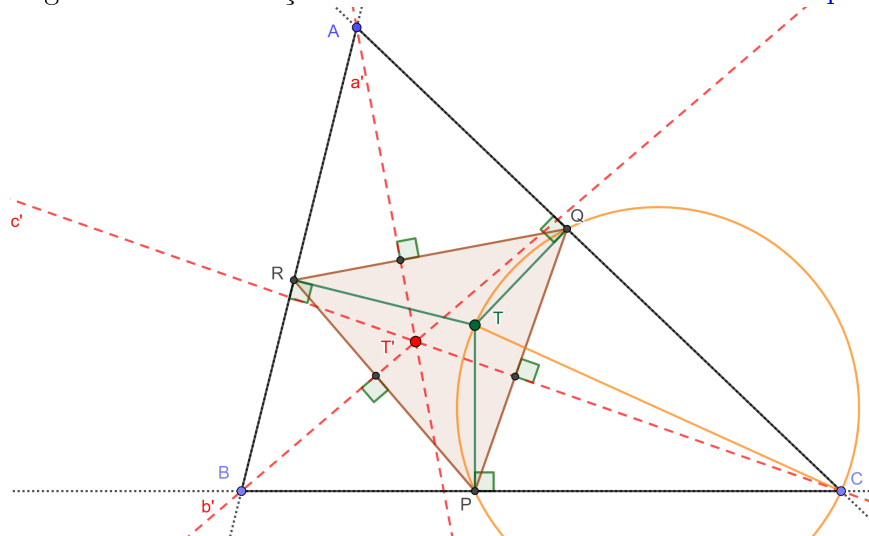
5.8 Problema envolvendo o primeiro ponto isodinâmico

Problema 8. *Sejam P , Q , e R pontos sobre os lados BC , CA , e AB de um triângulo acutângulo ABC tais que o $\triangle PQR$ é equilátero e tem área mínima entre todos tais triângulos equiláteros. Provar que a reta a' perpendicular a QR que passa por A , a reta b' perpendicular a RP que passa por B e a reta c' perpendicular a PQ que passa por C têm um ponto comum.*

5.8.1 Resolução

A Figura 5.28 permite acompanhar a resolução do Problema 8.

Figura 5.28: Resolução do Problema 8. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Como a área do $\triangle PQR$ é a mínima possível, de todos os triângulos equiláteros que podem ser construídos respeitando as condições do problema, deve existir um ponto T para o qual PQR é seu triângulo Pedal (Proposição 32). O ponto T é chamado primeiro ponto isodinâmico (um dos centros de triângulo) e também identificado como $X(15)$.

Como

$$\angle TPC + \angle TQC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

o quadrilátero $TPCQ$ é cíclico e TC é diâmetro do circuncírculo. Ou seja, o circuncentro do $\triangle PCQ$ é o ponto médio do segmento TC . Adicionalmente, o ortocentro do $\triangle PCQ$ está contido na reta c' , perpendicular a PQ passando por C . Como os circuncentro e ortocentro do $\triangle PCQ$ são pares de pontos isogonais vale que TC e c' também são isogonais relativos ao vértice C .

Analogamente, as retas a' e b' são isogonais aos segmentos AT e BT , respectivamente. Como AT , BT e CT concorrem em T , as retas isogonais a' , b' e c' concorrem em T' . Isto é, T' é isogonal de T .

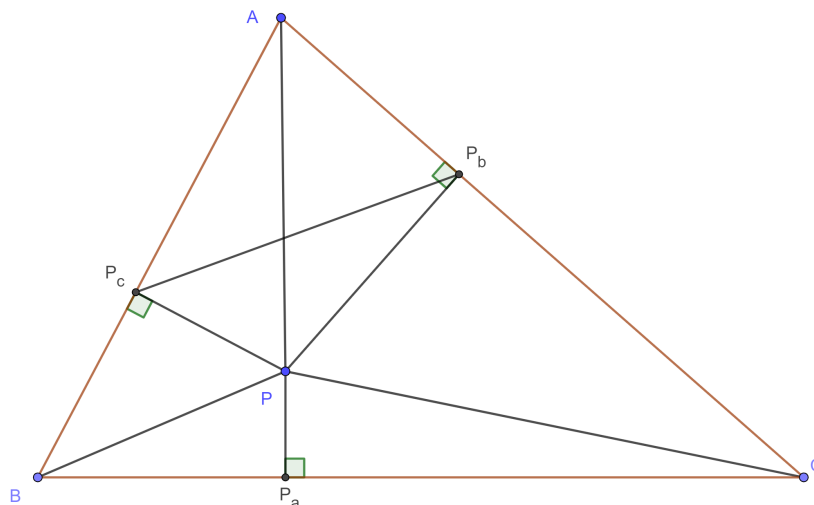
5.9 Teorema de Erdős-Mordell

Lema 33 (Para o Teorema de Erdős-Mordell). *Considera-se um triângulo ABC e um ponto P no seu interior. Sejam P_a , P_b e P_c as projeções ortogonais do ponto P nos lados BC , CA e AB , respectivamente. Então vale a desigualdade*

$$AP \cdot BC \geq P_cP \cdot CA + P_bP \cdot AB,$$

com igualdade se, e somente se, $P_bP_c \parallel BC$ (Figura 5.29).

Figura 5.29: Lema para a prova de Erdős-Mordell. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. Seguiremos a prova pelo Teorema de Ptolomeu utilizada em [24]. Sejam B' e C' as projeções ortogonais dos pontos B e C na reta P_cP_b (Figura 5.30). Então $BC \geq B'C'$ e vale a igualdade se, e somente se, $P_cP_b \parallel BC$. Alternativamente,

$$BC \geq B'P_c + P_cP_b + P_bC'.$$

A seguir multiplica-se a desigualdade anterior pelo valor positivo AP :

$$AP \cdot BC \geq AP \cdot B'P_c + AP \cdot P_cP_b + AP \cdot P_bC'. \quad (5.9.1)$$

De $\angle PP_bA = \angle PP_cA = 90^\circ$ o quadrilátero AP_bPP_c é inscritível e

$$\angle APP_b = \angle AP_cP_b = \angle BP_cB',$$

$$\angle APP_c = \angle AP_bP_c = \angle CP_bC'.$$

Logo, pelo critério de semelhança ângulo-ângulo têm-se:

$$\triangle APP_b \sim \triangle BP_cB',$$

$$\triangle APP_c \sim \triangle CP_bC'.$$

Segue que

$$\frac{AP}{BP_c} = \frac{PP_b}{P_cB'} \Leftrightarrow AP \cdot B'P_c = P_bP \cdot P_cB, \quad (5.9.2)$$

$$\frac{AP}{CP_b} = \frac{PP_c}{P_bC'} \Leftrightarrow AP \cdot P_bC' = P_cP \cdot P_bC. \quad (5.9.3)$$

Pelo Teorema de Ptolomeu aplicado no quadrilátero cíclico AP_bPP_c tem-se:

$$AP \cdot P_cP_b = AP_b \cdot P_cP + AP_c \cdot P_bP. \tag{5.9.4}$$

Substituindo (5.9.2), (5.9.3) e (5.9.4) em (5.9.1) encontra-se:

$$AP \cdot BC \geq P_bP \cdot P_cB + AP_b \cdot P_cP + AP_c \cdot P_bP + P_cP \cdot P_bC.$$

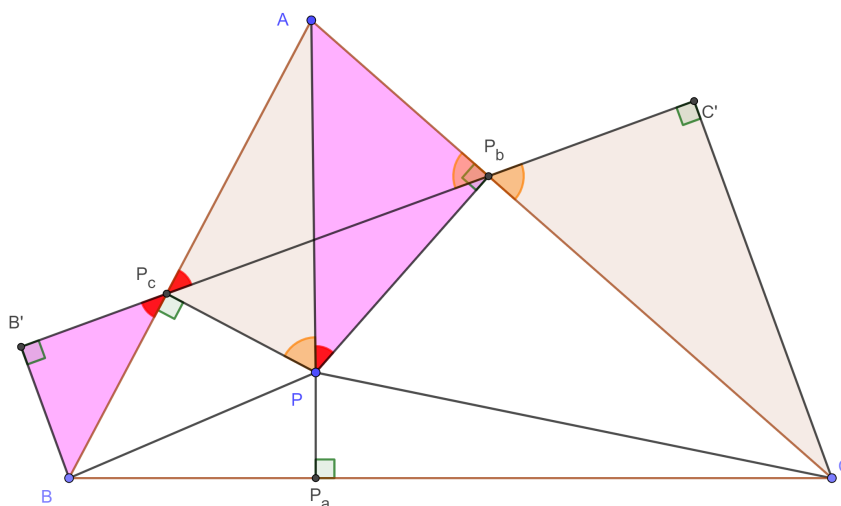
Agrupando e simplificando o resultado segue:

$$AP \cdot BC \geq P_bP(AP_c + P_cB) + P_cP(AP_b + P_bC),$$

$$AP \cdot BC \geq P_bP \cdot AB + P_cP \cdot AC.$$

□

Figura 5.30: Construção para a prova do Lema 33. Versão interativa [aqui](#).



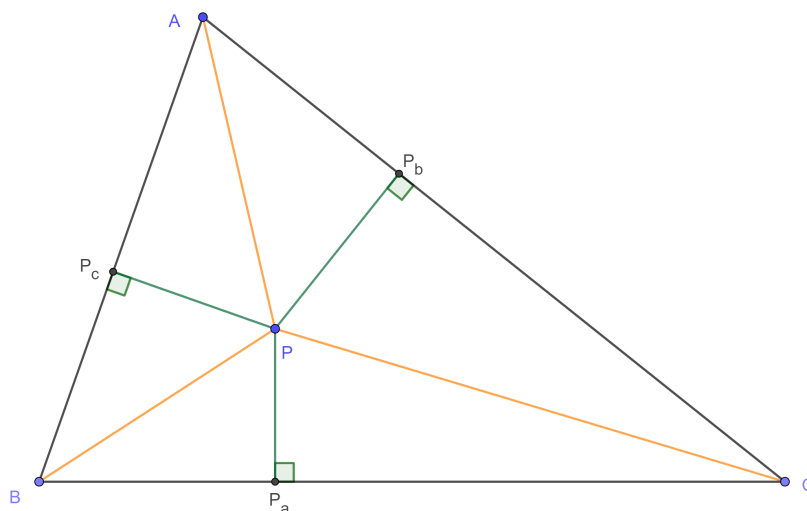
Fonte: Os autores.

Teorema 34 (Erdős-Mordell). *Considera-se um triângulo ABC e um ponto P no seu interior. Sejam P_a , P_b e P_c as projeções ortogonais do ponto P nos lados BC , CA e AB , respectivamente. Então vale a desigualdade*

$$AP + BP + CP \geq 2(P_aP + P_bP + P_cP),$$

com igualdade se, e somente se, P for o circuncentro de um $\triangle ABC$ equilátero (Figura 5.31).

Figura 5.31: Teorema de Erdős-Mordell. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Demonstração. Pelo Lema 33 têm-se as três desigualdades (uma relativa a cada vértice):

$$AP \geq P_cP \cdot \frac{CA}{BC} + P_bP \cdot \frac{AB}{BC},$$

$$BP \geq P_cP \cdot \frac{BC}{CA} + P_aP \cdot \frac{AB}{CA},$$

$$CP \geq P_bP \cdot \frac{BC}{AB} + P_aP \cdot \frac{CA}{AB}.$$

Valem as três igualdades quando $P_bP_c \parallel BC$, $P_cP_a \parallel CA$ e $P_aP_b \parallel AB$. Ou seja, P é o circuncentro do $\triangle ABC$.

Somando as três desigualdades anteriores obtém-se:

$$\begin{aligned} AP + BP + CP &\geq \\ &\geq \left(\frac{CA}{AB} + \frac{AB}{CA}\right) P_aP + \left(\frac{BC}{AB} + \frac{AB}{BC}\right) P_bP + \left(\frac{CA}{BC} + \frac{BC}{CA}\right) P_cP. \end{aligned} \quad (5.9.5)$$

Os três parêntesis em (5.9.5) são da forma:

$$x + \frac{1}{x}.$$

Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica no conjunto de números positivos $\{x, \frac{1}{x}\}$ encontra-se:

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1,$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2. \tag{5.9.6}$$

O resultado anterior é substituído nos três parenteses de (5.9.5):

$$AP + BP + CP \geq 2(P_aP + P_bP + P_cP). \tag{5.9.7}$$

A igualdade em (5.9.6) acontece quando $x = \frac{1}{x}$. Ou seja, $x = 1$. Isto leva a uma igualdade em (5.9.7) quando $AB = BC = CA$. Isto é, ABC é equilátero. Adicionalmente, deve ser satisfeito que P seja o circuncentro do $\triangle ABC$. \square

5.10 Desigualdade de Erdős-Mordell, trigonometria e demonstração por contradição. P5 IMO 1991.

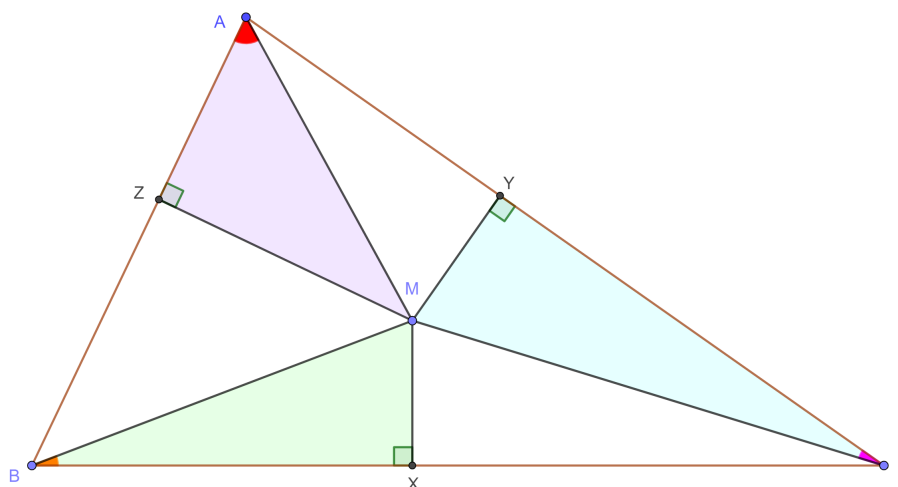
Problema 9. *Sejam ABC um triângulo e M um ponto interior. Mostre que pelo menos um dos ângulos MAB , MBC e MCA é menor ou igual a 30° .*

A IMO 1991 foi realizada na cidade de Sigtuna, Suécia. Problema 4 da lista curta e escolhido como P5 da competição, proposto pela delegação da França [25].

5.10.1 Resolução

Sejam X , Y e Z as projeções de M sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente. Suponha-se, por absurdo, que os ângulos MAB , MBC e MCA são todos maiores que 30° (Figura 5.32).

Figura 5.32: Uma construção geométrica para o Problema 9. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: Os autores.

Como $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, o anterior implica que:

$$\frac{MZ}{MA} > \frac{1}{2}, \frac{MX}{MB} > \frac{1}{2}, \frac{MY}{MC} > \frac{1}{2}.$$

Ou seja,

$$MA < 2MZ, MB < 2MX, MC < 2MY.$$

Somando as três últimas desigualdades segue que:

$$MA + MB + MC < 2(MX + MY + MZ).$$

Contradição, pois pelo Teorema 34 tem-se justamente o oposto:

$$MA + MB + MC > 2(MX + MY + MZ).$$

Parte do conteúdo desta aula está disponível em [vídeo](#).

Capítulo 6

Referências Bibliográficas

- [1] Pinheiro, R. Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, Curso de Geometria - Nível 2, 2006.
- [2] Thiago, C. Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, Curso de Geometria - Nível 2, 2006.
- [3] NETO, A. C. M. **Geometria**, Coleção ProfMat, SBM, Primeira Edição, ISBN: 9788585818937, 2013.
- [4] Delgado, J. *et al.* **Geometria Analítica**, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, ISBN: 9788583371212, 2017.
- [5] VARGAS, A.R. **O teorema de Miquel revisitado por Clifford**. 2016. 64 f. Dissertação (mestrado)-Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/27550/27550.PDF>. Acesso em: 8 jan. 2022.
- [6] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023045>. Acesso em: 8 jan. 2022.
- [7] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023106>. Acesso em: 8 jan. 2022.

- [8] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023113>. Acesso em: 8 jan. 2022.
- [9] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática v.3.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023144>. Acesso em: 8 jan. 2022.
- [10] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática.** 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>. Acesso em: 8 jan. 2022.
- [11] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. ISSN: 2319-023X. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715>. Acesso em: 8 jan. 2022.
- [12] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdv17ermac202023169664jllabagfb127138. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 8 jan. 2022.
- [13] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdv18202023169664jllabagfb7888. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 8 jan. 2022.
- [14] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p.

118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdvoll9202023169664jll118127. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 8 jan. 2022.

- [15] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 20, p. 22–40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdvoll9202123169664jlljpmasafj2240. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 8 jan. 2022.
- [16] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825>. Acesso em: 8 jan. 2022.
- [17] JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas**. Livro: Conhecimentos pedagógicos e conteúdos disciplinares das ciências exatas e da terra, DOI do Livro: 10.22533/at.ed.242213108, ISBN: 978-65-5983-424-2, 2021. Páginas: 161-175. Disponível em DOI do Capítulo: [10.22533/at.ed.24221310814](https://doi.org/10.22533/at.ed.24221310814). Acesso em: 8 jan. 2022.
- [18] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:117-139, nov. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>. Acesso em: 8 jan. 2022.
- [19] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023175>. Acesso em: 8 jan. 2022.
- [20] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023205>. Acesso em: 8 jan. 2022.
- [21] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três Problemas sobre Recorrências na Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista MATEMÁTICA E**

LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.1**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 86 p. ISBN 978-65-87023-21-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023212>.

- ESTATÍSTICA EM FOCO**, v. 8 n. 1 (2020), p. 1-11. Publicado em 2021-12-21, ISSN: 2318-0552. Disponível em:
<https://seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/58967>. Acesso em: 8 jan. 2022.
- [22] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, ISSN 2316-9664, v. 21, p. 36–51, dez. 2021. ISSN 2316-9664. DOI: 10.21167/cqdv21202123169664jlljpmsafj3651. Disponível em:
<https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 8 jan. 2022.
- [23] João Paulo Martins dos Santos, Alessandro Firmiano de Jesus, Juan Lopez Linares. Retas de Euler e o esquema aditivo RGB: construções dinâmicas no GeoGebra, **Revista do Instituto GeoGebra internacional de São Paulo**, v. 10 n. 2 (2021), p. 026–039. Publicado em 2021-12-27, ISSN: 2237-9657, DOI: 10.23925/2237-9657.2021.v10i2p026-039. Disponível em:
<https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/52286/38626>. Acesso em: 8 jan. 2022.
- [24] Torres, A. A desigualdade de Erdős-Mordell. **Revista Eureka!**, v. 18, p. 42–52, 2003. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka18.pdf>. Acesso em: 8 jan. 2022.
- [25] DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium**: a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004. New York: Springer, 2006. Disponível em:
<http://web.cs.elte.hu/~nagyzoli/compendium.pdf>. Acesso em: 8 jan. 2022.

