Exercícios com a Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

Juan López Linares

JUAN LÓPEZ LINARES

Exercícios com a Transformada de Laplace

DOI: 10.11606/9786587023205

Pirassununga - SP
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)
2021

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: Prof. Dr. Vahan Agopyan

Vice-Reitor: Prof. Dr. Antonio Carlos Hernandes

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

http://www.fzea.usp.br

Diretor: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

Vice-Diretor: Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes de Oliveira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo

```
        López Linares, Juan
L864e      Exercícios com a transformada de Laplace / Juan López
        Linares. -- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e
        Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo,
        2021.
           115 p.

           ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book)
           DOI: 10.11606/9786587023205


           1. Transformada de Laplace. 2. Equações diferenciais
        ordinárias. 3. Integral de convolução. 4. Função delta
        de Dirac. 5. Ensino universitário. I. Título.
```

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

Dedico este livro a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos estudantes do curso de "Cálculo IV" da FZEA-USP que me motivaram a escrever este livro eletrônico.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

AUTOR

Dr. JUAN LÓPEZ LINARES.

Professor Doutor 2 do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Atualmente ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de "Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio" e "Geometria olímpica com Geogebra" para professores. Desenvolve projetos de pesquisa nas áreas de ensino de Cálculo e na resolução de problemas de Olimpíadas.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respetivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela UFSCar em 2019. Segue link para uma lista de publicações do autor.

Título

Exercícios com a Transformada de Laplace

Prefácio

Este é o segundo livro eletrônico do autor dedicado a resolução de exercícios do curso de Cálculo IV da FZEA-USP. São apresentados e discutidos em detalhe cinquenta questões usadas na resolução de equações diferenciais ordinárias pelo método da Transformada de Laplace. O texto conta com 21 figuras que facilitam acompanhar as soluções. Muitos dos problemas tem como complemento gráficos interativos no site do Geogebra e vídeos no YouTube. O conteúdo é organizado em cinco capítulos que abordam: definição e propriedades, transformada das derivadas de $f(t)$ e $F(s)$, teoremas da translação, integral de Convolução e a função Delta de Dirac. Algumas equações integro-diferencial também são estudadas. A exposição procura que o material possa de fato ser lido e compreendido por estudantes dos primeiros anos de cursos de Engenharias.

Palavras-chave: Transformada de Laplace, Equações Diferenciais Ordinárias, Integral de Convolução, Função Delta de Dirac, Ensino Universitário.

Sumário

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Capítulo 1

Introdução

O conjunto de exercícios resolvidos, e a teoria associada, que aparecem neste livro eletrônico teve sua origem nas notas das aulas do professor para o curso de Cálculo IV da FZEA-USP. O assunto é particularmente difícil, e causa de reprovação frequente, para estudantes de Engenharias. Motivo pelo qual apresentam-se resoluções detalhadas de exercícios que outros autores consideram simples.

Este é o segundo livro eletrônico do autor dedicado a resolução de exercícios do curso de Cálculo IV da FZEA-USP. No primeiro foram discutidos em detalhe mais de vinte questões utilizadas na solução de equações diferenciais ordinárias pelo método das séries de potências [1].

Uma equação diferencial relaciona uma ou mais funções e suas derivadas. As funções representam quantidades físicas, as derivadas das mesmas indicam suas taxas de mudança. É por isso que as equações diferenciais desempenham um papel essencial na engenharia, biologia, etc. O estudo de equações diferenciais consiste no procura de suas soluções e das propriedades destas. Apenas as equações diferenciais mais simples podem ser resolvidas por fórmulas explícitas e exatas.

Existem equações diferenciais e integro-diferenciais que são difíceis de resolver diretamente na sua variável original t. Uma transformação integral de Laplace mapeia uma equação de seu domínio na variável t para outro em s. Manipular e resolver a equação no domínio de destino pode ser muito mais fácil do que a manipulação e solução no domínio original. O resultado na variável s é então mapeado de volta ao domínio original, na variável t, com o inverso da transformada.

O texto conta com 21 figuras que facilitam acompanhar a resolução. A maior parte tem como complemento links para os gráficos interativos no site do GeoGebra e, vários, a resolução em vídeo numa playlist do YouTube. Escolhemos discutir alguns exercícios, mas sem a pretensão de esgotar o tema.

Embora exista uma ampla gama de livros dedicados ao estudo de equações diferencias foram seguidos principalmente o Boyce e Diprima [2], Zill [3], Guidorizzi [4] e Stewart [5]. O autor também publicou quatro livros eletrônicos dedicados a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática para o Ensino Médio: [6], [7], [8] e [9]. Outros trabalhos da área de Matemática são [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17] e [18].

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Capítulo 2

Definição e propriedades

2.1 Transformada integral

Uma transformação da função $f(t)$ na função $F(s)$ pode ser definida por uma integral:

$$F(s) = \int_{t_i}^{t_f} k(s,t) f(t) dt,$$

$$F(s) \longleftarrow f(t),$$

onde $k(s,t)$ é chamado kernel ou núcleo da transformada. Os limites de integração t_i e t_f são constantes convenientemente escolhidas.

A transformação inversa da função $F(s)$ na função $f(t)$ também é definida por uma integral:

$$f(t) = \int_{s_i}^{s_f} k^{-1}(t,s) F(s) ds,$$

$$f(t) \longleftarrow F(s),$$

onde $k^{-1}(t,s)$ é chamado kernel inverso. Os limites de integração s_i e s_f são constantes convenientemente escolhidas.

Existem equações diferenciais que são difíceis de resolver na sua variável original t. Uma transformação integral mapeia uma equação de seu domínio na variável t para outro domínio na variável s. Manipular e resolver a equação no domínio de destino, na variável s, pode ser muito mais fácil do que a manipulação e solução no domínio original, na variável t. A resolução na variável s é então mapeada de volta ao domínio original na variável t com o inverso da transformada integral.

As duas transformadas integrais mais conhecidas são a de Fourier

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi sti} f(t) dt,$$

e a de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt.$$

2.2 Transformada de Laplace da função $f(t) = 1$

Exercício 1. *Deduzir a Transformada de Laplace da função de variável real constante*

$$f(t) = 1, \ t > 0. \tag{2.2.1}$$

2.2.1 Solução

Parte-se da definição de Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt. \tag{2.2.2}$$

Substitui-se $f(t) = 1$ em (2.2.2):

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt.$$

A integral anterior é imprópria, para saber se é convergente ou divergente deve-se calcular um limite.

$$\mathcal{L}\{1\} = \lim_{\delta \to \infty} \left[\int_0^{\delta} e^{-st} dt \right].$$

Calcula-se a integral própria entre colchetes:

$$\mathcal{L}\{1\} = \lim_{\delta \to \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\delta} \right],$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \lim_{\delta \to \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-s \cdot \delta} - \left(-\frac{1}{s} e^{-s \cdot 0} \right) \right],$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \lim_{\delta \to \infty} \left[-\frac{e^{-s \cdot \delta}}{s} + \frac{1}{s} \right].$$

Como o limite é calculado em relação a δ é possível colocar $\frac{1}{s}$ em evidência e fora do limite:

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \lim_{\delta \to \infty} \left[-e^{-s\delta} + 1 \right],$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \lim_{\delta \to \infty} \left[-\frac{1}{e^{s\delta}} + 1 \right].$$

Dependendo do valor de s têm-se três casos: i) $s > 0$, ii) $s < 0$ e iii) $s = 0$.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

i) $s > 0$.

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \lim_{\delta\to\infty} \left(-\cancelto{0}{\frac{1}{e^{s\delta}}} + 1 \right) = \frac{1}{s}.$$

ii) $s < 0$.

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \lim_{\delta\to\infty} \left(\cancelto{\infty}{-e^{|s|\cdot\delta}} + 1 \right) \to diverge.$$

iii) $s = 0$.

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-0\cdot t} \cdot dt = \int_0^\infty 1dt \to diverge.$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{f(t) = 1\} = F(s) = \frac{1}{s},\ s > 0,$$

ou

$$f(t) = 1 \to F(s) = \frac{1}{s},\ s > 0.$$

Inversamente pode ser escrito:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s) = \frac{1}{s}\right\} = f(t) = 1,\ t > 0,$$

ou

$$F(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow f(t) = 1,\ t > 0.$$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo iniciando aqui.

2.3 Transformada de Laplace de uma função definida por partes

Exercício 2. *Deduzir a Transformada de Laplace da função de variável real:*

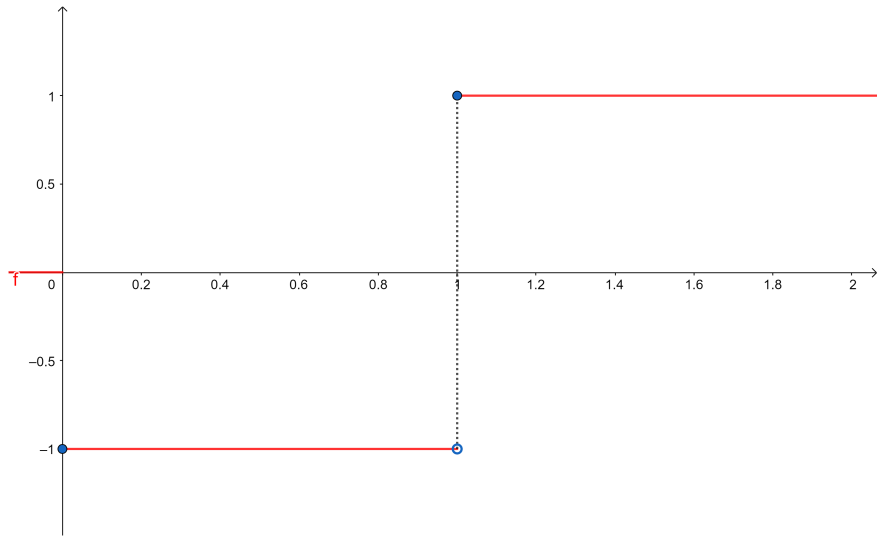
$$f(t) = \begin{cases} 0, & se \quad t < 0 \\ -1, & se \quad 0 \le t < 1 \\ 1, & se \quad t \ge 1 \end{cases}. \tag{2.3.1}$$

2.3.1 Solução

A Figura 2.1 mostra o gráfico da função em (2.3.1).

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Figura 2.1: Gráfico da função em (2.3.1). Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Parte-se da definição de Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt. \tag{2.3.2}$$

O intervalo de integração pode ser escrito como $[0, \infty) = [0, 1) \cup [1, \infty)$. Com isto a equação (2.3.2) se transforma em:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^1 e^{-st}(-1)dt + \int_1^\infty e^{-st}(1)dt. \tag{2.3.3}$$

Em (2.3.3) a primeira integral é própria e a segunda imprópria:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = -\int_0^1 e^{-st}dt + \lim_{\delta\to\infty}\left[\int_1^\delta e^{-st}dt\right]. \tag{2.3.4}$$

Para $s \neq 0$ calcula-se a integral da exponencial em (2.3.4):

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = -\left.\frac{-1}{s}e^{-st}\right|_0^1 + \lim_{\delta\to\infty}\left[\left.\frac{-1}{s}e^{-st}\right|_1^\delta\right],$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}\left(e^{-s} - e^0\right) - \frac{1}{s}\lim_{\delta\to\infty}\left[e^{-s\delta} - e^{-s}\right]. \tag{2.3.5}$$

O limite em (2.3.5) pode ser separado em dois:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}\left(e^{-s} - 1\right) - \frac{1}{s}\lim_{\delta\to\infty}\left[e^{-s\delta}\right] + \frac{1}{s}\lim_{\delta\to\infty}\left[e^{-s}\right],$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\lim_{\delta\to\infty}\left[e^{-s\delta}\right] + \frac{e^{-s}}{s}. \tag{2.3.6}$$

O limite em (2.3.6) existe quando $s > 0$ e seu valor é zero:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 2\frac{e^{-s}}{s} - \frac{1}{s}, \; s > 0.$$

Quando $s < 0$ o limite em (2.3.6) não existe e se $s = 0$ a segunda integral em (2.3.3) é divergente. A resolução de um exercício análogo está disponível em vídeo aqui.

2.4 Transformada de Laplace da função $f(t) = t$

Exercício 3. *Deduzir a Transformada de Laplace da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, tal que:*

$$t \mapsto f(t) = t, t \geq 0. \tag{2.4.1}$$

2.4.1 Solução

Parte-se da definição de Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty t e^{-st} dt. \tag{2.4.2}$$

Como a integral (2.4.2) é imprópria escreve-se:

$$\mathcal{L}\{t\} = \lim_{\delta\to\infty}\left[\int_0^\delta t e^{-st} dt\right]. \tag{2.4.3}$$

Em (2.4.3) utiliza-se a fórmula de integração por partes:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

com $u(t) = t$ e $dv(t) = e^{-st}dt$. Segue que $du(t) = dt$ e $v(t) = -\frac{1}{s}e^{-st}$. Logo, para $s \neq 0$ segue:

$$\mathcal{L}\{t\} = \lim_{\delta\to\infty}\left[\frac{-1}{s}te^{-st}\Big|_0^\delta - \int_0^\delta -\frac{1}{s}e^{-st}dt\right],$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \lim_{\delta\to\infty}\left[\frac{-1}{s}\left(\delta e^{-s\delta} - 0\cdot e^{-s\cdot 0}\right) + \frac{1}{s}\int_0^\delta e^{-st}dt\right]. \tag{2.4.4}$$

Simplifica-se e calcula-se a integral remanescente em (2.4.4):

$$\mathcal{L}\{t\} = \lim_{\delta\to\infty}\left[\frac{-\delta e^{-s\delta}}{s} + \frac{1}{s}\cdot\frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^\delta\right],$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \lim_{\delta\to\infty}\left[\frac{-\delta e^{-s\delta}}{s} - \frac{1}{s^2}\left(e^{-s\delta} - e^0\right)\right],$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \lim_{\delta\to\infty}\left[\frac{-\delta}{se^{s\delta}} - \frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{e^{s\delta}} - 1\right)\right]. \tag{2.4.5}$$

O limite em (2.4.5) pode ser separado em três partes:

$$\mathcal{L}\{t\} = -\frac{1}{s}\lim_{\delta\to\infty}\left[\frac{\delta}{e^{s\delta}}\right] - \frac{1}{s^2}\lim_{\delta\to\infty}\left[\frac{1}{e^{s\delta}}\right] + \frac{1}{s^2}\lim_{\delta\to\infty}[1]. \tag{2.4.6}$$

Quando $s > 0$ os dois primeiros limites em (2.4.6) existem e são iguais a zero:

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2},\ s > 0.$$

Quando $s < 0$ os dois primeiros limites em (2.4.6) não existem e se $s = 0$ a integral em (2.4.2) é divergente. A resolução deste exercício está disponível em vídeo aqui.

2.5 Transformada de Laplace da função $f(t) = e^{at}$

Exercício 4. *Seja a um número real. Deduzir a Transformada de Laplace da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que:*

$$t \mapsto f(t) = e^{at}, t \geq 0. \tag{2.5.1}$$

2.5.1 Solução

Parte-se da definição de Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt,$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt. \tag{2.5.2}$$

Foi visto que:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s},\ s > 0. \tag{2.5.3}$$

Comparando as integrais em (2.5.2) e (2.5.3) encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a},\ s > a.$$

O resultado anterior significa que incluso quando a é um número real positivo existe a Transformada de Laplace da função exponencial, bastando escolher $s > a$. A resolução deste exercício está disponível em vídeo aqui.

2.6 Linearidade da Transformada de Laplace

Proposição 1. *Sejam* $a_1, a_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Se* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *para* $s > a_1$ *e* $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ *para* $s > a_2$, *então vale que:*

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s),\ s > \max\{a_1, a_2\}.$$

Demonstração. Por hipótese existem as transformadas de Laplace para as funções $f(t)$ e $g(t)$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt,\ s > a_1, \tag{2.6.1}$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) = \int_0^\infty e^{-st}g(t)dt,\ s > a_2. \tag{2.6.2}$$

Isto é, as integrais impróprias anteriores são convergentes para $s > a_1$ e $s > a_2$, respectivamente.

Quer-se encontrar a Transformada de Laplace de uma combinação linear das duas funções:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right]dt.$$

Pela convergência das integrais em (2.6.1) e (2.6.2), a linearidade da operação de integração e o uso da lei distributiva segue:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\alpha f(t)dt + \int_0^\infty e^{-st}\beta g(t)dt.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Como α e β são constantes (não dependem de t) tem-se:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt.$$

As duas integrais anteriores são convergentes simultaneamente quando s é maior que o máximo dos elementos do conjunto $\{a_1, a_2\}$. Ou seja,

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s),\ s > \max\{a_1, a_2\}.$$

$\square$

Esta seção está disponível em vídeo aqui.

2.7 Exercício utilizando a linearidade da Transformada de Laplace

Exercício 5. *Calcular* $\mathcal{L}\{7 + 5t\}$.

2.7.1 Solução

Pela linearidade da Transformada de Laplace pode-se escrever:

$$\mathcal{L}\{7 + 5t\} = \mathcal{L}\{7 \cdot 1\} + \mathcal{L}\{5 \cdot t\},$$

$$\mathcal{L}\{7 + 5t\} = 7 \cdot \mathcal{L}\{1\} + 5 \cdot \mathcal{L}\{t\},$$

$$\mathcal{L}\{7 + 5t\} = 7 \cdot \frac{1}{s} + 5 \cdot \frac{1}{s^2},\ s > 0.$$

As transformadas de Laplace das funções $f(t) = 1$ e $f(t) = t$ foram encontradas anteriormente.

2.8 Existência da Transformada de Laplace

Inicia-se discutindo uma condição suficiente para a existência da Transformada de Laplace de uma função.

Definição 1. *Uma função f é chamada de <u>ordem exponencial c</u> se existirem constantes reais c, $M > 0$ e $T > 0$ tais que:*

$$|f(t)| \leq Me^{ct},\ \forall t > T.$$

Proposição 2. *Se $f(t)$ for uma função contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$ e de ordem exponencial c, então existe $\mathcal{L}\{f(t)\}$ para $s > c$.*

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Demonstração. Como $T > 0$ o intervalo de integração pode ser escrito como $[0, \infty) = [0, T] \cup [T, \infty)$ e pela definição de Transformada de Laplace segue:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

A primeira integral é própria pois seus limites de integração são finitos e seu integrando também (por ser de ordem exponencial c). Logo, bastará provar a existência da segunda integral que é imprópria:

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

Supondo que a integral anterior seja convergente, a integral do módulo do integrando é sempre maior ou igual a mesma integral sem o módulo:

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t)dt \leq \int_T^\infty \left| e^{-st} f(t) \right| dt = \int_T^\infty e^{-st} \left| f(t) \right| dt.$$

Na segunda passagem utilizo-se que a função exponencial é sempre positiva. Continua-se levando em consideração que $f(t)$ é de ordem exponencial c:

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t)dt \leq \int_T^\infty e^{-st} M e^{ct} dt,$$

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t)dt \leq M \int_T^\infty e^{-(s-c)t} dt \leq M \int_0^\infty e^{-(s-c)t} dt.$$

Na última transição o intervalo de integração foi ampliado. Isto pode ser feito pois a imagem da função exponencial é um número real positivo. Foi visto que a Transformada de Laplace da função e^{ct} existe para $s > c$:

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t)dt \leq M \int_0^\infty e^{-st} e^{ct} dt = M\mathcal{L}\{e^{ct}\},\ s > c.$$

Pelo Teste da Comparação na equação anterior, como a integral a direita (maior) é convergente, a integral a esquerda (menor) também deve ser convergente. Isto é, a integral

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t)dt$$

é finita (existe) para $s > c$. □

Porém, a Transformada de Laplace não existe para todas as funções. Dois exemplos em

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

que não existem as Transformada de Laplace são

$$f(t) = \frac{1}{t}$$

e

$$f(t) = e^{t^2}.$$

Nenhuma das duas funções anteriores é de ordem exponencial c. Uma discussão do conteúdo desta seção está disponível em vídeo.

2.9 Transformada de Laplace da função $f(t) = \cos(at)$

Exercício 6. *Seja a um número real. Deduzir a Transformada de Laplace da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tal que:*

$$t \mapsto f(t) = \cos(at), t \geq 0. \tag{2.9.1}$$

2.9.1 Solução

Parte-se da definição de Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \int_0^{\infty} \cos(at)e^{-st}dt. \tag{2.9.2}$$

Como a integral (2.9.2) é imprópria escreve-se:

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \lim_{\delta \to \infty} \left[\int_0^{\delta} \cos(at)e^{-st}dt \right]. \tag{2.9.3}$$

Para encontrar a Transformada de Laplace da função cosseno é preciso integral por partes duas vezes.

i) Em (2.9.3) utiliza-se a fórmula de integração por partes:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

com

$$\begin{aligned} u(t) &= \cos(at), & dv(t) &= e^{-st}dt, \\ du(t) &= -a\,\mathrm{sen}(at)dt, & v(t) &= -\tfrac{1}{s}e^{-st}. \end{aligned}$$

Logo, para $s \neq 0$ tem-se:

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \lim_{\delta\to\infty}\left[\frac{-1}{s}\cos(at)e^{-st}\Big|_0^{\delta} - \int_0^{\delta} -\frac{1}{s}(-a)\operatorname{sen}(at)e^{-st}dt\right],$$

$$= \lim_{\delta\to\infty}\left[\frac{-1}{s}\left(\cos(a\delta)e^{-s\delta} - \cancelto{1}{\cos(0)e^{0}}\right) - \frac{a}{s}\int_0^{\delta}\operatorname{sen}(at)e^{-st}dt\right]. \tag{2.9.4}$$

O limite do primeiro somando em (2.9.4) somente existe para $s > 0$ e nesse caso é zero:

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\lim_{\delta\to\infty}\left[\int_0^{\delta}\operatorname{sen}(at)e^{-st}dt\right]. \tag{2.9.5}$$

O limite em (2.9.5) pode ser calculado por separado e denotado por I:

$$I = \lim_{\delta\to\infty}\left[\int_0^{\delta}\operatorname{sen}(at)e^{-st}dt\right], \tag{2.9.6}$$

Seja $J = \mathcal{L}\{\cos(at)\}$ então de (2.9.5) e (2.9.6) pode-se escrever:

$$J = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}I. \tag{2.9.7}$$

ii) Para a integral em (2.9.6) utiliza-se a fórmula de integração por partes:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

com

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{sen}(at), & dv(t) &= e^{-st}dt, \\ du(t) &= a\cos(at)dt, & v(t) &= -\tfrac{1}{s}e^{-st}. \end{aligned}$$

Logo, para $s \neq 0$ tem-se:

$$I = \lim_{\delta\to\infty}\left[\frac{-1}{s}\operatorname{sen}(at)e^{-st}\Big|_0^{\delta} - \int_0^{\delta}\frac{-a}{s}\cos(at)e^{-st}dt\right],$$

$$I = \lim_{\delta\to\infty}\left[\frac{-1}{s}\left(\operatorname{sen}(a\delta)e^{-s\delta} - \cancelto{0}{\operatorname{sen}(0)}e^{0}\right) + \frac{a}{s}\int_0^{\delta}\cos(at)e^{-st}dt\right]. \tag{2.9.8}$$

O limite do primeiro somando em (2.9.8) somente existe para $s > 0$ e nesse caso é zero:

$$I = \frac{a}{s}\lim_{\delta\to\infty}\left[\int_0^{\delta}\cos(at)e^{-st}dt\right] = \frac{a}{s}J. \tag{2.9.9}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Substituindo a equação (2.9.9) em (2.9.7) encontra-se:

$$J = \frac{1}{s} - \frac{a^2}{s^2}J,$$

$$J + \frac{a^2}{s^2}J = \frac{1}{s},$$

$$J\left(\frac{s^2+a^2}{s^2}\right) = \frac{1}{s},$$

$$J = \frac{s}{s^2+a^2} = \mathcal{L}\{\cos(at)\}. \tag{2.9.10}$$

Isto é, quando $s > 0$ de (2.9.3) e (2.9.10) vale:

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0.$$

Se $s = 0$ a integral em (2.9.2) é divergente. A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

2.10 Transformada de Laplace da função $f(t) = \operatorname{sen}(at)$

Exercício 7. *Seja a um número real. Deduzir a Transformada de Laplace da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que:*

$$t \mapsto f(t) = \operatorname{sen}(at), t \geq 0. \tag{2.10.1}$$

2.10.1 Solução

Parte-se da definição de Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt,$$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\} = \int_0^\infty \operatorname{sen}(at)e^{-st}dt. \tag{2.10.2}$$

Como a integral (2.10.2) é imprópria escreve-se:

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\} = \lim_{\delta\to\infty}\left[\int_0^\delta \operatorname{sen}(at)e^{-st}dt\right]. \tag{2.10.3}$$

Para encontrar a Transformada de Laplace da função cosseno é preciso integral por partes duas vezes.

i) Em (2.10.3) utiliza-se a fórmula de integração por partes:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

com

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{sen}(at), & dv(t) &= e^{-st}dt, \\ du(t) &= a\cos(at)dt, & v(t) &= -\tfrac{1}{s}e^{-st}. \end{aligned}$$

Logo, para $s \neq 0$ tem-se:

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\} = \lim_{\delta\to\infty}\left[\frac{-1}{s}\operatorname{sen}(at)e^{-st}\Big|_0^\delta - \int_0^\delta -\frac{1}{s}a\cos(at)e^{-st}dt\right],$$

$$= \lim_{\delta\to\infty}\left[\frac{-1}{s}\left(\operatorname{sen}(a\delta)e^{-s\delta} - \cancelto{0}{\operatorname{sen}(0)}e^0\right) + \frac{a}{s}\int_0^\delta \cos(at)e^{-st}dt\right]. \tag{2.10.4}$$

O limite do primeiro somando em (2.10.4) somente existe para $s > 0$ e nesse caso é zero:

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\} = \frac{a}{s}\lim_{\delta\to\infty}\left[\int_0^\delta \cos(at)e^{-st}dt\right]. \tag{2.10.5}$$

O limite em (2.10.5) pode ser calculado por separado e denotado por I:

$$I = \lim_{\delta\to\infty}\left[\int_0^\delta \cos(at)e^{-st}dt\right], \tag{2.10.6}$$

Seja $J = \mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\}$ então de (2.10.5) e (2.10.6) pode-se escrever:

$$J = \frac{a}{s}I. \tag{2.10.7}$$

ii) Para a integral em (2.10.6) utiliza-se a fórmula de integração por partes:

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du,$$

com

$$\begin{aligned} u(t) &= \cos(at), & dv(t) &= e^{-st}dt, \\ du(t) &= -a\operatorname{sen}(at)dt, & v(t) &= -\tfrac{1}{s}e^{-st}. \end{aligned}$$

Logo, para $s \neq 0$ tem-se:

$$I = \lim_{\delta\to\infty}\left[\frac{-1}{s}\cos(at)e^{-st}\Big|_0^\delta - \int_0^\delta \frac{-1}{s}(-a)\operatorname{sen}(at)e^{-st}dt\right],$$

$$I = \lim_{\delta\to\infty}\left[\frac{-1}{s}\left(\cos(a\delta)e^{-s\delta} - \cancelto{1}{\cos(0)e^{0}}\right) - \frac{a}{s}\int_0^{\delta} \text{sen}(at)e^{-st}dt\right]. \tag{2.10.8}$$

O limite do primeiro somando em (2.10.8) somente existe para $s > 0$ e nesse caso é zero:

$$I = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\lim_{\delta\to\infty}\left[\int_0^{\delta} \text{sen}(at)e^{-st}dt\right] = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}J. \tag{2.10.9}$$

Substituindo a equação (2.10.9) em (2.10.7) encontra-se:

$$J = \frac{a}{s}\left(\frac{1}{s} - \frac{a}{s}J\right),$$

$$J + \frac{a^2}{s^2}J = \frac{a}{s^2},$$

$$J\left(\frac{s^2+a^2}{s^2}\right) = \frac{a}{s^2},$$

$$J = \frac{a}{s^2+a^2} = \mathcal{L}\{\,\text{sen}(at)\}. \tag{2.10.10}$$

Isto é, quando $s > 0$ de (2.10.3) e (2.10.10) vale:

$$\mathcal{L}\{\,\text{sen}(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0.$$

Se $s = 0$ a integral em (2.10.2) é divergente. A resolução de um exercício análogo está disponível em vídeo.

2.11 Cálculo de Transformada Inversa de Laplace utilizando uma tabela-I

Exercício 8. *a) Elencar as funções mais usadas com sua respetiva Transformada de Laplace. b) Usar a tabela para calcular a Transformada Inversa de Laplace:*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^2+7}\right\}.$$

2.11.1 Solução

a) Segue uma tabela com as funções mais usadas e sua respetiva Transformada de Laplace.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Tabela 2.1: Transformadas e Anti-transformadas de Laplace.

Linha	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\},\ t > 0$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
01	1	$\frac{1}{s},\ s > 0$
02	$e^{at};\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
03	$t^n;\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$
04	$t^p;\ p \in \mathbb{R},\ p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}},\ s > 0$
05	$\operatorname{sen}(at);\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
06	$\cos(at);\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
07	$\operatorname{senh}(at);\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
08	$\cosh(at);\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$
09	$e^{at}\operatorname{sen}(bt);\ a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
10	$e^{at}\cos(bt);\ a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
11	$e^{at}t^p;\ a, p \in \mathbb{R}$	$\frac{\Gamma(p+1)}{(s-a)^{p+1}},\ s > a$

b) A Transformada Inversa de Laplace também é linear. Ou seja, vale que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^2+7}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\}. \tag{2.11.1}$$

Para o primeiro e segundo somando a direita de (2.11.1) deve-se utilizar a linha 03 e a linha 05 da Tabela 2.1, respectivamente. Para a transformada inversa a leitura é feita de direita para esquerda. Para que a correspondência aconteça primeiro cada termo multiplica-se e divide-se por uma constante apropriada:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^2+7}\right\} = \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} + \frac{1}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+\sqrt{7}^2}\right\},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^2+7}\right\} = \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{7}t\right),\ t > 0.$$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

2.12 Cálculo de Transformada Inversa de Laplace utilizando uma tabela-II

Exercício 9. *a) Elencar as funções mais usadas com sua respetiva Transformada de Laplace. b) Usar a tabela para calcular a Transformada Inversa de Laplace:*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}+\frac{s}{s^2+9}\right\}. \tag{2.12.1}$$

2.12.1 Solução

a) Segue uma tabela com as funções mais usadas e sua respetiva Transformada de Laplace.

Tabela 2.2: Transformadas e Anti-transformadas de Laplace.

Linha	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\},\ t>0$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$
01	1	$\frac{1}{s},\ s>0$
02	$e^{at};\ a\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
03	$t^n;\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0$
04	$t^p;\ p\in\mathbb{R},\ p>-1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}},\ s>0$
05	$\operatorname{sen}(at);\ a\in\mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
06	$\cos(at);\ a\in\mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
07	$\operatorname{senh}(at);\ a\in\mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
08	$\cosh(at);\ a\in\mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
09	$e^{at}\operatorname{sen}(bt);\ a,b\in\mathbb{R}$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
10	$e^{at}\cos(bt);\ a,b\in\mathbb{R}$	$\frac{s}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
11	$e^{at}t^p;\ a,p\in\mathbb{R}$	$\frac{\Gamma(p+1)}{(s-a)^{p+1}},\ s>a$

b) A Transformada Inversa de Laplace é linear. Ou seja, vale que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\lambda F(s)+\beta G(s)\right\}=\lambda\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}+\beta\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Aplicando a linearidade em (2.12.1) tem-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}+\frac{s}{s^2+9}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}. \tag{2.12.2}$$

Na tabela vista anteriormente encontra-se que:

$$\mathcal{L}\{\,\text{sen}(at)\}=\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0, \tag{2.12.3}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\}=\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0. \tag{2.12.4}$$

Para o primeiro e segundo somando a direita de (2.12.2) deve-se utilizar (2.12.3) e (2.12.4), respectivamente. Para a transformada inversa a leitura é feita de direita para esquerda. Consegue-se a correspondência do primeiro termo multiplicando e dividindo por 2:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}+\frac{s}{s^2+9}\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}+\frac{s}{s^2+9}\right\}=\frac{1}{2}\,\text{sen}\,(2t)+\cos\,(3t)\,,\ t>0.$$

A resolução de um exercício análogo está disponível em vídeo.

2.13 Cálculo de Transformada Inversa de Laplace utilizando uma tabela-III

Exercício 10. *a) Elencar as funções mais usadas com sua respetiva Transformada de Laplace. b) Usar a tabela para calcular a Transformada Inversa de Laplace:*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}+\frac{1}{s^2+7}\right\}.$$

2.13.1 Solução

a) Segue uma tabela com as funções mais usadas e sua respetiva Transformada de Laplace.

Tabela 2.3: Transformadas e Anti-transformadas de Laplace.

Linha	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\},\ t > 0$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
01	1	$\frac{1}{s},\ s > 0$
02	$e^{at};\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
03	$t^n;\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$
04	$t^p;\ p \in \mathbb{R},\ p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}},\ s > 0$
05	$\operatorname{sen}(at);\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
06	$\cos(at);\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
07	$\operatorname{senh}(at);\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \vert a\vert$
08	$\cosh(at);\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \vert a\vert$
09	$e^{at}\operatorname{sen}(bt);\ a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
10	$e^{at}\cos(bt);\ a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
11	$e^{at}t^p;\ a, p \in \mathbb{R}$	$\frac{\Gamma(p+1)}{(s-a)^{p+1}},\ s > a$

b) A Transformada Inversa de Laplace também é linear. Ou seja, vale que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5} + \frac{1}{s^2+7}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\}. \qquad (2.13.1)$$

Para o primeiro e segundo somando a direita de (2.13.1) deve-se utilizar a linha 03 e a linha 05 da Tabela 2.3, respectivamente. Para a transformada inversa a leitura é feita de direita para esquerda. Para que a correspondência aconteça primeiro cada termo multiplica-se e divide-se por uma constante apropriada:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5} + \frac{1}{s^2+7}\right\} = \frac{1}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} + \frac{1}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+\sqrt{7}^2}\right\},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5} + \frac{1}{s^2+7}\right\} = \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{7}t\right),\ t > 0.$$

A resolução de um exercício análogo está disponível em vídeo.

2.14 Cálculo de Transformada Inversa de Laplace utilizando uma tabela-IV

Exercício 11. *a) Elencar as funções mais usadas com sua respetiva Transformada de Laplace. b) Usar a tabela para calcular a Transformada Inversa de Laplace:*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}.$$

2.14.1 Solução

a) Segue uma tabela com as funções mais usadas e sua respetiva Transformada de Laplace.

Tabela 2.4: Transformadas e Anti-transformadas de Laplace.

Linha	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\},\ t>0$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$
01	1	$\frac{1}{s},\ s>0$
02	$e^{at};\ a\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
03	$t^n;\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0$
04	$t^p;\ p\in\mathbb{R},\ p>-1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}},\ s>0$
05	$\operatorname{sen}(bt);\ b\in\mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2+b^2},\ s>0$
06	$\cos(bt);\ b\in\mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+b^2},\ s>0$
07	$\operatorname{senh}(bt);\ b\in\mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2-b^2},\ s>\lvert b\rvert$
08	$\cosh(bt);\ b\in\mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2-b^2},\ s>\lvert b\rvert$
09	$e^{at}\operatorname{sen}(bt);\ a,b\in\mathbb{R}$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
10	$e^{at}\cos(bt);\ a,b\in\mathbb{R}$	$\frac{s}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
11	$e^{at}t^p;\ a,p\in\mathbb{R}$	$\frac{\Gamma(p+1)}{(s-a)^{p+1}},\ s>a$

b) O primeiro passo é escrever a fração dada como uma soma de frações parciais mais

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

simples:

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+4}. \tag{2.14.1}$$

Isto é, deve-se encontrar coeficientes $A, B, C \in \mathbb{R}$ tais que a equação anterior seja verdadeira para todo $s \in \mathbb{R}$.

Uma forma eficiente de resolver esse problema é utilizar o método chamado do encobrimento. Primeiro, multiplicamos (2.14.1) por $s-1$ e avaliamos em $s=1$:

$$\left.\frac{(s^2+6s+9)\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s-2)(s+4)}\right|_{s=1} = \left.\frac{A\cancel{(s-1)}}{\cancel{s-1}}\right|_{s=1} + \left.\frac{B(s-1)}{s-2}\right|_{s=1} + \left.\frac{C(s-1)}{s+4}\right|_{s=1},$$

$$-\frac{16}{5} = A. \tag{2.14.2}$$

Segundo, multiplicamos (2.14.1) por $s-2$ e avaliamos em $s=2$:

$$\left.\frac{(s^2+6s+9)\cancel{(s-2)}}{(s-1)\cancel{(s-2)}(s+4)}\right|_{s=2} = \left.\frac{A(s-2)}{s-1}\right|_{s=2} + \left.\frac{B\cancel{(s-2)}}{\cancel{s-2}}\right|_{s=2} + \left.\frac{C(s-2)}{s+4}\right|_{s=2},$$

$$\frac{25}{6} = B. \tag{2.14.3}$$

Terceiro, multiplicamos (2.14.1) por $s+4$ e avaliamos em $s=-4$:

$$\left.\frac{(s^2+6s+9)\cancel{(s+4)}}{(s-1)(s-2)\cancel{(s+4)}}\right|_{s=-4} = \left.\frac{A(s+4)}{s-1}\right|_{s=-4} + \left.\frac{B(s+4)}{s-2}\right|_{s=-4} + \left.\frac{C\cancel{(s+4)}}{\cancel{s+4}}\right|_{s=-4},$$

$$\frac{1}{30} = C. \tag{2.14.4}$$

Substituindo (2.14.2), (2.14.3) e (2.14.4) em (2.14.1) encontra-se:

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = -\frac{16}{5}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{25}{6}\cdot\frac{1}{s-2} + \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{s+4}. \tag{2.14.5}$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace em (2.14.5) e utilizando que esta é linear tem-se:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} &= -\frac{16}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+\\ &+\frac{25}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\frac{1}{30}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}.\end{aligned} \tag{2.14.6}$$

Para os três somandos na direita de (2.14.6) deve-se utilizar a linha 02 da Tabela 2.4.

Para a transformada inversa a leitura é feita de direita para esquerda:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} = -\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t},\ t > 0.$$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Capítulo 3

Transformada de Laplace das derivadas de $f(t)$

3.1 Transformada de Laplace das derivadas de f

Exercício 12. *Deduzir a Transformada de Laplace da primeira e segunda derivada de f. Isto é, encontrar $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ e $\mathcal{L}\{f''(t)\}$. Generalizar para a derivada enésima: $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}$.*

Inicia-se lembrando a definição de Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt. \tag{3.1.1}$$

3.1.1 Dedução da Transformada de Laplace da primeira derivada de f

Parte-se da premissa que $f'(t)$ seja contínua para todo $t \geq 0$ e que $\mathcal{L}\{f(t)\}$ exista. Ou seja, $f(t)$ é de ordem exponencial. Utilizando a definição deve-se encontrar:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt. \tag{3.1.2}$$

Será utilizada a integração por partes na equação (3.1.2):

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du,$$

com

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-st}, & dv(t) &= f'(t)dt, \\ du(t) &= -se^{-st}dt, & v(t) &= f(t). \end{aligned}$$

Portanto (3.1.2) reescreve-se como:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt,$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\mathcal{L}\{f(t)\}. \tag{3.1.3}$$

Na última passagem foi utilizada a equação (3.1.1). Avaliar no infinito significa calcular um limite. Logo (3.1.3) reescreve-se como:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}f(t)\right] - \cancelto{1}{e^{0}}f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}. \tag{3.1.4}$$

Como $f(t)$ é de ordem exponencial c existem constantes c, $M > 0$ e $T > 0$ tais que

$$|f(t)| \leq Me^{ct},\ \forall t > T.$$

Com isto, o módulo do limite em (3.1.4) pode ser calculado como:

$$\left|\lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}f(t)\right]\right| \leq \lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}Me^{ct}\right] = M\lim_{t\to\infty}\left[e^{-(s-c)t}\right] = 0,\ s > c.$$

Ou seja,

$$\lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}f(t)\right] = 0,\ s > c.$$

Com o resultado anterior volta-se em (3.1.4). Portanto, quando $f(t)$ é de ordem exponencial c, a Transformada de Laplace de $f'(t)$ escreve-se como:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\},\ s > c. \tag{3.1.5}$$

3.1.2 Dedução da Transformada de Laplace da segunda derivada de f

Para o calculo de $\mathcal{L}\{f''(t)\}$ é usado um artifício. Primeiro, troca-se $f(t) \to f'(t)$ e $f'(t) \to f''(t)$ em (3.1.5):

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -f'(0) + s\mathcal{L}\{f'(t)\}. \tag{3.1.6}$$

A seguir, no segundo somando de (3.1.6) é substituída novamente a equação (3.1.5):

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -f'(0) + s\left[-f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}\right],$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -f'(0) - sf(0) + s^2\mathcal{L}\{f(t)\}. \tag{3.1.7}$$

A equação (3.1.7) é a que permite calcular a Transformada de Laplace da segunda derivada de

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

f.

3.1.3 Generalização da Transformada de Laplace da derivada enésima de f

Pode ser provado que se $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n)}(t)$ forem funções de ordem exponencial e contínuas no intervalo $[0, \infty)$ então,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \cdots \\ \cdots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0).\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

3.2 PVI de primeira ordem, não homogêneo

Exercício 13. *Resolver o problema de valor inicial usando a Transformada de Laplace:*

$$y'(t) + 3y(t) = 13\,\mathrm{sen}(2t), \tag{3.2.1}$$

$$y(0) = 6. \tag{3.2.2}$$

3.2.1 Solução

Inicia-se aplicando a Transformada de Laplace nos dois lados da equação (3.2.1):

$$\mathcal{L}\left\{y'(t) + 3y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{13\,\mathrm{sen}(2t)\right\}. \tag{3.2.3}$$

Como a Transformada de Laplace é linear tem-se:

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} + 3\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = 13\mathcal{L}\left\{\mathrm{sen}(2t)\right\}. \tag{3.2.4}$$

Será usada a notação:

$$\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = Y(s). \tag{3.2.5}$$

As Transformadas de Laplace da primeira derivada e da função seno foram estudadas anteriormente:

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = -y(0) + s\mathcal{L}\{y(t)\}, \tag{3.2.6}$$

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{sen}(2t)\right\} = \frac{2}{s^2+4}. \tag{3.2.7}$$

Substituindo (3.2.2) e (3.2.5) em (3.2.6) encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = -6 + sY(s). \tag{3.2.8}$$

Com (3.2.5), (3.2.7) e (3.2.8) volta-se em (3.2.4):

$$-6 + sY(s) + 3Y(s) = 13\frac{2}{s^2+4}. \tag{3.2.9}$$

A equação (3.2.9) é algébrica para $Y(s)$. Isto é, não aparecem derivadas. Não é uma equação diferencial e pode ser resolvida como:

$$Y(s) = \frac{6}{s+3} + \frac{26}{(s+3)(s^2+4)}. \tag{3.2.10}$$

A equação (3.2.10) é a solução do PVI no espaço transformado ou no espaço dos s. Resta encontrar a anti-Transformada de Laplace para voltar no espaço dos t. Ou seja,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}.$$

Mas antes deve-se escrever o segundo somando de (3.2.10) na forma de frações parciais mais simples:

$$\frac{26}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+4}, \tag{3.2.11}$$

onde A, B, C são coeficientes reais a serem determinados. O numerador do segundo somando de (3.2.11) é escrito como um polinômio linear devido a equação no denominador ($s^2+4=0$) não ter soluções reais.

Segue de (3.2.11) que:

$$A(s^2+4) + (Bs+C)(s+3) = 26,$$

$$(A+B)s^2 + (3B+C)s + (4A+3C) = 0\cdot s^2 + 0\cdot s + 26. \tag{3.2.12}$$

A equação (3.2.12) deve ser entendida como uma igualdade de polinômios em s e leva ao sistema:

$$\begin{array}{r} A+B=0 \\ 3B+C=0 \\ 4A+3C=26 \end{array}. \tag{3.2.13}$$

Resolvendo (3.2.13) encontra-se:

$$A = 2,$$

$$B = -2,$$

$$C = 6.$$

Os resultados anteriores são substituídos primeiro em (3.2.11) e depois levado a (3.2.10):

$$Y(s) = \frac{6}{s+3} + \frac{2}{s+3} + \frac{-2s+6}{s^2+4},$$

$$Y(s) = \frac{8}{s+3} - \frac{2s}{s^2+4} + \frac{6}{s^2+4}. \tag{3.2.14}$$

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace a equação (3.2.14) transforma-se como:

$$Y(s) = 8\frac{1}{s-(-3)} - 2\frac{s}{s^2+2^2} + 3\frac{2}{s^2+2^2},$$

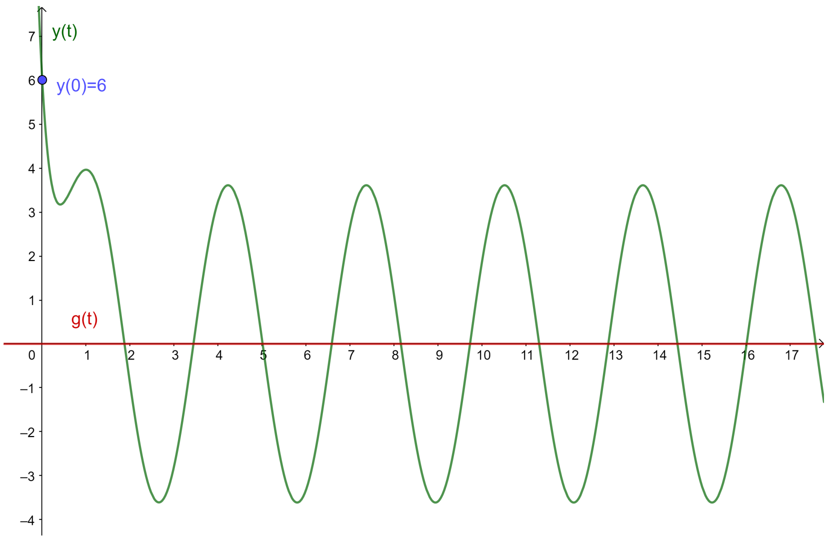
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = 8e^{-3t} - 2\cos(2t) + 3\,\mathrm{sen}(2t). \tag{3.2.15}$$

A Figura 3.1 mostra os gráficos da equação (3.2.15) e da função:

$$g(t) = y'(t) + 3y(t) - 13\,\mathrm{sen}(2t).$$

Os mesmos ilustram que a solução do PVI é valida para todo t real, embora o método da Transformada de Laplace utiliza-se somente com $t \geq 0$. A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

Figura 3.1: Gráfico da solução do PVI. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

3.3 PVI de segunda ordem, homogêneo

Exercício 14. *Resolver o problema de valor inicial usando a Transformada de Laplace:*

$$y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 0, \tag{3.3.1}$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = -1. \tag{3.3.2}$$

3.3.1 Solução

Inicia-se aplicando a Transformada de Laplace nos dois lados da equação (3.3.1):

$$\mathcal{L}\left\{y''(t) - y'(t) - 6y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{0\right\}. \tag{3.3.3}$$

Como a Transformada de Laplace é linear tem-se:

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} - 6\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = 0 \cdot \mathcal{L}\left\{1\right\}. \tag{3.3.4}$$

Será usada a notação:

$$\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = Y(s). \tag{3.3.5}$$

As Transformadas de Laplace das derivadas e da função constante um foram estudadas anteriormente:

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = -y(0) + s\mathcal{L}\{y(t)\}, \tag{3.3.6}$$

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} = -y'(0) - sy(0) + s^2\mathcal{L}\{y(t)\}, \tag{3.3.7}$$

$$\mathcal{L}\left\{1\right\} = \frac{1}{s}. \tag{3.3.8}$$

Substituindo (3.3.2) e (3.3.5) em (3.3.6) e (3.3.7) encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = -1 + sY(s), \tag{3.3.9}$$

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} = 1 - s + s^2Y(s). \tag{3.3.10}$$

Com (3.3.5), (3.3.8), (3.3.9) e (3.3.10) volta-se em (3.3.4):

$$[1 - s + s^2Y(s)] - [-1 + sY(s)] - 6Y(s) = 0 \cdot \frac{1}{s} = 0. \tag{3.3.11}$$

A equação (3.3.11) é algébrica para $Y(s)$. Não é uma equação diferencial e pode ser resolvida como:

$$(s^2 - s - 6)Y(s) = s - 2,$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

$$Y(s) = \frac{s-2}{s^2 - s - 6}. \tag{3.3.12}$$

Com a fatoração:

$$s^2 - s - 6 = (s-3)(s+2),$$

reescreve-se (3.3.12) como:

$$Y(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s+2)}. \tag{3.3.13}$$

A equação (3.3.13) é a solução do PVI no espaço transformado ou no espaço dos s. Resta encontrar a anti-Transformada de Laplace para voltar no espaço dos t. Ou seja,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}.$$

Mas antes deve-se escrever (3.3.13) na forma de frações parciais:

$$Y(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s+2)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2}, \tag{3.3.14}$$

onde A, B, C são coeficientes reais a serem determinados.

A resolução de (3.3.14) pode ser feita utilizando o método do encobrimento e encontra-se:

$$A = \frac{1}{5},$$

$$B = \frac{4}{5}.$$

Os resultados anteriores são substituídos em (3.3.14):

$$Y(s) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s-3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s-(-2)}. \tag{3.3.15}$$

Lembrando que a Transformada de Laplace da função exponencial é

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}, \; s > a,$$

a equação (3.3.15) transforma-se como:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = \frac{1}{5}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t}. \tag{3.3.16}$$

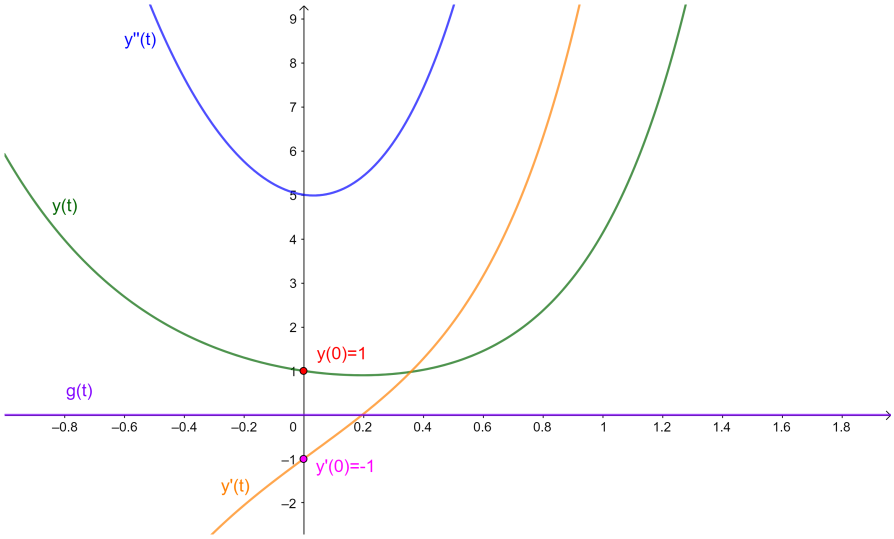
A Figura 3.2 mostra os gráficos da equação (3.3.16), suas derivadas primeira e segunda e da função:

$$g(t) = y''(t) - y'(t) - 6y(t).$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Os mesmos ilustram que a solução do PVI é valida para todo t real, embora o método da Transformada de Laplace utiliza-se somente com $t \geq 0$. A resolução de um exercício análogo está disponível em vídeo.

Figura 3.2: Gráficos da solução do PVI de segunda ordem. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

3.4 PVI de segunda ordem, não homogêneo

Exercício 15. *Resolver o problema de valor inicial usando a Transformada de Laplace:*

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{-4t}, \tag{3.4.1}$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 5. \tag{3.4.2}$$

3.4.1 Solução

Inicia-se aplicando a Transformada de Laplace nos dois lados da equação (3.4.1):

$$\mathcal{L}\left\{y''(t) - 3y'(t) + 2y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-4t}\right\}. \tag{3.4.3}$$

Como a Transformada de Laplace é linear tem-se:

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} - 3\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} + 2\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-4t}\right\}. \tag{3.4.4}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Será usada a notação:

$$\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = Y(s). \tag{3.4.5}$$

As Transformadas de Laplace das derivadas e da função exponencial foram estudadas anteriormente:

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = -y(0) + s\mathcal{L}\{y(t)\}, \tag{3.4.6}$$

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} = -y'(0) - sy(0) + s^2\mathcal{L}\{y(t)\}, \tag{3.4.7}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{-4t}\right\} = \frac{1}{s+4}. \tag{3.4.8}$$

Substituindo (3.4.2) e (3.4.5) em (3.4.6) e (3.4.7) encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = -1 + sY(s), \tag{3.4.9}$$

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} = -5 - s + s^2Y(s). \tag{3.4.10}$$

Com (3.4.5), (3.4.8), (3.4.9) e (3.4.10) volta-se em (3.4.4):

$$-5 - s + s^2Y(s) - 3[-1 + sY(s)] + 2Y(s) = \frac{1}{s+4}. \tag{3.4.11}$$

A equação (3.4.11) é algébrica para $Y(s)$. Não é uma equação diferencial e pode ser resolvida como:

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2 - 3s + 2} + \frac{1}{(s+4)(s^2 - 3s + 2)}. \tag{3.4.12}$$

Com a fatoração:

$$s^2 - 3s + 2 = (s-1)(s-2),$$

reescreve-se (3.4.12) como:

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s-2)} + \frac{1}{(s+4)(s-1)(s-2)},$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6s + 9}{(s+4)(s-1)(s-2)}. \tag{3.4.13}$$

A equação (3.4.13) é a solução do PVI no espaço transformado ou no espaço dos s. Resta encontrar a anti-Transformada de Laplace para voltar no espaço dos t. Ou seja,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Mas antes deve-se escrever (3.4.13) na forma de frações parciais:

$$\frac{s^2+6s+9}{(s+4)(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+4}, \tag{3.4.14}$$

onde A, B, C são coeficientes reais a serem determinados.

A resolução de (3.4.14) foi feita utilizando o método do encobrimento e encontrou-se:

$$A = -\frac{16}{5},$$

$$B = \frac{25}{6},$$

$$C = \frac{1}{30}.$$

Os resultados anteriores são substituídos primeiro em (3.4.14) e depois levados a (3.4.13):

$$Y(s) = -\frac{16}{5}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{25}{6}\cdot\frac{1}{s-2} + \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{s-(-4)}. \tag{3.4.15}$$

Lembrando que a Transformada de Laplace da função exponencial é

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a},\ s > a,$$

a equação (3.4.15) transforma-se como:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = -\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}. \tag{3.4.16}$$

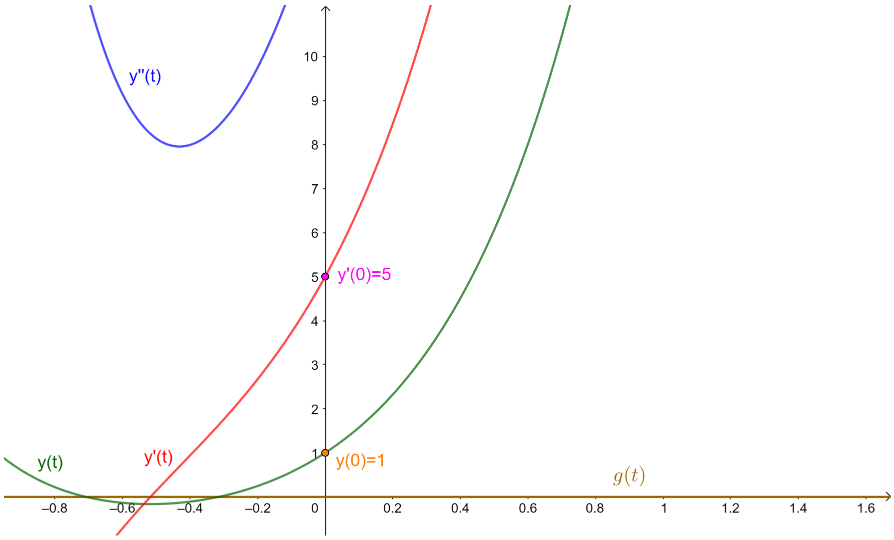
A Figura 3.3 mostra os gráficos da equação (3.4.16), suas derivadas primeira e segunda e da função:

$$g(t) = y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) - e^{-4t}.$$

Os mesmos ilustram que a solução do PVI é valida para todo t real, embora o método da Transformada de Laplace utiliza-se somente com $t \geq 0$. A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Figura 3.3: Gráficos da solução do PVI de segunda ordem. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Capítulo 4

Teoremas da Translação

4.1 Primeiro Teorema da Translação em Transformadas de Laplace

Exercício 16. *Enunciar e demonstrar o "Primeiro Teorema da Translação em Transformadas de Laplace".*

4.1.1 Solução

Teorema 3 (Primeiro Teorema da Translação em Transformadas de Laplace)**.** *Sejam* $a, a' \in \mathbb{R}$ *e* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *quando* $s > a' \geq 0$*, então*

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a),\ s > a + a'.$$

Demonstração. A Transformada de Laplace de uma função real de variável real $f(t)$ e $t > 0$ é definida por uma integral imprópria:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = F(s),\ s > a' \geq 0. \tag{4.1.1}$$

Analogamente, a Transformada de Laplace da função real de variável real $e^{at}f(t)$ e $t > 0$ calcula-se como:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt.$$

Na equação anterior reescreve-se o produto de exponenciais:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st+at}f(t)dt.$$

Coloca-se $(-t)$ em evidência no argumento da exponencial:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt.$$

Com a substituição $u = s - a$ tem-se:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-ut}f(t)dt.$$

Logo, pela definição (4.1.1) vale:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(u),\ u > a' \geq 0.$$

Utilizando novamente a substituição $u = s - a$, a Transformada de Laplace que procura-se é a transformada de uma função conhecida deslocada em a:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a),\ \ s - a > a' \geq 0.$$

□

Graficamente, se a for positivo, a função $F(s-a)$ será deslocada no eixo s para a direita de $F(s)$, enquanto que, se a for negativo, será deslocada para a esquerda. A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

4.2 Cálculo de Transformada de Laplace com o Primeiro Teorema da Translação

Exercício 17. *Calcular a Transformada de Laplace:*

$$\mathcal{L}\left\{e^{4t}t^3 - e^{-2t}\cos(4t)\right\}.$$

4.2.1 Solução

Utilizando a linearidade da Transformada de Laplace pode-se escrever:

$$\mathcal{L}\left\{e^{4t}t^3 - e^{-2t}\cos(4t)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{4t}t^3\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{-2t}\cos(4t)\right\}. \tag{4.2.1}$$

Pelo Primeiro Teorema da Translação vale que

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a). \tag{4.2.2}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Devido a (4.2.2) escreve-se (4.2.1) como:

$$\mathcal{L}\left\{e^{4t}t^3 - e^{-2t}\cos(4t)\right\} = \mathcal{L}\left\{t^3\right\}\big|_{s\to s-4} - \mathcal{L}\left\{\cos(4t)\right\}\big|_{s\to s+2}. \tag{4.2.3}$$

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}},\ t>0,\ s>0,\ n\in\mathbb{N}, \tag{4.2.4}$$

$$\mathcal{L}\left\{\cos(bt)\right\} = \frac{s}{s^2+b^2},\ t>0,\ s>0,\ b\in\mathbb{R}. \tag{4.2.5}$$

Aplicando (4.2.4) e (4.2.5) em (4.2.3) tem-se:

$$\mathcal{L}\left\{e^{4t}t^3 - e^{-2t}\cos(4t)\right\} = \left.\frac{3!}{s^4}\right|_{s\to s-4} - \left.\frac{s}{s^2+4^2}\right|_{s\to s+2}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\left\{e^{4t}t^3 - e^{-2t}\cos(4t)\right\} = \frac{6}{(s-4)^4} - \frac{s+2}{(s+2)^2+16}.$$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

4.3 Recíproca do Primeiro Teorema da Translação

Exercício 18. *Calcular a Transformada Inversa de Laplace:*

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}. \tag{4.3.1}$$

4.3.1 Solução

Utilizando frações parciais no caso de fatores lineares repetidos escreve-se $F(s)$ de (4.3.1) como:

$$F(s) = \frac{2s+5}{(s-3)^2} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{(s-3)^2}, \tag{4.3.2}$$

onde $A, B \in \mathbb{R}$ que não dependem de s.

Multiplicando (4.3.2) por $(s-3)^2$ e avaliando em $s=3$ encontra-se:

$$(2s+5)\big|_{s=3} = A(s-3)\big|_{s=3} + B,$$

$$B = 11. \tag{4.3.3}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Substituindo (4.3.3) em (4.3.2) segue:

$$\frac{A}{s-3} = \frac{2s-6}{(s-3)^2},$$

$$As - 3A = 2s - 6. \tag{4.3.4}$$

O valor da constante A deve ser o mesmo para todo s. Logo, da igualdade de polinômios em (4.3.4) chega-se a:

$$A = 2. \tag{4.3.5}$$

Com (4.3.3) e (4.3.5) volta-se em (4.3.2):

$$F(s) = \frac{2s+5}{(s-3)^2} = \frac{2}{s-3} + \frac{11}{(s-3)^2}, \tag{4.3.6}$$

Utilizando a linearidade da Transformada Inversa de Laplace em (4.3.6) tem-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 11\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\}. \tag{4.3.7}$$

Pela Recíproca do Primeiro Teorema da Translação vale que

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) \Leftarrow \mathcal{L}\left\{e^{at}\cdot f(t)\right\} = F(s-a). \tag{4.3.8}$$

Devido a (4.3.8) escreve-se (4.3.7) como:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\left.\frac{1}{s}\right|_{s\to s-3}\right\} + 11\mathcal{L}^{-1}\left\{\left.\frac{1}{s^2}\right|_{s\to s-3}\right\}. \tag{4.3.9}$$

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1,\ t>0,\ s>0. \tag{4.3.10}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n,\ t>0,\ s>0,\ n\in\mathbb{N}, \tag{4.3.11}$$

Pela Recíproca do Primeiro Teorema da Translação, aplicando (4.3.10) e, com $n=1$, (4.3.11) em (4.3.9) tem-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\} = 2e^{3t}\cdot 1 + 11e^{3t}\cdot t = (2+11t)e^{3t},\ t>0.$$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

4.4 PVI de segunda ordem, não homogêneo, PTT

Exercício 19. *Resolver o problema de valor inicial usando a Transformada de Laplace:*

$$y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = t^2 e^{3t}, \tag{4.4.1}$$

$$y(0) = 2, \; y'(0) = 17. \tag{4.4.2}$$

4.4.1 Solução

Utilizando a linearidade da Transformada de Laplace em (4.4.1) tem-se:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} - 6\mathcal{L}\{y'(t)\} + 9\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\}. \tag{4.4.3}$$

Será usada a notação:

$$\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = Y(s). \tag{4.4.4}$$

As Transformadas de Laplace das derivadas podem ser calculadas como:

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = -y(0) + s\mathcal{L}\{y(t)\}, \tag{4.4.5}$$

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} = -y'(0) - sy(0) + s^2\mathcal{L}\{y(t)\}, \tag{4.4.6}$$

Substituindo (4.4.2) e (4.4.4) em (4.4.5) e (4.4.6) encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = -2 + sY(s), \tag{4.4.7}$$

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} = -17 - 2s + s^2 Y(s). \tag{4.4.8}$$

A Transformada de Laplace da função potência e o Primeiro Teorema da Translação permitem escrever:

$$\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = \frac{2}{s^3}, \tag{4.4.9}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^2 e^{3t}\right\} = \frac{2}{(s-3)^3}. \tag{4.4.10}$$

Com (4.4.7), (4.4.8), (4.4.9) e (4.4.10) volta-se em (4.4.3):

$$[-17 - 2s + s^2 Y(s)] - 6[-2 + sY(s)] + 9Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3}. \tag{4.4.11}$$

A equação (4.4.11) é algébrica para $Y(s)$. Não é uma equação diferencial e pode ser

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

resolvida como:

$$(s^2 - 6s + 9)Y(s) = 2s + 5 + \frac{2}{(s-3)^3},$$
$$Y(s) = \frac{2s+5}{s^2-6s+9} + \frac{2}{(s^2-6s+9)(s-3)^3}. \tag{4.4.12}$$

Com a fatoração:

$$s^2 - 6s + 9 = (s-3)^2,$$

reescreve-se (4.4.12) como:

$$Y(s) = \frac{2s+5}{(s-3)^2} + \frac{2}{(s-3)^5}. \tag{4.4.13}$$

A equação (4.4.13) é a solução do PVI no espaço transformado ou no espaço dos s. Resta encontrar a anti-Transformada de Laplace para voltar no espaço dos t. Ou seja,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}.$$

No exercício anterior mostramos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\} = (2+11t)e^{3t},\ t > 0. \tag{4.4.14}$$

Como preparação para a utilização do Primeiro Teorema da Translação escreve-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)^5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left.\frac{2}{s^5}\right|_{s\to s-3}\right\}. \tag{4.4.15}$$

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n,\ t > 0,\ s > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Logo, para $n = 4$ vale:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = t^4,\ t > 0,\ s > 0. \tag{4.4.16}$$

Pela Recíproca do Primeiro Teorema da Translação, considerando (4.4.15) e (4.4.16) tem-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)^5}\right\} = \frac{2}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\left.\frac{4!}{s^5}\right|_{s\to s-3}\right\} = \frac{1}{12}t^4e^{3t},\ t > 0. \tag{4.4.17}$$

Portanto, a anti-Transformada de Laplace de (4.4.13), solução do problema de valor inicial, segue das equações (4.4.14) e (4.4.17):

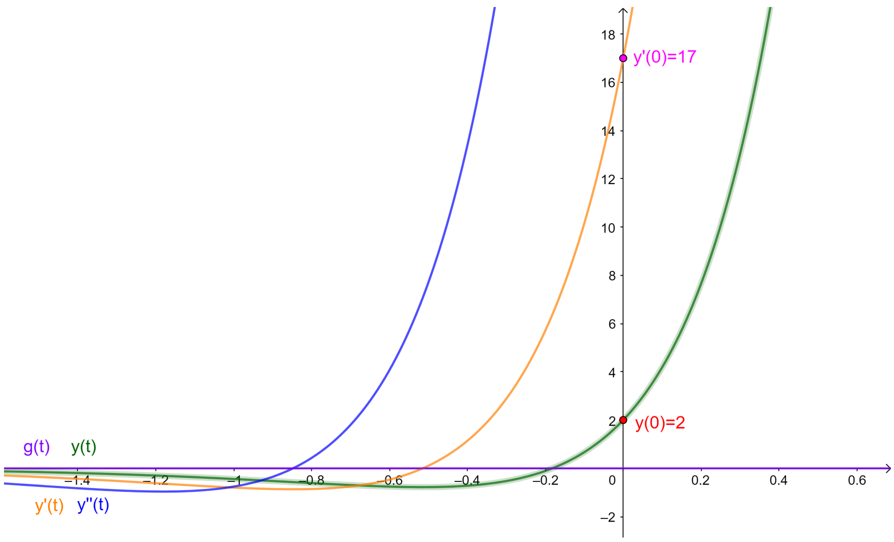
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = \left(2 + 11t + \frac{1}{12}t^4\right)e^{3t},\ t > 0. \tag{4.4.18}$$

A Figura 4.1 mostra os gráficos da equação (4.4.18), suas derivadas primeira e segunda e da função:

$$g(t) = y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) - t^2e^{3t}.$$

Os mesmos ilustram que a solução do PVI é valida para todo t real, embora o método da Transformada de Laplace utiliza-se somente com $t \geq 0$. A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

Figura 4.1: Gráficos da solução do PVI de segunda ordem. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

4.5 Função Degrau Unitário ou de Heaviside

Exercício 20. *a) Dissertar sobre a função Degrau Unitário ou de Heaviside. b) Escrever*

$$f(t) = \begin{cases} 2, & se\ t < 2 \\ -1, & se\ 2 \leq t < 3 \\ 1, & se\ t \geq 3 \end{cases} \tag{4.5.1}$$

utilizando a função de Heaviside.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

4.5.1 Solução

A função que será definida a seguir é muito importante na escrita de equações diferencias com processos que são ligados ou desligados a partir de determinado instante $t = a$.

Definição 2 (Função Degrau Unitário ou Heaviside)**.** *Seja $a \in \mathbb{R}$. A função $u : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ tal que:*

$$u(t-a) = u_a(t) = \begin{cases} 0, & se\ t < a \\ 1, & se\ t \geq a \end{cases}$$

é chamada Degrau Unitário ou Heaviside.

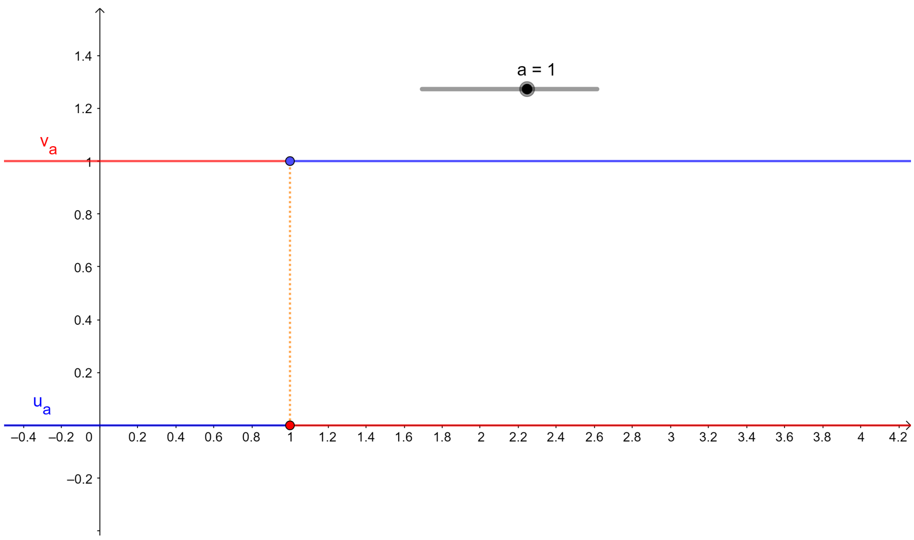
Com $a = 1$ consideram-se como exemplo as funções:

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 1 \\ 1, & \text{se } t \geq 1 \end{cases}, \tag{4.5.2}$$

$$v_1(t) = 1 - u_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t < 1 \\ 0, & \text{se } t \geq 1 \end{cases}. \tag{4.5.3}$$

A Figura 4.2 mostra os gráficos das equações (4.5.2) (em azul) e (4.5.3) (em vermelho).

Figura 4.2: Gráficos das equações (4.5.2) (em azul) e (4.5.3) (em vermelho). Versão interativa aqui.



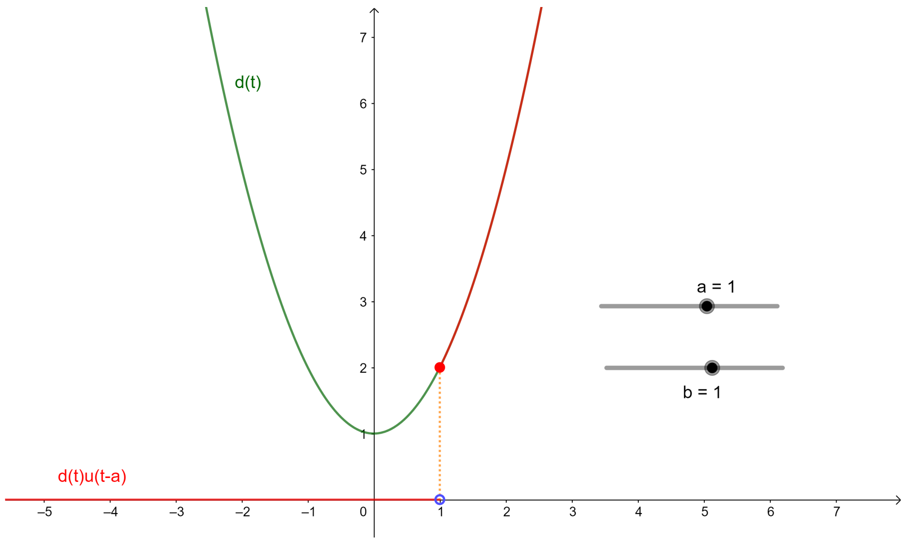
Fonte: O autor.

O produto de uma função $d(t)$ com a função degrau unitário $u(t-a)$ resulta no "desligamento" ou anulamento da mesma para $t \geq a$. A Figura 4.3 mostra o gráfico das funções em (4.5.4) e (4.5.5):

$$d(t) = t^2 + b, \tag{4.5.4}$$

$$r(t) = d(t)u(t-a) = (t^2 + b)u(t-a). \tag{4.5.5}$$

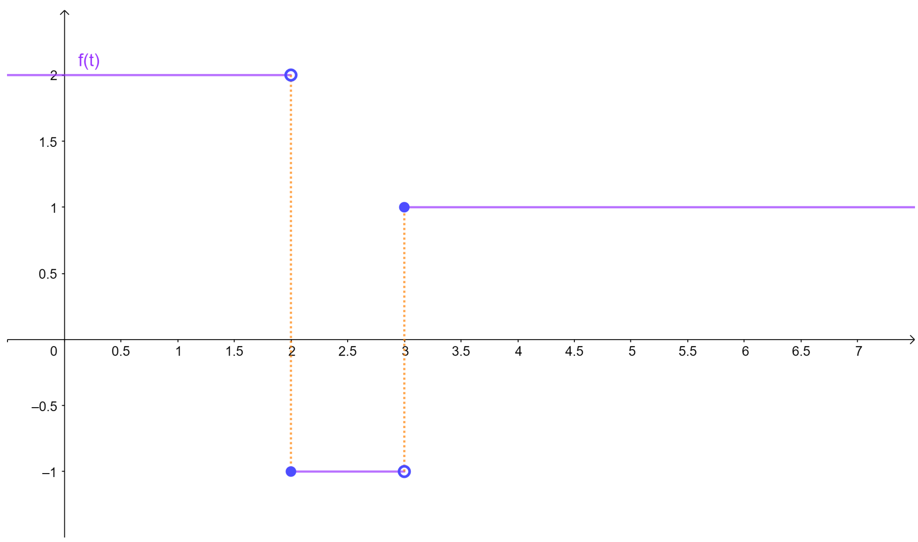
Figura 4.3: Produto com a função degrau unitário. Gráfico das funções em (4.5.4) e (4.5.5). Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

A Figura 4.4 mostra o gráfico da equação (4.5.1).

Figura 4.4: Gráfico da equação (4.5.1) ou (4.5.6). Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

A função em (4.5.1) pode ser escrita em uma única linha como:

$$f(t) = 2 + (-1-2)u(t-2) + (1-(-1))u(t-3),$$

$$f(t) = 2 - 3u(t-2) + 2u(t-3). \tag{4.5.6}$$

Isto é, iniciando no primeiro ramo de $f(t)$ considera-se um salto de três unidades para baixo em $t = 2$ e a seguir um salto de duas unidades para cima em $t = 3$.

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $g(t)$ e $h(t)$ duas funções reais de variável real. Pode ser verificado que as equações (4.5.7) e (4.5.8) a seguir são duas formas equivalentes de escrever a mesma função:

$$m(t) = \begin{cases} g(t), & \text{se } t < a \\ h(t), & \text{se } t \geq a \end{cases}, \tag{4.5.7}$$

$$m(t) = g(t) + [h(t) - g(t)]u(t-a). \tag{4.5.8}$$

Analogamente, sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $w(t)$ uma função real de variável real. Pode ser verificado que as equações (4.5.9) e (4.5.10) a seguir são duas formas equivalentes de escrever a mesma função:

$$s(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < a \\ w(t), & \text{se } a \leq t < b \\ 0, & \text{se } t \geq b \end{cases}, \tag{4.5.9}$$

$$s(t) = w(t)[u(t-a) - u(t-b)]. \tag{4.5.10}$$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

4.6 Segundo Teorema da Translação em Transformadas de Laplace

Exercício 21. *Enunciar e demonstrar o Segundo Teorema da Translação em Transformadas de Laplace.*

4.6.1 Solução

Teorema 4 (Segundo Teorema da Translação em Transformadas de Laplace)**.** *Sejam $a, a' \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ quando $s > a' \geq 0$, então*

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s), \; s > a' \geq 0.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Demonstração. A Transformada de Laplace de uma função real de variável real $f(t)$ e $t > 0$ é definida por uma integral imprópria:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = F(s), \ s > a' \geq 0. \tag{4.6.1}$$

Analogamente, a Transformada de Laplace da função real de variável real $f(t-a)u(t-a)$ e $t > 0$ calcula-se como:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)u(t-a)dt.$$

Devido a função de Heaviside $u(t-a)$ a integral anterior é separada em dois intervalos $[0, \infty) = [0, a] \cap [a, \infty)$:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^a e^{-st} f(t-a) \cdot 0 \cdot dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) \cdot 1 \cdot dt,$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt. \tag{4.6.2}$$

Na equação (4.6.2) será feita a troca de variáveis $v = t - a$. Com isso vale que $t = v + a$, $dv = dt$ e quando $t = a \to v = 0$:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-s(v+a)} f(v)dv. \tag{4.6.3}$$

Como a integração acontece na variável v o fator e^{-as} no integrando de (4.6.3) é uma constante que pode ser escrita fora da integral:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as} \int_0^\infty e^{-sv} f(v)dv. \tag{4.6.4}$$

Como a variável de integração é muda a integral de (4.6.4) coincide com a integral de (4.6.1). Ou seja,

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as} F(s), \ s > a' \geq 0.$$

□

O resultado anterior será utilizado para calcular a Transformada de Laplace da função de Heaviside. Seja $f(t) = 1$ a função constante um para $t \geq 0$. Logo, com $a > 0$ tem-se que $f(t-a) = f(t) = 1$. Adicionalmente, foi visto que:

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \frac{1}{s}, \ s > 0. \tag{4.6.5}$$

Pelo Teorema 4 e a equação (4.6.5) segue que:

$$\mathcal{L}\left\{1 \cdot u(t-a)\right\} = e^{-as}F(s) = \frac{e^{-as}}{s},\ s > 0.$$

Ou seja, a Transformada de Laplace da função de Heaviside é

$$\mathcal{L}\left\{u(t-a)\right\} = \frac{e^{-as}}{s},\ s > 0.$$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

4.7 Transformada de Laplace utilizando a função de Heaviside

Exercício 22. *Seja*

$$f(t) = 2 - 3u(t-2) + 2u(t-3), \tag{4.7.1}$$

onde $u(t-3)$ *é a função de Heaviside. Calcular* $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

4.7.1 Solução

Pela linearidade da Transformada de Laplace aplicada em (4.7.1) segue:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = 2\mathcal{L}\left\{1\right\} - 3\mathcal{L}\left\{u(t-2)\right\} + 2\mathcal{L}\left\{u(t-3)\right\}. \tag{4.7.2}$$

Foi visto que as Transformadas de Laplace da função de Heaviside e da função constante são:

$$\mathcal{L}\left\{u(t-a)\right\} = \frac{e^{-as}}{s},\ s > 0, \tag{4.7.3}$$

$$\mathcal{L}\left\{1\right\} = \frac{1}{s},\ s > 0. \tag{4.7.4}$$

Utilizando as fórmulas de (4.7.3) e (4.7.4) em (4.7.2) encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = 2\frac{1}{s} - 3\frac{e^{-2s}}{s} + 2\frac{e^{-3s}}{s}.$$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

4.8 Cálculo de Transformada Inversa de Laplace, STT-I

Exercício 23. *Calcular a Transformada Inversa de Laplace:*

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s} + \frac{s}{s^2+9}e^{-\frac{\pi s}{2}}\right\}. \tag{4.8.1}$$

4.8.1 Solução

Pela linearidade da Transformada Inversa de Laplace aplicada na equação (4.8.1) segue:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}e^{-\frac{\pi s}{2}}\right\}. \tag{4.8.2}$$

O Segundo Teorema da Translação na sua forma recíproca (ou inversa) garante que:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = f(t-a)u(t-a). \tag{4.8.3}$$

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} = e^{4t},\ t > 0, \tag{4.8.4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} = \cos(3t),\ t > 0. \tag{4.8.5}$$

Utilizando (4.8.3), (4.8.4) e (4.8.5) reescreve-se (4.8.2) como:

$$y(t) = e^{4(t-2)}u(t-2) + \cos\left(3\left[t - \frac{\pi}{2}\right]\right) u\left(t - \frac{\pi}{2}\right),\ t > 0.$$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

4.9 Cálculo de Transformada Inversa de Laplace, STT-II

Exercício 24. *Calcular a Transformada Inversa de Laplace:*

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-2)e^{-s}}{s^2-4s+3}\right\}. \tag{4.9.1}$$

4.9.1 Solução

O fator e^{-s} significa que deve ser utilizada a forma recíproca (ou inversa) do Segundo Teorema da Translação. Mas, antes deve-se fatorar o denominador em (4.9.1):

$$\frac{s-2}{s^2-4s+3}=\frac{s-2}{(s-3)(s-1)}. \tag{4.9.2}$$

Decompondo (4.9.2) em frações parciais:

$$\frac{s-2}{(s-3)(s-1)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s-1}. \tag{4.9.3}$$

As constantes $A, B \in \mathbb{R}$ não dependem de s. Isto é, elas devem ser as mesmas para todo valor de s. Basta escolher um valor que simplifique as contas. Multiplicando (4.9.3) por $s-3$ e avaliando em $s=3$ encontra-se:

$$\left.\frac{s-2}{s-1}\right|_{s=3}=A=\frac{1}{2}. \tag{4.9.4}$$

Multiplicando (4.9.3) por $s-1$ e avaliando em $s=1$ encontra-se:

$$\left.\frac{s-2}{s-3}\right|_{s=1}=B=\frac{1}{2}. \tag{4.9.5}$$

As equações (4.9.4) e (4.9.5) são substituídas em (4.9.3):

$$\frac{s-2}{(s-3)(s-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1}. \tag{4.9.6}$$

Com (4.9.6) retorna-se a (4.9.1):

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-3}\cdot e^{-s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1}\cdot e^{-s}\right\}. \tag{4.9.7}$$

Pela linearidade da Transformada Inversa de Laplace aplicada na equação (4.9.7) segue:

$$y(t)=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\cdot e^{-s}\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\cdot e^{-s}\right\}. \tag{4.9.8}$$

O Segundo Teorema da Translação na sua forma recíproca (ou inversa) garante que:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=F(s)\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\}=f(t-a)u(t-a). \tag{4.9.9}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = e^{3t},\ t > 0, \tag{4.9.10}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^{t},\ t > 0. \tag{4.9.11}$$

Utilizando (4.9.9), (4.9.10) e (4.9.11) reescreve-se (4.9.8) como:

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{3(t-1)}u(t-1) + \frac{1}{2}e^{t-1}u(t-1),\ t > 0.$$

A resolução de um exercício análogo está disponível em vídeo.

4.10 Forma Alternativa do Segundo Teorema da Translação

Exercício 25. *Enunciar e demonstrar a Forma Alternativa do Segundo Teorema da Translação em Transformadas de Laplace.*

4.10.1 Solução

Teorema 5 (Forma Alternativa do Segundo Teorema da Translação)**.** *Sejam $a, a' \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ quando $s > a' \geq 0$, então*

$$\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\},\ s > a' \geq 0.$$

Demonstração. A Transformada de Laplace de uma função real de variável real $f(t)$ e $t > 0$ é definida por uma integral imprópria:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = F(s),\ s > a' \geq 0. \tag{4.10.1}$$

Analogamente, a Transformada de Laplace da função real de variável real $f(t)u(t-a)$ e $t > 0$ calcula-se como:

$$\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)u(t-a)dt.$$

Devido a função de Heaviside $u(t-a)$ a integral anterior é separada em dois intervalos

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

$[0, \infty) = [0, a] \cap [a, \infty)$:

$$\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = \int_0^a e^{-st} f(t) \cdot 0 \cdot dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t) \cdot 1 \cdot dt,$$

$$\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = \int_a^\infty e^{-st} f(t) dt. \tag{4.10.2}$$

Na direita da equação (4.10.2) será feita a troca de variáveis $v = t - a$. Com isso vale que $t = v + a$, $dv = dt$ e quando $t = a \to v = 0$:

$$\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-s(v+a)} f(v+a) dv. \tag{4.10.3}$$

Como a integração acontece na variável v o fator e^{-as} no integrando de (4.10.3) é uma constante que pode ser escrita fora da integral:

$$\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = e^{-as} \int_0^\infty e^{-sv} f(v+a) dv. \tag{4.10.4}$$

Como a variável de integração é muda a integral de (4.10.4) é a Transformada de Laplace de $f(t+a)$. Ou seja,

$$\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t+a)\}, \ s > a' \geq 0.$$

$\square$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

4.11 PVI de primeira ordem, com inomogeneidade descontínua

Exercício 26. *Resolver o problema de valor inicial usando a Transformada de Laplace:*

$$y'(t) + y(t) = f(t), \tag{4.11.1}$$

$$y(0) = 5, \tag{4.11.2}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & se\ 0 \leq t < \pi \\ 3\cos(t), & se\ t \geq \pi \end{cases}. \tag{4.11.3}$$

4.11.1 Solução

Com a função de Heaviside pode-se escrever (4.11.3) como:

$$f(t) = 3\cos(t)u(t-\pi). \tag{4.11.4}$$

Utilizando a linearidade da Transformada de Laplace em (4.11.1) tem-se:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = 3\mathcal{L}\{\cos(t)u(t-\pi)\} \tag{4.11.5}$$

Será usada a notação:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s). \tag{4.11.6}$$

A Transformada de Laplace da primeira derivada pode ser calculada como:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = -y(0) + s\mathcal{L}\{y(t)\}, \tag{4.11.7}$$

Substituindo (4.11.2) e (4.11.6) em (4.11.7) encontra-se:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = -5 + sY(s), \tag{4.11.8}$$

Pela Forma Alternativa do Segundo Teorema da Translação vale que:

$$\mathcal{L}\{g(t)u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}. \tag{4.11.9}$$

Com $g(t) = \cos(t)$ e $a = \pi$ segue que $g(t+a) = \cos(t+\pi) = -\cos(t)$. Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace chega-se a:

$$\mathcal{L}\{g(t+a)\} = \mathcal{L}\{-\cos(t)\} = -\frac{s}{s^2+1}, \ s > 0. \tag{4.11.10}$$

Portanto, de (4.11.9) e (4.11.10) deduz-se:

$$\mathcal{L}\{\cos(t)u(t-\pi)\} = -e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}. \tag{4.11.11}$$

Com (4.11.6), (4.11.8) e (4.11.11) volta-se em (4.11.5):

$$[-5 + sY(s)] + Y(s) = -3e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}. \tag{4.11.12}$$

A equação (4.11.4) é algébrica para $Y(s)$. Não é uma equação diferencial e pode ser resolvida como:

$$(s+1)Y(s) = 5 - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1},$$

$$Y(s) = \frac{5}{s+1} - 3e^{-\pi s}\frac{s}{(s+1)(s^2+1)}. \tag{4.11.13}$$

Para o segundo somando de (4.11.13) será usada a decomposição em frações parciais:

$$\frac{s}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}, \tag{4.11.14}$$

onde A, B, C são coeficientes reais a serem determinados. O numerador do segundo somando de (4.11.14) é escrito como um polinômio linear devido a equação no denominador ($s^2+1=0$) não ter soluções reais.

Os numeradores de (4.11.14) podem ser reescritos como:

$$0\cdot s^2 + 1\cdot s + 0 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s+1),$$

$$0\cdot s^2 + 1\cdot s + 0 = (A+B)s^2 + (B+C)s + (A+C), \tag{4.11.15}$$

A equação (4.11.15) deve ser entendida como uma igualdade de polinômios em s e leva ao sistema:

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ B+C &= 1. \\ A+C &= 0 \end{aligned} \tag{4.11.16}$$

Resolvendo (4.11.15) encontra-se $B = C = -A = \frac{1}{2}$. Este resultado é colocado em (4.11.14):

$$\frac{s}{(s+1)(s^2+1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s+1}{s^2+1}. \tag{4.11.17}$$

Com (4.11.17) volta-se em (4.11.13):

$$Y(s) = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{2}e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{s^2+1}\right),$$

$$Y(s) = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{2}e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s+1}\right) - \frac{3}{2}e^{-\pi s}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - \frac{3}{2}e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2+1}\right). \tag{4.11.18}$$

A equação (4.11.18) é a solução do PVI no espaço transformado ou no espaço dos s. Resta encontrar a anti-Transformada de Laplace para voltar no espaço dos t. Ou seja,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}.$$

Pela linearidade da Transformada Inversa de Laplace aplicada na equação (4.11.18) segue:

$$\begin{aligned} y(t) = 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s+1}\right)\right\} - \\ -\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\right\} - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{4.11.19}$$

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-1)}\right\} = e^{-t},\ t > 0, \tag{4.11.20}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos(t),\ t > 0, \tag{4.11.21}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen}(t),\ t > 0. \tag{4.11.22}$$

Pela recíproca do Segundo Teorema da Translação vale que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}G(s)\right\} = g(t-a)u(t-a). \tag{4.11.23}$$

Portanto, as anti-Transformadas de Laplace de (4.11.19), solução do problema de valor inicial, seguem das equações (4.11.20), (4.11.21), (4.11.22) e (4.11.23):

$$\begin{aligned} y(t) = 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-(t-\pi)}u(t-\pi) - \\ -\frac{3}{2}\cos(t-\pi)u(t-\pi) - \frac{3}{2}\operatorname{sen}(t-\pi)u(t-\pi),\ t > 0. \end{aligned} \tag{4.11.24}$$

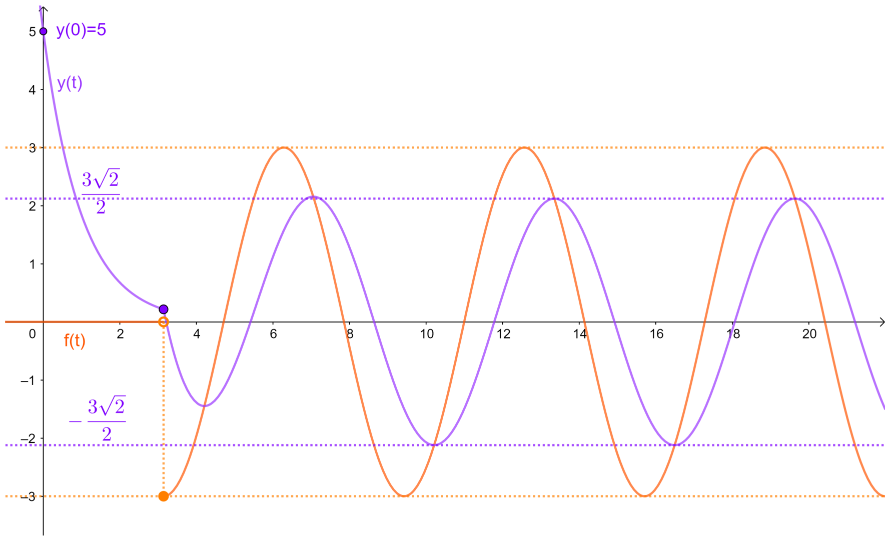
Como $\cos(t-\pi) = -\cos(t)$ e $\operatorname{sen}(t-\pi) = -\operatorname{sen}(t)$ a equação (4.11.24) pode ser simplificada:

$$y(t) = 5e^{-t} + \frac{3}{2}\left[e^{-(t-\pi)} + \cos(t) + \operatorname{sen}(t)\right]u(t-\pi),\ t > 0. \tag{4.11.25}$$

Embora o termo não homogêneo foi "ligado" em $t = \pi$ a resposta do sistema, dada pela equação (4.11.25), é contínua nesse instante. A Figura 4.5 mostra os gráficos das funções em (4.11.4) e (4.11.25). Os mesmos ilustram a transição inicial e o comportamento assintótico. A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Figura 4.5: Gráficos da inomogeneidade $f(t)$ e da solução do PVI $y(t)$. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Capítulo 5

Derivadas de $F(s)$ e Convolução

5.1 Derivadas de $F(s)$

Exercício 27. *Seja $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Demonstrar as fórmulas para calcular a primeira e segunda derivada de $F(s)$ em relação a s. Generalizar para a derivada enésima.*

5.1.1 Solução

A Transformada de Laplace de uma função real de variável real $f(t)$ e $t > 0$ é definida por uma integral imprópria:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \; s > a' \geq 0. \tag{5.1.1}$$

Assume-se que a integral imprópria em (5.1.1) é convergente. Isto permite trocar a ordem entre os operadores de derivação e integração:

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial\left[e^{-st} f(t)\right]}{\partial s}dt. \tag{5.1.2}$$

Ou seja, derivando o integrando na direita de (5.1.2) encontra-se:

$$\frac{dF(s)}{ds} = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t)dt, \tag{5.1.3}$$

Mas a integral no lado direito de (5.1.3) é a Transformada de Laplace da função $tf(t)$:

$$\frac{dF(s)}{ds} = -\mathcal{L}\left\{tf(t)\right\},$$

$$\mathcal{L}\left\{tf(t)\right\} = -\frac{dF(s)}{ds} = (-1)\frac{d\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}}{ds}. \tag{5.1.4}$$

Para determinar a segunda derivada de $F(s)$ será utilizada um artifício algébrico e a equação (5.1.4):

$$\mathcal{L}\left\{t^2 f(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{t \cdot \overbrace{tf(t)}\right\} = (-1)\frac{d\mathcal{L}\left\{\overbrace{tf(t)}\right\}}{ds}. \tag{5.1.5}$$

Devido, mais uma vez, a equação (5.1.4) segue:

$$\mathcal{L}\left\{t^2 f(t)\right\} = (-1)\frac{d\mathcal{L}\left\{tf(t)\right\}}{ds} = (-1)^2\frac{d}{ds}\frac{d\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}}{ds},$$

$$\mathcal{L}\left\{t^2 f(t)\right\} = \frac{d^2F(s)}{ds^2}. \tag{5.1.6}$$

Seja $n \in \mathbb{N}$. As equações (5.1.4) e (5.1.6) permitem conjeturar a fórmula relacionada com a derivada enésima de $F(s)$:

$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}. \tag{5.1.7}$$

A demonstração é feita por indução finita.

5.2 Utilização da primeira derivada de $F(s)$

Exercício 28. *Seja $k \in \mathbb{R}$. Calcular $\mathcal{L}\{t\,\mathrm{sen}(kt)\}$.*

5.2.1 Solução

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{\,\mathrm{sen}(kt)\right\} = \frac{k}{s^2+k^2},\ s > 0. \tag{5.2.1}$$

Por outro lado, com $f(t) = \mathrm{sen}(kt)$ e as equações (5.1.4) e (5.2.1) segue:

$$\mathcal{L}\left\{t\,\mathrm{sen}(kt)\right\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{k}{s^2+k^2}\right] = -k\frac{d}{ds}\left[(s^2+k^2)^{-1}\right]. \tag{5.2.2}$$

Utilizando a regra da cadeia para derivar em (5.2.2) chega-se a:

$$\mathcal{L}\left\{t\,\mathrm{sen}(kt)\right\} = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}. \tag{5.2.3}$$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

5.3 PVI de segunda ordem, não homogêneo, derivada de F(s)

Exercício 29. *Resolver o problema de valor inicial usando a Transformada de Laplace:*

$$x''(t) + 16x(t) = \cos(4t), \tag{5.3.1}$$

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 1. \tag{5.3.2}$$

5.3.1 Solução

Utilizando a linearidade da Transformada de Laplace em (5.3.1) tem-se:

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} + 16\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{\cos(4t)\}. \tag{5.3.3}$$

Será usada a notação:

$$\mathcal{L}\left\{x(t)\right\} = X(s). \tag{5.3.4}$$

A Transformada de Laplace da segunda derivada pode ser calculada como:

$$\mathcal{L}\left\{x''(t)\right\} = -x'(0) - sx(0) + s^2\mathcal{L}\{x(t)\}, \tag{5.3.5}$$

Substituindo (5.3.2) e (5.3.4) em (5.3.5) encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{x''(t)\right\} = -1 + s^2X(s). \tag{5.3.6}$$

A Transformada de Laplace da função cosseno é:

$$\mathcal{L}\left\{\cos(4t)\right\} = \frac{s}{s^2+4^2}. \tag{5.3.7}$$

Com (5.3.4), (5.3.6) e (5.3.7) volta-se em (5.3.3):

$$[-1 + s^2X(s)] + 16X(s) = \frac{s}{s^2+16}. \tag{5.3.8}$$

A equação (5.3.8) é algébrica para $X(s)$. Não é uma equação diferencial e pode ser resolvida como:

$$(s^2+16)X(s) = 1 + \frac{s}{s^2+16},$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2+16} + \frac{s}{(s^2+16)^2}. \tag{5.3.9}$$

A equação (5.3.9) é a solução do PVI no espaço transformado ou no espaço dos s. Resta encontrar a anti-Transformada de Laplace para voltar no espaço dos t. Ou seja,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}.$$

Pela linearidade da Transformada Inversa de Laplace aplicada na equação (5.3.9) segue:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+16}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+16)^2}\right\}. \tag{5.3.10}$$

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \operatorname{sen}(kt),\ t > 0. \tag{5.3.11}$$

Ou seja, multiplicando e dividindo o primeiro somando de (5.3.10) por 4 tem-se:

$$\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\} = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4t),\ t > 0. \tag{5.3.12}$$

No exercício anterior mostramos que

$$\mathcal{L}\left\{t\operatorname{sen}(kt)\right\} = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}. \tag{5.3.13}$$

Logo, para $k = 4$ vale:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{(s^2+16)^2}\right\} = t\operatorname{sen}(4t),\ t > 0. \tag{5.3.14}$$

Portanto, multiplicando e dividindo o segundo somando de (5.3.10) por 8 tem-se:

$$\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{(s^2+16)^2}\right\} = \frac{1}{8}t\operatorname{sen}(4t),\ t > 0. \tag{5.3.15}$$

Isto é, a anti-Transformada de Laplace de (5.3.10), solução do problema de valor inicial, segue das equações (5.3.12) e (5.3.15):

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4t) + \frac{1}{8}t\operatorname{sen}(4t),\ t > 0. \tag{5.3.16}$$

A Figura 5.1 mostra os gráficos da equação (5.3.16) e da função:

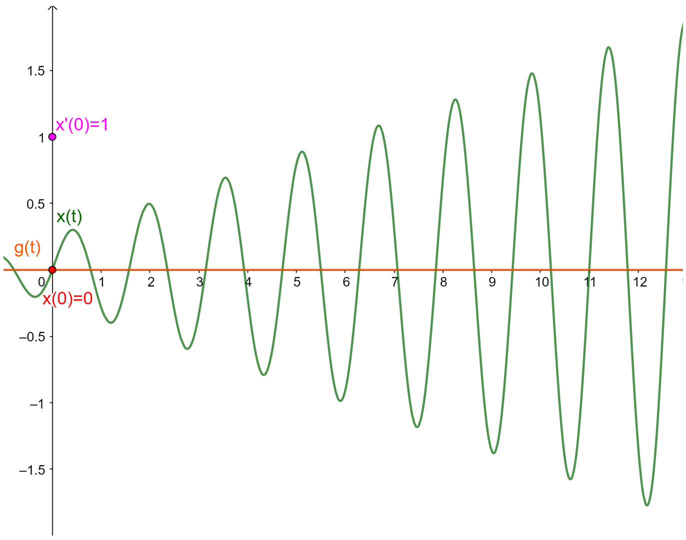
$$g(t) = x''(t) + 16x(t) - \cos(4t).$$

A equação diferencial (5.3.1) e sua solução (5.3.16) representam um sistema ressonante.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

A amplitude das oscilações cresce com o tempo e o sistema eventualmente quebra. A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

Figura 5.1: Gráficos da solução do PVI de segunda ordem. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

5.4 Definição de integral de Convolução

Exercício 30. *Definir a integral de convolução das funções $f(t)$ e $g(t)$.*

5.4.1 Solução

Definição 3 (Integral de Convolução)**.** *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções reais de variável real não negativa. A integral denotada $f * g$ é chamada convolução de f e g:*

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{5.4.1}$$

A variável de integração é τ, a variável t aparece no limite superior de integração. A convolução de duas funções $f(t)$ e $g(t)$ é outra função $h(t)$:

$$h(t) = f(t) * g(t).$$

Sejam $F(s)$ e $G(s)$ as Transformadas de Laplace de $f(t)$ e $g(t)$, respectivamente. A motivação para a Definição 3 é que:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t) \neq f(t)g(t).$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Uma demonstração do resultado anterior está disponível aqui. A convolução têm algumas propriedades em comum com a multiplicação de funções, mas outras não.

5.5 $f(t) * 1 \neq f(t)$

Exercício 31. *Calcular a convolução das funções* $f(t) = \cos(t)$ *e* $g(t) = 1$.

5.5.1 Solução

Utiliza-se a equação (5.4.1) que define a integral de convolução:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{5.5.1}$$

Tem-se que $g(t-\tau) = g(t) = 1$ e substituindo em (5.5.1) segue:

$$\cos(t) * 1 = \int_0^t \cos(\tau)d\tau = \operatorname{sen}(\tau)|_0^t = \operatorname{sen}(t) - \cancelto{0}{\operatorname{sen}(0)} = \operatorname{sen}(t). \tag{5.5.2}$$

Isto é, a convolução das funções $f(t) = \cos(t)$ e $g(t) = 1$ é a função $\operatorname{sen}(t)$ e em geral $f(t) * 1 \neq f(t)$.

5.6 $f(t) * f(t) \neq f^2(t)$

Exercício 32. *Calcular a convolução das funções* $f(t) = \operatorname{sen}(t)$ *e* $g(t) = \operatorname{sen}(t)$.

5.6.1 Solução

Utiliza-se a equação (5.4.1) que define a integral de convolução:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{5.6.1}$$

Tem-se que $g(t-\tau) = \operatorname{sen}(t-\tau)$ e substituindo em (5.6.1) segue:

$$\operatorname{sen}(t) * \operatorname{sen}(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(\tau)\operatorname{sen}(t-\tau)d\tau. \tag{5.6.2}$$

Pela identidade trigonométrica do seno da soma pode ser escrito:

$$\operatorname{sen}(t-\tau) = \operatorname{sen}(t)\cos(-\tau) + \operatorname{sen}(-\tau)\cos(t),$$

$$\operatorname{sen}(t-\tau) = \operatorname{sen}(t)\cos(\tau) - \operatorname{sen}(\tau)\cos(t). \tag{5.6.3}$$

Substituindo (5.6.3) em (5.6.2) encontra-se:

$$\operatorname{sen}(t) * \operatorname{sen}(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(\tau)\left[\operatorname{sen}(t)\cos(\tau) - \operatorname{sen}(\tau)\cos(t)\right] d\tau. \tag{5.6.4}$$

Lembrando que a integração acontece em relação a variável τ. Logo, pode-se reescrever (5.6.4) como:

$$\operatorname{sen}(t) * \operatorname{sen}(t) = \operatorname{sen}(t)\int_0^t \operatorname{sen}(\tau)\cos(\tau)d\tau - \cos(t)\int_0^t \operatorname{sen}^2(\tau)d\tau. \tag{5.6.5}$$

Para a primeira integral em (5.6.5) promove-se a troca de variável $u(\tau) = \operatorname{sen}(\tau)$. Segue que $du = \cos(\tau)d\tau$, quando $\tau = 0$ vale que $u(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$ e quando $\tau = t$ vale que $u(t) = \operatorname{sen}(t)$:

$$\int_0^t \operatorname{sen}(\tau)\cos(\tau)d\tau = \int_0^{\operatorname{sen}(t)} u du = \frac{1}{2}\, u^2\Big|_0^{\operatorname{sen}(t)} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(t). \tag{5.6.6}$$

Pela utilização da identidade do cosseno do ângulo duplo e a identidade trigonométrica fundamental escreve-se:

$$\cos(2\tau) = cos^2(\tau) - \operatorname{sen}^2(\tau) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\tau),$$

$$\operatorname{sen}^2(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\tau)\right). \tag{5.6.7}$$

A equação (5.6.7) é substituída na segunda integral em (5.6.5):

$$\int_0^t \operatorname{sen}^2(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\left(\int_0^t d\tau - \int_0^t \cos(2\tau)d\tau\right),$$

$$\int_0^t \operatorname{sen}^2(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\left(\tau\big|_0^t - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\tau)\big|_0^t\right) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right). \tag{5.6.8}$$

Substituindo (5.6.6) e (5.6.8) em (5.6.5) encontra-se:

$$\operatorname{sen}(t) * \operatorname{sen}(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^3(t) - \frac{1}{2}\cos(t)\left(t - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right),$$

$$\operatorname{sen}(t) * \operatorname{sen}(t) = \frac{1}{2}\left(-t\cos(t) + \operatorname{sen}^3(t) + \operatorname{sen}(t)\cos^2(t)\right). \tag{5.6.9}$$

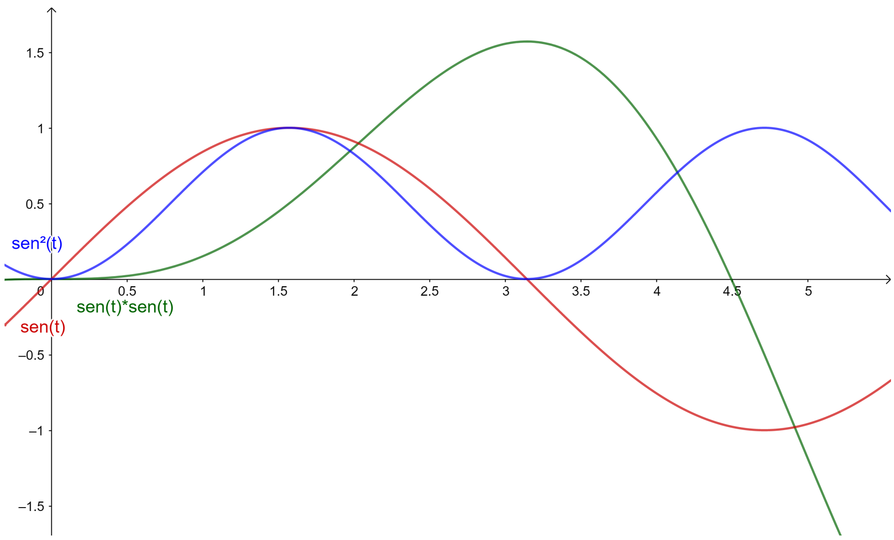
Nos últimos dois somandos de (5.6.9) coloca-se $\operatorname{sen}(t)$ em evidência e utiliza-se novamente a identidade trigonométrica fundamental:

$$\operatorname{sen}(t) * \operatorname{sen}(t) = \frac{1}{2}\left(-t\cos(t) + \operatorname{sen}(t)\right). \tag{5.6.10}$$

Isto é, a convolução da função $\operatorname{sen}(t)$ com ela mesma não é a função $\operatorname{sen}^2(t)$ e em geral $f(t) * f(t) \neq f^2(t)$. A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

A Figura 5.2 mostra os gráficos das funções $\operatorname{sen}(t)$, $\operatorname{sen}^2(t)$ e da função em (5.6.10). Para determinados valores de t o resultado da convolução de uma função com ela mesma pode ser um número negativo.

Figura 5.2: Gráficos das funções $\operatorname{sen}(t)$, $\operatorname{sen}^2(t)$ e da convolução $\operatorname{sen}(t) * \operatorname{sen}(t)$. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

5.7 Propriedades da integral de Convolução

Exercício 33. *Dissertar sobre as propriedades da integral de convolução. Provar pelo menos uma delas.*

5.7.1 Solução

Anteriormente estudo-se que a convolução entre duas funções é definida como:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{5.7.1}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Também viu-se que em geral vale:

$$f(t) * 1 \neq f(t),$$

$$f(t) * f(t) \neq f^2(t).$$

Apesar da convolução não ser exatamente um produto de funções, algumas propriedades são semelhantes às da multiplicação.

Proposição 6 (Comutatividade). *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções reais de variável real não negativa. Vale:*

$$f * g = g * f.$$

Demonstração. Em (5.7.1) é feita uma troca de variável: $u = t - \tau$. Como a integração acontece em relação a τ, então t é considerado como constante. Segue que $\tau = t - u$ e $du = -d\tau$. Adicionalmente, quando $\tau = 0$ tem-se que $u = t$ e quando $\tau = t$ encontra-se $u = 0$:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_t^0 f(t-u)g(u)(-du). \tag{5.7.2}$$

O sinal negativo na direita de (5.7.2) é utilizado na troca dos limites de integração:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t g(u)f(t-u)du = g(t) * f(t). \tag{5.7.3}$$

Para a última passagem de (5.7.3) utilizou-se a definição e o fato da variável de integração ser muda. □

Proposição 7 (Distributividade). *Sejam $f(t)$, $g_1(t)$ e $g_2(t)$ funções reais de variável real não negativa. Vale:*

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2.$$

Proposição 8 (Associatividade). *Sejam $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ funções reais de variável real não negativa. Vale:*

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

Proposição 9 (Função Nula). *Seja $f(t)$ uma função real de variável real não negativa e 0 a função identicamente nula para todo t positivo. Vale:*

$$f * 0 = 0 * f = 0.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

5.8 Exemplo do uso da propriedade comutativa da Convolução

Exercício 34. *Calcular* $e^t * \operatorname{sen}(t)$.

5.8.1 Solução

Para resolver o exercício anterior podem ser utilizados dois caminhos: i) $e^t * \operatorname{sen}(t)$ e ii) $\operatorname{sen}(t) * e^t$. Embora o resultado seja o mesmo o esforço para chegar na solução é diferente em cada um deles.

i) $e^t * \operatorname{sen}(t)$. Da definição segue:

$$e^t * \operatorname{sen}(t) = \int_0^t e^\tau \operatorname{sen}(t-\tau)d\tau. \tag{5.8.1}$$

Pela identidade trigonométrica do seno da diferença pode ser escrito:

$$\operatorname{sen}(t-\tau) = \operatorname{sen}(t)\cos(\tau) - \operatorname{sen}(\tau)\cos(t). \tag{5.8.2}$$

A substituição de (5.8.2) em (5.8.1) leva ao cálculo de duas integrais. Pelo caminho ii) será preciso calcular apenas uma.

ii) $\operatorname{sen}(t) * e^t$. Da definição segue:

$$\operatorname{sen}(t) * e^t = \int_0^t \operatorname{sen}(\tau)e^{t-\tau}d\tau = e^t \int_0^t e^{-\tau}\operatorname{sen}(\tau)d\tau. \tag{5.8.3}$$

Seja I a integral na direita de (5.8.3):

$$I = \int_0^t e^{-\tau}\operatorname{sen}(\tau)d\tau. \tag{5.8.4}$$

Em (5.8.4) utiliza-se a fórmula de integração por partes:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

com

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \operatorname{sen}(\tau), & dv(\tau) &= e^{-\tau}d\tau, \\ du(\tau) &= \cos(\tau)d\tau, & v(\tau) &= -e^{-\tau}. \end{aligned}$$

Segue que:

$$I = -e^{-\tau}\operatorname{sen}(\tau)\Big|_0^t + \int_0^t e^{-\tau}\cos(\tau)d\tau. \tag{5.8.5}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Seja J a integral na direita de (5.8.5):

$$J = \int_0^t e^{-\tau}\cos(\tau)d\tau. \tag{5.8.6}$$

Com (5.8.6) a equação (5.8.5) pode ser reescrita como:

$$I = -e^{-t}\operatorname{sen}(t) + J. \tag{5.8.7}$$

Em (5.8.6) utiliza-se a fórmula de integração por partes:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

com

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \cos(\tau), & dv(\tau) &= e^{-\tau}d\tau, \\ du(\tau) &= -\operatorname{sen}(\tau)d\tau, & v(\tau) &= -e^{-\tau}. \end{aligned}$$

Segue que:

$$J = -e^{-\tau}\cos(\tau)\Big|_0^t - \int_0^t e^{-\tau}\operatorname{sen}(\tau)d\tau. \tag{5.8.8}$$

De (5.8.4) e (5.8.8) reescreve-se:

$$J = 1 - e^{-t}\cos(t) - I. \tag{5.8.9}$$

Substituindo (5.8.9) em (5.8.7) segue:

$$I = -e^{-t}\operatorname{sen}(t) + 1 - e^{-t}\cos(t) - I,$$

$$I = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-t}(\cos(t) + \operatorname{sen}(t))\right]. \tag{5.8.10}$$

Com o valor encontrado para I retorna-se nas equações (5.8.4) e (5.8.3):

$$\operatorname{sen}(t) * e^t = \frac{1}{2}\left[e^t - \cos(t) - \operatorname{sen}(t)\right].$$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

5.9 Teorema da Convolução em Transformadas de Laplace

Exercício 35. *Enunciar e demonstrar o "Teorema da Convolução em Transformadas de Laplace".*

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

5.9.1 Solução

Teorema 10 (Teorema da Convolução em Transformadas de Laplace)**.** *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções reais de variável real não negativa tais que existem suas Transformadas de Laplace $F(s)$ e $G(s)$, respectivamente. Então,*

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\} = F(s)G(s),$$

Também vale que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)G(s)\right\} = f(t) * g(t).$$

Demonstração. Como premissa as integrais a seguir são convergentes:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s\lambda} f(\lambda) d\lambda, \tag{5.9.1}$$

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta) d\beta. \tag{5.9.2}$$

A variável de integração é muda e pode ser substituída por outra letra.

Escreve-se o produto das equações (5.9.1) e (5.9.2):

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-s\lambda} f(\lambda) d\lambda \int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta) d\beta. \tag{5.9.3}$$

A integral em (5.9.1) não depende de β. Com isso a equação (5.9.3) pode ser escrita como uma integral dupla iterada:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta) \left[\int_0^\infty e^{-s\lambda} f(\lambda) d\lambda\right] d\beta. \tag{5.9.4}$$

Como $e^{-s\beta}$ não depende de λ reescreve-se (5.9.4) como:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\beta) \left[\int_0^\infty e^{-s\lambda} e^{-s\beta} f(\lambda) d\lambda\right] d\beta,$$

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\beta) \left[\int_0^\infty e^{-s(\lambda+\beta)} f(\lambda) d\lambda\right] d\beta. \tag{5.9.5}$$

A seguir é feita uma troca de variáveis em (5.9.5): $t(\lambda) = \lambda + \beta$ (β constante). Ou seja, $\lambda = t - \beta$ e $d\lambda = dt$. Quando $\lambda = 0$ tem-se $t = \beta$ e quando $\lambda \to \infty$ segue que $t \to \infty$:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\beta) \left[\int_\beta^\infty e^{-st} f(t-\beta) dt\right] d\beta. \tag{5.9.6}$$

Pelo Teorema de Fubini para integrais duplas iteradas a equação (5.9.6) pode ser reescrita como:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t g(\beta) f(t-\beta) d\beta \right] dt. \tag{5.9.7}$$

Mas a integral entre colchetes em (5.9.7) é a convolução das funções f e g:

$$(f * g)(t) = \int_0^t g(\beta) f(t-\beta) d\beta,$$

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st} (f * g)(t) dt. \tag{5.9.8}$$

A equação (5.9.8) é a Transformada de Laplace da convolução das funções f e g:

$$F(s)G(s) = \mathcal{L}\left\{ f(t) * g(t) \right\}.$$

$\square$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

5.10 Cálculo da transformada de uma convolução

Exercício 36. *Calcular*

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t e^{\tau} \operatorname{sen}(t-\tau) d\tau \right\}. \tag{5.10.1}$$

5.10.1 Solução

Da definição de Integral de Convolução tem-se:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau. \tag{5.10.2}$$

Comparando (5.10.1) e (5.10.2) nota-se:

$$e^t * \operatorname{sen}(t) = \int_0^t e^{\tau} \operatorname{sen}(t-\tau) d\tau. \tag{5.10.3}$$

Ou seja, com (5.10.3) a equação (5.10.1) pode ser reescrita como:

$$\mathcal{L}\left\{ e^t * \operatorname{sen}(t) \right\}. \tag{5.10.4}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^t\right\} = \frac{1}{s-1} = F(s), \tag{5.10.5}$$

$$\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}(t)\right\} = \frac{1}{s^2+1} = G(s). \tag{5.10.6}$$

Pelo Teorema da Convolução em Transformadas de Laplace vale:

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\} = F(s)G(s). \tag{5.10.7}$$

Portanto, das equações (5.10.4), (5.10.5), (5.10.6) e (5.10.7) segue:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{\tau}\operatorname{sen}(t-\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{e^t * \operatorname{sen}(t)\right\} = \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{s^2+1}.$$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

5.11 Anti-transformada de um produto conhecido

Exercício 37. *Calcular*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}\right\}. \tag{5.11.1}$$

5.11.1 Solução

A equação (5.11.1) pode ser reescrita como:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\cdot G(s)\right\}. \tag{5.11.2}$$

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t = f(t), \tag{5.11.3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\} = \operatorname{sen}(at) = g(t). \tag{5.11.4}$$

Pelo Teorema da Convolução em Transformadas de Laplace vale:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\cdot G(s)\right\} = f(t) * g(t). \tag{5.11.5}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Da definição de Integral de Convolução tem-se:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{5.11.6}$$

De (5.11.2), (5.11.3), (5.11.4) (5.11.5) e (5.11.6) deve-se calcular:

$$t * \operatorname{sen}(at) = \operatorname{sen}(at) * t = \int_0^t \operatorname{sen}(a\tau)(t-\tau)d\tau,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}\right\} = t\int_0^t \operatorname{sen}(a\tau)d\tau - \int_0^t \tau\operatorname{sen}(a\tau)d\tau. \tag{5.11.7}$$

A primeira integral em (5.11.7) calcula-se normalmente, para a segunda utiliza-se a fórmula de integração por partes:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

com

$$u(\tau) = \tau, \quad dv = \operatorname{sen}(a\tau)d\tau,$$
$$du = d\tau, \quad v(\tau) = -\tfrac{1}{a}\cos(a\tau).$$

Isto é,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}\right\} = -\frac{1}{a}t\cos(a\tau)\Big|_0^t + \frac{1}{a}\tau\cos(a\tau)\Big|_0^t - \frac{1}{a}\int_0^t \cos(a\tau)d\tau,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}\right\} = \frac{t}{a} - \frac{1}{a}\int_0^t \cos(a\tau)d\tau = \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}\operatorname{sen}(a\tau)\Big|_0^t. \tag{5.11.8}$$

Segue de (5.11.7) que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}\right\} = \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}\operatorname{sen}(at) = \frac{at - \operatorname{sen}(at)}{a^2}.$$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

5.12 PVI de primeira ordem, não homogêneo, convolução

Exercício 38. *Resolver o problema de valor inicial usando a Transformada de Laplace:*

$$y'(t) - y(t) = te^t\operatorname{sen}(t), \tag{5.12.1}$$

$$y(0) = 0. \tag{5.12.2}$$

5.12.1 Solução

Utilizando a linearidade da Transformada de Laplace em (5.12.1) tem-se:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} - \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{te^t \operatorname{sen}(t)\}. \tag{5.12.3}$$

Será usada a notação:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s). \tag{5.12.4}$$

A Transformada de Laplace da primeira derivada pode ser calculada como:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = -y(0) + s\mathcal{L}\{y(t)\}. \tag{5.12.5}$$

Substituindo (5.12.2) e (5.12.4) em (5.12.5) encontra-se:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s). \tag{5.12.6}$$

A Transformada de Laplace da função seno é:

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t)\} = \frac{1}{s^2+1}. \tag{5.12.7}$$

Pelo Teorema da Primeira Derivada de $F(s)$ tem-se:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}. \tag{5.12.8}$$

Logo, das equações (5.12.7) e (5.12.8) segue:

$$\mathcal{L}\{t\operatorname{sen}(t)\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \frac{2s}{(s^2+1)^2}. \tag{5.12.9}$$

Pelo Primeiro Teorema da Translação vale:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a). \tag{5.12.10}$$

Portanto, com $a = 1$ e $f(t) = t\operatorname{sen}(t)$, de (5.12.9) e (5.12.10) encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{e^t \cdot t\operatorname{sen}(t)\right\} = \frac{2(s-1)}{((s-1)^2+1)^2}. \tag{5.12.11}$$

Com (5.12.4), (5.12.6) e (5.12.11) volta-se em (5.12.3):

$$sY(s) - Y(s) = \frac{2(s-1)}{((s-1)^2+1)^2}. \tag{5.12.12}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

A equação (5.12.12) é algébrica para $Y(s)$. Não é uma equação diferencial e pode ser resolvida como:

$$Y(s) = \frac{2}{((s-1)^2+1)^2}. \tag{5.12.13}$$

A equação (5.12.13) é a solução do PVI no espaço transformado ou no espaço dos s. Resta encontrar a anti-Transformada de Laplace para voltar no espaço dos t. Ou seja,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}.$$

Pela linearidade da Transformada Inversa de Laplace aplicada na equação (5.12.13) segue:

$$y(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\frac{1}{(s-1)^2+1}\right]\left[\frac{1}{(s-1)^2+1}\right]\right\}. \tag{5.12.14}$$

Considerando o Primeiro Teorema da Translação e (5.12.7) vale:

$$\mathcal{L}\left\{e^t\operatorname{sen}(t)\right\} = \frac{1}{(s-1)^2+1}. \tag{5.12.15}$$

Do Teorema da Convolução tem-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)G(s)\right\} = f(t)*g(t). \tag{5.12.16}$$

Identificando de (5.12.14), (5.12.15) e (5.12.16) que:

$$F(s) = G(s) = \mathcal{L}\left\{e^t\operatorname{sen}(t)\right\}, \tag{5.12.17}$$

chega-se a necessidade de calcular a convolução $e^t\operatorname{sen}(t) * e^t\operatorname{sen}(t)$.

Pela definição de Integral de Convolução segue:

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

$$y(t) = 2e^t\operatorname{sen}(t) * e^t\operatorname{sen}(t) = 2\int_0^t e^\tau\operatorname{sen}(\tau)e^{t-\tau}\operatorname{sen}(t-\tau)d\tau,$$

$$y(t) = 2e^t\int_0^t \operatorname{sen}(\tau)\operatorname{sen}(t-\tau)d\tau. \tag{5.12.18}$$

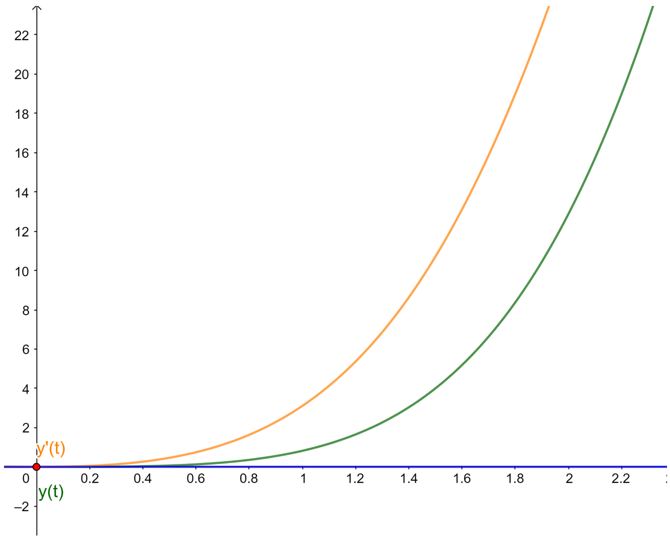
A integral em (5.12.18) é a convolução da função $\operatorname{sen}(t)$ com ela mesma, que foi calculada anteriormente:

$$y(t) = 2e^t\frac{1}{2}\left(-t\cos(t) + \operatorname{sen}(t)\right),$$

$$y(t) = e^t\left(-t\cos(t) + \operatorname{sen}(t)\right). \tag{5.12.19}$$

A Figura 5.3 mostra os gráficos da equação (5.12.19), solução do PVI, e da sua primeira derivada, $y'(t)$.

Figura 5.3: Gráficos da solução do PVI, $y(t)$, e da sua primeira derivada, $y'(t)$. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

5.13 PVI de segunda ordem, não homogêneo, convolução

Exercício 39. *Resolver o problema de valor inicial usando a Transformada de Laplace:*

$$y''(t) + y'(t) = f(t), \tag{5.13.1}$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0, \tag{5.13.2}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & se\ 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \text{sen}(t), & se\ t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}. \tag{5.13.3}$$

5.13.1 Solução

Utilizando a linearidade da Transformada de Laplace em (5.13.1) tem-se:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{y'(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}. \tag{5.13.4}$$

Será usada a notação:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s). \tag{5.13.5}$$

A Transformada de Laplace das derivadas pode ser calculada como:

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = -y(0) + s\mathcal{L}\{y(t)\}, \tag{5.13.6}$$

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} = -y'(0) - sy(0) + s^2\mathcal{L}\{y(t)\}. \tag{5.13.7}$$

Substituindo (5.13.2) e (5.13.5) em (5.13.6) e (5.13.7) encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = -1 + sY(s), \tag{5.13.8}$$

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} = -s + s^2Y(s). \tag{5.13.9}$$

Com o auxílio da Função Degrau Unitário ou Função de Heaviside reescreve-se (5.13.3) como:

$$f(t) = 1 - u\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}(t)u\left(t - \frac{\pi}{2}\right). \tag{5.13.10}$$

As Transformadas de Laplace das funções constante e cosseno são:

$$\mathcal{L}\left\{1\right\} = \frac{1}{s}. \tag{5.13.11}$$

$$\mathcal{L}\left\{\cos(t)\right\} = \frac{s}{s^2+1}. \tag{5.13.12}$$

A Transformada de Laplace da função de Heaviside é:

$$\mathcal{L}\left\{u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s}. \tag{5.13.13}$$

Pela forma alternativa do segundo teorema da translação tem-se:

$$\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}(t)u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right\} = e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right\},$$

$$\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}(t)u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right\} = e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}\left\{\cos(t)\right\}. \tag{5.13.14}$$

Logo, das equações (5.13.12) e (5.13.14) segue:

$$\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}(t)u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right\} = e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1}. \tag{5.13.15}$$

Consequentemente, de (5.13.10), (5.13.11), (5.13.13) e (5.13.15) chega-se:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} + e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1}. \tag{5.13.16}$$

Substituindo (5.13.8), (5.13.9) e (5.13.16) em (5.13.4) encontra-se:

$$-s+s^2Y(s)-1+sY(s)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s}+e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1},$$

$$s(s+1)Y(s)=s+1+\frac{1}{s}-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s}+e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1}. \tag{5.13.17}$$

A equação (5.13.17) é algébrica para $Y(s)$. Não é uma equação diferencial e pode ser resolvida como:

$$Y(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}-e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}+e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}. \tag{5.13.18}$$

A equação (5.13.18) é a solução do PVI no espaço transformado ou no espaço dos s. Resta encontrar a anti-Transformada de Laplace para voltar no espaço dos t. Ou seja,

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}.$$

Do Teorema da Convolução tem-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)G(s)\right\}=f(t)*g(t). \tag{5.13.19}$$

Identifica-se de (5.13.18) e (5.13.19) e das transformadas inversas das funções potência, exponencial e seno que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}\right\}=t*e^{-t}, \tag{5.13.20}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\}=e^{-t}*\operatorname{sen}(t). \tag{5.13.21}$$

A seguir utiliza-se em (5.13.20) e (5.13.21) a definição de Integral de Convolução:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{5.13.22}$$

Para (5.13.20) escreve-se:

$$t*e^{-t}=\int_0^t \tau e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-t}\int_0^t \tau e^{\tau}d\tau. \tag{5.13.23}$$

Em (5.13.23) utiliza-se a fórmula de integração por partes:

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu,$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

com

$$u(\tau)=\tau, \quad dv=e^{\tau}d\tau,$$
$$du=d\tau, \quad v(\tau)=e^{\tau}.$$

Isto é,

$$t*e^{-t}=e^{-t}\left[\tau e^{\tau}\Big|_0^t-\int_0^t e^{\tau}d\tau\right]=e^{-t}\left[te^{t}-e^{\tau}\Big|_0^t\right],$$

$$t*e^{-t}=e^{-t}\left[te^{t}-e^{t}+1\right]=t-1+e^{-t}. \tag{5.13.24}$$

Com (5.13.24) volta-se em (5.13.20):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}\right\}=t-1+e^{-t}, \tag{5.13.25}$$

De (5.13.21) e (5.13.22) escreve-se:

$$e^{-t}*\operatorname{sen}(t)=\operatorname{sen}(t)*e^{-t}=\int_0^t \operatorname{sen}(\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-t}\int_0^t \operatorname{sen}(\tau)e^{\tau}d\tau. \tag{5.13.26}$$

A integral na direita de (5.13.26) resolve integrando por parte duas vezes e foi feita anteriormente:

$$e^{-t}*\operatorname{sen}(t)=e^{-t}\left[\frac{1}{2}(1+e^{t}[-\cos(t)+\operatorname{sen}(t)])\right],$$

$$e^{-t}*\operatorname{sen}(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-t}-\cos(t)+\operatorname{sen}(t)\right). \tag{5.13.27}$$

Com (5.13.27) volta-se em (5.13.21):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\}=\frac{1}{2}\left(e^{-t}-\cos(t)+\operatorname{sen}(t)\right). \tag{5.13.28}$$

O Segundo Teorema da Translação na sua forma recíproca (ou inversa) garante que:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=F(s)\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\}=f(t-a)u(t-a). \tag{5.13.29}$$

De (5.13.18), (5.13.25) e (5.13.29) segue:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}\right\}=u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left[\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-1+e^{-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\right]. \tag{5.13.30}$$

De (5.13.18), (5.13.28) e (5.13.29) tem-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\}=\frac{1}{2}u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(e^{-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}-\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\} = \frac{1}{2}u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(e^{-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)} - \text{sen}(t) - \cos(t)\right). \tag{5.13.31}$$

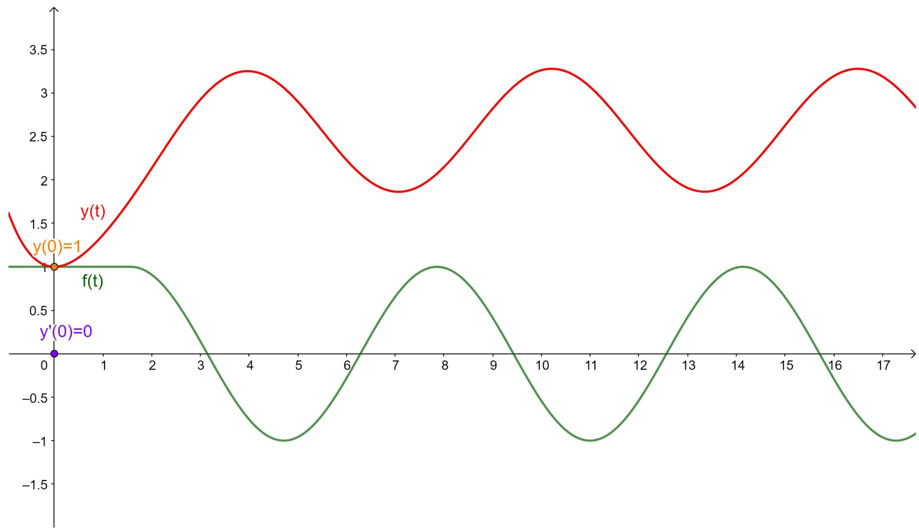
A Transformada de Laplace inversa de (5.13.18) pode ser escrita com (5.13.11), (5.13.25), (5.13.30) e (5.13.31):

$$y(t) = 1 + (t - 1 + e^{-t}) - u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left[\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - 1 + e^{-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\right] + \\ +\frac{1}{2}u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(e^{-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)} - \text{sen}(t) - \cos(t)\right),$$

$$y(t) = t + e^{-t} - \\ -u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left[\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - 1 + \frac{1}{2}e^{-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2}\text{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t)\right]. \tag{5.13.32}$$

A Figura 5.4 mostra os gráficos da função $f(t)$, equação (5.13.3) ou (5.13.10), e a solução do PVI, equação (5.13.32). São esboçadas também as condições iniciais em (5.13.2).

Figura 5.4: Gráfico da função $f(t)$, equação (5.13.3) ou (5.13.10), e a solução do PVI, equação (5.13.32). São esboçadas também as condições iniciais em (5.13.2). Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

5.14 Transformada de Laplace duma integral-I

Exercício 40. *Enunciar e demonstrar a fórmula que permite calcular a transformada de Laplace duma integral.*

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

5.14.1 Solução

Proposição 11 (Transformada de Laplace duma integral). *Seja $f(t)$ um função real de variável real não negativa tal que exista sua Transformada de Laplace $F(s)$. Então,*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s},$$

Também vale que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

Demonstração. Pelo Teorema da Convolução em Transformadas de Laplace vale:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = f(t) * g(t). \tag{5.14.1}$$

Da definição de Integral de Convolução tem-se:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{5.14.2}$$

Seja $g(t) = 1$ uma função constante. Logo, $g(t-\tau) = 1$ também é uma função constante. Substituindo $g(t) = g(t-\tau) = 1$ em (5.14.2) segue:

$$f(t) * 1 = \int_0^t f(\tau)d\tau. \tag{5.14.3}$$

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 = g(t). \tag{5.14.4}$$

De (5.14.1), (5.14.2), (5.14.3) e (5.14.2) chega-se a:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\cdot\frac{1}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

□

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

5.15 Transformada de Laplace duma integral-II

Exercício 41. *Calcular*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}. \tag{5.15.1}$$

5.15.1 Solução

Reescreve-se (5.15.1) como:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s^2+1}}{s}\right\}. \tag{5.15.2}$$

Da Proposição sobre Transformada de Laplace duma integral sabe-se que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau. \tag{5.15.3}$$

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen}(t) = f(t). \tag{5.15.4}$$

De (5.15.2), (5.15.3) e (5.15.4) chega-se a:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \operatorname{sen}(\tau)d\tau = -\cos(\tau)\Big|_0^t.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = 1 - \cos(t).$$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

5.16 Transformada de Laplace duma integral-III

Exercício 42. *Calcular*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}. \tag{5.16.1}$$

5.16.1 Solução

Seja

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}. \tag{5.16.2}$$

No exercício anterior encontrou-se que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = 1 - \cos(t) = f(t). \tag{5.16.3}$$

Considera-se (5.16.2) e reescreve-se (5.16.1) como:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s(s^2+1)}}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}. \tag{5.16.4}$$

Da Proposição sobre Transformada de Laplace duma integral sabe-se que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau. \tag{5.16.5}$$

De (5.16.3), (5.16.4) e (5.16.5) chega-se a:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^t [1-\cos(\tau)]d\tau = \tau\Big|_0^t - \operatorname{sen}(\tau)\Big|_0^t.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = t - \operatorname{sen}(t).$$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

5.17 Equação integral de Volterra

Exercício 43. *Resolver para $f(t)$ a equação integral de Volterra:*

$$f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(\tau)e^{t-\tau}d\tau. \tag{5.17.1}$$

5.17.1 Solução

A equação (5.17.1) é um tipo especial de equação integral. Note-se que a incógnita $f(t)$ aparece tanto fora como dentro da integral. Adicionalmente, a integral é a convolução das funções $f(t)$ e $h(t) = e^t$. Ou seja, da definição de Integral de Convolução tem-se:

$$f(t) * h(t) = \int_0^t f(\tau)e^{t-\tau}d\tau. \tag{5.17.2}$$

De (5.17.2) e pela linearidade da Transformada de Laplace aplicada na equação (5.17.1) segue:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 3\mathcal{L}\left\{t^2\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\} - \mathcal{L}\{f(t) * h(t)\}. \tag{5.17.3}$$

Será utilizada a notação:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s). \tag{5.17.4}$$

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = \frac{2}{s^3}, \tag{5.17.5}$$

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\left\{e^t\right\} = \frac{1}{s-1} = H(s), \tag{5.17.6}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\} = \frac{1}{s+1}. \tag{5.17.7}$$

Pelo Teorema da Convolução em Transformadas de Laplace vale:

$$\mathcal{L}\{f(t) * h(t)\} = F(s) \cdot H(s). \tag{5.17.8}$$

Com (5.17.4), (5.17.5), (5.17.6), (5.17.7) e (5.17.8) reescreve-se (5.17.3):

$$F(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1} - F(s) \cdot \frac{1}{s-1}. \tag{5.17.9}$$

Partindo de (5.17.9) coloca-se $F(s)$ em evidência:

$$F(s)\left(1 + \frac{1}{s-1}\right) = F(s) \cdot \frac{s}{s-1} = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1},$$

$$F(s) = \frac{6(s-1)}{s^4} - \frac{s-1}{s(s+1)}. \tag{5.17.10}$$

A equação (5.17.10) pode ser escrita como:

$$F(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s(s+1)}. \tag{5.17.11}$$

Por sua vez, a última fração em (5.17.11) pode ser decomposta em outras duas:

$$F(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1},$$

$$F(s) = 3 \cdot \frac{2!}{s^3} - \frac{3!}{s^4} - 2 \cdot \frac{1}{s-(-1)} + \frac{1}{s}. \tag{5.17.12}$$

A equação (5.17.12) é a solução no espaço transformado ou no espaço dos s. Resta encontrar a anti-Transformada de Laplace para voltar no espaço dos t. Ou seja,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}.$$

Pela linearidade da Transformada Inversa de Laplace aplicada na equação (5.17.12) e consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$f(t) = 3t^2 - t^3 - 2e^{-t} + 1. \tag{5.17.13}$$

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

5.18 Equação íntegro-diferencial, PVI

Exercício 44. *Utilizar a transformada de Laplace para resolver detalhadamente o problema de valor inicial dado pela equação íntegro-diferencial:*

$$y'(t) + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)d\tau = 1, \tag{5.18.1}$$

$$y(0) = 0. \tag{5.18.2}$$

5.18.1 Solução

A equação (5.18.1) é um tipo especial de equação íntegro-diferencial. Note-se que a incógnita $y(t)$ aparece em três posições: sem derivar dentro da integral, sem derivar fora da integral e sua primeira derivada $y'(t)$.

Pela linearidade da Transformada de Laplace aplicada na equação (5.18.1) segue:

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} + 6\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} + 9\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{1\right\}. \tag{5.18.3}$$

Será utilizada a notação:

$$\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = Y(s). \tag{5.18.4}$$

A Transformada de Laplace da primeira derivada pode ser calculada como:

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = -y(0) + s\mathcal{L}\{y(t)\}. \tag{5.18.5}$$

Substituindo (5.18.2) e (5.18.4) em (5.18.5) encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = sY(s). \tag{5.18.6}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Da Proposição sobre Transformada de Laplace duma integral sabe-se que:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau)d\tau\right\} = \frac{Y(s)}{s}. \tag{5.18.7}$$

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{1\right\} = \frac{1}{s}, \tag{5.18.8}$$

Com (5.18.4), (5.18.6), (5.18.7) e (5.18.8) reescreve-se (5.18.3):

$$sY(s) + 6Y(s) + 9\frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{s},$$

$$\left(s + 6 + \frac{9}{s}\right)Y(s) = \frac{1}{s}. \tag{5.18.9}$$

Partindo de (5.18.9) coloca-se $Y(s)$ em evidência:

$$\frac{s^2+6s+9}{\cancel{s}}Y(s) = \frac{1}{\cancel{s}},$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+6s+9} = \frac{1}{(s+3)^2} = \frac{1}{s-(-3)}\cdot\frac{1}{s-(-3)}. \tag{5.18.10}$$

A equação (5.18.10) é a solução no espaço transformado ou no espaço dos s. Resta encontrar a anti-Transformada de Laplace para voltar no espaço dos t. Ou seja,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}.$$

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-3)}\right\} = e^{-3t} = f(t). \tag{5.18.11}$$

Pelo Teorema da Convolução em Transformadas de Laplace vale:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\cdot F(s)\right\} = f(t) * f(t). \tag{5.18.12}$$

De (5.18.11) e da definição de Integral de Convolução tem-se:

$$e^{-3t} * e^{-3t} = \int_0^t e^{-3\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau = e^{-3t}\int_0^t d\tau = te^{-3t}. \tag{5.18.13}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Por (5.18.11), (5.18.12) e (5.18.13) a Transformada Inversa de Laplace de (5.18.10) é:

$$y(t) = te^{-3t}. \tag{5.18.14}$$

Como verificação, de (5.18.14) a integral e a derivada na equação (5.18.1) podem ser calculadas:

$$g(t) = \int_0^t \tau e^{-3\tau} d\tau = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} e^{-3t}(3t+1), \tag{5.18.15}$$

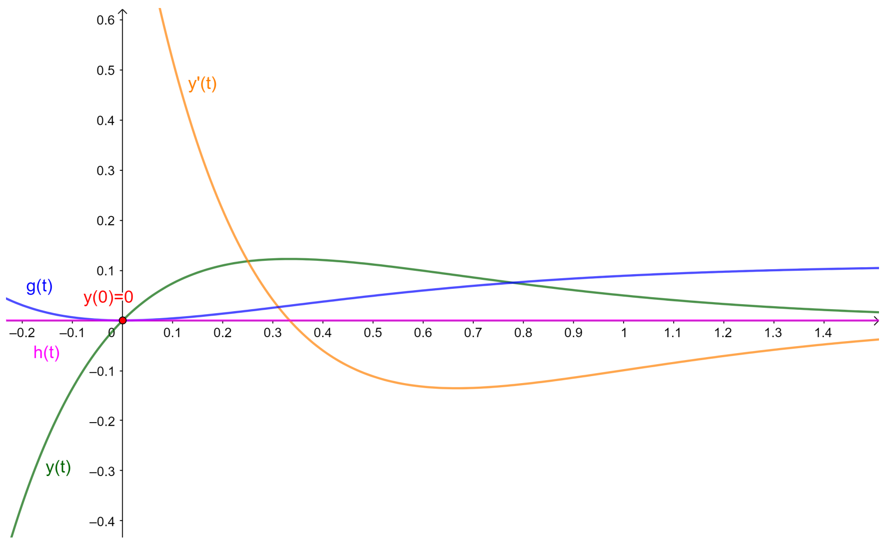
$$y'(t) = e^{-3t}(1-3t). \tag{5.18.16}$$

As equações (5.18.14), (5.18.15) e (5.18.16) permitem definir a função:

$$\begin{gathered} h(t) = y'(t) + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)d\tau - 1 = \\ = e^{-3t}(1-3t) + 6te^{-3t} + 9\left[\frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{-3t}(3t+1)\right] - 1 = 0,\ \forall t. \end{gathered} \tag{5.18.17}$$

A Figura 5.5 mostra os gráficos das equações (5.18.14), (5.18.15), (5.18.16) e (5.18.17). É esboçada também a condição inicial em (5.18.2).

Figura 5.5: Gráficos das equações (5.18.14), (5.18.15), (5.18.16) e (5.18.17). É esboçada também a condição inicial em (5.18.2). Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

A resolução de um exercício análogo está disponível em vídeo.

5.19 Circuito RLC em série, equação integro diferencial

Exercício 45. *Determinar a corrente $i(t)$ em um circuito RLC em série no qual $L = \frac{1}{10}H$; $R = 2\Omega$ e $C = \frac{1}{10}F$. Considerar que $i(0) = 0$ e a voltagem aplicada:*

$$V_a(t) = 120t[1 - u(t-1)], \tag{5.19.1}$$

onde $u(t)$ é a função passo unitário.

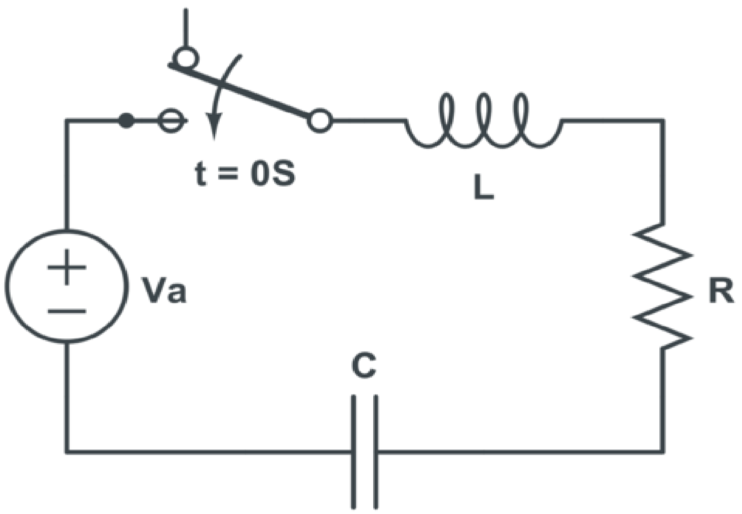
5.19.1 Solução

A segunda lei de Kirchhoff (Lei das Tensões ou Lei das Malhas) aplicada a um circuito RLC série (Figura 5.6) diz:

$$V_L + V_R + V_C = V_a(t), \tag{5.19.2}$$

onde V_L, V_R e V_C são as quedas de voltagem no indutor, resistência e capacitor, respectivamente.

Figura 5.6: Diagrama de circuito RLC série.



Fonte: Criado por Oswaldo José Machado. Disponível em https://www.circuitlab.com/circuit/36kjth/circuito-rlc-serie/. Acesso em: 23 nov. 2021.

A queda de voltagem no indutor pode ser escrita como:

$$V_L = L\frac{di(t)}{dt}, \tag{5.19.3}$$

onde L é a constante chamada inductância e $i(t)$ é a corrente elétrica como função do tempo.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

A queda de voltagem no resistor (Lei de Ohm) pode ser escrita como:

$$V_R = Ri(t), \tag{5.19.4}$$

onde R é a constante chamada resistência elétrica.

A queda de voltagem no capacitor pode ser escrita como:

$$V_C = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau, \tag{5.19.5}$$

onde C é a a constante chamada capacitância e $q(t)$ a carga elétrica acumulada no capacitor como função do tempo. O acumulo de carga está relacionada com a corrente por uma integral. Considera-se que a fonte externa foi ligada no instante $t = 0$.

Substituindo (5.19.1), (5.19.3), (5.19.4) e (5.19.5) em (5.19.2) encontra-se:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = 120t[1 - u(t-1)]. \tag{5.19.6}$$

A equação (5.19.6) é um tipo especial de equação íntegro-diferencial, não homogênea. Note-se que a incógnita $i(t)$ aparece em três posições: com sua primeira derivada $\frac{di(t)}{dt}$, sem derivar e dentro da integral $\int_0^t i(\tau)d\tau$.

As unidades foram dadas utilizando os padrões do sistema internacional. Logo, a corrente elétrica calculada terá unidades de Ampères. As mesmas serão omitidas no que segue. Com isso reescreve-se a equação (5.19.6) como:

$$\frac{1}{10}i'(t) + 2i(t) + 10\int_0^t i(\tau)d\tau = 120t - 120tu(t-1). \tag{5.19.7}$$

Pela linearidade da Transformada de Laplace aplicada na equação (5.19.7) segue:

$$\frac{1}{10}\mathcal{L}\left\{i'(t)\right\} + 2\mathcal{L}\left\{i(t)\right\} + 10\mathcal{L}\left\{\int_0^t i(\tau)d\tau\right\} = 120\mathcal{L}\left\{t\right\} - 120\mathcal{L}\left\{tu(t-1)\right\}. \tag{5.19.8}$$

Será utilizada a notação:

$$\mathcal{L}\left\{i(t)\right\} = I(s). \tag{5.19.9}$$

A Transformada de Laplace da primeira derivada pode ser calculada como:

$$\mathcal{L}\left\{i'(t)\right\} = -i(0) + s\mathcal{L}\{i(t)\}. \tag{5.19.10}$$

Substituindo $i(0) = 0$ e (5.19.9) em (5.19.10) encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{i'(t)\right\} = sI(s). \tag{5.19.11}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Da Proposição sobre Transformada de Laplace duma integral sabe-se que:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t i(\tau)d\tau\right\} = \frac{I(s)}{s}. \tag{5.19.12}$$

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2},\ \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}. \tag{5.19.13}$$

Pela Forma Alternativa do Segundo Teorema da Translação vale que:

$$\mathcal{L}\{g(t)u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}. \tag{5.19.14}$$

De (5.19.13) e (5.19.14) segue:

$$\mathcal{L}\{tu(t-1)\} = e^{-s}\mathcal{L}\{t+1\} = e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right). \tag{5.19.15}$$

Com (5.19.9), (5.19.11), (5.19.12), (5.19.13) e (5.19.15) reescreve-se (5.19.8):

$$\frac{1}{10}sI(s) + 2I(s) + 10\frac{I(s)}{s} = 120\frac{1}{s^2} - 120e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right),$$

$$\left(\frac{s}{10}+2+\frac{10}{s}\right)I(s) = 120\frac{1}{s^2} - 120e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right). \tag{5.19.16}$$

Partindo de (5.19.16) coloca-se $I(s)$ em evidência:

$$\left(\frac{s^2+20s+100}{10\cancel{s}}\right)I(s) = 120\frac{1}{\cancel{s^2}^{1}} - 120e^{-s}\left(\frac{1}{\cancel{s^2}^{1}}+\frac{1}{\cancel{s}}\right),$$

$$(s+10)^2 I(s) = 1200\frac{1}{s} - 1200e^{-s}\left(\frac{1}{s}+1\right),$$

$$I(s) = 1200\frac{1}{s(s+10)^2} - 1200e^{-s}\left(\frac{1}{s(s+10)^2}+\frac{1}{(s+10)^2}\right). \tag{5.19.17}$$

Para facilitar o cálculo da Transformada Inversa de Laplace utiliza-se uma decomposição em frações parciais:

$$\frac{1}{s(s+10)^2} = \frac{M}{s} + \frac{N}{s+10} + \frac{P}{(s+10)^2}, \tag{5.19.18}$$

onde M, N, P são constantes que não dependem de s.

De (5.19.18) segue que:

$$1 = M(s+10)^2 + Ns(s+10) + Ps = M(s^2+20s+100) + N(s^2+10s) + Ps,$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

$$0 \cdot s^2 + 0 \cdot s + 1 = (M+N)s^2 + (20M + 10N + P)s + 100M. \tag{5.19.19}$$

A equação (5.19.19) deve ser entendida como uma igualdade de polinômios em s e leva ao sistema:

$$\begin{aligned} M + N &= 0 \\ 20M + 10N + P &= 0. \\ 100M &= 1 \end{aligned} \tag{5.19.20}$$

Resolvendo (5.19.20) encontra-se $M = \frac{1}{100}$, $N = -\frac{1}{100}$ e $P = -\frac{1}{10}$. Este resultado é colocado em (5.19.18):

$$\frac{1}{s(s+10)^2} = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{s+10} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{(s+10)^2}. \tag{5.19.21}$$

Com (5.19.21) volta-se em (5.19.17):

$$\begin{aligned} I(s) = 12\frac{1}{s} - 12\frac{1}{s+10} - 120\frac{1}{(s+10)^2} - \\ -e^{-s}\left(12\frac{1}{s} - 12\frac{1}{s+10} + 1080\frac{1}{(s+10)^2}\right). \end{aligned} \tag{5.19.22}$$

A equação (5.19.22) é a solução no espaço transformado ou dos s. Resta encontrar a anti-Transformada de Laplace para voltar no espaço dos t. Ou seja,

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{I(s)\right\}.$$

Consultando uma tabela de Transformadas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1, \tag{5.19.23}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+10}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-10)}\right\} = e^{-10t}. \tag{5.19.24}$$

Pela Recíproca do Primeiro Teorema da Translação vale que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s-a)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\Big|_{s\to s-a}\right\} = e^{at}f(t). \tag{5.19.25}$$

De (5.19.25) tem-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+10)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\Big|_{s\to s-(-10)}\right\} = te^{-10t}. \tag{5.19.26}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Pela recíproca do Segundo Teorema da Translação vale que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}G(s)\right\} = g(t-a)u(t-a). \tag{5.19.27}$$

De (5.19.23) e (5.19.27) segue:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s}\right\} = u(t-1). \tag{5.19.28}$$

De (5.19.24) e (5.19.27) segue:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s+10}\right\} = e^{-10(t-1)}u(t-1). \tag{5.19.29}$$

E de (5.19.26) e (5.19.27) segue:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{(s+10)^2}\right\} = (t-1)e^{-10(t-1)}u(t-1). \tag{5.19.30}$$

Por (5.19.22), (5.19.23), (5.19.24), (5.19.26), (5.19.28), (5.19.29) e (5.19.30) encontra-se:

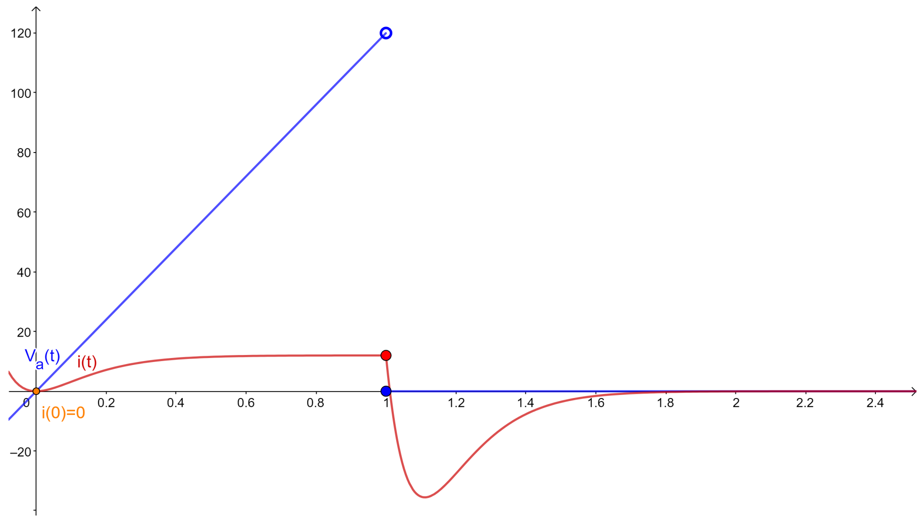
$$\begin{gathered} i(t) = 12 - 12e^{-10t} - 120te^{-10t} - \\ -u(t-1)\left(12 - 12e^{-10(t-1)} + 1080(t-1)e^{-10(t-1)}\right). \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} i(t) = 12 - 12e^{-10t} - 120te^{-10t} - \\ -u(t-1)\left(12 - 1092e^{-10(t-1)} + 1080te^{-10(t-1)}\right). \end{gathered} \tag{5.19.31}$$

A Figura 5.7 mostra os gráficos das equações (5.19.1) e (5.19.31).

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Figura 5.7: Gráficos das equações (5.19.1) e (5.19.31). Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Nota-se que a corrente cresce no intervalo $0 < t < 1$ pois o capacitor está sendo carregado. Quando a fonte externa é desligada em $t = 1$ a corrente primeiro cai rapidamente e fica negativa, devido ao indutor e o capacitor, e finalmente se anula lentamente. Em $t = 1$ a função $i(t)$ é contínua, embora $V_a(t)$ seja descontínua. A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Capítulo 6

Transformada de Laplace da função Delta de Dirac

6.1 Função Delta de Dirac ou Impulso Unitário

Exercício 46. *Dissertar sobre função Delta de Dirac ou Impulso Unitário:*

$$\delta(t-t_0).$$

Mostrar as propriedades que a caracterizam.

6.1.1 Solução

A função especial ou generalizada Delta de Dirac, também conhecida como Impulso Unitário ou simplesmente função $\delta(t-t_0)$, define-se como valendo infinito no ponto $t=t_0$ e zero no restante da reta real. Adicionalmente, a integral da função Delta de Dirac em toda a reta real é definida como tendo valor 1:

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}0, & \text{se } t\neq t_0\\ \infty, & \text{se } t=t_0\end{cases}, \tag{6.1.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1. \tag{6.1.2}$$

Uma equação alternativa a (6.1.2) é escrever que para qualquer função real de variável real $f(t)$ vale:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)\cdot 1=f(t_0). \tag{6.1.3}$$

Estritamente falando a definição anterior é problemática, pois o símbolo de infinito, utilizado em (6.1.1), não é um número e as integrais em (6.1.2) e (6.1.3) deveriam ser zero. Pode-se pensar na função Delta de Dirac como um retângulo infinitamente estreito e alto, com área igual à unidade. Ou a única contribuição para a área embaixo da curva $f(t)\delta(t-t_0)$ acontecendo em $t=t_0$, sendo igual ao produto de um $\Delta t = 1$ com $f(t_0)$.

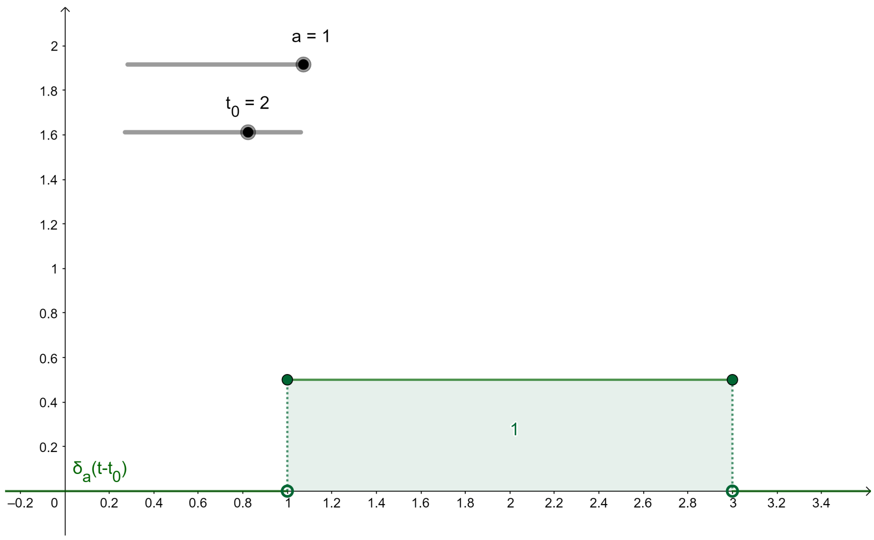
Uma modelagem da função $\delta(t-t_0)$ pode ser feita com a função $\delta_a(t-t_0)$ (Figura 6.1):

$$\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < t_0 - a \\ \frac{1}{2a}, & \text{se } t_0 - a \leq t \leq t_0 + a \\ 0, & \text{se } t > t_0 + a \end{cases}, \tag{6.1.4}$$

onde a é um número real positivo. Nota-se que com (6.1.4), para todo a, vale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t-t_0)dt = 1. \tag{6.1.5}$$

Figura 6.1: Função $\delta_a(t-t_0)$. Versão interativa aqui.

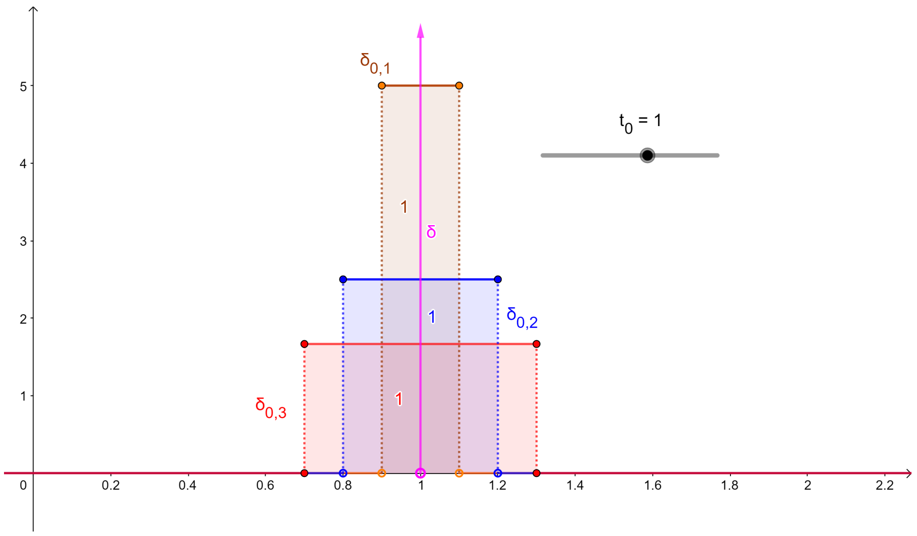


Fonte: O autor.

Adicionalmente, ao calcular o limite da função $\delta_a(t-t_0)$ quando a tende a zero (Figura 6.2) encontra-se:

$$\lim_{a\to 0} \delta_a(t-t_0) = \delta(t-t_0). \tag{6.1.6}$$

Figura 6.2: Ilustração do limite da função $\delta_a(t-t_0)$ quando $a \to 0$. A função Delta de Dirac $\delta(t-t_0)$ é representada por uma seta vertical. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

6.2 Transformada de Laplace da função Delta de Dirac

Exercício 47. *Demonstrar o cálculo da transformada de Laplace da função Delta de Dirac ou Impulso Unitário:*

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}.$$

6.2.1 Solução

Proposição 12. *Para $t_0 > 0$ a Transformada de Laplace da função Delta de Dirac é:*

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}.$$

Demonstração. A função Delta de Dirac satisfaz que:

$$\delta(t-t_0) = \lim_{a\to 0} \delta_a(t-t_0). \tag{6.2.1}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Onde a função $\delta_a(t-t_0)$ pode ser escrita como:

$$\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < t_0 - a \\ \frac{1}{2a}, & \text{se } t_0 - a \le t \le t_0 + a \\ 0, & \text{se } t > t_0 + a \end{cases}, \tag{6.2.2}$$

Pela utilização da função Degrau Unitário (de Heaviside) reescreve-se (6.2.2) como:

$$\delta_a(t-t_0) = \frac{1}{2a}\left[u(t-(t_0-a)) - u(t-(t_0+a))\right]. \tag{6.2.3}$$

Com (6.2.3) a equação (6.2.1) transforma-se em:

$$\delta(t-t_0) = \lim_{a\to 0}\left[\frac{1}{2a}\left[u(t-(t_0-a)) - u(t-(t_0+a))\right]\right]. \tag{6.2.4}$$

De (6.2.4) e pela linearidade da operação de calcular limite e da Transformada de Laplace segue:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{a\to 0}\left[\frac{1}{2a}\left[\mathcal{L}\{u(t-(t_0-a))\} - \mathcal{L}\{u(t-(t_0+a))\}\right]\right]. \tag{6.2.5}$$

A Transformada de Laplace da função de Heaviside é:

$$\mathcal{L}\left\{u(t-b)\right\} = \frac{e^{-bs}}{s}. \tag{6.2.6}$$

De (6.2.5) e (6.2.6) escreve-se:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{a\to 0}\left[\frac{1}{2a}\left[\frac{e^{-(t_0-a)s}}{s} - \frac{e^{-(t_0+a)s}}{s}\right]\right]. \tag{6.2.7}$$

Como o limite é calculado sobre a a equação (6.2.7) transforma-se em:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \frac{e^{-st_0}}{2s}\lim_{a\to 0}\left[\frac{e^{as} - e^{-as}}{a}\right]. \tag{6.2.8}$$

O limite em (6.2.8) possui uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Pelo fato das funções envolvidas serem contínuas pode ser utilizada a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{a\to 0}\left[\frac{e^{as} - e^{-as}}{a}\right] = s\lim_{a\to 0}\left[\frac{e^{as} + e^{-as}}{1}\right] = 2s. \tag{6.2.9}$$

Substituindo (6.2.9) em (6.2.8) completasse a prova. □

A resolução deste exercício está disponível em vídeo.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

6.3 PVI de segunda ordem, função Impulso Unitário-I

Exercício 48. *Resolver o problema de valor inicial usando a Transformada de Laplace:*

$$y''(t) + y(t) = 4\delta(t - 2\pi). \tag{6.3.1}$$

Dois casos: a)

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0, \tag{6.3.2}$$

b)

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \tag{6.3.3}$$

6.3.1 Solução

Utilizando a linearidade da Transformada de Laplace em (6.3.1) tem-se:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = 4\mathcal{L}\{\delta(t - 2\pi)\}. \tag{6.3.4}$$

Será usada a notação:

$$\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = Y(s). \tag{6.3.5}$$

A Transformada de Laplace da segunda derivada pode ser calculada como:

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} = -y'(0) - sy(0) + s^2\mathcal{L}\{y(t)\}. \tag{6.3.6}$$

Para o item a). Substituindo (6.3.2) e (6.3.5) em (6.3.6) encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} = -s + s^2 Y(s). \tag{6.3.7}$$

Para o item b). Substituindo (6.3.3) e (6.3.5) em (6.3.6) encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} = s^2 Y(s). \tag{6.3.8}$$

Viu-se que a Transformada de Laplace da função Delta de Dirac é:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}. \tag{6.3.9}$$

Com (6.3.9) calcula-se:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - 2\pi)\} = e^{-2\pi s}. \tag{6.3.10}$$

Para o item a). De (6.3.7), (6.3.5) e (6.3.10) chega-se a:

$$-s + s^2Y(s) + Y(s) = 4e^{-2\pi s},$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + 4\cdot\frac{1}{s^2+1}e^{-2\pi s}. \tag{6.3.11}$$

Para o item b). De (6.3.8), (6.3.5) e (6.3.10) chega-se a:

$$s^2Y(s) + Y(s) = 4e^{-2\pi s},$$

$$Y(s) = 4\cdot\frac{1}{s^2+1}e^{-2\pi s}. \tag{6.3.12}$$

As equações (6.3.11) e (6.3.12) são a solução do PVI no espaço transformado ou dos s. Resta encontrar a anti-Transformada de Laplace para voltar no espaço dos t. Ou seja,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}.$$

Consultando uma tabela de Transformadas inversas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos(t). \tag{6.3.13}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen}(t). \tag{6.3.14}$$

O Segundo Teorema da Translação na sua forma recíproca (ou inversa) garante que:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-as}\right\} = f(t-a)u(t-a). \tag{6.3.15}$$

De (6.3.14) e (6.3.15) segue:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}e^{-2\pi s}\right\} = \operatorname{sen}(t-2\pi)u(t-2\pi) = \operatorname{sen}(t)u(t-2\pi). \tag{6.3.16}$$

Para o item a). De (6.3.11), (6.3.13) e (6.3.16) a solução do PVI é:

$$y_a(t) = \cos(t) + 4\operatorname{sen}(t)u(t-2\pi). \tag{6.3.17}$$

Para o item b). De (6.3.12) e (6.3.16) a solução do PVI é:

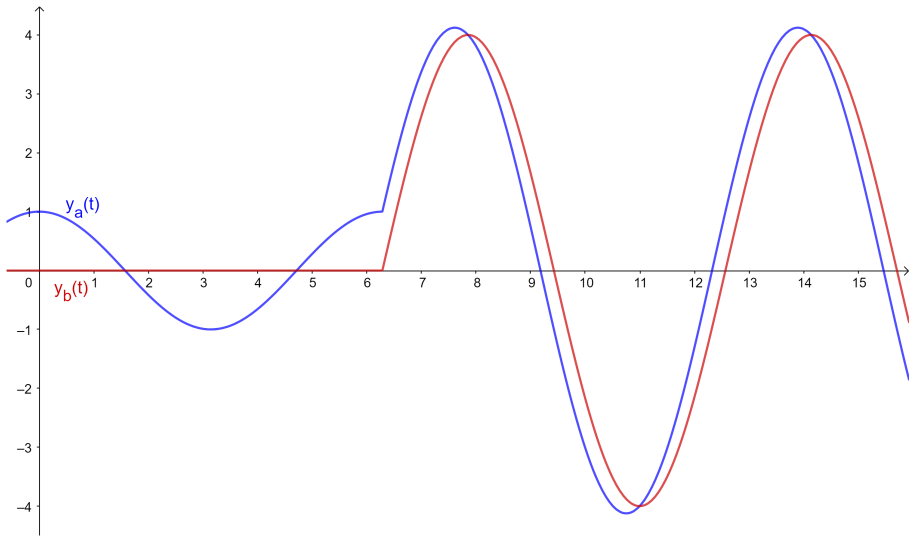
$$y_b(t) = 4\operatorname{sen}(t)u(t-2\pi). \tag{6.3.18}$$

A Figura 6.3 mostra os gráficos das funções em (6.3.17) e (6.3.18). A resolução deste

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

exercício, em conjunto com uma interpretação física, está disponível em vídeo.

Figura 6.3: Gráficos das funções em (6.3.17) e (6.3.18). Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

6.4 PVI de segunda ordem, função Impulso Unitário-II

Exercício 49. *Resolver o problema de valor inicial usando a Transformada de Laplace:*

$$y''(t) - 2y'(t) = 1 + \delta(t-2), \tag{6.4.1}$$

$$y(0) = 0,\, y'(0) = 1. \tag{6.4.2}$$

6.4.1 Solução

Utilizando a linearidade da Transformada de Laplace em (6.4.1) tem-se:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} - 2\mathcal{L}\{y'(t)\} = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{\delta(t-2\pi)\}. \tag{6.4.3}$$

Será usada a notação:

$$\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = Y(s). \tag{6.4.4}$$

A Transformada de Laplace das derivadas pode ser calculada como:

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = -y(0) + s\mathcal{L}\{y(t)\}, \tag{6.4.5}$$

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} = -y'(0) - sy(0) + s^2\mathcal{L}\{y(t)\}. \tag{6.4.6}$$

Substituindo (6.4.2) e (6.4.4) em (6.4.5) e (6.4.6) encontra-se:

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = sY(s). \tag{6.4.7}$$

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} = -1 + s^2Y(s). \tag{6.4.8}$$

A Transformada de Laplace da função constante igual a um é:

$$\mathcal{L}\left\{1\right\} = \frac{1}{s}. \tag{6.4.9}$$

Viu-se que a Transformada de Laplace da função Delta de Dirac é:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}. \tag{6.4.10}$$

Com (6.4.10) calcula-se:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - 2)\} = e^{-2s}. \tag{6.4.11}$$

De (6.4.3), (6.4.7), (6.4.8), (6.4.9) e (6.4.11) chega-se a:

$$-1 + s^2Y(s) - 2sY(s) = \frac{1}{s} + e^{-2s},$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s-2)} + \frac{1}{s(s-2)} + \frac{1}{s(s-2)}e^{-2s}. \tag{6.4.12}$$

Executando uma decomposição em frações parciais encontra-se:

$$\frac{1}{s(s-2)} = -\frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s-2)}, \tag{6.4.13}$$

$$\frac{1}{s^2(s-2)} = -\frac{1}{4s} - \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4(s-2)}. \tag{6.4.14}$$

Substituindo (6.4.13) e (6.4.14) em (6.4.12) tem-se:

$$\begin{aligned} Y(s) = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s-2} - \\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}e^{-2s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-2}e^{-2s}. \end{aligned} \tag{6.4.15}$$

A equação (6.4.15) é a solução do PVI no espaço transformado ou no espaço dos s. Resta encontrar a anti-Transformada de Laplace para voltar no espaço dos t. Ou seja,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}.$$

Consultando uma tabela de Transformadas inversas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1, \tag{6.4.16}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t, \tag{6.4.17}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}. \tag{6.4.18}$$

O Segundo Teorema da Translação na sua forma recíproca (ou inversa) garante que:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-as}\right\} = f(t-a)u(t-a). \tag{6.4.19}$$

De (6.4.16), (6.4.18) e (6.4.19) segue:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-2s}\right\} = u(t-2), \tag{6.4.20}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}e^{-2s}\right\} = e^{2(t-2)}u(t-2), \tag{6.4.21}$$

De (6.4.15), (6.4.16), (6.4.17), (6.4.18), (6.4.20), e (6.4.21) a solução do PVI é:

$$y(t) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}\left[1 - e^{2(t-2)}\right]u(t-2). \tag{6.4.22}$$

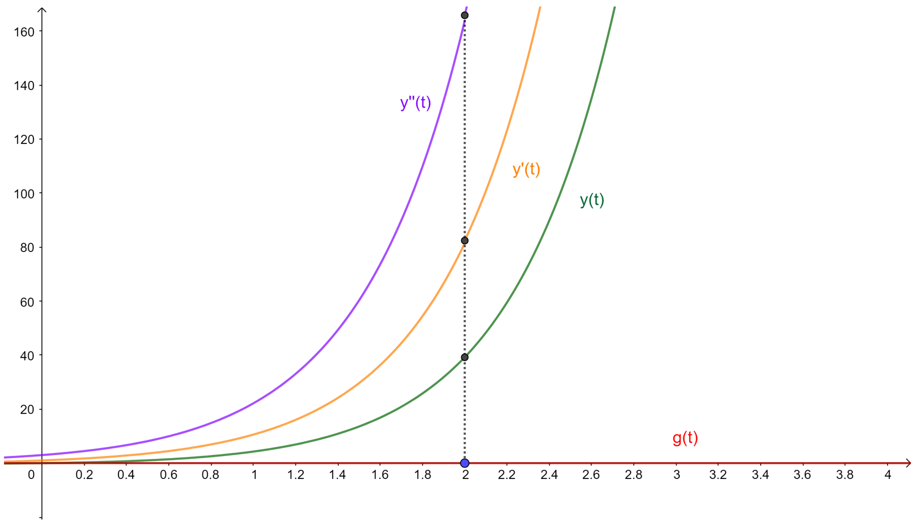
A Figura 6.4 mostra o gráfico da solução do PVI, função em (6.4.22), suas derivadas e

$$g(t) = y''(t) - 2y'(t) - 1.$$

A resolução de um exercício análogo, em conjunto com uma interpretação física, está disponível em vídeo.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Figura 6.4: Gráfico da solução do PVI, função em (6.4.22), suas derivadas e $g(t)$. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

6.5 Sistema de equações diferenciais acopladas

Exercício 50. *Resolver para* $x_1(t)$ *e* $x_2(t)$ *o sistema de equações diferenciais acopladas:*

$$\begin{cases} x_1''(t) + 10x_1(t) - 4x_2(t) = 0 \\ x_2''(t) - 4x_1(t) + 4x_2(t) = 0 \end{cases}, \tag{6.5.1}$$

$$x_1(0) = 0,\ x_1'(0) = 1,\ x_2(0) = 0,\ x_2'(0) = -1. \tag{6.5.2}$$

6.5.1 Solução

Utilizando a linearidade da Transformada de Laplace em (6.5.1) tem-se:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x_1''(t)\} + 10\mathcal{L}\{x_1(t)\} - 4\mathcal{L}\{x_2(t)\} = \mathcal{L}\{0\} \\ \mathcal{L}\{x_2''(t)\} - 4\mathcal{L}\{x_1(t)\} + 4\mathcal{L}\{x_2(t)\} = \mathcal{L}\{0\} \end{cases}. \tag{6.5.3}$$

Será usada a notação:

$$\mathcal{L}\{x_1(t)\} = X_1(s),\ \mathcal{L}\{x_2(t)\} = X_2(s). \tag{6.5.4}$$

A Transformada de Laplace da segunda derivada pode ser calculada como:

$$\begin{cases}\mathcal{L}\left\{x_1''(t)\right\} = -x_1'(0) - sx_1(0) + s^2\mathcal{L}\{x_1(t)\} \\ \mathcal{L}\left\{x_2''(t)\right\} = -x_2'(0) - sx_2(0) + s^2\mathcal{L}\{x_2(t)\}\end{cases}. \tag{6.5.5}$$

Substituindo (6.5.2) e (6.5.4) em (6.5.5) encontra-se:

$$\begin{cases}\mathcal{L}\left\{x_1''(t)\right\} = -1 + s^2X_1(s) \\ \mathcal{L}\left\{x_2''(t)\right\} = 1 + s^2X_2(s)\end{cases} \tag{6.5.6}$$

De (6.5.3), (6.5.4) e (6.5.6) chega-se a:

$$\begin{cases}-1 + s^2X_1(s) + 10X_1(s) - 4X_2(s) = 0 \\ 1 + s^2X_2(s) - 4X_1(s) + 4X_2(s) = 0\end{cases}. \tag{6.5.7}$$

O sistema em (6.5.7) é algébrico para $X_1(s)$ e $X_2(s)$. Isto é, não existem derivadas. Pode ser reescrito como:

$$\begin{cases}(s^2+10)X_1(s) - 4X_2(s) = 1 \\ -4X_1(s) + (s^2+4)X_2(s) = -1\end{cases}. \tag{6.5.8}$$

O sistema em (6.5.8) pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} s^2+10 & -4 \\ -4 & s^2+4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{6.5.9}$$

Será utilizada a regra de Cramer para a resolução do sistema em (6.5.9). Ou seja:

$$\Delta = \begin{vmatrix} s^2+10 & -4 \\ -4 & s^2+4 \end{vmatrix} = s^4 + 14s^2 + 24 = (s^2+12)(s^2+2), \tag{6.5.10}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & s^2+4 \end{vmatrix} = s^2, \tag{6.5.11}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} s^2+10 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -s^2 - 6. \tag{6.5.12}$$

Isto é, de (6.5.10), (6.5.11) e (6.5.12) segue:

$$X_1(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{s^2}{(s^2+12)(s^2+2)}. \tag{6.5.13}$$

$$X_2(s) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-s^2-6}{(s^2+12)(s^2+2)}. \tag{6.5.14}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Por decomposição em frações parciais reescrevem-se (6.5.13) e (6.5.14) como:

$$X_1(s) = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{s^2+12} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s^2+2}, \tag{6.5.15}$$

$$X_2(s) = -\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{s^2+12} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{s^2+2}. \tag{6.5.16}$$

As equações (6.5.15) e (6.5.16) são a solução do PVI no espaço transformado ou dos s. Resta encontrar a anti-Transformada de Laplace para voltar no espaço dos t. Ou seja,

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{X_1(s)\right\},$$

$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{X_2(s)\right\}.$$

Consultando uma tabela de Transformadas inversas de Laplace encontra-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+12}\right\} = \frac{\sqrt{12}}{12}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2+12}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{sen}\left(\sqrt{12}t\right), \tag{6.5.17}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}t\right). \tag{6.5.18}$$

De (6.5.15), (6.5.16), (6.5.17) e (6.5.18) as soluções do PVI são:

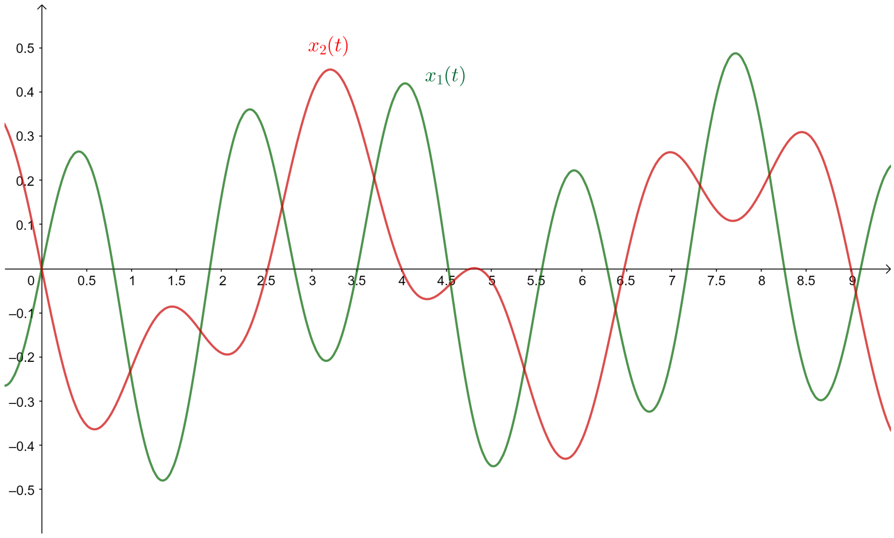
$$x_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{sen}\left(\sqrt{12}t\right) - \frac{\sqrt{2}}{10}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}t\right), \tag{6.5.19}$$

$$x_2(t) = -\frac{\sqrt{3}}{10}\operatorname{sen}\left(\sqrt{12}t\right) - \frac{\sqrt{2}}{5}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}t\right). \tag{6.5.20}$$

A Figura 6.5 mostra os gráficos das soluções do PVI, funções em (6.5.19) e (6.5.20). A resolução deste exercício, em conjunto com uma interpretação física, está disponível em vídeo.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

Figura 6.5: Gráficos das soluções do PVI, funções em (6.5.19) e (6.5.20). Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Capítulo 7

Referências Bibliográficas

[1] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175. Acesso em: 28 nov. 2021.

[2] William E. Boyce e Richard C. Diprima, **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno,** Editora: LTC; 10ª edição (19 fevereiro 2015), ISBN-10: 8521627351, ISBN-13: 978-8521627357, 680 páginas.

[3] Dennis G. Zill, **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem,** Editora: Cengage, segunda edição (2011), ISBN-10: 852211059X, ISBN-13: 978-8522110599, 410 páginas.

[4] Hamilton Luiz Guidorizzi, A.L. **Um Curso de Cálculo**. Editora LTC; 6ª edição (2018), 636 páginas, ISBN-10 : 8521635435, ISBN-13: 978-8521635437.

[5] James Stewart, **Cálculo vol.II,** Editora: Cengage Learning, quarta edição (2017), ISBN-10: 8522125848, ISBN-13: 978-8522125845, 672 páginas.

[6] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045. Acesso em: 28 nov. 2021.

[7] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN

978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023106. Acesso em: 28 nov. 2021.

[8] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023113. Acesso em: 28 nov. 2021.

[9] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática v.3.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023144. Acesso em: 28 nov. 2021.

[10] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática.** 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881. Acesso em: 28 nov. 2021.

[11] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO),** v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. Disponível em: https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715. Acesso em: 28 nov. 2021.

[12] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdvol17ermac202023169664jllabagfb127138. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 28 nov. 2021.

[13] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdvol18202023169664jllabagfb7888. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 28 nov. 2021.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023205.

[14] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdvol19202023169664jll118127. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 28 nov. 2021.

[15] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, ISSN 2316-9664, v. 20, p. 22–40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdvol20202123169664jlljpmsafj2240. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 28 nov. 2021.

[16] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825. Acesso em: 28 nov. 2021.

[17] JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas.** Livro: Conhecimentos pedagógicos e conteúdos disciplinares das ciências exatas e da terra, DOI do Livro: 10.22533/at.ed.242213108, ISBN: 978-65-5983-424-2, 2021. Páginas: 161-175. Disponível em DOI do Capítulo: 10.22533/at.ed.24221310814. Acesso em: 28 nov. 2021.

[18] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:117-139, nov. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868. Acesso em: 28 nov. 2021.

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}$$

ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book)