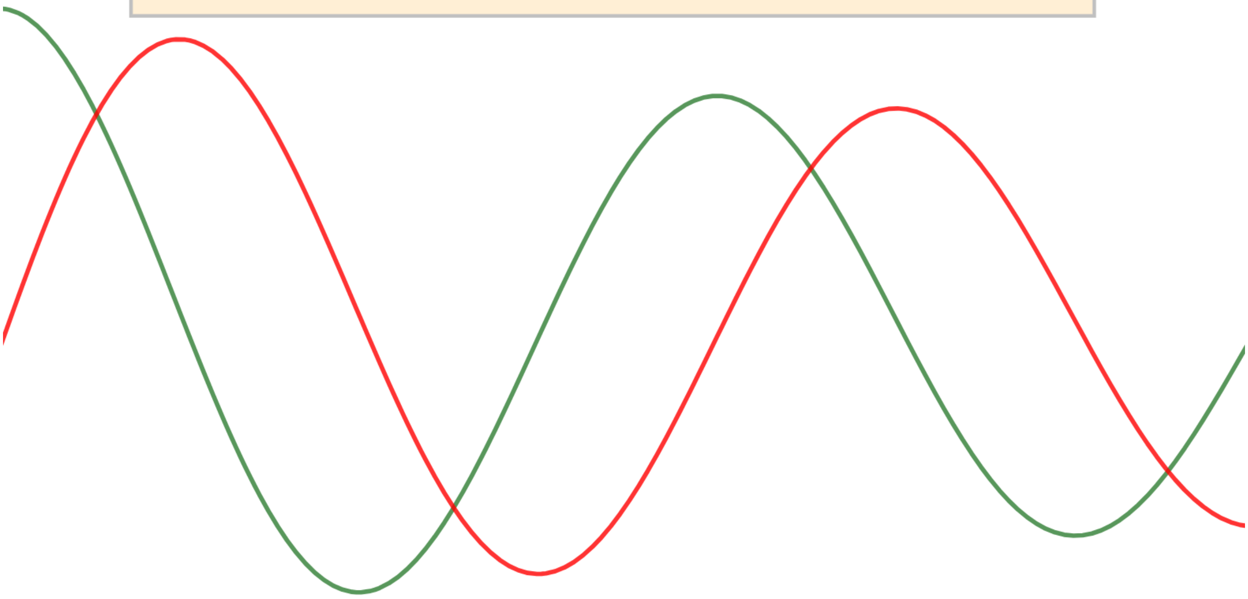
# Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências



Juan López Linares

JUAN LÓPEZ LINARES

# Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências

DOI: 10.11606/9786587023175

Pirassununga - SP
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)
2021

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

**Reitor:** Prof. Dr. Vahan Agopyan

**Vice-Reitor:** Prof. Dr. Antonio Carlos Hernandes

**FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS**

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

http://www.fzea.usp.br

**Diretor:** Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

**Vice-Diretor:** Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes de Oliveira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo

López Linares, Juan
L864e Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências / Juan López Linares. -- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2021.
101 p.

ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book)
DOI: 10.11606/9786587023175

1. Séries de potências. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Equação de Cauchy Euler. 4. Equação de Bessel. 5. Ensino universitário. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

*Dedico este livro a minha família.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos estudantes do curso de “Cálculo IV” da FZEA-USP que me motivaram a escrever este livro eletrônico.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

## AUTOR

Dr. JUAN LÓPEZ LINARES.

Professor Doutor 2 do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Atualmente ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de "Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio" e "Geometria olímpica com Geogebra" para professores. Desenvolve projetos de pesquisa nas áreas de ensino de Cálculo e na resolução de problemas de Olimpíadas.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respetivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela UFSCar em 2019. Segue link para uma lista de publicações do autor.

**Título Curto**

Equações diferenciais com séries de potências

**Título Longo**

Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências

## Prefácio

Este é primeiro livro eletrônico do autor dedicado a resolução de exercícios do curso de Cálculo IV da FZEA-USP. São apresentados e discutidos em detalhe mais de vinte questões usadas na resolução de equações diferenciais ordinárias pelo método das séries de potências. O texto conta com 19 figuras que facilitam acompanhar as soluções. Muitos dos problemas têm como complemento gráficos interativos no site do Geogebra e vídeos no YouTube. O conteúdo é organizado em quatro capítulos: Séries de Taylor e Maclaurin, Resolução de equações diferenciais perto de um ponto ordinário, Equação de Cauchy Euler e Resolução de equações diferenciais perto de um ponto singular regular. A exposição procura que o material possa de fato ser lido e estudado por estudantes dos primeiros anos de cursos de Engenharias.

**Palavras-chave:** Séries de Potências, Equações Diferenciais Ordinárias, Equação de Cauchy Euler, Equação de Bessel, Ensino Universitário.

# Sumário

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

# Capítulo 1

# Introdução

O conjunto de exercícios resolvidos, e a teoria associada, que aparecem neste livro eletrônico teve sua origem nas notas das aulas do professor para o curso de Cálculo IV da FZEA-USP. O assunto é particularmente difícil, e causa de reprovação frequente, para estudantes de Engenharias. Motivo pelo qual se apresentam resoluções detalhadas de exercícios que outros autores consideram simples.

Uma equação diferencial relaciona uma ou mais funções e suas derivadas. As funções representam quantidades físicas, as derivadas das mesmas indicam suas taxas de mudança. É por isso que as equações diferenciais desempenham um papel essencial na engenharia, biologia, etc. O estudo de equações diferenciais consiste no procura de suas soluções e das propriedades destas. Apenas as equações diferenciais mais simples podem ser resolvidas por fórmulas explícitas e exatas. As séries de potências (somas de polinômios com um número infinito de termos) auxiliam nos casos mais difíceis. Usualmente o resultado exato é aproximado por um número finito de somandos. O assunto é muito amplo. Escolhemos discutir alguns exercícios, mas sem a pretensão de esgotar o tema.

Embora exista uma ampla gama de livros dedicados ao estudo de equações diferencias foram seguidos principalmente o Boyce e Diprima [1], Zill [2], Guidorizzi [3] e Stewart [4].

O texto conta com 19 figuras que facilitam acompanhar a resolução. A maior parte tem como complemento links para os gráficos interativos no site do GeoGebra e, vários, a resolução em vídeo numa playlist do YouTube.

O autor também publicou quatro livros eletrônicos dedicados a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática para o Ensino Médio: [5], [6], [7] e [8]. Outros trabalhos da área de Matemática são [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15] e [16].

# Capítulo 2

# Séries de Taylor e Maclaurin

## 2.1 Função definida por partes

**Exercício 1.** *Use uma série de Maclaurin para obter a série de Maclaurin da função:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ \\ \frac{1}{2}, & se\ x = 0 \end{cases}.$$

### 2.1.1 Solução

Iniciamos estudando um limite com indeterminação da forma "$\frac{0}{0}$" e aplicando a regra de L'Hôpital duas vezes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Como $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$ a função $f(x)$ é contínua em $x = 0$. A fórmula de Maclaurin para a função cosseno é:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

A função $f(x)$ para $x \neq 0$ é:

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = x^{-2} \left[ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right],$$

$$= x^{-2} \left[ - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right],$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \cdots .$$

Seja $m = n - 1$, logo $n = m + 1$. Quando $n = 1$ temos $m = 0$. Trocando o índice do somatório para $m$ temos:

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m+2)!}.$$

Como $f(x)$ é contínua em $x = 0$ podemos escrever que

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \cdots, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

## 2.2 Maclaurin de função com cosseno

**Exercício 2.** *Qual a série de Maclaurin e o raio de convergência $R$ da função:*

$$f(x) = \cos(x^3)?$$

### 2.2.1 Solução

Uma série de Taylor da função $f$ centrada em $x_0$ é da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Se demonstra que, se a mesma existir, os coeficientes $c_n$ devem ser:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

onde $f^{(n)}(x_0)$ é a derivada $n$-ésima de $f$ avaliada em $x_0$.

Uma série de Maclaurin é uma série de Taylor centrada em $x_0 = 0$.

A série de Maclaurin da função $f(x) = \cos(x)$ é

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right], \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

A demonstração da fórmula anterior pode ser encontrada aqui.

Para resolver o exercício proposto basta trocar na equação anterior $x$ por $x^3$:

$$\cos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{(x^3)^{2n}}{(2n)!} \right], \ \forall x^3 \in \mathbb{R},$$

$$\cos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{x^{6n}}{(2n)!} \right], \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

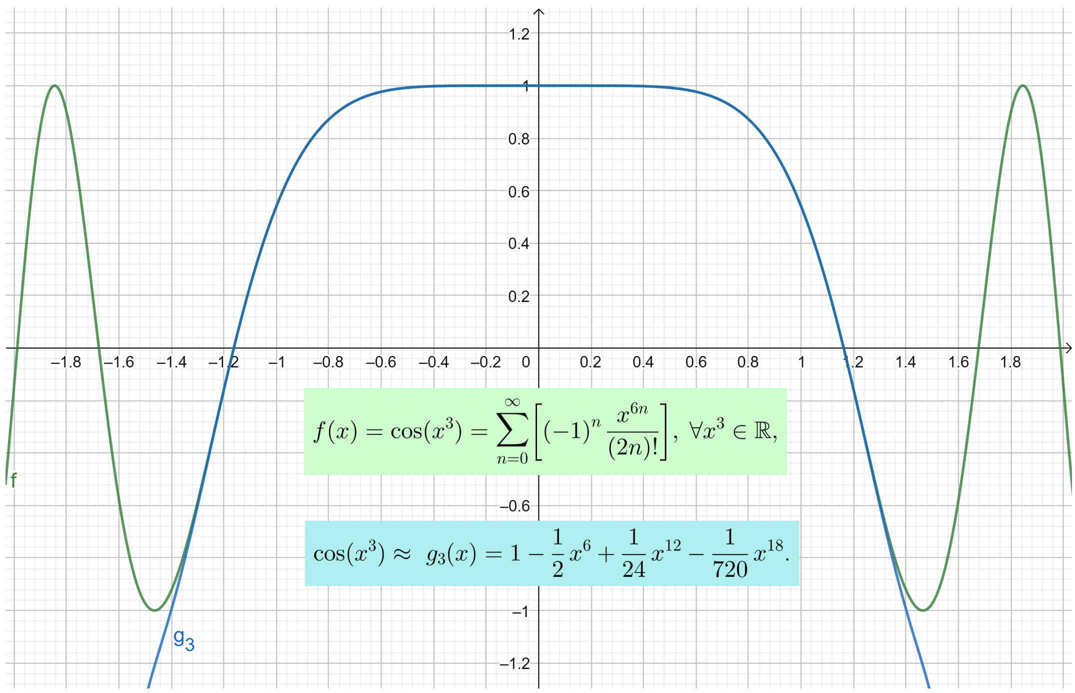
Como o resultado anterior é válido para todo $x$ real o raio de convergência é $R = \infty$.

Escrevemos explicitamente os primeiros 4 somandos:

$$\cos(x^3) \approx g_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{24}x^{12} - \frac{1}{720}x^{18}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

A Figura 2.2.1 mostra os gráficos das funções $f(x)$ e da aproximação até ordem 3, $g_3(x)$. Para pontos longe de $x_0 = 0$ precisam ser tomados mais somandos.

Figura 2.2.1: Gráficos das funções $f(x)$ e da aproximação até ordem 3, $g_3(x)$. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

## 2.3 Série binomial

**Exercício 3.** *Qual a série de Maclaurin e o raio de convergência $R$ da função:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x}}?$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

### 2.3.1 Solução

Uma série de Taylor da função $f$ centrada em $x_0$ é da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Se demonstra que, se a mesma existir, os coeficientes $c_n$ devem ser:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

onde $f^{(n)}(x_0)$ é a derivada $n$-ésima de $f$ avaliada em $x_0$.

Uma série de Maclaurin é uma série de Taylor centrada em $x_0 = 0$.

A série de Maclaurin da função binomial $f(x) = (1 + x)^k$, $k \in \mathbb{R}$ é

$$(1 + x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n, \ se\ |x| < 1, \tag{2.3.1}$$

onde

$$c_n = \binom{k}{n} = \frac{1 \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots (k-n+1)}{n!}.$$

A fórmula anterior deve ser entendida como a sequência de números iniciando com $n = 0$:

$$(c_n) = \left( \frac{1}{0!}, \frac{k}{1!}, \frac{k(k-1)}{2!}, \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}, \cdots \right). \tag{2.3.2}$$

Quando $k$ é um número natural, $\binom{k}{n}$ é a quantidade de combinações (lê-se: $k$ escolhe $n$). Isto é, o número de grupos de $k$ objetos (sem importar a ordem) escolhidos do total de $n$ objetos. A mesma pode ser calculado usando a função fatorial:

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(n-k)!}.$$

A demonstração da fórmula anterior pode ser encontrada aqui.

Para resolver o exercício proposto basta trocar na equação (2.3.1) $x$ por $2x$ e $k = -\frac{1}{2}$:

$$(1 + 2x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \binom{-\frac{1}{2}}{n} (2x)^n \right], \ se\ |2x| < 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \binom{-\frac{1}{2}}{n} 2^n x^n \right], \ se\ |x| < \frac{1}{2}. \tag{2.3.3}$$

Como $k$ não é um número natural devemos usar (2.3.2). Escrevemos explicitamente os primeiros coeficientes binomiais:

$$\left(\binom{-\frac{1}{2}}{n}\right) = \left(1, \frac{k}{1!}, \frac{k(k-1)}{2!}, \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}, \cdots\right).$$

$$\left(\binom{-\frac{1}{2}}{n}\right) = \left(1, \frac{-\frac{1}{2}}{1!}, \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}, \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}, \cdots\right),$$

$$\left(\binom{-\frac{1}{2}}{n}\right) = \left(1, -\frac{1}{1!\cdot 2}, \frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}, -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\cdot 2^3}, \cdots\right).$$

Logo,

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!\cdot 2^n}.$$

Voltando com o resultado anterior em (2.3.3) encontramos:

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!} x^n\right], \; se\ |x| < \frac{1}{2}.$$

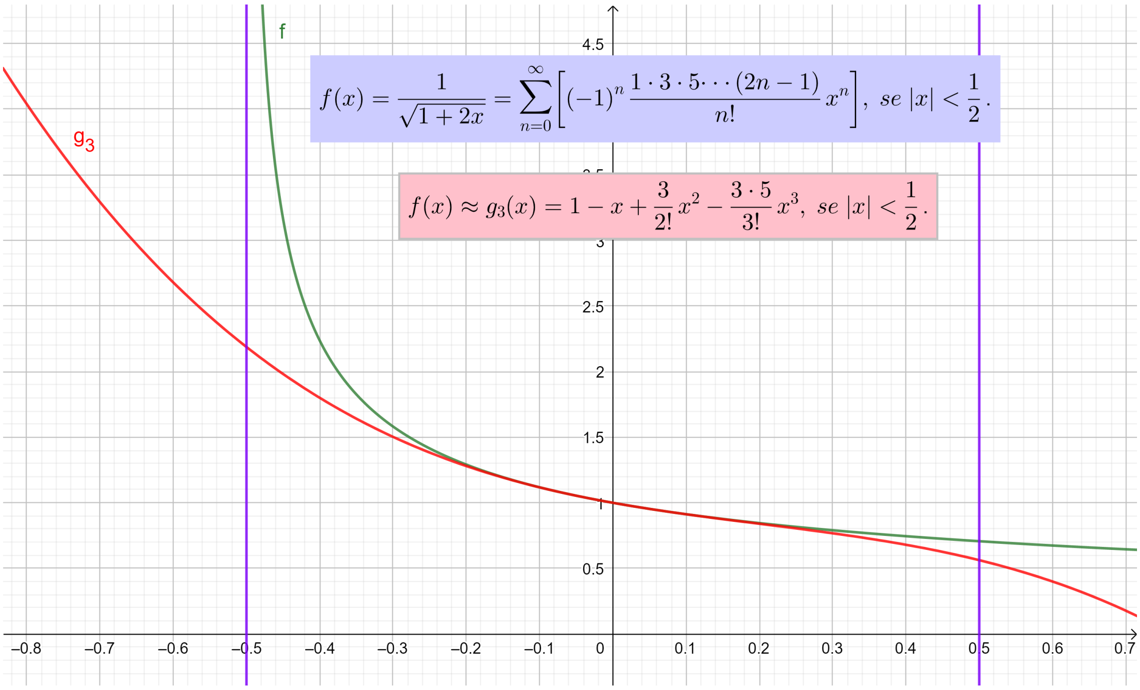
Como o resultado anterior é válido quando $|x| < \frac{1}{2}$ o raio de convergência é $R = \frac{1}{2}$. Podemos escrever explicitamente os quatro primeiros somandos:

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x}} \approx g_3(x) = 1 - x + \frac{3}{2!}x^2 - \frac{3\cdot 5}{3!}x^3 + \cdots.$$

A Figura 2.3.1 mostra os gráficos das funções $f(x)$ e da aproximação até ordem 3, $g_3(x)$. Quanto mais perto $x$ estiver de $x_0 = 0$ mais precisa a estimativa de $f$. As retas verticais em azul são $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Figura 2.3.1: Gráficos das funções $f(x)$ e da aproximação até ordem 3, $g_3(x)$. Quanto mais perto de $x_0 = 0$ mais precisa a estimativa. As retas verticais em azul são $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

## 2.4 Série de Taylor com centro em $x_0 \neq 0$

**Exercício 4.** *Qual a série de Taylor de $f(x)$, centrada em $x_0 = 9$, e o raio de convergência $R$:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}?$$

### 2.4.1 Solução

Uma série de Taylor da função $f$ centrada em $x_0$ é da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n. \tag{2.4.1}$$

Se demonstra que, se a mesma existir, os coeficientes $c_n$ devem ser:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \tag{2.4.2}$$

onde $f^{(n)}(x_0)$ é a derivada $n$-ésima de $f$ avaliada em $x_0$.

As derivadas de $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ são:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}},$$

$$f''(x) = \frac{1 \cdot 3}{2^2}x^{-\frac{5}{2}},$$

$$f^{(3)}(x) = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3}x^{-\frac{7}{2}},$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} x^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

Como a série de Taylor deve ser centrada em $x_0 = 9$ temos:

$$f(9) = 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

$$f'(9) = -\frac{1}{2}9^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2 \cdot 3^3},$$

$$f''(9) = \frac{1 \cdot 3}{2^2}9^{-\frac{5}{2}} = \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 3^5},$$

$$f^{(3)}(9) = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3}9^{-\frac{7}{2}} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3^7},$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(9) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} 9^{-\frac{2n+1}{2}} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot 3^{2n+1}}.$$

Voltando com este último resultado em (2.4.2) encontramos:

$$c_n = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot 3^{2n+1} \cdot n!}. \tag{2.4.3}$$

Usaremos o Teste da Razão para determinar o raio de convergência:

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2^{n+1} \cdot 3^{2n+3} \cdot (n+1)!}}{(-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot 3^{2n+1} \cdot n!}}\right|,$$

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{\frac{\cancel{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}(2n+1)}{2 \cdot \cancel{2^n} \cdot 3^2 \cdot \cancel{3^{2n+1}} \cdot \cancel{n!}(n+1)}}{\frac{\cancel{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}}{\cancel{2^n} \cdot \cancel{3^{2n+1}} \cdot \cancel{n!}}}\right|,$$

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{1}{18}\left|\frac{2n+1}{n+1}\right|.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Para a série ser absolutamente convergente devemos ter que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\left|\frac{(x-9)^{n+1}}{(x-9)^n}\right| < 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right||x-9| = \frac{1}{18}|x-9|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{n+1}\right| = \frac{1}{9}|x-9| < 1,$$

$$|x-9| < 9 = R.$$

Substituindo (2.4.3) em (2.4.1) e considerando o resultado anterior segue que:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot 3^{2n+1}\cdot n!}(x-9)^n\right],\ com\ R = 9.$$

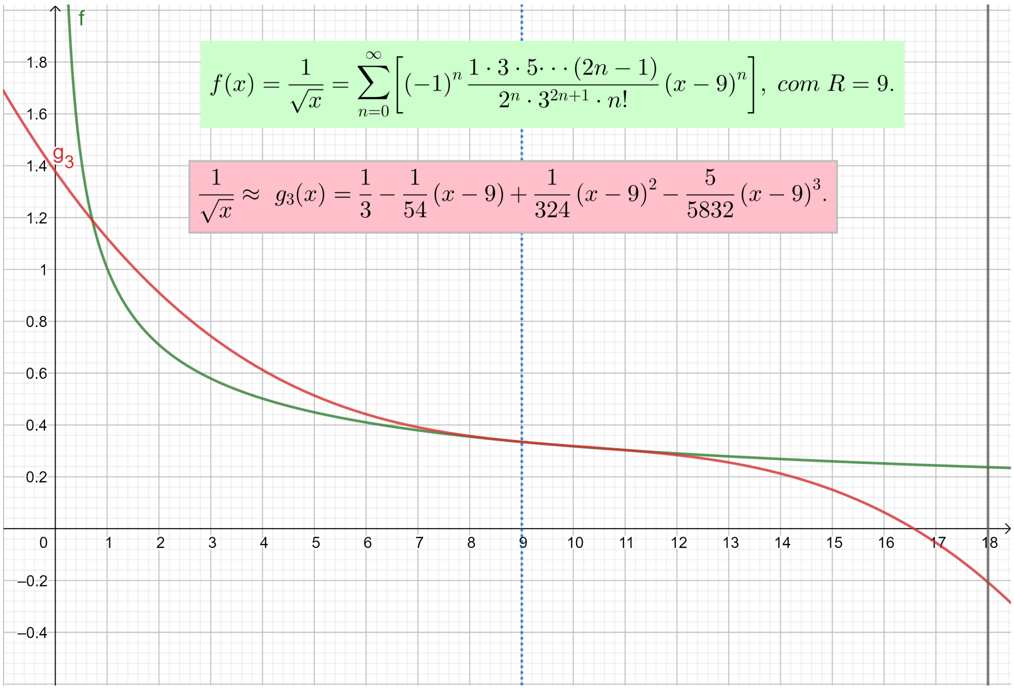
Podemos escrever explicitamente os quatro primeiros somandos:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \approx g_3(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{54}(x-9) + \frac{1}{324}(x-9)^2 - \frac{5}{5832}(x-9)^3.$$

A Figura 2.4.1 mostra os gráficos das funções $f(x)$ e da aproximação até ordem 3, $g_3(x)$. As retas verticais são $x = 0$, $x = x_0$ e $x = 18$. Quanto mais perto $x$ estiver de $x_0 = 9$ mais precisa a estimativa de $f$.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Figura 2.4.1: Gráficos das funções $f(x)$ e da aproximação até ordem 3, $g_3(x)$. As retas verticais são $x = 0$, $x = x_0$ e $x = 18$. Quanto mais perto $x$ estiver de $x_0 = 9$ mais precisa a estimativa de $f$. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

## 2.5 Integral usando Maclaurin

**Exercício 5.** *Calcular a integral usando uma série de Maclaurin para a função no integrando:*

$$\int sen(x^2)dx.$$

### 2.5.1 Solução

Uma série de Taylor da função $f$ centrada em $x_0$ é da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Se demonstra que, se a mesma existir, os coeficientes $c_n$ devem ser:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

onde $f^{(n)}(x_0)$ é a derivada $n$-ésima de $f$ avaliada em $x_0$.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Uma série de Maclaurin é uma série de Taylor centrada em $x_0 = 0$.

A série de Maclaurin da função $f(x) = \text{sen}(x)$ é

$$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right], \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

A demonstração da fórmula anterior pode ser encontrada aqui.

Para resolver o exercício proposto basta trocar na equação anterior $x$ por $x^2$:

$$\text{sen}(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} \right], \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Temos:

$$\int sen(x^2) dx = \int \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} \right] \right\} dx.$$

Como a série anterior é convergente para todo número real podemos trocar os símbolos de somatório e integral:

$$\int sen(x^2) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int \left[ (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} dx \right] \right\},$$

$$\int sen(x^2) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int x^{4n+2} dx \right\},$$

$$\int sen(x^2) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)} \right\} + C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração.

## 2.6 Maclaurin de função com seno

**Exercício 6.** *Qual a série de Maclaurin e o raio de convergência da função:*

$$f(x) = x \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)?$$

### 2.6.1 Solução

Uma série de Taylor da função $f$ centrada em $x_0$ é da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Se demonstra que, se a mesma existir, os coeficientes $c_n$ devem ser:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

onde $f^{(n)}(x_0)$ é a derivada $n$-ésima de $f$ avaliada em $x_0$.

Uma série de Maclaurin é uma série de Taylor centrada em $x_0 = 0$.

A série de Maclaurin da função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ é

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right], \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

A demonstração da fórmula anterior pode ser encontrada aqui.

Para resolver o exercício proposto basta trocar na equação anterior $x$ por $\frac{x}{2}$:

$$\operatorname{sen}(\frac{x}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} \right], \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Segue que:

$$x \cdot \operatorname{sen}(\frac{x}{2}) = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} \right], \ \forall x \in \mathbb{R},$$

$$x \cdot \operatorname{sen}(\frac{x}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+1}(2n+1)!} \right], \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

O raio de convergência é $R = \infty$, o mesmo da função $\operatorname{sen}(x)$.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

# Capítulo 3

# Resolução de equações diferenciais perto de um ponto ordinário

## 3.1 Juntando somatórios

**Exercício 7.** *Escrever*

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}, \tag{3.1.1}$$

*como uma única série de potências.*

### 3.1.1 Solução

Precisam-se realizar dois passos para juntar os somatórios. Primeiro, as potências iniciais de $x$ devem ser iguais. Segundo, os valores iniciais dos índices dos somatórios devem ser iguais.

Primeiro passo, as potências iniciais de $x$ devem ser iguais.

$$\text{primeira série: } n = 2 \rightarrow x^{n-2} = x^{2-2} = x^0,$$

$$\text{segunda serie: } n = 0 \rightarrow x^{n+1} = x^{0+1} = x^1.$$

Como a segunda série em (3.1.1) não possui a potência $x^0$, então o termo em que esta aparece na primeira série deve ser removido do somatório

$$2(2-1)C_2 x^0 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1}. \tag{3.1.2}$$

Segundo passo, os valores iniciais dos índices dos somatórios devem ser iguais. Isto será

feito através de uma troca simultânea de variáveis:

$$\text{primeira série: } k = n - 2 \rightarrow n = k + 2, \text{ se } n = 3, \text{ então } k = 1,$$

$$\text{segunda serie: } k = n + 1 \rightarrow n = k - 1, \text{ se } n = 0, \text{ então } k = 1.$$

Substituindo-se em (3.1.2) obtém-se:

$$2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)C_{k+2}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}C_{k-1}x^k. \tag{3.1.3}$$

Neste ponto, podemos juntar os somatórios em (3.1.3):

$$2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)C_{k+2} + C_{k-1}\right]x^k.$$

Este exercício também está resolvido num vídeo aqui.

## 3.2 Séries de potências na resolução de equações diferenciais: cosseno e seno

**Exercício 8.** *Resolver a equação diferencial*

$$y''(x) + y(x) = 0, \tag{3.2.1}$$

*usando uma série de potências centrada em* $x_0 = 0$.

### 3.2.1 Solução

Quer-se encontrar a solução de (3.2.1) na forma de uma série de potências:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n + \cdots. \tag{3.2.2}$$

Assume-se que a série em (3.2.2) seja convergente com algum raio de convergência $R > 0$. Derivando (3.2.2) tem-se:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n-1}. \tag{3.2.3}$$

Derivando (3.2.3) segue

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}. \tag{3.2.4}$$

Substituindo (3.2.2) e (3.2.4) em (3.2.1) encontramos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0. \tag{3.2.5}$$

Como os inícios dos índices dos somatórios são diferentes, executa-se uma troca de variável simultânea em (3.2.5):

$$\text{primeira série: } k = n-2 \to n = k+2, \text{ se } n = 2, \text{ então } k = 0,$$

$$\text{segunda serie: } k = n \to n = k, \text{ se } n = 0, \text{ então } k = 0.$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)C_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = 0. \tag{3.2.6}$$

Neste ponto os dois somatórios em (3.2.6) podem ser unificados:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)C_{k+2} + C_k\right] x^k = 0 = \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^k. \tag{3.2.7}$$

O lado direito da igualdade em (3.2.7) deve ser considerado como o polinômio identicamente nulo para todo $x \in \mathbb{R}$. A partir da igualdade de polinômios, pode-se afirmar que

$$(k+2)(k+1)C_{k+2} + C_k = 0. \tag{3.2.8}$$

A equação (3.2.8) é chamada indicial. A partir dela é possível estabelecer uma lei de recorrência para a sequência $(C_k)$:

$$C_{k+2} = \frac{-C_k}{(k+1)(k+2)}. \tag{3.2.9}$$

Como estão envolvidos os índices $k$, $k+1$ e $k+2$ a equação de recorrência (3.2.9) se classifica como de segunda ordem.

Avaliando (3.2.9) com $k = 0$ segue:

$$C_2 = -\frac{C_0}{1 \cdot 2} = -\frac{C_0}{2!}.$$

Avaliando (3.2.9) com $k = 1$ temos:

$$C_3 = -\frac{C_1}{2 \cdot 3} = -\frac{C_1}{3!}.$$

Da mesma forma, avaliando (3.2.9) com $k = 2, 3, 4, 5$ e utilizando os resultados anteriores encontramos:

$$\begin{aligned} C_4 &= -\frac{C_2}{3 \cdot 4} = -\frac{1}{3 \cdot 4}(-1)\frac{C_0}{2!} = \frac{C_0}{4!}, \\ C_5 &= -\frac{C_3}{4 \cdot 5} = -\frac{1}{4 \cdot 5}(-1)\frac{C_1}{3!} = \frac{C_1}{5!}, \\ C_6 &= -\frac{C_4}{5 \cdot 6} = -\frac{1}{5 \cdot 6} \cdot \frac{C_0}{4!} = -\frac{C_0}{6!}, \\ C_7 &= -\frac{C_5}{6 \cdot 7} = -\frac{1}{6 \cdot 7} \cdot \frac{C_1}{5!} = -\frac{C_1}{7!}. \end{aligned}$$

Dos resultados anteriores é possível conjecturar dois casos: i) $k = 2n$ (par), então $C_{2k}$ depende de $C_0$ e ii) $k = 2n + 1$ (ímpar), então $C_{2k+1}$ depende de $C_1$.

i) $k = 2n$ (par), então $C_{2k}$ depende de $C_0$. Os primeiros coeficientes são:

$$\left( C_0,\ C_2 = -\frac{C_0}{2!},\ C_4 = \frac{C_0}{4!},\ C_6 = -\frac{C_0}{6!}, \cdots \right).$$

Para a subsequência anterior conjecturamos:

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n C_0}{(2n)!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{3.2.10}$$

ii) $k = 2n + 1$ (ímpar), então $C_{2k+1}$ depende de $C_1$. Para os valores ímpares de k: Os primeiros coeficientes são:

$$\left( C_1,\ C_3 = -\frac{C_1}{3!},\ C_5 = \frac{C_1}{5!},\ C_7 = -\frac{C_1}{7!}, \cdots \right).$$

Para a subsequência anterior conjecturamos:

$$C_{2n+1} = \frac{(-1)^n C_1}{(2n+1)!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{3.2.11}$$

Pode-se reescrever o somatório da equação (3.2.2) utilizando outros dois:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} x^{2n+1}. \tag{3.2.12}$$

Substituindo (3.2.10) e (3.2.11) em (3.2.12) e colocando as constantes $C_0, C_1$ fora dos somatórios encontra-se:

$$y(x) = C_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + C_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \tag{3.2.13}$$

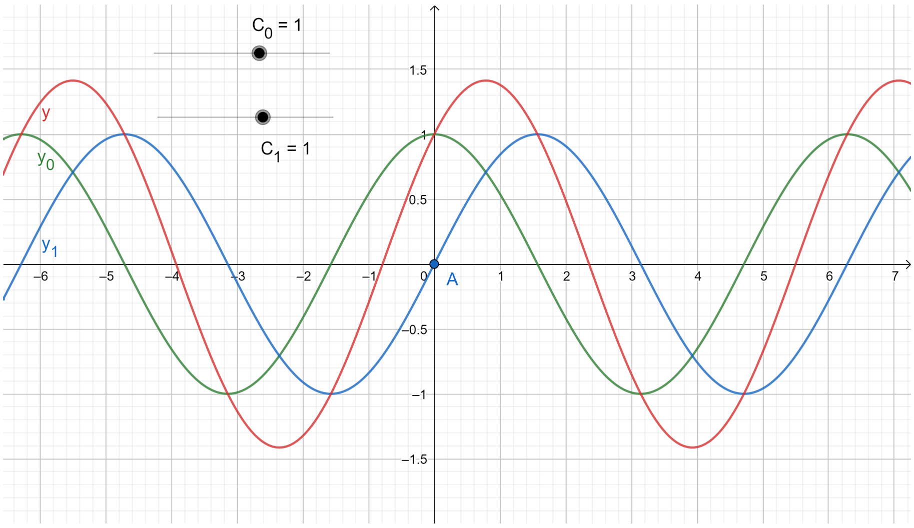
Os somatórios em (3.2.13) são as séries de Maclaurin das funções cosseno e seno. Uma demonstração disso é encontrada no vídeo aqui. Logo,

$$y(x) = C_0 \cos(x) + C_1 \operatorname{sen}(x). \tag{3.2.14}$$

O resultado na equação (3.2.14) é o mesmo que seria encontrado usando o método de propor uma solução de (3.2.1) na forma exponencial. Este exercício também está resolvido numa vídeo aula.

A Figura 3.2.1 mostra os gráficos das soluções básicas ($y_0(x) = \cos(x)$ em verde e $y_1(x) = \operatorname{sen}(x)$ em azul) e sua soma ($y(x)$ em vermelho). O ponto $A$ ilustra que a série de potências foi centrada em $x = 0$.

Figura 3.2.1: Gráfico das soluções básicas ($y_0(x) = \cos(x)$ em verde e $y_1(x) = \operatorname{sen}(x)$ em azul) e sua soma ($y(x)$ em vermelho). Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

## 3.3 Séries de potências na resolução de equações diferenciais: cosseno e seno hiperbólicos

**Exercício 9.** *Resolver a equação diferencial*

$$y''(x) - y(x) = 0, \tag{3.3.1}$$

*usando uma série de potências centrada em* $x_0 = 0$.

### 3.3.1 Solução

Quer-se encontrar a solução de (3.3.1) na forma de uma série de potências:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n + \cdots . \tag{3.3.2}$$

Assume-se que a série em (3.3.2) seja convergente com algum raio de convergência $R > 0$. Derivando (3.3.2) tem-se:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1}. \tag{3.3.3}$$

Derivando (3.3.3) segue

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}. \tag{3.3.4}$$

Substituindo (3.3.2) e (3.3.4) em (3.3.1) encontra-se

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0. \tag{3.3.5}$$

Como os inícios dos índices dos somatórios são diferentes, executa-se uma troca de variável simultânea em (3.3.5):

$$\text{primeira série: } k = n-2 \to n = k+2, \text{ se } n = 2, \text{ então } k = 0,$$

$$\text{segunda serie: } k = n \to n = k, \text{ se } n = 0, \text{ então } k = 0.$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) C_{k+2} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = 0. \tag{3.3.6}$$

Neste ponto os dois somatórios em (3.3.6) podem ser unificados:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)C_{k+2} - C_k\right] x^k = 0 = \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^k. \tag{3.3.7}$$

O lado direito da igualdade em (3.3.7) deve ser considerado como o polinômio identicamente nulo para todo $x \in \mathbb{R}$. A partir da igualdade de polinômios, pode-se afirmar que

$$(k+2)(k+1)C_{k+2} - C_k = 0. \tag{3.3.8}$$

A equação (3.3.8) é chamada indicial. A partir dela é possível estabelecer uma lei de recorrência para a sequência $(C_k)$:

$$C_{k+2} = \frac{C_k}{(k+1)(k+2)}. \tag{3.3.9}$$

Como estão envolvidos os índices $k$, $k+1$ e $k+2$ a equação de recorrência (3.3.9) se classifica como de segunda ordem.

Avaliando (3.3.9) com $k = 0$ segue:

$$C_2 = \frac{C_0}{1 \cdot 2} = \frac{C_0}{2!}.$$

Avaliando (3.3.9) com $k = 1$ temos:

$$C_3 = \frac{C_1}{2 \cdot 3} = \frac{C_1}{3!}.$$

Da mesma forma, avaliando (3.3.9) com $k = 2, 3, 4, 5$ e utilizando os resultados anteriores encontramos:

$$\begin{aligned}
C_4 &= \frac{C_2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3 \cdot 4} \cdot \frac{C_0}{2!} = \frac{C_0}{4!}, \\
C_5 &= \frac{C_3}{4 \cdot 5} = \frac{1}{4 \cdot 5} \cdot \frac{C_1}{3!} = \frac{C_1}{5!}, \\
C_6 &= \frac{C_4}{5 \cdot 6} = \frac{1}{5 \cdot 6} \cdot \frac{C_0}{4!} = \frac{C_0}{6!}, \\
C_7 &= \frac{C_5}{6 \cdot 7} = \frac{1}{6 \cdot 7} \cdot \frac{C_1}{5!} = \frac{C_1}{7!}.
\end{aligned}$$

Dos resultados anteriores é possível conjecturar dois casos: i) $k = 2n$ (par), então $C_{2k}$ depende de $C_0$ e ii) $k = 2n+1$ (ímpar), então $C_{2k+1}$ depende de $C_1$.

i) $k = 2n$ (par), então $C_{2k}$ depende de $C_0$. Os primeiros coeficientes são:

$$\left( C_0,\ C_2 = \frac{C_0}{2!},\ C_4 = \frac{C_0}{4!},\ C_6 = \frac{C_0}{6!}, \cdots \right).$$

Para a subsequência anterior conjecturamos:

$$C_{2n} = \frac{C_0}{(2n)!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{3.3.10}$$

ii) $k = 2n + 1$ (ímpar), então $C_{2k+1}$ depende de $C_1$. Para os valores ímpares de k: Os primeiros coeficientes são:

$$\left( C_1,\ C_3 = \frac{C_1}{3!},\ C_5 = \frac{C_1}{5!},\ C_7 = \frac{C_1}{7!}, \cdots \right).$$

Para a subsequência anterior conjecturamos:

$$C_{2n+1} = \frac{C_1}{(2n+1)!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{3.3.11}$$

Pode-se reescrever o somatório da equação (3.3.2) utilizando outros dois:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} x^{2n+1}. \tag{3.3.12}$$

Substituindo (3.3.10) e (3.3.11) em (3.3.12) e colocando as constantes $C_0, C_1$ fora dos somatórios encontra-se:

$$y(x) = C_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} + C_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \tag{3.3.13}$$

A função em (3.3.13) é a solução da equação diferencial (3.3.1). Porém, mostraremos que os somatórios em (3.3.13) são as séries de Maclaurin das funções cosseno e seno hiperbólicos.

De fato, a série de Maclaurin da função exponencial é:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots . \tag{3.3.14}$$

Este resultado está demonstrado em vídeo aqui.

Trocando $x$ por $-x$ em (3.3.14) tem-se:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \cdots ,$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots . \tag{3.3.15}$$

A seguir utiliza-se a definição de cosseno hiperbólico e as equações (3.3.14) e (3.3.15):

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right],$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \cdots\right) + \left(1 \cancel{- x} + \frac{x^2}{2!} \cancel{- \frac{x^3}{3!}} + \cdots\right)\right],$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}. \tag{3.3.16}$$

Analogamente, utiliza-se a definição de seno hiperbólico e as equações (3.3.14) e (3.3.15):

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right],$$

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\cancel{1} + x + \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - \left(\cancel{1} - x + \cancel{\frac{x^2}{2!}} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\right],$$

$$\operatorname{senh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \tag{3.3.17}$$

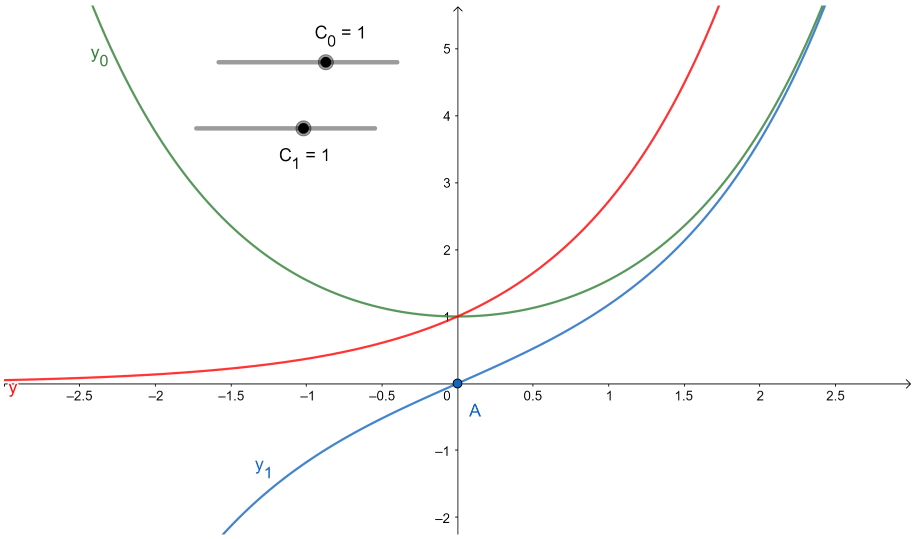
Consequentemente, de (3.3.13), (3.3.16) e (3.3.17) reescreve-se:

$$y(x) = C_0 \cosh(x) + C_1 \operatorname{senh}(x). \tag{3.3.18}$$

O resultado na equação (3.3.18) é o mesmo que seria encontrado usando o método de propor uma solução de (3.3.1) na forma exponencial. Um exercício similar a este está resolvido aqui.

A Figura 3.3.1 mostra os gráficos das soluções básicas ($y_0(x) = \cosh(x)$ em verde e $y_1(x) = \operatorname{senh}(x)$ em azul) e sua soma ($y(x)$ em vermelho). O ponto $A$ ilustra que a série de potências foi centrada em $x = 0$.

Figura 3.3.1: Gráfico das soluções básicas ($y_0(x) = \cosh(x)$ em verde e $y_1(x) = \operatorname{senh}(x)$ em azul) e sua soma ($y(x)$ em vermelho). Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

## 3.4 Equação de Airy

**Exercício 10.** *Resolver a equação diferencial*

$$y''(x) + x \cdot y(x) = 0, \tag{3.4.1}$$

*usando uma série de potências centrada em* $x_0 = 0$.

### 3.4.1 Solução

Do modelo

$$A(x) \cdot y''(x) + B(x) \cdot y'(x) + C(x) \cdot y(x) = 0$$

segue que,

$$A(x) = 1$$

e, portanto, o ponto $x_0 = 0$ se classifica como ordinário. Vídeo explicativo aqui.

Uma série de potências centrada em $x_0 = 0$ pode ser escrita como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x^3 + \cdots, \tag{3.4.2}$$

onde os $C_n$, com $n = 1, 2, \cdots$, são os coeficientes a serem determinados.

Derivando (3.4.2) temos

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} = C_1 + 2 \cdot C_2 \cdot x + 3 \cdot C_3 \cdot x^2 + \cdots . \tag{3.4.3}$$

Derivando (3.4.3) segue

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} = 2 \cdot C_2 + 3 \cdot 2 \cdot C_3 \cdot x + \cdots . \tag{3.4.4}$$

Substituindo (3.4.2) e (3.4.4) em (3.4.1) encontramos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

Coloca-se o $x$ que está multiplicando o segundo somatório para dentro do mesmo:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = 0. \tag{3.4.5}$$

Precisam-se realizar dois passos para juntar os somatórios. Primeiro, as potências iniciais de $x$ devem ser iguais. Segundo, os valores iniciais dos índices dos somatórios devem ser iguais. Vídeo explicativo aqui.

Primeiro passo, as potências iniciais de $x$ devem ser iguais.

$$\text{primeira série: } n = 2 \rightarrow x^{n-2} = x^{2-2} = x^0,$$

$$\text{segunda serie: } n = 0 \rightarrow x^{n+1} = x^{0+1} = x^1.$$

Como a segunda série em (3.4.5) não possui a potência $x^0$, então o termo em que esta aparece na primeira série deve ser removido do somatório

$$2(2-1)C_2 x^0 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = 0. \tag{3.4.6}$$

Segundo passo, os valores iniciais dos índices dos somatórios devem ser iguais. Isto será feito através de uma troca simultânea de variáveis:

$$\text{primeira série: } k = n-2 \rightarrow n = k+2, \text{ se } n = 3, \text{ então } k = 1,$$

$$\text{segunda serie: } k = n+1 \rightarrow n = k-1, \text{ se } n = 0, \text{ então } k = 1.$$

Substituindo-se em (3.4.6) obtém-se:

$$2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)C_{k+2}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}C_{k-1}x^k = 0. \tag{3.4.7}$$

Neste ponto, podemos juntar os somatórios em (3.4.7):

$$2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)C_{k+2} + C_{k-1}\right]\cdot x^k = 0 = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} 0\cdot x^k. \tag{3.4.8}$$

O lado direito da igualdade em (3.4.8) deve ser considerado como o polinômio identicamente nulo para todo $x \in \mathbb{R}$. A partir da igualdade de polinômios, pode-se afirmar que

$$C_2 = 0 \tag{3.4.9}$$

e também

$$(k+1)(k+2)C_{k+2} + C_{k-1} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{3.4.10}$$

A equação (3.4.10) é chamada indicial. A partir dela e de (3.4.9) é possível estabelecer uma lei de recorrência para a sequência $(C_k)$:

$$C_{k+2} = -\frac{C_{k-1}}{(k+1)(k+2)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{3.4.11}$$

Como estão envolvidos os índices $k-1$, $k$, $k+1$ e $k+2$ a equação de recorrência (3.4.11) se classifica como de terceira ordem.

Avaliando (3.4.11) com $k = 1$ segue:

$$C_3 = -\frac{C_0}{2\cdot 3}.$$

Avaliando (3.4.11) com $k = 2$ temos:

$$C_4 = -\frac{C_1}{3\cdot 4}.$$

Da mesma forma, avaliando (3.4.11) com $k = 3, 4, 5, 6, 7$ e utilizando os resultados anteriores encontramos:

$$C_5 = -\frac{C_2}{4\cdot 5} = 0,$$

$$C_6 = -\frac{C_3}{5\cdot 6} = -\frac{1}{5\cdot 6}\cdot\frac{-C_0}{2\cdot 3} = \frac{C_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}$$

$$C_7 = -\frac{C_4}{6\cdot 7} = -\frac{1}{6\cdot 7}\cdot\frac{-C_1}{3\cdot 4} = \frac{C_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

$$C_8 = -\frac{C_5}{7 \cdot 8} = 0,$$

$$C_9 = -\frac{C_6}{8 \cdot 9} = -\frac{C_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}$$

Deixamos os denominadores sem calcular para facilitar a análise de três casos: i) $k$ deixa resto 0 na divisão por 3 ($k$ é múltiplo de 3) ou $k = 3n$, então $C_{3n}$ depende de $C_0$, ii) $k$ deixa resto 1 na divisão por 3 ou $k = 3n + 1$, então $C_{3n+1}$ depende de $C_1$ e iii) $k$ deixa resto 2 na divisão por 3 ou $k = 3n + 2$, então $C_{3n+2} = 0$.

i) $k = 3n$, então $C_{3n}$ depende de $C_0$. Os primeiros coeficientes são:

$$\left(C_0,\ C_3 = -\frac{C_0}{2 \cdot 3},\ C_6 = \frac{C_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6},\ C_9 = -\frac{C_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}, \cdots\right)$$

Para a subsequência anterior conjecturamos:

$$C_{3n} = \frac{(-1)^n C_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3n-1)(3n)},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n = 1, 2, \cdots . \tag{3.4.12}$$

ii) $k = 3n + 1$, então $C_{3n+1}$ depende de $C_1$. Os primeiros coeficientes são:

$$\left(C_1,\ C_4 = -\frac{C_1}{3 \cdot 4},\ C_7 = \frac{C_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7},\ C_{10} = -\frac{C_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}, \cdots\right)$$

Para a subsequência anterior conjecturamos:

$$C_{3n+1} = \frac{(-1)^n C_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3n)(3n+1)},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n = 1, 2, \cdots . \tag{3.4.13}$$

iii) $k = 3n + 2$, então $C_{3n+2} = 0$. Os primeiros coeficientes são:

$$(C_2 = 0,\ C_5 = 0,\ C_8 = 0,\ C_{11} = 0, \cdots)$$

Para a subsequência anterior conjecturamos:

$$C_{3n+2} = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n = 0, 1, \cdots . \tag{3.4.14}$$

Pode-se reescrever o somatório da equação (3.4.2) utilizando outros três:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{3n} x^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{3n+1} x^{3n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{3n+2} x^{3n+2}. \tag{3.4.15}$$

Substituindo (3.4.12), (3.4.13) e (3.4.14) em (3.4.15) e colocando os termos de ordem zero

$(n = 0)$ fora dos somatórios, obtém-se:

$$y(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n C_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3n-1)(3n)} x^{3n} \right] +$$

$$+C_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n C_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3n)(3n+1)} x^{3n+1} \right].$$

Colocam-se os coeficientes $C_0$ e $C_1$ em evidência, fora dos somatórios:

$$y(x) = C_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3n-1)(3n)} x^{3n} \right] +$$

$$+C_1 \left[ x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3n)(3n+1)} x^{3n+1} \right].$$

Ou por extenso

$$y(x) = C_0 \left[ 1 - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \cdots \right] + C_1 \left[ x - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \cdots \right]$$

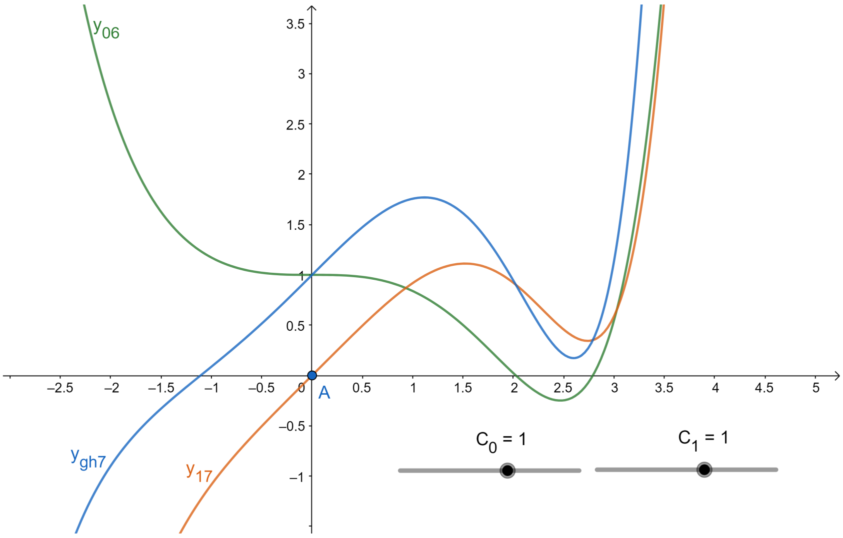
Têm-se então uma solução geral para a equação diferencial homogênea (3.4.1) da forma:

$$y_{gh}(x) = C_0 y_0(x) + C_1 y_1(x), \ \forall x \in \mathbb{R},$$

onde $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$. Este exercício também está resolvido em três vídeos iniciando aqui.

A Figura 3.4.1 mostra os gráficos das soluções básicas ($y_{06}$ em verde e $y_{17}$ laranja) e sua soma ($y_{gh7}$ azul) utilizando os três primeiros somando de cada série. O ponto $A$ ilustra que a série de potências foi centrada em $x = 0$.

Figura 3.4.1: Gráfico das soluções básicas ($y_{06}$ em verde e $y_{17}$ laranja) e sua soma ($y_{gh7}$ azul) utilizando os três primeiros somando de cada série. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

## 3.5 Equação diferencial usando série de potências centrada em $x_0 = 0$ e um parâmetro.

**Exercício 11.** *Seja $k$ uma constante real. Resolver a equação diferencial*

$$y''(x) + k^2x^2y(x) = 0, \tag{3.5.1}$$

*usando uma série de potências centrada em $x_0 = 0$.*

### 3.5.1 Solução

Comparando (3.5.1) com o modelo

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0$$

segue que,

$$A(x) = 1$$

e, portanto, o ponto $x_0 = 0$ se classifica como ordinário. Vídeo explicativo aqui.

Uma série de potências centrada em $x_0 = 0$ pode ser escrita como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n, \tag{3.5.2}$$

onde os $C_n$, com $n = 0, 1, 2, \cdots$ , são os coeficientes a serem determinados.

Assume-se que a série em (3.5.2) seja convergente com algum raio de convergência $R_1 > 0$. Derivando (3.5.2) temos

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}. \tag{3.5.3}$$

Novamente, assume-se que a série em (3.5.3) seja convergente com algum raio de convergência $R_2 > 0$. Derivando (3.5.3) segue

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}. \tag{3.5.4}$$

Substituindo (3.5.2) e (3.5.4) em (3.5.1) encontramos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + k^2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

Coloca-se o $k^2x^2$ que está multiplicando o segundo somatório para dentro do mesmo:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} k^2 C_n x^{n+2} = 0. \tag{3.5.5}$$

Precisam-se realizar dois passos para juntar os somatórios. Primeiro, as potências iniciais de $x$ devem ser iguais. Segundo, os valores iniciais dos índices dos somatórios devem ser iguais. Vídeo explicativo aqui.

Primeiro passo, as potências iniciais de $x$ devem ser iguais.

$$\text{primeira série: } n = 2 \rightarrow x^{n-2} = x^{2-2} = x^0,$$

$$\text{segunda serie: } n = 0 \rightarrow x^{n+2} = x^{0+2} = x^2.$$

Como a segunda série em (3.5.5) não possui as potências $x^0$ e $x^1$, então os termos em que estas aparecem na primeira série devem ser removidos do somatório

$$2(2-1)C_2x^0 + 3(3-1)C_3x^1 + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} k^2 C_n x^{n+2} = 0. \tag{3.5.6}$$

Segundo passo, os valores iniciais dos índices dos somatórios devem ser iguais. Isto será feito através de uma troca simultânea de variáveis:

$$\text{primeira série: } j = n - 2 \to n = j + 2, \text{ se } n = 4, \text{ então } j = 2,$$

$$\text{segunda serie: } j = n + 2 \to n = j - 2, \text{ se } n = 0, \text{ então } j = 2.$$

Substituindo-se em (3.5.6) obtém-se:

$$2C_2 + 6C_3x + \sum_{j=2}^{\infty}(j+2)(j+1)C_{j+2}x^j + \sum_{j=2}^{\infty}k^2C_{j-2}x^j = 0. \tag{3.5.7}$$

Neste ponto, podemos juntar os somatórios em (3.5.7):

$$2C_2 + 6C_3x + \sum_{j=2}^{\infty}\left[(j+2)(j+1)C_{j+2} + k^2C_{j-2}\right]x^j = 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + \sum_{j=2}^{\infty} 0 \cdot x^j. \tag{3.5.8}$$

O lado direito da igualdade em (3.5.8) deve ser considerado como o polinômio identicamente nulo para todo $x \in \mathbb{R}$. A partir da igualdade de polinômios, pode-se afirmar que

$$C_2 = 0, \; C_3 = 0, \tag{3.5.9}$$

e também

$$(j+2)(j+1)C_{j+2} + k^2C_{j-2} = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad j = 2, 3, \cdots. \tag{3.5.10}$$

A equação (3.5.10) é chamada indicial. A partir dela e de (3.5.9) é possível estabelecer uma lei de recorrência para a sequência $(C_j)$:

$$C_{j+2} = -\frac{k^2C_{j-2}}{(j+1)(j+2)}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad j = 2, 3, \cdots. \tag{3.5.11}$$

Como estão envolvidos os índices $j-2$, $j-1$, $j$, $j+1$ e $j+2$ a equação de recorrência (3.5.11) se classifica como de quarta ordem.

Avaliando (3.5.11) com $j = 2$ segue:

$$C_4 = -\frac{k^2C_0}{3 \cdot 4}.$$

Avaliando (3.5.11) com $j = 3$ temos:

$$C_5 = -\frac{k^2C_1}{4 \cdot 5}.$$

Da mesma forma, avaliando (3.5.11) com $j = 4, 5, \cdots, 13$ e utilizando os resultados anteriores encontramos:

$$C_6 = -\frac{k^2 C_2}{5 \cdot 6} = 0,$$

$$C_7 = -\frac{k^2 C_3}{6 \cdot 7} = 0,$$

$$C_8 = -\frac{k^2 C_4}{7 \cdot 8} = -\frac{k^2}{7 \cdot 8} \cdot (-1)\frac{k^2 C_0}{3 \cdot 4} = \frac{k^4 C_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8},$$

$$C_9 = -\frac{k^2 C_5}{8 \cdot 9} = -\frac{k^2}{8 \cdot 9} \cdot (-1)\frac{k^2 C_1}{4 \cdot 5} = \frac{k^4 C_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9},$$

$$C_{10} = -\frac{k^2 C_6}{9 \cdot 10} = 0,$$

$$C_{11} = -\frac{k^2 C_7}{10 \cdot 11} = 0.$$

$$C_{12} = -\frac{k^2 C_8}{11 \cdot 12} = -\frac{k^2}{11 \cdot 12} \cdot \frac{k^4 C_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} = -\frac{k^6 C_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12},$$

$$C_{13} = -\frac{k^2 C_9}{12 \cdot 13} = -\frac{k^2}{12 \cdot 13} \cdot \frac{k^4 C_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} = -\frac{k^6 C_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13},$$

$$C_{14} = -\frac{k^2 C_{10}}{13 \cdot 14} = 0,$$

$$C_{15} = -\frac{k^2 C_{11}}{14 \cdot 15} = 0.$$

Deixamos os denominadores sem calcular para facilitar a análise de quatro casos: i) $j$ deixa resto 0 na divisão por 4 ($j$ é múltiplo de 4) ou $j = 4n$, então $C_{4n}$ depende de $C_0$, ii) $j$ deixa resto 1 na divisão por 4 ou $j = 4n + 1$, então $C_{4n+1}$ depende de $C_1$, iii) $j$ deixa resto 2 na divisão por 4 ou $j = 4n + 2$, então $C_{4n+2} = 0$ e iv) $j$ deixa resto 3 na divisão por 4 ou $j = 4n + 3$, então $C_{4n+3} = 0$.

i) $j = 4n$, então $C_{4n}$ depende de $C_0$. Os primeiros coeficientes são:

$$\left( C_0,\ C_4 = -\frac{k^2 C_0}{3 \cdot 4},\ C_8 = \frac{k^4 C_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8}, C_{12} = -\frac{k^6 C_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12}, \cdots \right)$$

Para a subsequência anterior conjecturamos:

$$C_{4n} = \frac{(-1)^n k^{2n} C_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdots (4n-1)(4n)},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n = 1, 2, \cdots. \tag{3.5.12}$$

ii) $j = 4n + 1$, então $C_{4n+1}$ depende de $C_1$. Os primeiros coeficientes são:

$$\left( C_1,\ C_5 = -\frac{k^2 C_1}{4 \cdot 5},\ C_9 = \frac{k^4 C_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9},\ C_{13} = -\frac{k^6 C_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13}, \cdots \right)$$

Para a subsequência anterior conjecturamos:

$$C_{4n+1} = \frac{(-1)^n k^{2n} C_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdots (4n)(4n+1)}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n = 1, 2, \cdots . \tag{3.5.13}$$

iii) $j = 4n + 2$, então $C_{4n+2} = 0$. Os primeiros coeficientes são:

$$(C_2 = 0, \ C_6 = 0, \ C_{10} = 0, \ C_{14} = 0, \cdots)$$

Para a subsequência anterior conjecturamos:

$$C_{4n+2} = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n = 0, 1, \cdots . \tag{3.5.14}$$

iv) $j = 4n + 3$, então $C_{4n+2} = 0$. Os primeiros coeficientes são:

$$(C_3 = 0, \ C_7 = 0, \ C_{11} = 0, \ C_{15} = 0, \cdots)$$

Para a subsequência anterior conjecturamos:

$$C_{4n+2} = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n = 0, 1, \cdots . \tag{3.5.15}$$

Pode-se reescrever o somatório da equação (3.5.2) utilizando outros quatro:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{4n} x^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{4n+1} x^{4n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{4n+2} x^{4n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{4n+3} x^{4n+3}. \tag{3.5.16}$$

Substituindo (3.5.12), (3.5.13), (3.5.14) e (3.5.15) em (3.5.16) e colocando $C_0$ e $C_1$ fora dos somatórios, obtém-se:

$$y(x) = C_0 \underbrace{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k^{2n} x^{4n}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdots (4n-1)(4n)}}_{y_0(x)} +$$

$$+C_1 \underbrace{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k^{2n} x^{4n+1}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdots (4n)(4n+1)}}_{y_1(x)} .$$

Têm-se então para $k \neq 0$ uma solução geral para a equação diferencial homogênea (3.5.1) da forma:

$$y_{gh}(x) = C_0 y_0(x) + C_1 y_1(x), \ \forall x \in \mathbb{R},$$

onde $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$.

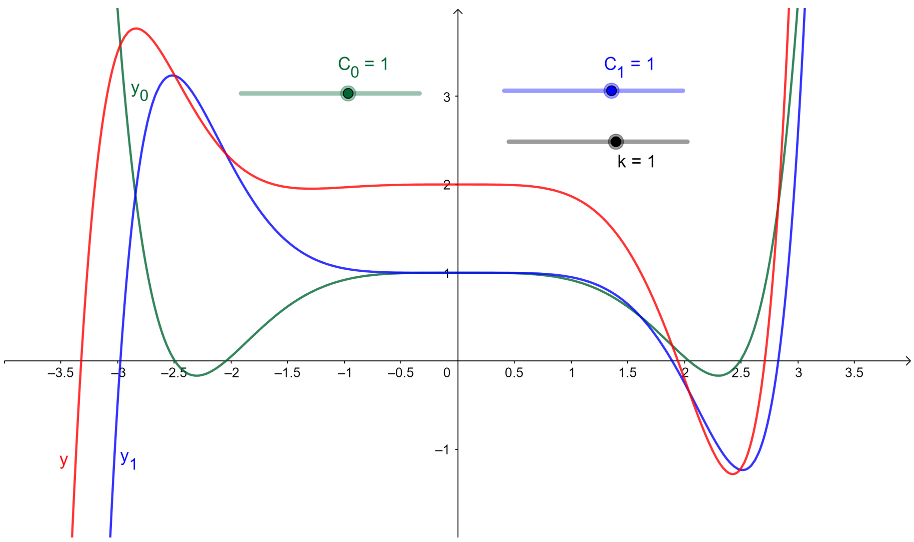
Podem-se escrever de forma explícita aproximações das funções $y_0$ e $y_1$ tomando, por exemplo, termos dos somatórios até $n = 2$ :

$$y_0(x) \approx 1 - \frac{k^2x^4}{12} + \frac{k^4x^8}{672},$$

$$y_1(x) \approx 1 - \frac{k^2x^5}{20} + \frac{k^4x^9}{1440}.$$

A Figura 3.5.1 mostra os gráficos das aproximações anteriores para $k = 1$ (em verde e azul) e sua soma (vermelho).

Figura 3.5.1: Gráfico das aproximações para $k = 1$ das funções $y_0$ e $y_1$ tomando termos dos somatórios até $n = 2$ :. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

No caso em que $k = 0$ a equação diferencial (3.5.1) se reduz a

$$y''(x) = 0,$$

cuja solução é

$$y_{gh}(x) = C_0 + C_1 x, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

onde $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$. Um exercício análogo está resolvido em três vídeos iniciando aqui.

## 3.6 Equação diferencial usando série de potências centrada em $x_0 \neq 0$.

**Exercício 12.** *Resolver a equação diferencial*

$$y''(x) - xy'(x) - y(x) = 0, \tag{3.6.1}$$

*usando uma série de potências centrada em* $x_0 = 1$.

### 3.6.1 Solução

Comparando (3.6.1) com o modelo

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0$$

segue que,

$$A(x) = 1$$

e, portanto, o ponto $x_0 = 1$ se classifica como ordinário. Vídeo explicativo aqui.

Uma série de potências centrada em $x_0 = 1$ pode ser escrita como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-1)^n, \tag{3.6.2}$$

onde os $C_n$, com $n = 0, 1, 2, \cdots$ , são os coeficientes a serem determinados.

Assume-se que a série em (3.6.2) seja convergente com algum raio de convergência $R_1 > 0$. Derivando (3.6.2) temos

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n (x-1)^{n-1}. \tag{3.6.3}$$

Novamente, assume-se que a série em (3.6.3) seja convergente com algum raio de convergência $R_2 > 0$. Derivando (3.6.3) segue

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n (x-1)^{n-2}. \tag{3.6.4}$$

Substituindo (3.6.2), (3.6.3) e (3.6.4) em (3.6.1) encontramos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n (x-1)^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} nC_n (x-1)^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-1)^n = 0.$$

Trocamos o $x$ que antecede o segundo somatório pelo valor equivalente

$(x-1)+1$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n(x-1)^{n-2} - [(x-1)+1]\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-1)^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-1)^n = 0.$$

No próximo passo o segundo somatório separa em outros dois:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n(x-1)^{n-2} - (x-1)\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-1)^{n-1} -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-1)^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-1)^n = 0.$$

Coloca-se o $(x-1)$ que está multiplicando o segundo somatório para dentro do mesmo:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n(x-1)^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-1)^n - \\ -\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-1)^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-1)^n = 0. \end{aligned} \tag{3.6.5}$$

Precisam-se realizar dois passos para juntar os somatórios. Primeiro, as potências iniciais de $(x-1)$ devem ser iguais. Segundo, os valores iniciais dos índices dos somatórios devem ser iguais. Vídeo explicativo aqui.

Primeiro passo, as potências iniciais de $(x-1)$ devem ser iguais.

$$\text{primeira série: } n=2 \to (x-1)^{n-2} \to (x-1)^0,$$

$$\text{segunda serie: } n=1 \to (x-1)^{n} \to (x-1)^1,$$

$$\text{terceira serie: } n=1 \to (x-1)^{n-1} \to (x-1)^0,$$

$$\text{quarta serie: } n=0 \to (x-1)^{n} \to (x-1)^0.$$

Como as primeira, terceira e quarta série em (3.6.5) não possuem as potências $(x-1)^0$, então os termos em que estas aparecem devem ser removidos dos somatórios respectivos

$$\begin{aligned} 2C_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)C_n(x-1)^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-1)^n - \\ -C_1 - \sum_{n=2}^{\infty} nC_n(x-1)^{n-1} - C_0 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x-1)^n = 0. \end{aligned} \tag{3.6.6}$$

Segundo passo, os valores iniciais dos índices dos somatórios devem ser iguais. Isto será

feito através de uma troca simultânea de variáveis:

$$\text{primeira série: } j = n-2 \to n = j+2, \text{ se } n = 3, \text{ então } j = 1,$$

$$\text{segunda serie: } j = n \to n = j, \text{ se } n = 1, \text{ então } j = 1,$$

$$\text{terceira série: } j = n-1 \to n = j+1, \text{ se } n = 2, \text{ então } j = 1,$$

$$\text{quarta serie: } j = n \to n = j, \text{ se } n = 1, \text{ então } j = 1.$$

Substituindo-se em (3.6.6) obtém-se:

$$\begin{aligned}(2C_2 - C_1 - C_0) + \sum_{j=1}^{\infty}(j+2)(j+1)C_{j+2}(x-1)^j - \sum_{j=1}^{\infty} jC_j(x-1)^j - \\ - \sum_{j=1}^{\infty}(j+1)C_{j+1}(x-1)^j - \sum_{j=1}^{\infty} C_j(x-1)^j = 0.\end{aligned} \tag{3.6.7}$$

Neste ponto, podemos juntar os somatórios em (3.6.7):

$$\begin{aligned}(2C_2 - C_1 - C_0) + \\ + \sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\left[(j+2)C_{j+2} - C_j - C_{j+1}\right](x-1)^j = 0.\end{aligned} \tag{3.6.8}$$

O lado direito da igualdade em (3.6.8) deve ser considerado como o polinômio de $(x-1)$ identicamente nulo para todo $x \in \mathbb{R}$. A partir da igualdade de polinômios, pode-se afirmar que

$$2C_2 - C_1 - C_0 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{C_0 + C_1}{2}, \tag{3.6.9}$$

e também

$$(j+2)C_{j+2} - C_j - C_{j+1} = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, 3, \cdots. \tag{3.6.10}$$

A equação (3.6.10) é chamada indicial. A partir dela e de (3.6.9) é possível estabelecer uma lei de recorrência para a sequência $(C_j)$:

$$C_{j+2} = \frac{C_j + C_{j+1}}{j+2}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, 3, \cdots. \tag{3.6.11}$$

Como estão envolvidos os índices $j$, $j+1$ e $j+2$ a equação de recorrência (3.6.11) se classifica como de segunda ordem.

Avaliando (3.6.11) com $j = 1$ segue:

$$C_3 = \frac{C_1 + C_2}{3} \overset{(9)}{=} \frac{C_1 + \frac{C_0 + C_1}{2}}{3} = \frac{C_0 + 3C_1}{6}. \tag{3.6.12}$$

Avaliando (3.6.11) com $j = 2$ temos:

$$C_4 = \frac{C_2 + C_3}{4} = \frac{\frac{C_0+C_1}{2} + \frac{C_0+3C_1}{6}}{4} = \frac{2C_0 + 3C_1}{12}. \tag{3.6.13}$$

Da mesma forma, avaliando (3.6.11) com $j = 3$ e utilizando os resultados anteriores encontramos:

$$C_5 = \frac{C_3 + C_4}{5} = \frac{\frac{C_0+3C_1}{6} + \frac{2C_0+3C_1}{12}}{5} = \frac{4C_0 + 9C_1}{60}. \tag{3.6.14}$$

Como a equação diferencial homogênea (3.6.1) é de segunda ordem a solução geral deve ter a forma:

$$y_{gh}(x) = C_0 y_0(x) + C_1 y_1(x), \ \forall x \in \mathbb{R},$$

onde $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$.

Têm dois casos: i) para encontrar $y_0(x)$ coloca-se $C_1 = 0$ em (3.6.9), (3.6.12), (3.6.13) e (3.6.14) e ii) para encontrar $y_1(x)$ coloca-se $C_0 = 0$ em (3.6.9), (3.6.12), (3.6.13) e (3.6.14).

i) Para encontrar $y_0(x)$ coloca-se $C_1 = 0$ em (3.6.9), (3.6.12), (3.6.13) e (3.6.14):

$$\left( C_0,\, C_1 = 0,\, C_2 = \frac{C_0}{2},\, C_3 = \frac{C_0}{6},\, C_4 = \frac{C_0}{6},\, C_5 = \frac{C_0}{15}, \cdots \right).$$

Retornando com os $C_n$ em (3.6.2) tem-se:

$$y_0(x) = C_0 \left[ 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4 + \frac{1}{15}(x-1)^5 + \cdots \right].$$

ii) Para encontrar $y_1(x)$ coloca-se $C_0 = 0$ em (3.6.9), (3.6.12), (3.6.13) e (3.6.14):

$$\left( C_0 = 0,\, C_1,\, C_2 = \frac{C_1}{2},\, C_3 = \frac{C_1}{2},\, C_4 = \frac{C_1}{4},\, C_5 = \frac{3C_1}{20}, \cdots \right).$$

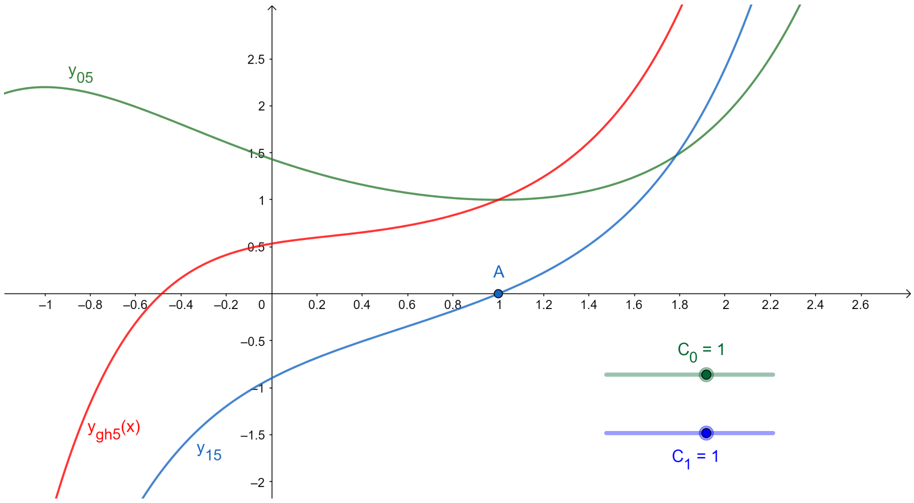
Retornando com os $C_n$ em (3.6.2) tem-se:

$$y_1(x) = C_1 \left[ (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{3}{20}(x-1)^5 + \cdots \right].$$

Pode ser provado que as funções $y_0(x)$ e $y_1(x)$ encontradas anteriormente são linearmente independentes. Este exercício está resolvido em dois vídeos iniciando aqui.

A Figura 3.6.1 mostra os gráficos das soluções básicas (em verde e azul) e sua soma (vermelho) até quinta ordem. O ponto $A$ ilustra que a série de potências foi centrada em $x = 1$.

Figura 3.6.1: Gráfico das soluções básicas (em verde e azul) e sua soma (vermelho) até quinta ordem. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

## 3.7 Equação diferencial usando série de potências centrada em $x_0 = 0$. Exemplo II.

**Exercício 13.** *Resolver a equação diferencial*

$$y''(x) - (1 + x)y(x) = 0 \tag{3.7.1}$$

*usando uma série de potências centrada em* $x_0 = 0$.

### 3.7.1 Solução

Comparando (3.7.1) com o modelo

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0$$

segue que,

$$A(x) = 1$$

e, portanto, o ponto $x_0 = 0$ se classifica como ordinário. Vídeo explicativo aqui.

Uma série de potências centrada em $x_0 = 0$ pode ser escrita como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n, \tag{3.7.2}$$

onde os $C_n$, com $n = 0, 1, 2, \cdots$ , são os coeficientes a serem determinados. Assume-se que a série em (3.7.2) seja convergente com algum raio de convergência $R_1 > 0$. Derivando (3.7.2) temos

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}. \tag{3.7.3}$$

Novamente, assume-se que a série em (3.7.3) seja convergente com algum raio de convergência $R_2 > 0$. Derivando (3.7.3) segue

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}. \tag{3.7.4}$$

Substituindo (3.7.2) e (3.7.4) em (3.7.1) encontramos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0.$$

Coloca-se o $x$ que está multiplicando o terceiro somatório para dentro do mesmo:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = 0. \tag{3.7.5}$$

Precisam-se realizar dois passos para juntar os somatórios. Primeiro, as potências iniciais de $x$ devem ser iguais. Segundo, os valores iniciais dos índices dos somatórios devem ser iguais. Vídeo explicativo aqui.

Primeiro passo, as potências iniciais de $x$ devem ser iguais.

$$\text{primeira série: } n = 2 \rightarrow x^{n-2} \rightarrow x^0,$$

$$\text{segunda serie: } n = 0 \rightarrow x^n \rightarrow x^0,$$

$$\text{terceira serie: } n = 0 \rightarrow x^{n+1} \rightarrow x^1.$$

Como a terceira série em (3.7.5) não possui a potência $x^0$, então esta deve ser removida do primeiro e segundo somatório:

$$\begin{split} 2C_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} - C_0 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = 0. \end{split} \tag{3.7.6}$$

Segundo passo, os valores iniciais dos índices dos somatórios devem ser iguais. Isto será

feito através de uma troca simultânea de variáveis:

$$\text{primeira série: } j = n - 2 \to n = j + 2, \text{ se } n = 3, \text{ então } j = 1,$$

$$\text{segunda serie: } j = n \to n = j, \text{ se } n = 1, \text{ então } j = 1,$$

$$\text{terceira série: } j = n + 1 \to n = j - 1, \text{ se } n = 0, \text{ então } j = 1.$$

Substituindo-se em (3.7.6) obtém-se:

$$\begin{aligned}(2C_2 - C_0) + \sum_{j=1}^{\infty}(j+2)(j+1)C_{j+2}x^j - \sum_{j=1}^{\infty} C_j x^j - \\ - \sum_{j=1}^{\infty} C_{j-1}x^j = 0.\end{aligned} \tag{3.7.7}$$

Neste ponto, podemos juntar os somatórios em (3.7.7):

$$\begin{aligned}(2C_2 - C_0) + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \left[(j+2)(j+1)C_{j+2} - C_j - C_{j-1}\right] x^j = 0.\end{aligned} \tag{3.7.8}$$

O lado direito da igualdade em (3.7.8) deve ser considerado como o polinômio de $x$ identicamente nulo para todo $x \in \mathbb{R}$. A partir da igualdade de polinômios, pode-se afirmar que

$$2C_2 - C_0 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{C_0}{2}, \tag{3.7.9}$$

e também

$$(j+2)(j+1)C_{j+2} - C_j - C_{j-1} = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, 3, \cdots . \tag{3.7.10}$$

A equação (3.7.10) é chamada indicial. A partir dela e de (3.7.9) é possível estabelecer uma lei de recorrência para a sequência $(C_j)$:

$$C_{j+2} = \frac{C_{j-1} + C_j}{(j+1)(j+2)}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, 3, \cdots . \tag{3.7.11}$$

Como estão envolvidos os índices $j-1$, $j$, $j+1$ e $j+2$ a equação de recorrência (3.7.11) se classifica como de terceira ordem.

Avaliando (3.7.11) com $j = 1$ segue:

$$C_3 = \frac{C_0 + C_1}{6}. \tag{3.7.12}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Avaliando (3.7.11) com $j = 2$ temos:

$$C_4 = \frac{C_1 + C_2}{12} \overset{(9)}{=} \frac{C_1 + \frac{C_0}{2}}{12} = \frac{C_0 + 2C_1}{24}. \tag{3.7.13}$$

Da mesma forma, avaliando (3.7.11) com $j = 3$ e utilizando os resultados anteriores encontramos:

$$C_5 = \frac{C_2 + C_3}{20} \overset{(9),(12)}{=} \frac{\frac{C_0}{2} + \frac{C_0+C_1}{6}}{20} = \frac{4C_0 + C_1}{120}. \tag{3.7.14}$$

Como a equação diferencial homogênea (3.7.1) é de segunda ordem a solução geral deve ter a forma:

$$y_{gh}(x) = C_0 y_0(x) + C_1 y_1(x), \ \forall x \in \mathbb{R},$$

onde $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$.

Têm dois casos: i) para encontrar $y_0(x)$ coloca-se $C_1 = 0$ em (3.7.12), (3.7.13) e (3.7.14) e ii) para encontrar $y_1(x)$ coloca-se $C_0 = 0$ em (3.7.9), (3.7.12), (3.7.13) e (3.7.14).

i) Para encontrar $y_0(x)$ coloca-se $C_1 = 0$ em (3.7.12), (3.7.13) e (3.7.14):

$$\left( C_0,\, C_1 = 0,\, C_2 = \frac{C_0}{2},\, C_3 = \frac{C_0}{6},\, C_4 = \frac{C_0}{24},\, C_5 = \frac{C_0}{30}, \cdots \right).$$

Retornando com os $C_n$ em (3.7.2) tem-se:

$$y_0(x) = C_0 \left[ 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \cdots \right].$$

ii) Para encontrar $y_1(x)$ coloca-se $C_0 = 0$ em (3.7.9), (3.7.12), (3.7.13) e (3.7.14):

$$\left( C_0 = 0,\, C_1,\, C_2 = 0,\, C_3 = \frac{C_1}{6},\, C_4 = \frac{C_1}{12},\, C_5 = \frac{C_1}{120}, \cdots \right).$$

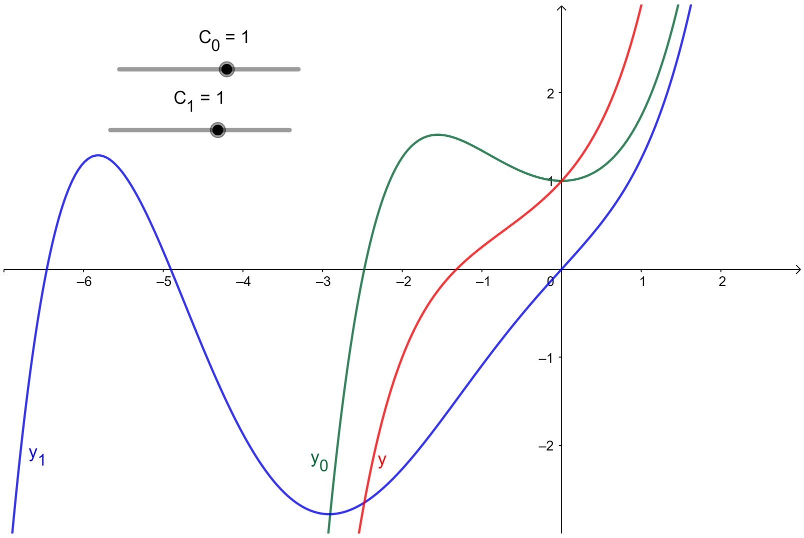
Retornando com os $C_n$ em (3.7.2) tem-se:

$$y_1(x) = C_1 \left[ x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots \right].$$

Pode ser provado que as funções $y_0(x)$ e $y_1(x)$ encontradas anteriormente são linearmente independentes. Um exercício análogo está resolvido em dois vídeos iniciando aqui.

A Figura 3.7.1 mostra os gráficos das soluções básicas (em verde e azul) e sua soma (em vermelho) até quinta ordem.

Figura 3.7.1: Gráfico das soluções básicas (em verde e azul) e sua soma (em vermelho) até quinta ordem. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

# Capítulo 4

# Equação de Cauchy Euler

## 4.1 Apresentação da equação de Cauchy Euler

Uma equação diferencial de segunda ordem, linear e homogênea, da forma

$$a(x-x_0)^2y''(x)+b(x-x_0)y'(x)+cy(x)=0, \tag{4.1.1}$$

onde $a, b, c, x_0$ são números reais conhecidos é denominada de "Cauchy Euler". Em palavras, a potência de $x-x_0$ é a mesma que a ordem da derivada: $(x-x_0)^2$ e $y''(x)$, $(x-x_0)^1$ e $y'(x)$ e $(x-x_0)^0$ e $y(x)$.

Comparando (4.1.1) com o modelo

$$A(x)y''(x)+B(x)y'(x)+C(x)y(x)=0$$

segue que,

$$A(x)=a(x-x_0)^2,$$

e, portanto, o ponto $x=x_0$ se classifica como singular. Vídeo explicativo aqui.

Será discutido em detalhe o caso em que $x_0=0$:

$$ax^2y''(x)+bxy'(x)+cy(x)=0. \tag{4.1.2}$$

Dividindo por $ax^2$ escreve-se (4.1.2) na sua forma padrão:

$$y''(x)+\frac{b}{ax}y'(x)+\frac{c}{ax^2}y(x)=0. \tag{4.1.3}$$

Como no segundo somando de (4.1.3) a potência de $x$ no denominador não é superior a um e no terceiro somando de (4.1.3) a potência de $x$ no denominador não é superior a dois, o ponto $x=0$ da mesma equação se classifica como singular regular. Vídeo explicativo aqui.

Será mostrado que uma mudança de variáveis transforma (4.1.2) em outra equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes, que já sabemos resolver.

Seja $t$ uma função real de variável real positiva $x$ da forma

$$t(x) = \ln(x), \ x > 0. \tag{4.1.4}$$

Tem-se que

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}. \tag{4.1.5}$$

Considera-se a função inversa de (4.1.4):

$$x(t) = e^t. \tag{4.1.6}$$

Adicionalmente, analisa-se a função composta $y(x(t))$ para escrever, com a utilização da regra da cadeia, a primeira derivada de $y$ em relação a $x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x}. \tag{4.1.7}$$

Na última igualdade em (4.1.7) foi substituída a equação (4.1.5). Utilizando (4.1.7) para o cálculo da segunda derivada segue:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right). \tag{4.1.8}$$

Partindo do lado direito de (4.1.8) aplica-se a regra de derivação de um produto:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right). \tag{4.1.9}$$

No segundo somando de (4.1.9) utiliza-se novamente a regra da cadeia:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x}\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right). \tag{4.1.10}$$

De (4.1.5), (4.1.8), (4.1.9) e (4.1.10) segue:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}. \tag{4.1.11}$$

Substituindo (4.1.7) e (4.1.11) em (4.1.2) tem-se:

$$a\cancel{x^2}\left[-\frac{1}{\cancel{x^2}}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\cancel{x^2}}\frac{d^2y}{dt^2}\right] + b\cancel{x}\left[\frac{1}{\cancel{x}}\frac{dy}{dt}\right] + cy(x(t)) = 0. \tag{4.1.12}$$

Simplificando (4.1.12) obtêm-se:

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + (b-a)\frac{dy}{dt} + cy(t) = 0. \tag{4.1.13}$$

A equação (4.1.13) também pode ser escrita como:

$$ay''(t) + (b-a)y'(t) + cy(t) = 0. \tag{4.1.14}$$

Ou seja, uma equação diferencial de segunda ordem, linear e homogênea, com coeficientes constantes. A mesma pode ser resolvida analiticamente pelos métodos estudados previamente nos cursos de Cálculo.

De fatos, têm-se três casos.

i) A solução geral é da forma

$$y(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}, \tag{4.1.15}$$

onde $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$ e $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

ii) A solução geral é da forma

$$y(t) = C_1e^{rt} + C_2te^{rt}, \tag{4.1.16}$$

onde $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$ e $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

iii) A solução geral é da forma

$$y(t) = e^{\alpha t}\left[C_1\cos\beta t + C_2\,\mathrm{sen}\beta t\right], \tag{4.1.17}$$

onde $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ e $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Pelas propriedades das funções exponenciais e logarítmica e a equação (4.1.4) pode-se escrever:

$$e^{rt} = e^{r\ln x} = e^{\ln x^r} = x^r. \tag{4.1.18}$$

Com a utilização das equações (4.1.4) e (4.1.18) podem-se reescrever em função de $x$ os três tipos de solução. Ou seja, (4.1.16), (4.1.17) e (4.1.18) como segue.

Tipo I) A solução geral de (4.1.2) é da forma

$$y_{gh}(x) = C_1x^{r_1} + C_2x^{r_2},\ x > 0,$$

onde $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$ e $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Tipo II) A solução geral de (4.1.2) é da forma

$$y_{gh}(x) = C_1 x^r + C_2 x^r \ln x,\ x > 0,$$

onde $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$ e $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Tipo III) A solução geral de (4.1.2) é da forma

$$y_{gh}(x) = x^\alpha \left[C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta \ln x)\right],\ x > 0,$$

onde $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ e $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Operacionalmente, para resolver (4.1.2) deve-se começar propondo a existência de uma solução da forma:

$$y(x) = x^r, \tag{4.1.19}$$

onde $r$ é um coeficiente indeterminado.

Derivando (4.1.19) tem-se:

$$y'(x) = rx^{r-1}. \tag{4.1.20}$$

Da mesma forma, derivando (4.1.20) encontra-se:

$$y''(x) = r(r-1)x^{r-2}. \tag{4.1.21}$$

Substituindo (4.1.19), (4.1.20) e (4.1.21) em (4.1.2) segue:

$$ar(r-1)x^{\cancel{2}}x^{r-\cancel{2}} + brx^{\cancel{1}}x^{r-\cancel{1}} + cx^r = 0. \tag{4.1.22}$$

Em (4.1.22) simplificam-se as potências de $x$ e coloca-se $x^r$ em evidência:

$$x^r \left[ar(r-1) + br + c\right] = 0. \tag{4.1.23}$$

Como $x > 0$, então $x^r \neq 0$. A equação (4.1.23) leva a:

$$ar(r-1) + br + c = 0. \tag{4.1.24}$$

A equação (4.1.24) é quadrática em $r$ e denominada auxiliar de (4.1.2). Dependendo dos valores de $r$ encontrados acontece a classificação nos três tipos. Para encontrar uma solução para valores negativos de $x$ basta trocar, em todas as equações, $x$ por $|x|$. Três vídeos com conteúdo relativo a equação de Cauchy Euler iniciam-se aqui.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

## 4.2 Equação de Cauchy Euler. Tipo-III.

**Exercício 14.** *Resolver a equação diferencial*

$$x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0. \tag{4.2.1}$$

### 4.2.1 Solução

Uma equação diferencial de segunda ordem da forma

$$a(x - x_0)^2y''(x) + b(x - x_0)y'(x) + cy(x) = 0,$$

onde $a, b, c, x_0$ são números reais conhecidos é denominada de "Cauchy Euler". Segue que esse é o caso de (4.2.1) com $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ e $x_0 = 0$. A dedução dos tipos de soluções numa equação de "Cauchy Euler" encontra-se aqui.

Procura-se solução para $x > 0$ da forma:

$$y(x) = x^r, \tag{4.2.2}$$

onde $r$ é um coeficiente a ser determinado.

Derivando (4.2.2) tem-se:

$$y'(x) = rx^{r-1}. \tag{4.2.3}$$

Da mesma forma, derivando (4.2.3) encontra-se:

$$y''(x) = r(r-1)x^{r-2}. \tag{4.2.4}$$

Substituindo (4.2.2), (4.2.3) e (4.2.4) em (4.2.1) segue:

$$r(r-1)x^{\cancel{2}}x^{r-\cancel{2}} + rx^{\cancel{1}}x^{r-\cancel{1}} + x^r = 0. \tag{4.2.5}$$

Em (4.2.5) simplificam-se as potências de $x$ e coloca-se $x^r$ em evidência:

$$x^r\left[r(r-1) + r + 1\right] = 0. \tag{4.2.6}$$

Como $x > 0$, então $x^r \neq 0$. A equação (4.2.6) leva a:

$$r(r-1) + r + 1 = 0,$$

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1. \tag{4.2.7}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

A equação (4.2.7) é quadrática em $r$ e denominada auxiliar de (4.2.1). As raízes são

$$r_{1,2} = 0 \pm i = \alpha \pm \beta i.$$

Ou seja, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Este é o tipo III com $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$. A solução geral de (4.2.1) é:

$$y_{gh}(x) = x^{\alpha}\left[C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta \ln x)\right],$$

$$y_{gh}(x) = \cancelto{1}{x^0}\left[C_1 \cos(\ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x)\right],$$

$$y_{gh}(x) = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > 0, \tag{4.2.8}$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

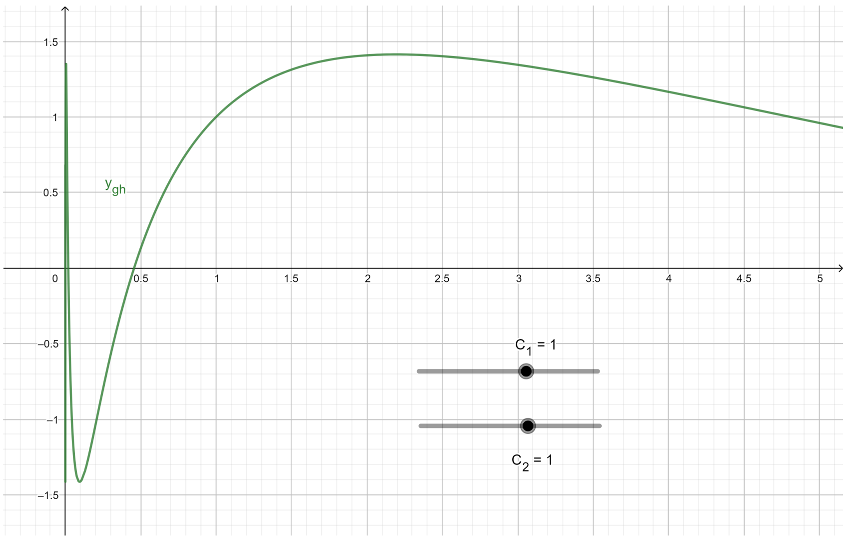
Em geral, para $x \neq 0$ a equação (4.2.8) pode ser reescrita como:

$$y_{gh}(x) = C_1 \cos(\ln|x|) + C_2 \operatorname{sen}(\ln|x|),\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Este exercício está resolvido em vídeo aqui.

A Figura 4.2.1 mostra o gráfico da função $y_{gh}(x)$ em (4.2.8) com $C_1 = 1$ e $C_2 = 1$.

Figura 4.2.1: Gráfico da solução do exercício com $C_1 = 1$ e $C_2 = 1$. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

## 4.3 Problema de valor inicial. Equação de Cauchy Euler. Tipo-I.

**Exercício 15.** *Resolver o problema de valor inicial*

$$2x^2y''(x) + xy'(x) - 3y(x) = 0, \tag{4.3.1}$$

$y(1) = 1$ *e* $y'(1) = 4$.

### 4.3.1 Solução

Uma equação diferencial de segunda ordem da forma

$$a(x - x_0)^2y''(x) + b(x - x_0)y'(x) + cy(x) = 0,$$

onde $a, b, c, x_0$ são números reais conhecidos é denominada de “Cauchy Euler”. Segue que esse é o caso de (4.3.1) com $a = 2$, $b = 1$, $c = -3$ e $x_0 = 0$. A dedução dos tipos de soluções numa equação de “Cauchy Euler” se encontra aqui.

Como as condições iniciais foram dadas em $x = 1$ procura-se solução para $x > 0$ da forma:

$$y(x) = x^r, \tag{4.3.2}$$

onde $r$ é um coeficiente a ser determinado.

Derivando (4.3.2) tem-se:

$$y'(x) = rx^{r-1}. \tag{4.3.3}$$

Da mesma forma, derivando (4.3.3) encontra-se:

$$y''(x) = r(r - 1)x^{r-2}. \tag{4.3.4}$$

Substituindo (4.3.2), (4.3.3) e (4.3.4) em (4.3.1) segue:

$$2r(r - 1)x^{\cancel{2}}x^{r-\cancel{2}} + rx^{\cancel{1}}x^{r-\cancel{1}} - 3x^r = 0. \tag{4.3.5}$$

Em (4.3.5) simplificam-se as potências de $x$ e coloca-se $x^r$ em evidência:

$$x^r\left[2r(r - 1) + r - 3\right] = 0. \tag{4.3.6}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Como $x > 0$, então $x^r \neq 0$. A equação (4.3.6) leva a:

$$2r(r-1) + r - 3 = 0,$$

$$2r^2 - r - 3 = 0. \tag{4.3.7}$$

A equação (4.3.7) é quadrática em $r$ e denominada auxiliar de (4.3.1). Encontramos o discriminante

$$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 25 = 5^2,$$

e as soluções

$$r_{1,2} = \frac{-(-1) \pm 5}{2 \cdot 2} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -1 \end{cases}.$$

Com os valores de $r$ encontrados voltamos em (4.3.2). Este é o tipo I com $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$. A solução geral de (4.3.1) é:

$$y_{gh}(x) = C_1 x^{\frac{3}{2}} + C_2 x^{-1}, \, \forall x \in \mathbb{R}, \, x > 0, \tag{4.3.8}$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Avalia-se a primeira restrição $y(1) = 1$ em (4.3.8):

$$y(1) = 1 = C_1 \cdot 1^{\frac{3}{2}} + C_2 \cdot 1^{-1},$$

$$1 = C_1 + C_2. \tag{4.3.9}$$

Antes de utilizar a segunda restrição deriva-se (4.3.8):

$$y'_{gh}(x) = \frac{3}{2} C_1 x^{\frac{1}{2}} - C_2 x^{-2}, \, \forall x \in \mathbb{R}, \, x > 0, \tag{4.3.10}$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Neste ponto pode ser utilizada a segunda restrição $y'(1) = 4$ em (4.3.10):

$$y'(1) = 4 = \frac{3}{2} C_1 \cdot 1^{\frac{1}{2}} - C_2 \cdot 1^{-2},$$

$$4 = \frac{3}{2} C_1 - C_2. \tag{4.3.11}$$

Somando (4.3.9) e (4.3.11) tem-se:

$$5 = \frac{5}{2} C_1,$$

$$C_1 = 2. \tag{4.3.12}$$

Substituindo (4.3.12) em (4.3.9) encontra-se:

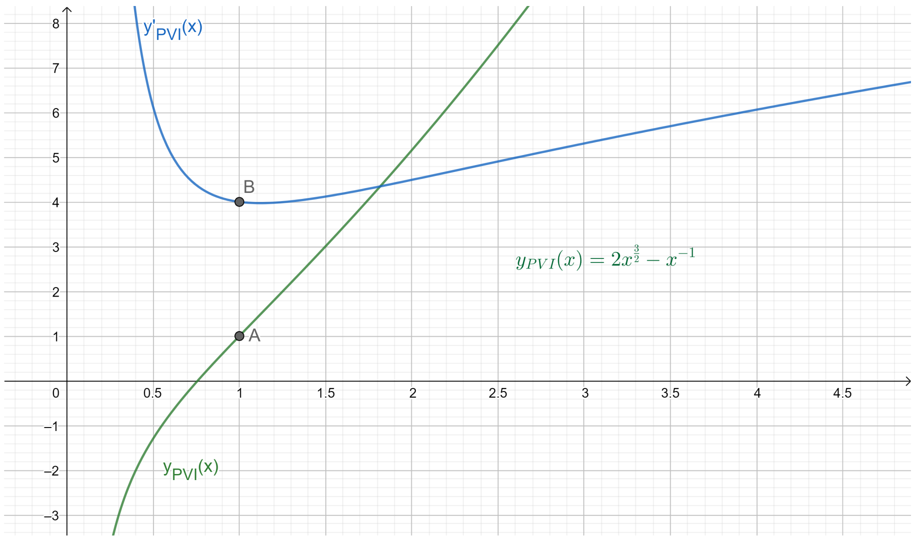
$$C_2 = -1. \tag{4.3.13}$$

Com (4.3.12) e (4.3.13) volta-se em (4.3.8):

$$y_{PVI}(x) = 2x^{\frac{3}{2}} - x^{-1}, \forall x \in \mathbb{R}, \, x > 0. \tag{4.3.14}$$

Um exercício análogo está resolvido em vídeo aqui. A Figura 4.3.1 mostra o gráfico da função em (4.3.14) e de sua primeira derivada. Os pontos $A$ e $B$ ilustram as condições iniciais.

Figura 4.3.1: Gráfico da solução do exercício. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

## 4.4 Problema de valor inicial. Equação de Cauchy Euler. Tipo-II.

**Exercício 16.** *Resolver o problema de valor inicial*

$$x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = 0, \tag{4.4.1}$$

$y(1) = 5$ *e* $y'(1) = 3$.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

### 4.4.1 Solução

Uma equação diferencial de segunda ordem da forma

$$a(x-x_0)^2y''(x)+b(x-x_0)y'(x)+cy(x)=0,$$

onde $a, b, c, x_0$ são números reais conhecidos é denominada de "Cauchy Euler". Segue que esse é o caso de (4.4.1) com $a=1$, $b=-3$, $c=4$ e $x_0=0$. A dedução dos tipos de soluções numa equação de "Cauchy Euler" encontra-se aqui.

Como as condições iniciais foram dadas em $x=1$ procura-se solução para $x>0$ da forma:

$$y(x)=x^r, \tag{4.4.2}$$

onde $r$ é um coeficiente a ser determinado.

Derivando (4.4.2) tem-se:

$$y'(x)=rx^{r-1}. \tag{4.4.3}$$

Da mesma forma, derivando (4.4.3) encontra-se:

$$y''(x)=r(r-1)x^{r-2}. \tag{4.4.4}$$

Substituindo (4.4.2), (4.4.3) e (4.4.4) em (4.4.1) segue:

$$r(r-1)x^{\cancel{2}}x^{r-\cancel{2}}-3rx^{\cancel{1}}x^{r-\cancel{1}}+4x^r=0. \tag{4.4.5}$$

Em (4.4.5) simplificam-se as potências de $x$ e coloca-se $x^r$ em evidência:

$$x^r\left[r(r-1)-3r+4\right]=0. \tag{4.4.6}$$

Como $x>0$, então $x^r \neq 0$. A equação (4.4.6) leva a:

$$r(r-1)-3r+4=0,$$

$$r^2-4r+4=(r-2)^2=0. \tag{4.4.7}$$

A equação (4.4.7) é quadrática em $r$ e denominada auxiliar de (4.4.1). Este é o tipo II com $r_1=r_2=2$. A solução geral de (4.4.1) é:

$$y_{gh}(x)=C_1x^2+C_2x^2\ln x,\ \forall x\in\mathbb{R},\ x>0, \tag{4.4.8}$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Avalia-se a primeira restrição $y(1) = 5$ em (4.4.8):

$$y(1) = 5 = C_1 \cdot 1^2 + C_2 \cdot 1^2 \cdot \cancelto{0}{\ln 1},$$

$$C_1 = 5. \tag{4.4.9}$$

Antes de utilizar a segunda restrição deriva-se (4.4.8):

$$y'_{gh}(x) = 2C_1x + C_2\left[2x\ln x + \frac{x^2}{x}\right],$$

$$y'_{gh}(x) = (2C_1 + C_2)x + 2C_2x\ln x,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > 0, \tag{4.4.10}$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Neste ponto pode ser utilizada a segunda restrição $y'(1) = 3$ em (4.4.10):

$$y'(1) = 3 = (2C_1 + C_2) \cdot 1 + 2C_2 \cdot 1 \cdot \cancelto{0}{\ln 1},$$

$$3 = 2C_1 + C_2. \tag{4.4.11}$$

Utilizando (4.4.9) e (4.4.11) tem-se:

$$C_2 = -7. \tag{4.4.12}$$

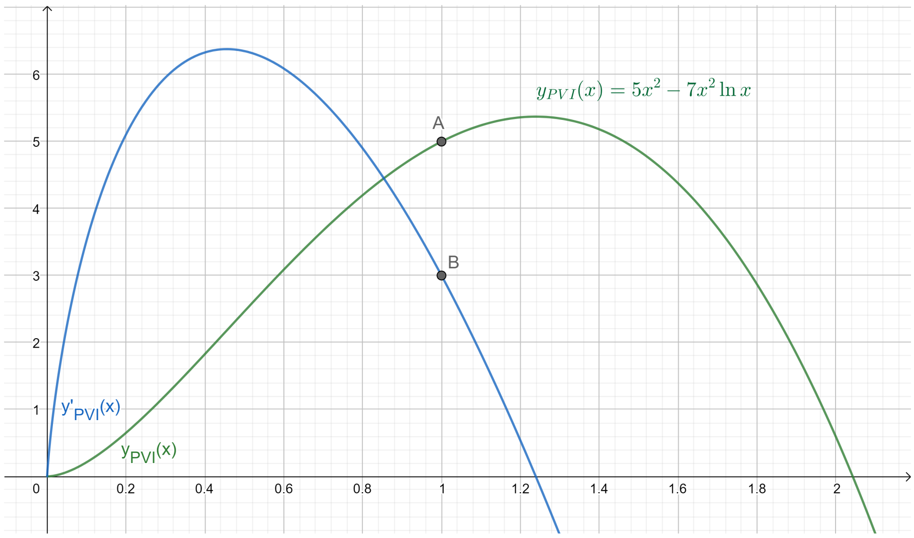
Com (4.4.9) e (4.4.12) volta-se em (4.4.8):

$$y_{PVI}(x) = 5x^2 - 7x^2\ln x,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > 0. \tag{4.4.13}$$

Um exercício análogo está resolvido em vídeo aqui. A Figura 4.4.1 mostra o gráfico da função em (4.4.13) e de sua primeira derivada. Os pontos $A$ e $B$ ilustram as condições iniciais.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Figura 4.4.1: Gráfico da solução do exercício. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

## 4.5 Problema de valor inicial. Equação de Cauchy Euler. Tipo-III.

**Exercício 17.** *Resolver o problema de valor inicial*

$$4x^2y''(x) + 17y(x) = 0, \tag{4.5.1}$$

$y(1) = -1$ *e* $y'(1) = -\frac{1}{2}$.

### 4.5.1 Solução

Uma equação diferencial de segunda ordem da forma

$$a(x - x_0)^2y''(x) + b(x - x_0)y'(x) + cy(x) = 0,$$

onde $a, b, c, x_0$ são números reais conhecidos é denominada de "Cauchy Euler". Segue que esse é o caso de (4.5.1) com $a = 4$, $b = 0$, $c = 17$ e $x_0 = 0$. A dedução dos tipos de soluções numa equação de "Cauchy Euler" encontra-se aqui.

Como as condições iniciais foram dadas em $x = 1$ procura-se solução para $x > 0$ da forma:

$$y(x) = x^r, \tag{4.5.2}$$

onde $r$ é um coeficiente a ser determinado.

Derivando (4.5.2) tem-se:

$$y'(x) = rx^{r-1}. \tag{4.5.3}$$

Da mesma forma, derivando (4.5.3) encontra-se:

$$y''(x) = r(r-1)x^{r-2}. \tag{4.5.4}$$

Substituindo (4.5.2), (4.5.3) e (4.5.4) em (4.5.1) segue:

$$4r(r-1)x^{\cancel{2}}x^{r-\cancel{2}} + 17x^r = 0. \tag{4.5.5}$$

Em (4.5.5) simplificam-se as potências de $x$ e coloca-se $x^r$ em evidência:

$$x^r\left[4r(r-1)+17\right] = 0. \tag{4.5.6}$$

Como $x > 0$, então $x^r \neq 0$. A equação (4.5.6) leva a:

$$4r(r-1)+17 = 0,$$

$$4r^2 - 4r + 17 = 0. \tag{4.5.7}$$

A equação (4.5.7) é quadrática em $r$ e denominada auxiliar de (4.5.1). Encontramos o discriminante

$$\Delta = (-4)^2 - 4(4)(17) = 4^2(-16) = (16i)^2,$$

e as soluções

$$r_{1,2} = \frac{-(-4) \pm 16i}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2} \pm 2i = \alpha \pm \beta i.$$

Ou seja, $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = 2$. Este é o tipo III com $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$. A solução geral de (4.5.1) é:

$$y_{gh}(x) = x^{\alpha}\left[C_1\cos(\beta\ln x) + C_2\operatorname{sen}(\beta\ln x)\right],$$

$$y_{gh}(x) = x^{\frac{1}{2}}\left[C_1\cos(2\ln x) + C_2\operatorname{sen}(2\ln x)\right],\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > 0, \tag{4.5.8}$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

Avalia-se a primeira restrição $y(1) = -1$ em (4.5.8):

$$y(1) = -1 = \cancelto{1}{1^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[C_1 \cdot \cancelto{1}{\cos(2\cdot\ln 1)} + C_2 \cdot \cancelto{0}{\operatorname{sen}(2\cdot\ln 1)}\right],$$

$$C_1 = -1. \tag{4.5.9}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Antes de utilizar a segunda restrição deriva-se (4.5.8). Deve-se usar a regra da derivada de um produto e a regra da cadeia:

$$y'_{gh}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\left[C_1\cos(2\ln x) + C_2\,\mathrm{sen}(2\ln x)\right] +$$

$$+2x^{-\frac{1}{2}}\left[-C_1\,\mathrm{sen}(2\ln x) + C_2\cos(2\ln x)\right],$$

$$y'_{gh}(x) = x^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1}{2}C_1 + 2C_2\right)\cos(2\ln x) + \left(-2C_1 + \frac{1}{2}C_2\right)\mathrm{sen}(2\ln x)\right]. \tag{4.5.10}$$

Neste ponto pode ser utilizada a segunda restrição $y'(1) = -\frac{1}{2}$ em (4.5.10):

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}C_1 + 2C_2. \tag{4.5.11}$$

Substituindo (4.5.9) em (4.5.11) encontra-se:

$$C_2 = 0. \tag{4.5.12}$$

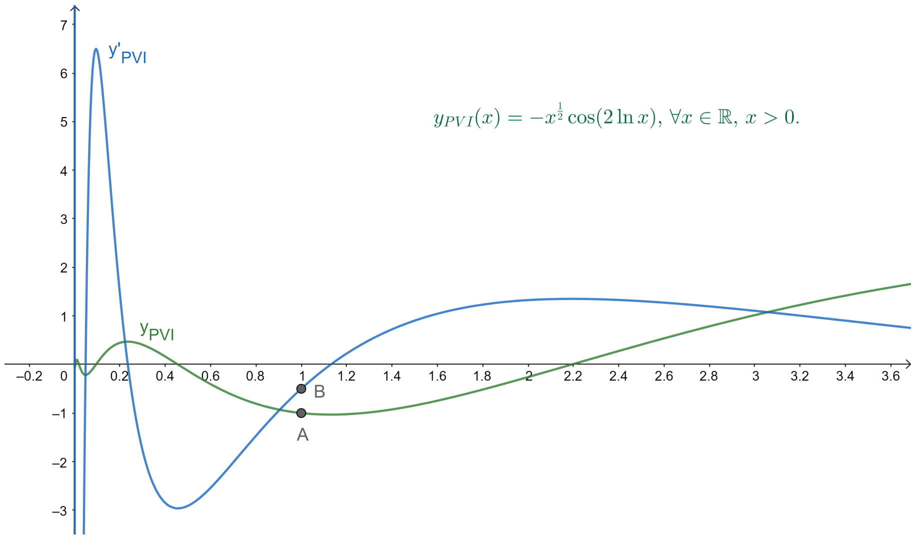
Com (4.5.9) e (4.5.12) volta-se em (4.5.8):

$$y_{PVI}(x) = -x^{\frac{1}{2}}\cos(2\ln x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > 0. \tag{4.5.13}$$

Um exercício análogo está resolvido em vídeo aqui. A Figura 4.5.1 mostra o gráfico da função em (4.5.13) e de sua primeira derivada. Os pontos $A$ e $B$ ilustram as condições iniciais.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Figura 4.5.1: Gráfico da solução do exercício. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

## 4.6 Problema de valor inicial. Equação de Cauchy Euler. Tipo-I(2).

**Exercício 18.** *Resolver o problema de valor inicial*

$$x^2y''(x) - 5xy'(x) + 8y(x) = 0, \tag{4.6.1}$$

$y(2) = 32$ *e* $y'(2) = 0$.

### 4.6.1 Solução

Uma equação diferencial de segunda ordem da forma

$$a(x-x_0)^2y''(x) + b(x-x_0)y'(x) + cy(x) = 0,$$

onde $a, b, c, x_0$ são números reais conhecidos é denominada de "Cauchy Euler". Segue que esse é o caso de (4.6.1) com $a = 1$, $b = -5$, $c = 8$ e $x_0 = 0$. A dedução dos tipos de soluções numa equação de "Cauchy Euler" se encontra aqui.

Como as condições iniciais foram dadas em $x = 2$ procura-se solução para $x > 0$ da forma:

$$y(x) = x^r, \tag{4.6.2}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

onde $r$ é um coeficiente a ser determinado.

Derivando (4.6.2) tem-se:

$$y'(x) = rx^{r-1}. \tag{4.6.3}$$

Da mesma forma, derivando (4.6.3) encontra-se:

$$y''(x) = r(r-1)x^{r-2}. \tag{4.6.4}$$

Substituindo (4.6.2), (4.6.3) e (4.6.4) em (4.6.1) segue:

$$r(r-1)x^{\cancel{2}}x^{r-\cancel{2}} - 5rx^{\cancel{1}}x^{r-\cancel{1}} + 8x^r = 0. \tag{4.6.5}$$

Em (4.6.5) simplificam-se as potências de $x$ e coloca-se $x^r$ em evidência:

$$x^r\left[r(r-1) - 5r + 8\right] = 0. \tag{4.6.6}$$

Como $x > 0$, então $x^r \neq 0$. A equação (4.6.6) leva a:

$$r(r-1) - 5r + 8 = 0,$$

$$r^2 - 6r + 8 = (r-2)(r-4) = 0. \tag{4.6.7}$$

A equação (4.6.7) é quadrática em $r$ e denominada auxiliar de (4.6.1). As soluções são

$$r_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}.$$

Com os valores de $r$ encontrados voltamos em (4.6.2). Este é o tipo I com $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$. A solução geral de (4.6.1) é:

$$y_{gh}(x) = C_1x^2 + C_2x^4,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > 0, \tag{4.6.8}$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Avalia-se a primeira restrição $y(2) = 32$ em (4.6.8):

$$y(2) = 32 = C_1 \cdot 2^2 + C_2 \cdot 2^4,$$

$$8 = C_1 + 4C_2. \tag{4.6.9}$$

Antes de utilizar a segunda restrição deriva-se (4.6.8):

$$y'_{gh}(x) = 2C_1x + 4C_2x^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > 0, \tag{4.6.10}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Neste ponto pode ser utilizada a segunda restrição $y'(2) = 0$ em (4.6.10):

$$y'(2) = 0 = 2C_1 \cdot 2 + 4C_2 \cdot 2^3,$$

$$0 = C_1 + 8C_2 \Rightarrow C_1 = -8C_2. \tag{4.6.11}$$

Substituindo (4.6.11) em (4.6.9) tem-se:

$$8 = -8C_2 + 4C_2 = -4C_2,$$

$$C_2 = -2. \tag{4.6.12}$$

Substituindo (4.6.12) em (4.6.11) encontra-se

$$C_1 = 16. \tag{4.6.13}$$

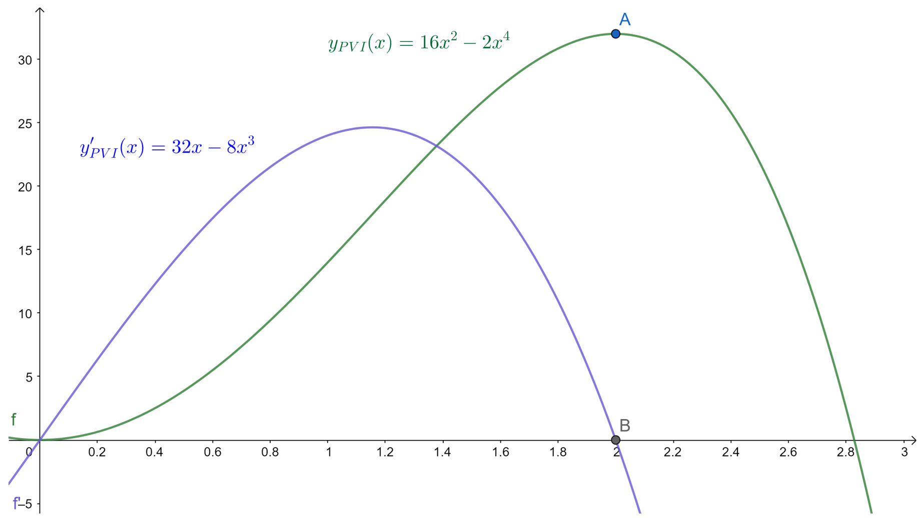
Com (4.6.12) e (4.6.13) volta-se em (4.6.8):

$$y_{PVI}(x) = 16x^2 - 2x^4, \; \forall x \in \mathbb{R}, \; x > 0,$$

$$y_{PVI}(x) = 2x^2(8 - x^2) = 2x^2(2\sqrt{2} - x)(2\sqrt{2} + x). \tag{4.6.14}$$

Este exercício está resolvido em vídeo aqui. A Figura 4.6.1 mostra o gráfico da função em (4.6.14) e de sua primeira derivada. Os pontos $A$ e $B$ ilustram as condições iniciais.

Figura 4.6.1: Gráfico da solução do exercício. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

# Capítulo 5

# Resolução de equações diferenciais perto de um ponto singular regular

## 5.1 Ponto ordinário e ponto singular regular e singular irregular

A equação diferencial

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0. \tag{5.1.1}$$

pode ser resolvida usando uma série de potências com centro em $x_0$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n.$$

Na sua forma padrão dividimos por $A(x) \neq 0$ toda a equação (5.1.1):

$$y''(x) + \frac{B(x)}{A(x)}y'(x) + \frac{C(x)}{A(x)}y(x) = 0. \tag{5.1.2}$$

**Definição 1** (Ordinário ou Singular)**.** *O ponto $x_0$, relativo a equação (5.1.1), é classificado como **ordinário** quando $A(x_0) \neq 0$. Caso contrário, $x_0$ é classificado como **singular**.*

A Definição 1 diferencia as soluções centradas em pontos $x_0$ que anulam a derivada de maior ordem de (5.1.1) ou que produzem uma singularidade no segundo e terceiro somandos de (5.1.2).

Uma segunda classificação será feita conforme ilustrado no diagrama a seguir:

$$\begin{cases} A(x_0) \neq 0 \Rightarrow \text{ponto ordinário} \\ A(x_0) = 0 \Rightarrow \text{ponto singular} \begin{cases} \text{regular} \\ \text{irregular} \end{cases} \end{cases}$$

**Definição 2** (Singular Regular ou Singular Irregular)**.** *Para o ponto* ***singular*** $x_0$*,* $A(x_0) = 0$*, ser classificado como* ***regular*** *precisam existir os dois limites:*

$$\lim_{x \to x_0} \left[ (x - x_0) \frac{B(x)}{A(x)} \right] = a_0, \tag{5.1.3}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[ (x - x_0)^2 \frac{C(x)}{A(x)} \right] = b_0. \tag{5.1.4}$$

*Caso um dos limites acima não exista o ponto singular* $x_0$ *é chamado* ***irregular****.*

Para entender o porquê da Definição 2 multiplica-se toda a equação (5.1.2) por $(x - x_0)^2$:

$$(x - x_0)^2 y''(x) + (x - x_0) \left[ (x - x_0) \frac{B(x)}{A(x)} \right] y'(x) + \left[ (x - x_0)^2 \frac{C(x)}{A(x)} \right] y(x) = 0. \tag{5.1.5}$$

No caso em que os termos entre colchetes da equação (5.1.5) podem ser escritos como séries de potências temos:

$$(x - x_0) \frac{B(x)}{A(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{5.1.6}$$

$$(x - x_0)^2 \frac{C(x)}{A(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n. \tag{5.1.7}$$

Quando existem os limites em (5.1.3) e (5.1.4) as equações (5.1.6) e (5.1.7) podem ser aproximadas como:

$$(x - x_0) \frac{B(x)}{A(x)} \approx a_0, \tag{5.1.8}$$

$$(x - x_0)^2 \frac{C(x)}{A(x)} \approx b_0. \tag{5.1.9}$$

Ou seja, utilizando (5.1.8) e (5.1.9) em (5.1.5) encontra-se uma equação de Cauchy Euler:

$$(x - x_0)^2 y''(x) + (x - x_0) a_0 y'(x) + b_0 y(x) = 0. \tag{5.1.10}$$

A equação (5.1.10) é uma aproximação de (5.1.5) que serve de ponto de partida. Isto justifica separar aos pontos singulares regulares. Um vídeo explicativo destas classificações está disponível aqui.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

## 5.2 Pontos singulares regulares e irregulares-I

**Exercício 19.** *Classificar os pontos singulares da equação diferencial*

$$(x^2-4)y''(x)+3(x-2)y'(x)+5y(x)=0. \tag{5.2.1}$$

### 5.2.1 Solução

Comparando (5.2.1) com (5.1.1) têm-se:

$$A(x)=x^2-4=(x+2)(x-2).$$

Logo, a equação (5.2.1) possui dois pontos singulares que satisfazem $A(x)=0$: i) $x_0=-2$ e ii) $x_0=2$.

Reescreve-se (5.2.1) na sua forma padrão:

$$y''(x)+\left[\frac{3}{x+2}\right]y'(x)+\left[\frac{5}{(x-2)(x+2)}\right]y(x)=0. \tag{5.2.2}$$

A seguir devem-se escrever os limites das equações (5.1.3) e (5.1.4).

i) $x_0=-2$.

Multiplicam-se o primeiro e segundo termo entre colchetes da equação (5.2.2) por $(x+2)$ e $(x+2)^2$, respectivamente:

$$\lim_{x\to-2}\left[\cancel{(x+2)}\frac{3}{\cancel{(x+2)}}\right]=3, \tag{5.2.3}$$

$$\lim_{x\to-2}\left[(x+2)^{\cancel{2}^{1}}\frac{5}{(x-2)\cancel{(x+2)}}\right]=\lim_{x\to-2}\left[\frac{5(x+2)}{(x-2)}\right]=0. \tag{5.2.4}$$

Como existem os limites em (5.2.3) e (5.2.4) o ponto $x_0=-2$ é singular regular para a equação (5.2.1).

ii) $x_0=2$.

Multiplicam-se o primeiro e segundo termo entre colchetes da equação (5.2.2) por $(x-2)$ e $(x-2)^2$, respectivamente:

$$\lim_{x\to2}\left[(x-2)\frac{3}{(x+2)}\right]=0, \tag{5.2.5}$$

$$\lim_{x\to2}\left[(x-2)^{\cancel{2}^{1}}\frac{5}{\cancel{(x-2)}(x+2)}\right]=\lim_{x\to2}\left[\frac{5(x-2)}{(x+2)}\right]=0. \tag{5.2.6}$$

Como existem os limites em (5.2.5) e (5.2.6) o ponto $x_0=2$ também é singular regular para a equação (5.2.1).

## 5.3 Pontos singulares regulares e irregulares-II

**Exercício 20.** *Classificar os pontos singulares da equação diferencial*

$$(x^2-4)^2 y''(x) + 3(x-2)y'(x) + 5y(x) = 0. \tag{5.3.1}$$

### 5.3.1 Solução

Comparando (5.3.1) com (5.1.1) têm-se:

$$A(x) = (x^2-4)^2 = (x+2)^2(x-2)^2.$$

Logo, no domínio dos números reais a equação (5.3.1) possui dois pontos singulares que satisfazem $A(x)=0$: i) $x_0=-2$ e ii) $x_0=2$. As outras duas soluções complexas iii) $x_0=-2i$ e iv) $x_0=2i$ não serão discutidas aqui.

Reescreve-se (5.3.1) na sua forma padrão:

$$y''(x) + \left[\frac{3}{(x+2)^2(x-2)}\right] y'(x) + \left[\frac{5}{(x+2)^2(x-2)^2}\right] y(x) = 0. \tag{5.3.2}$$

A seguir devem-se escrever os limites das equações (5.1.3) e (5.1.4).

i) $x_0=-2$.

Multiplicam-se o primeiro e segundo termo entre colchetes da equação (5.3.2) por $(x+2)$ e $(x+2)^2$, respectivamente:

$$\lim_{x\to -2}\left[\cancel{(x+2)}\frac{3}{(x+2)^{\cancel{2}^{1}}(x-2)}\right] = \lim_{x\to -2}\left[\frac{3}{(x+2)(x-2)}\right] = \nexists, \tag{5.3.3}$$

$$\lim_{x\to -2}\left[\cancel{(x+2)^2}\frac{5}{\cancel{(x+2)^2}(x-2)^2}\right] = \lim_{x\to -2}\left[\frac{5}{(x-2)^2}\right] = \frac{5}{16}. \tag{5.3.4}$$

Embora exista o limite em (5.3.4), devido ao limite em (5.3.3) não existir o ponto $x_0=-2$ é classificado como singular irregular para a equação (5.3.1).

ii) $x_0=2$.

Multiplicam-se o primeiro e segundo termo entre colchetes da equação (5.3.2) por $(x-2)$ e $(x-2)^2$, respectivamente:

$$\lim_{x\to 2}\left[\cancel{(x-2)}\frac{3}{(x+2)^2\cancel{(x-2)}}\right] = \lim_{x\to 2}\left[\frac{3}{(x+2)^2}\right] = \frac{3}{16}, \tag{5.3.5}$$

$$\lim_{x\to 2}\left[\cancel{(x-2)^2}\frac{5}{(x+2)^2\cancel{(x-2)^2}}\right] = \lim_{x\to 2}\left[\frac{5}{(x+2)^2}\right] = \frac{5}{16}. \tag{5.3.6}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Como existem os limites em (5.3.5) e (5.3.6) o ponto $x_0 = 2$ é singular regular para a equação (5.3.1).

## 5.4 Teorema de Frobenius

O Teorema a seguir garante a existência de uma solução quando a serie de potências é desenvolvida em torno de um ponto singular regular.

**Teorema 1** (Frobenius). *Se $x_0$ for um ponto singular regular da equação diferencial*

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0,$$

*então existirá pelo menos uma solução da forma de serie de potências*

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r},$$

*onde $r$ é uma constante a ser determinada. A série será convergente em algum intervalo $|x - x_0| < R$, com $R$ um real positivo.*

O teorema anterior não garante que possam ser encontradas as duas soluções da base, apenas uma. Além dos coeficientes $a_n$ deve ser encontrado $r$. A demonstração é complexa e não será feita aqui. A seguir discute-se uma aplicação.

## 5.5 Resolução de equação diferencial perto de um ponto singular regular-Tipo-I(a)

**Exercício 21.** *Resolver a equação diferencial*

$$3xy''(x) + y'(x) - y(x) = 0, \tag{5.5.1}$$

*usando uma série de potências centrada em $x_0 = 0$.*

### 5.5.1 Solução

O ponto $x_0 = 0$ anula o primeiro somando de (5.5.1), logo é um ponto singular da equação diferencial. Para saber se é regular ou irregular reescreve-se (5.5.1) na sua forma padrão:

$$y''(x) + \frac{1}{3x}y'(x) - \frac{1}{3x}y(x) = 0.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Como os limites

$$\lim_{x\to 0}\left(\cancel{x}\cdot\frac{1}{3\cancel{x}}\right)=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x^{\cancel{2}}\cdot\frac{-1}{3\cancel{x}}\right)=0,$$

existem, o ponto $x_0=0$ é singular regular.

Pelo Teorema 1 deve existir uma solução na forma

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}, \tag{5.5.2}$$

onde os $a_n, r\in\mathbb{R}$, com $n=0,1,2,\cdots$, são os coeficientes a serem determinados.

Assume-se que a série em (5.5.2) seja convergente com algum raio de convergência $R_1>0$. Derivando (5.5.2) tem-se

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n-1}. \tag{5.5.3}$$

Também assume-se que a série em (5.5.3) seja convergente com algum raio de convergência $R_2>0$. Derivando (5.5.3) segue

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2}. \tag{5.5.4}$$

Substituindo (5.5.2), (5.5.3), (5.5.4) em (5.5.1) encontra-se:

$$3x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0.$$

O $3x$ na frente do primeiro somatório escrive-se dentro do mesmo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}3a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0.$$

Os dois primeiros somatórios podem ser unificados:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(3n+3r-2)x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0.$$

O $x^r$ pode ser colocado em evidência:

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(3n+3r-2)x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n}\right]=0.$$

Para que a potência inicial de $x$ nos dois somatórios seja a mesma o elemento correspondente a $n=0$ no primeiro deve ser escrito explicitamente fora do mesmo:

$$x^r\left[a_0r(3r-2)x^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(n+r)(3n+3r-2)x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right]=0.$$

Os valores iniciais dos índices dos somatórios devem ser iguais. Isto será feito através de uma troca simultânea de variáveis:

$$\text{primeira série: } k=n-1\rightarrow n=k+1,\ \text{se } n=1,\ \text{então } k=0,$$

$$\text{segunda serie: } k=n\rightarrow n=k,\ \text{se } n=0,\ \text{então } k=0.$$

Assim tem-se:

$$x^r\left[a_0r(3r-2)x^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}(k+r+1)(3k+3r+1)x^{k}-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\right]=0.$$

Unificando os somatórios:

$$x^r\left[a_0r(3r-2)x^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_{k+1}(k+r+1)(3k+3r+1)-a_k\right]x^k\right]=0.$$

Reescrevendo o zero da direita segue:

$$a_0r(3r-2)x^{r-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_{k+1}(k+r+1)(3k+3r+1)-a_k\right]x^{k+r}=$$

$$=0=0\cdot x^{r-1}+\sum_{k=0}^{\infty}0\cdot x^{k+r}.$$

A última equação deve ser entendida como uma igualdade de polinômios:

$$a_0r(3r-2)=0, \tag{5.5.5}$$

$$a_{k+1}(k+r+1)(3k+3r+1)-a_k=0,\ \forall k\geq 0. \tag{5.5.6}$$

A equação (5.5.5) é chamada indicial. Como $a_0\neq 0$ as soluções, ou expoentes na singularidade, são i) $r=r_1=\frac{2}{3}$ e ii) $r=r_2=0$. Como será visto este é o tipo I, onde $r_1-r_2\notin\mathbb{N}$. De (5.5.6) escreve-se a equação geral de recorrência (primeira ordem):

$$a_{k+1}=\frac{a_k}{(k+r+1)(3k+3r+1)},\ \forall k\geq 0. \tag{5.5.7}$$

Para encontrar a primeira solução utiliza-se o maior valor $r = r_1 = \frac{2}{3}$. A equação (5.5.7) se transforma em:

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{(k+1)(3k+5)}, \ \forall k \geq 0. \tag{5.5.8}$$

Em (5.5.8) avaliam-se os primeiros valores de $k$:

$$k = 0 \rightarrow a_1 = \frac{a_0}{1 \cdot 5} = \frac{a_0}{1! \cdot 5},$$

$$k = 1 \rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2 \cdot 8} = \frac{1}{2 \cdot 8} \cdot \frac{a_0}{1! \cdot 5} = \frac{a_0}{2! \cdot 5 \cdot 8},$$

$$k = 2 \rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3 \cdot 11} = \frac{1}{3 \cdot 11} \cdot \frac{a_0}{2! \cdot 5 \cdot 8} = \frac{a_0}{3! \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11},$$

$$k = 3 \rightarrow a_4 = \frac{a_3}{4 \cdot 14} = \frac{1}{4 \cdot 14} \cdot \frac{a_0}{3! \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11} = \frac{a_0}{4! \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14}.$$

Dos resultados anteriores conjetura-se:

$$a_n = \frac{a_0}{n! \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)}, \ \forall n \geq 1.$$

Colocando $a_0 = 1$ e lembrando que neste caso $r = \frac{2}{3}$ volta-se em (5.5.2):

$$y_1(x) = x^{\frac{2}{3}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0}{n! \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)} x^{n+\frac{2}{3}}. \tag{5.5.9}$$

Podem ser escritos de forma explícita os primeiros termos do somatório (5.5.9):

$$y_1(x) = x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{5} x^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{80} x^{\frac{8}{3}} + \frac{1}{2640} x^{\frac{11}{3}} + \cdots. \tag{5.5.10}$$

Para encontrar a segunda solução utiliza-se $r = r_2 = 0$. A equação de recorrência (5.5.7) se transforma em:

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{(k+1)(3k+1)}, \ \forall k \geq 0. \tag{5.5.11}$$

Em (5.5.11) avaliam-se os primeiros valores de $k$:

$$k = 0 \rightarrow a_1 = \frac{a_0}{1 \cdot 1} = \frac{a_0}{1! \cdot 1},$$

$$k = 1 \rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{a_0}{1! \cdot 1} = \frac{a_0}{2! \cdot 1 \cdot 4},$$

$$k = 2 \rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3 \cdot 7} = \frac{1}{3 \cdot 7} \cdot \frac{a_0}{2! \cdot 1 \cdot 4} = \frac{a_0}{3! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7},$$

$$k = 3 \rightarrow a_4 = \frac{a_3}{4 \cdot 10} = \frac{1}{4 \cdot 10} \cdot \frac{a_0}{3! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{a_0}{3! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Dos resultados anteriores conjetura-se:

$$a_n = \frac{a_0}{n! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}, \ \forall n \geq 1.$$

Colocando $a_0 = 1$ e lembrando que neste caso $r = 0$ volta-se em (5.5.2):

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)} x^n. \tag{5.5.12}$$

Podem ser escritos de forma explícita os primeiros termos do somatório (5.5.12):

$$y_2(x) = 1 + x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{168}x^3 + \cdots . \tag{5.5.13}$$

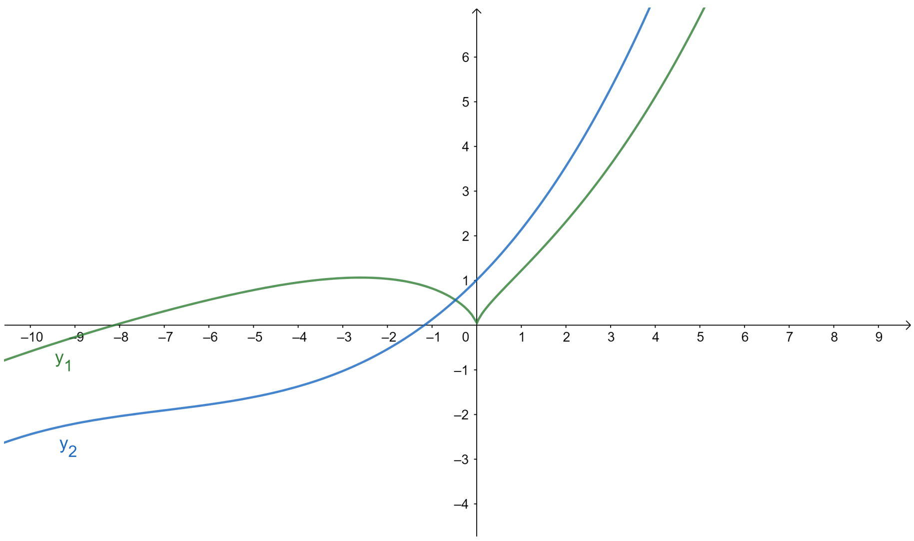
A solução geral da equação diferencial homogênea (5.5.1) é uma combinação linear das duas soluções encontradas:

$$y_{gh}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

A Figura 5.5.1 mostra as aproximações das funções em (5.5.10) e (5.5.13).

Figura 5.5.1: Gráfico das soluções básicas do exercício com quatro somandos cada um. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

A resolução deste problema está disponível em três vídeos iniciando aqui.

## 5.6 Tipos de soluções perto de um ponto singular regular

Continua-se o estudo de uma equação diferencial, linear, de segunda ordem, homogênea e em que seus coeficientes são funções polinomiais de $x$:

$$A(x)y''(x)+B(x)y'(x)+C(x)y(x)=0. \tag{5.6.1}$$

A solução será procurada usando uma série de potências centrada em um ponto singular regular. Vídeo explicativo da classificação de um ponto como ordinário ou singular regular ou singular irregular aqui:

$$\begin{cases} A(x_0)\neq 0 \Rightarrow \text{ponto ordinário} \\ A(x_0)=0 \Rightarrow \text{ponto singular} \begin{cases} \text{regular} \\ \text{irregular} \end{cases} \end{cases}$$

Para o ponto ser singular regular precisam existir os dois limites:

$$\lim_{x\to x_0}\left[(x-x_0)\frac{B(x)}{A(x)}\right]=a_0,$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[(x-x_0)^2\frac{C(x)}{A(x)}\right]=b_0.$$

A equação (5.6.1) pode ser aproximada por uma de Cauchy Euler:

$$(x-x_0)^2y''(x)+a_0(x-x_0)y'(x)+b_0(x-x_0)y(x)=0, \tag{5.6.2}$$

onde $a_0$ e $b_0$ são números achados no cálculo dos limites anteriores.

Pelo Teorema de Frobenius a proposta inicial de solução deve ser da forma:

$$y(x)=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n,$$

onde $r$ é um coeficiente que deve ser determinado no caminho da solução.

Por simplicidade será estudado o ponto singular regular $x_0=0$ e procuramos soluções para $x>0$:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{r+n},$$

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)C_nx^{r+n-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)C_n x^{r+n-2}.$$

Substituindo as três equações anteriores em (5.6.2) encontra-se a equação indicial (quadrática em $r$):

$$r(r-1) + a_0 r + b_0 = 0. \tag{5.6.3}$$

A equação (5.6.3) apresenta duas soluções que podem ser números complexos. Nossa analise será restrita a três casos em que as soluções de $r$ são números reais.

### 5.6.1 Tipo I

Define-se por $r_1$ e $r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 > r_2$, $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$. Neste contexto sempre é possível encontrar duas soluções na forma:

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(r_1)x^n\right],$$

$$y_2(x) = x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(r_2)x^n\right].$$

Um exemplo deste tipo I é discutido em três vídeos iniciando aqui.

### 5.6.2 Tipo II

Define-se por $r_1$ e $r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 > r_2$ e $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$. As soluções são na forma:

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(r_1)x^n\right],$$

$$y_2(x) = Ey_1(x)\ln x + x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(r_2)x^n\right],$$

onde $C_0(r_2) \neq 0$. Quando o coeficiente $E = 0$, então a segunda solução será da mesma forma que no Tipo I.

A equação Bessel, discutida em quatro vídeos iniciando aqui, é um exemplo em que aparece o Tipo II nas duas variantes: $\nu = \frac{1}{2} \Rightarrow E = 0$ e $\nu = 1 \Rightarrow E \neq 0$.

### 5.6.3 Tipo III

Define-se por $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$. As duas soluções são da forma:

$$y_1(x) = x^{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(r)x^n\right]$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^r \left[\sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n\right].$$

A equação Bessel quando $\nu = 0$ é um exemplo do Tipo III. Esta seção é discutida em vídeo aqui.

## 5.7 Resolução de equação diferencial perto de um ponto singular regular-Tipo-I(b)

**Exercício 22.** *Resolver a equação diferencial*

$$2xy''(x) + (1+x)y'(x) + y(x) = 0, \tag{5.7.1}$$

*usando uma série de potências centrada em* $x_0 = 0$.

### 5.7.1 Solução

O ponto $x_0 = 0$ anula o primeiro somando de (5.7.1), logo é um ponto singular da equação diferencial. Para saber se é regular ou irregular reescreve-se (5.7.1) na sua forma padrão:

$$y''(x) + \frac{1+x}{2x}y'(x) + \frac{1}{2x}y(x) = 0.$$

Como os limites

$$\lim_{x\to 0}\left(\cancel{x}\cdot\frac{1+x}{2\cancel{x}}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x^{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{2\cancel{x}}\right) = 0,$$

existem e são finitos, o ponto $x_0 = 0$ é singular regular.

Pelo Teorema de Frobenius deve existir uma solução na forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \tag{5.7.2}$$

onde os $a_n, r \in \mathbb{R}$, com $n = 0, 1, 2, \cdots$, são os coeficientes a serem determinados.

Assume-se que a série em (5.7.2) seja convergente com algum raio de convergência $R_1 > 0$. Derivando (5.7.2) tem-se

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n-1}. \tag{5.7.3}$$

Também assume-se que a série em (5.7.3) seja convergente com algum raio de convergência

$R_2 > 0$. Derivando (5.7.3) segue

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2}. \tag{5.7.4}$$

Substituindo (5.7.2), (5.7.3), (5.7.4) em (5.7.1) encontra-se:

$$2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} + (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Utiliza-se a lei distributiva para escrever o segundo somatório como outros dois:

$$2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} + \\ + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

O $2x$ e o $x$ na frente dos somatórios primeiro e terceiro são escritos dentro dos mesmos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Os dois primeiros e os dois últimos somatórios podem ser unificados:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(2n+2r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r+1)x^{n+r} = 0.$$

O $x^r$ pode ser colocado em evidência:

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(2n+2r-1)x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r+1)x^{n}\right] = 0.$$

Para que a potência inicial de $x$ nos dois somatórios seja a mesma o elemento correspondente a $n=0$ no primeiro deve ser escrito explicitamente fora do mesmo:

$$x^r\left[a_0 r(2r-1)x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(n+r)(2n+2r-1)x^{n-1} + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r+1)x^{n}\right] = 0.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Os valores iniciais dos índices dos somatórios devem ser iguais. Isto será feito através de uma troca simultânea de variáveis:

$$\text{primeira série: } k = n - 1 \rightarrow n = k + 1, \text{ se } n = 1, \text{ então } k = 0,$$

$$\text{segunda serie: } k = n \rightarrow n = k, \text{ se } n = 0, \text{ então } k = 0.$$

Assim tem-se:

$$x^r \left[ a_0 r(2r-1)x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+r+1)(2k+2r+1)x^k + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+r+1)x^k \right] = 0.$$

Unificando os somatórios:

$$x^r \left[ a_0 r(2r-1)x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+r+1)\left[a_{k+1}(2k+2r+1) + a_k\right] x^k \right] = 0.$$

Considerando $x > 0$ e reescrevendo o zero da direita segue:

$$a_0 r(2r-1)x^{r-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+r+1)\left[a_{k+1}(2k+2r+1) + a_k\right] x^{k+r} =$$
$$= 0 = 0 \cdot x^{r-1} + \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^{k+r}.$$

A última equação deve ser entendida como uma igualdade de polinômios:

$$a_0 r(2r-1) = 0, \tag{5.7.5}$$

$$(k+r+1)\left[a_{k+1}(2k+2r+1) + a_k\right] = 0, \ \forall k \geq 0. \tag{5.7.6}$$

A equação (5.7.5) é chamada indicial. Como $a_0 \neq 0$ as soluções, ou expoentes na singularidade, são i) $r = r_1 = \frac{1}{2}$ e ii) $r = r_2 = 0$. Este é o tipo I, onde $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$.

De (5.7.6) nota-se que $k + r + 1 \neq 0$ para $k \geq 0$ e os valores de $r$ encontrados no passo anterior. Logo, escreve-se a equação geral de recorrência (primeira ordem):

$$a_{k+1} = \frac{-a_k}{2k+2r+1}, \ \forall k \geq 0. \tag{5.7.7}$$

Para encontrar a primeira solução utiliza-se o maior valor $r = r_1 = \frac{1}{2}$. A equação (5.7.7) se transforma em:

$$a_{k+1} = \frac{-a_k}{2(k+1)}, \ \forall k \geq 0. \tag{5.7.8}$$

Em (5.7.8) avaliam-se os primeiros valores de $k$:

$$k = 0 \rightarrow a_1 = \frac{-a_0}{2} = \frac{-a_0}{2^1 \cdot 1!},$$

$$k = 1 \rightarrow a_2 = \frac{-a_1}{2 \cdot 2} = \frac{-1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{-a_0}{2} = \frac{a_0}{2^2 \cdot 2!},$$

$$k = 2 \rightarrow a_3 = \frac{-a_2}{2 \cdot 3} = \frac{-1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{a_0}{2^2 \cdot 2!} = \frac{-a_0}{2^3 \cdot 3!},$$

$$k = 3 \rightarrow a_4 = \frac{-a_3}{2 \cdot 4} = \frac{-1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{-a_0}{2^3 \cdot 3!} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 4!}.$$

Dos resultados anteriores conjetura-se:

$$a_n = \frac{(-1)^n a_0}{2^n \cdot n!}, \ \forall n \geq 1.$$

Colocando $a_0 = 1$ e lembrando que neste caso $r = \frac{1}{2}$ volta-se em (5.7.2):

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} x^{n+\frac{1}{2}}, \ x > 0. \tag{5.7.9}$$

Podem ser escritos de forma explícita os primeiros termos do somatório (5.7.9):

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{48} x^{\frac{7}{2}} + \cdots, \ x > 0. \tag{5.7.10}$$

Para encontrar a segunda solução utiliza-se $r = r_2 = 0$. A equação de recorrência (5.7.7) se transforma em:

$$a_{k+1} = \frac{-a_k}{2k+1}, \ \forall k \geq 0. \tag{5.7.11}$$

Em (5.7.11) avaliam-se os primeiros valores de $k$:

$$k = 0 \rightarrow a_1 = \frac{-a_0}{1},$$

$$k = 1 \rightarrow a_2 = \frac{-a_1}{3} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{-a_0}{1} = \frac{a_0}{1 \cdot 3},$$

$$k = 2 \rightarrow a_3 = \frac{-a_2}{5} = \frac{-1}{5} \cdot \frac{a_0}{1 \cdot 3} = \frac{-a_0}{1 \cdot 3 \cdot 5},$$

$$k = 3 \rightarrow a_4 = \frac{-a_3}{7} = \frac{-1}{7} \cdot \frac{-a_0}{1 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{a_0}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Dos resultados anteriores conjetura-se:

$$a_n = \frac{(-1)^n a_0}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}, \ \forall n \geq 1.$$

Colocando $a_0 = 1$ e lembrando que neste caso $r = 0$ volta-se em (5.7.2):

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} x^n, \ x > 0. \tag{5.7.12}$$

Podem ser escritos de forma explícita os primeiros termos do somatório (5.7.12):

$$y_2(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{15}x^3 + \cdots, \ x > 0. \tag{5.7.13}$$

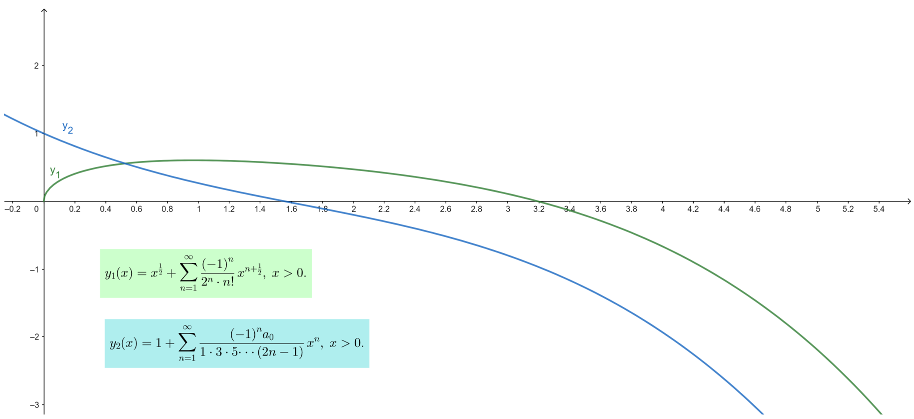
A solução geral da equação diferencial homogênea (5.7.1) é uma combinação linear das duas soluções encontradas:

$$y_{gh}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \ \forall x \in \mathbb{R}, \ x > 0,$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

A Figura 5.7.1 mostra as aproximações das funções em (5.7.10) e (5.7.13).

Figura 5.7.1: Gráfico das soluções básicas do exercício com quatro somandos cada um. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

A resolução de um problema análogo está disponível em três vídeos iniciando aqui.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

## 5.8 Resolução de equação diferencial perto de um ponto singular regular-Tipo-II

**Exercício 23.** *Resolver a equação diferencial*

$$xy''(x) + 2xy'(x) + 6e^x y(x) = 0, \tag{5.8.1}$$

*usando uma série de potências centrada em* $x_0 = 0$.

### 5.8.1 Solução

O ponto $x_0 = 0$ anula o primeiro somando de (5.8.1), logo é um ponto singular da equação diferencial. Para saber se é regular ou irregular reescreve-se (5.8.1) na sua forma padrão:

$$y''(x) + 2y'(x) + \frac{6e^x}{x} y(x) = 0.$$

Como os limites

$$\lim_{x\to 0}(2x) = 0,$$
$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 \frac{6e^x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(6xe^x) = 0,$$

existem e são finitos, o ponto $x_0 = 0$ é singular regular.

Para usar o método da série de potências na resolução de equações diferenciais todos os coeficientes que acompanham as derivadas precisam ser potências de $x$. Mas esse não é o caso do terceiro somando em (5.8.1), onde aparece uma função exponencial.

A serie de Maclaurin da função exponencial é:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots . \tag{5.8.2}$$

Este resultado está demonstrado em vídeo aqui.

Como primeira aproximação toma-se somente o primeiro somando em (5.8.2). Isto é, perto de $x = 0$, vale que $e^x \approx 1$. Com isso, a equação diferencial (5.8.1) é reescrita como:

$$xy'' + 2xy'(x) + 6y(x) = 0. \tag{5.8.3}$$

Pelo Teorema de Frobenius deve existir uma solução na forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \tag{5.8.4}$$

onde os $a_n, r \in \mathbb{R}$, com $n = 0, 1, 2, \cdots$ , são os coeficientes a serem determinados.

Assume-se que a série em (5.8.4) seja convergente com algum raio de convergência $R_1 > 0$. Derivando (5.8.4) tem-se

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n-1}. \tag{5.8.5}$$

Também assume-se que a série em (5.8.5) seja convergente com algum raio de convergência $R_2 > 0$. Derivando (5.8.5) segue

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2}. \tag{5.8.6}$$

Substituindo (5.8.4), (5.8.5), (5.8.6) em (5.8.3) encontra-se:

$$x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} + 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

O $x$, o $2x$ e 6 fora dos somatórios são escritos dentro dos mesmos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^{n+r} = 0.$$

O $x^r$ pode ser colocado em evidência:

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+r)x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^{n}\right] = 0.$$

O segundo e terceiro somatório podem ser unificados:

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[2a_n(n+r) + 6a_n\right] x^{n}\right] = 0.$$

Para que a potência inicial de $x$ nos dois somatórios seja a mesma o elemento correspondente a $n = 0$ no primeiro deve ser escrito explicitamente fora do mesmo:

$$x^r\left[a_0 r(r-1)x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n-1} + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty}[2a_n(n+r) + 6a_n]x^{n}\right] = 0.$$

Os valores iniciais dos índices dos somatórios devem ser iguais. Isto será feito através de uma troca simultânea de variáveis:

$$\text{primeira série: } k = n - 1 \rightarrow n = k + 1, \text{ se } n = 1, \text{ então } k = 0,$$

$$\text{segunda serie: } k = n \rightarrow n = k, \text{ se } n = 0, \text{ então } k = 0.$$

Assim tem-se:

$$x^r \left[ a_0 r(r-1)x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+r+1)(k+r)x^k + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} [2a_k(k+r) + 6a_k]x^k \right] = 0.$$

Unificando os somatórios:

$$x^r \left[ a_0 r(r-1)x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[ a_{k+1}(k+r+1)(k+r) + 2a_k(k+r) + 6a_k \right] x^k \right] = 0.$$

Reescrevendo o zero da direita segue:

$$a_0 r(r-1)x^{r-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[ a_{k+1}(k+r+1)(k+r) + 2a_k(k+r+3) \right] x^{k+r} =$$
$$= 0 = 0 \cdot x^{r-1} + \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^{k+r}.$$

A última equação deve ser entendida como uma igualdade de polinômios:

$$a_0 r(r-1) = 0, \tag{5.8.7}$$

$$a_{k+1}(k+r+1)(k+r) + 2a_k(k+r+3) = 0, \ \forall k \geq 0. \tag{5.8.8}$$

A equação (5.8.7) é chamada indicial. Como $a_0 \neq 0$ as soluções, ou expoentes na singularidade, são i) $r = r_1 = 1$ e ii) $r = r_2 = 0$. Este é o tipo II, onde $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$. De (5.8.8) escreve-se a equação geral de recorrência (primeira ordem):

$$a_{k+1} = \frac{-2(k+r+3)a_k}{(k+r+1)(k+r)}, \ \forall k \geq 0. \tag{5.8.9}$$

Para encontrar a primeira solução utiliza-se o maior valor $r = r_1 = 1$. A equação (5.8.9) se transforma em:

$$a_{k+1} = \frac{-2(k+4)a_k}{(k+1)(k+2)}, \ \forall k \geq 0. \tag{5.8.10}$$

Em (5.8.10) avaliam-se os primeiros valores de $k$:

$$k = 0 \to a_1 = \frac{-2 \cdot 4 \cdot a_0}{1 \cdot 2},$$

$$k = 1 \to a_2 = \frac{-2 \cdot 5 \cdot a_1}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \cdot 5}{2 \cdot 3} \cdot \frac{-2 \cdot 4 \cdot a_0}{1 \cdot 2} = \frac{(-2)^2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a_0}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$k = 2 \to a_3 = \frac{-2 \cdot 6 \cdot a_2}{3 \cdot 4} = \frac{-2 \cdot 6}{3 \cdot 4} \cdot \frac{(-2)^2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a_0}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{(-2)^3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot a_0}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Dos resultados anteriores conjetura-se:

$$a_n = \frac{(-2)^n \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3) \cdot a_0}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n(n+1)}, \ \forall n \geq 1.$$

Colocando $a_0 = 1$ e lembrando que neste caso $r = 1$ volta-se em (5.8.4):

$$y_1(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n(n+1)} x^{n+1}. \tag{5.8.11}$$

Podem ser escritos de forma explícita os primeiros termos do somatório anterior:

$$y_1(x) = x - 4x^2 + \frac{20}{3}x^3 - \frac{20}{3}x^4 + \cdots . \tag{5.8.12}$$

Como este é o tipo II e $r_2 = 0$ a segunda solução deve ser procurada com a forma:

$$y_2(x) = E y_1(x) \ln x + \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(0) x^n\right],$$

onde $C_0(0) \neq 0$ e $E \in \mathbb{R}$. A resolução de um problema análogo está disponível em três vídeos iniciando aqui.

## 5.9 Função Gama de Euler

A função Gama (representada pela letra maiúscula grega Γ) foi definida por Euler. Quando $x$ é um número real positivo é calculada por uma integral imprópria convergente

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \tag{5.9.1}$$

ou, trocando $x$ por $x + 1$,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt. \tag{5.9.2}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

**Proposição 2.** *Quando $x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ vale que*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{5.9.3}$$

*Demonstração.* Usaremos a fórmula de integração por partes

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

Para a integral em (5.9.2) consideramos $u(t) = t^x$ e $dv(t) = e^{-t}dt$. Derivando e integrando em relação a $t$ segue que $du(t) = xt^{x-1}$ e $v(t) = -e^{-t}$. Logo,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t}\big|_0^\infty - \int_0^\infty xt^{x-1}(-1)e^{-t}dt,$$

$$\Gamma(x+1) = \lim_{t\to\infty}\left(-t^x e^{-t}\right) - \cancelto{0}{0^x} \cdot \cancelto{1}{e^{-0}} + x \underbrace{\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,}$$

$$\Gamma(x+1) = \cancelto{0}{\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-t^x}{e^t}\right)} + x\Gamma(x).$$

Na última linha utilizou-se que a exponencial cresce muito mais rápido que a função potência e a equação (5.9.1). □

**Proposição 3.** *Quando $n \in \mathbb{N}$ vale que*

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{5.9.4}$$

*Demonstração.* Inicia-se calculando $\Gamma(1)$ da equação (5.9.1):

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \cancelto{1}{t^{1-1}} e^{-t}dt = \int_0^\infty e^{-t}dt,$$

$$\Gamma(1) = \lim_{\delta\to\infty}\left[\int_0^\delta e^{-t}dt\right] = \lim_{\delta\to\infty}\left[-e^{-t}\big|_0^\delta\right],$$

$$\Gamma(1) = \lim_{\delta\to\infty}\left[-e^{-\delta} - (-1)\cancelto{1}{e^0}\right] = \lim_{\delta\to\infty}\left[-\frac{1}{e^\delta} + 1\right],$$

$$\Gamma(1) = \lim_{\delta\to\infty}\left[-\frac{1}{e^\delta}\right] + \lim_{\delta\to\infty}[1] = 0 + 1 = 1.$$

Como $\Gamma(1) = 1$ e pela Proposição 2 vale que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, então

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 \cdot 1 = 1!,$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2!,$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!,$$

$$\vdots$$

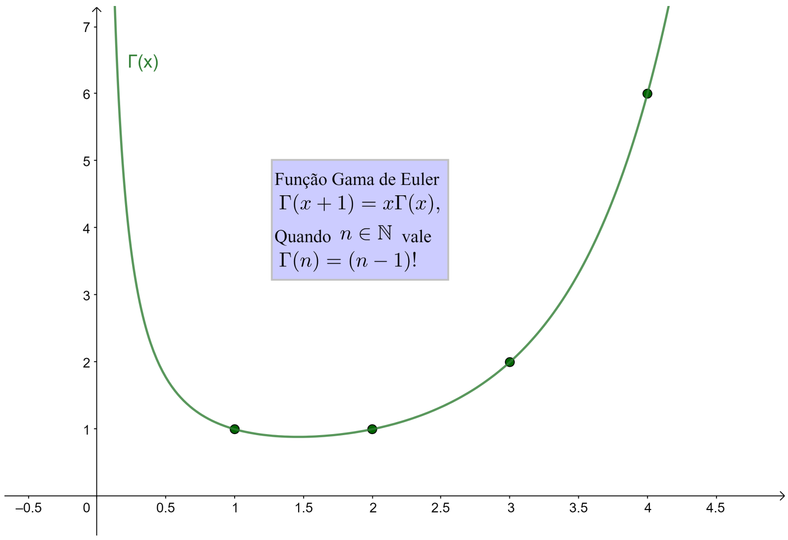
$$\Gamma(n) = (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = (n-1) \cdot (n-2)! = (n-1)!,$$

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!.$$

□

A Figura 5.9.1 mostra a função Gama de Euler para $x > 0$.

Figura 5.9.1: Função Gama de Euler para $x > 0$. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

Uma apresentação em vídeo da função Gama de Euler está disponível aqui.

## 5.10 Equação de Bessel

A equação diferencial de Bessel pode ser representada por

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + \left(x^2 - \nu^2\right) y(x) = 0, \tag{5.10.1}$$

onde $\nu \geq 0$ é um parâmetro real.

A equação de Bessel aparece em problemas de ondas eletromagnéticas em guias cilíndricos, condução de calor em um objeto cilíndrico, modos de vibração de uma membrana acústica circular fina como um tambor, problemas de difusão, entre outras. Na solução de problemas em

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

sistemas de coordenadas cilíndricas, obtém-se funções de Bessel de ordem inteira; em problemas esféricos, obtém-se ordens semi-inteira.

O ponto $x_0 = 0$ anula o primeiro somando de (5.10.1), logo é um ponto singular da equação diferencial. Para saber se é regular ou irregular reescreve-se (5.10.1) na sua forma padrão:

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \frac{x^2-\nu^2}{x^2}y(x) = 0.$$

Como os limites

$$\lim_{x\to 0}\left(\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\cancel{x^2}\cdot\frac{x^2-\nu^2}{\cancel{x^2}}\right) = -\nu^2,$$

existem, o ponto $x_0 = 0$ é singular regular.

Pelo Teorema de Frobenius deve existir uma solução na forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \tag{5.10.2}$$

onde os $a_n, r \in \mathbb{R}$, com $n = 0, 1, 2, \cdots$ , são os coeficientes a serem determinados.

Assume-se que a série em (5.10.2) seja convergente com algum raio de convergência $R_1 > 0$. Derivando (5.10.2) tem-se

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n-1}. \tag{5.10.3}$$

Também assume-se que a série em (5.10.3) seja convergente com algum raio de convergência $R_2 > 0$. Derivando (5.10.3) segue

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2}. \tag{5.10.4}$$

Substituindo (5.10.2), (5.10.3), (5.10.4) em (5.10.1) encontra-se:

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} +$$

$$+\left(x^2-\nu^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Utilizando a lei distributiva o último somatório separa em outros dois:

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1}+$$
$$+x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}-\nu^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}=0.$$

As funções na frente dos somatório escrivem-se dentro do mesmo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2}-\sum_{n=0}^{\infty} \nu^2 a_n x^{n+r}=0.$$

O primeiro, segundo e quarto somatórios podem ser unificados:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left[(n+r)^2-\nu^2\right]x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2}=0.$$

O $x^r$ pode ser colocado em evidência:

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left[(n+r)^2-\nu^2\right]x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}\right]=0.$$

Para que a potência inicial de $x$ nos dois somatórios seja a mesma os elementos correspondentes a $n=0$ e $n=1$ no primeiro devem ser escritos explicitamente fora do mesmo:

$$x^r\left[a_0\left(r^2-\nu^2\right)+a_1\left[(r+1)^2-\nu^2\right]x+\sum_{n=2}^{\infty} a_n\left[(n+r)^2-\nu^2\right]x^{n}+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}\right]=0.$$

Os valores iniciais dos índices dos somatórios devem ser iguais. Isto será feito através de uma troca simultânea de variáveis:

$$\text{primeira série: } k=n\rightarrow n=k,\ \text{se } n=2,\ \text{então } k=2,$$

$$\text{segunda serie: } k=n+2\rightarrow n=k-2,\ \text{se } n=0,\ \text{então } k=2.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Assim tem-se:

$$x^r \left[ a_0 \left(r^2 - \nu^2\right) + a_1 \left[(r+1)^2 - \nu^2\right] x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left[(k+r)^2 - \nu^2\right] x^k + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k \right] = 0.$$

Unificando os somatórios:

$$x^r \left[ a_0 \left(r^2 - \nu^2\right) + a_1 \left[(r+1)^2 - \nu^2\right] x + \sum_{k=2}^{\infty} \left( a_k \left[(k+r)^2 - \nu^2\right] + a_{k-2} \right) x^k \right] = 0.$$

A última equação deve ser entendida como uma igualdade de polinômios:

$$a_0 \left(r^2 - \nu^2\right) = 0, \tag{5.10.5}$$

$$a_1 \left[(r+1)^2 - \nu^2\right] = 0, \tag{5.10.6}$$

$$a_k \left[(k+r)^2 - \nu^2\right] + a_{k-2} = 0, \ \forall k \geq 2. \tag{5.10.7}$$

A equação (5.10.5) é chamada indicial. Como $a_0 \neq 0$ as soluções, ou expoentes na singularidade, são i) $r = r_1 = \nu$ e ii) $r = r_2 = -\nu$.

De (5.10.7) escreve-se a equação geral de recorrência (segunda ordem):

$$a_k = \frac{-a_{k-2}}{(k+r)^2 - \nu^2}, \ \forall k \geq 2. \tag{5.10.8}$$

Para encontrar a primeira solução utiliza-se o maior valor $r = r_1 = \nu$. A equação (5.10.8) se transforma em:

$$a_k = \frac{-a_{k-2}}{(k+\nu)^2 - \nu^2}, \ \forall k \geq 2. \tag{5.10.9}$$

Substituindo $r = r_1 = \nu$ em (5.10.6) encontra-se:

$$a_1 \left[(\nu+1)^2 - \nu^2\right] = 0,$$

$$a_1(2\nu + 1) = 0.$$

Como $2\nu + 1 \neq 0$ segue que $a_1 = 0$. Com este último resultado e a equação de recorrência (5.10.9) chega-se a:

$$a_{2n+1} = 0, \ \forall n \geq 0. \tag{5.10.10}$$

Isto é, na primeira solução todos os coeficientes de subíndice ímpar se anulam.

Desenvolvendo o binômio ao quadrado no denominador de (5.10.9) e simplificando encontra-se:

$$a_k = \frac{-a_{k-2}}{k(k+2\nu)}, \ \forall k \geq 2. \tag{5.10.11}$$

Para simplificar o estudo, no que segue serão feitas três mudanças de variáveis. Primeira, $n = k - 2$. Logo, $k = n + 2$ e a equação (5.10.11) se transforma em:

$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+2\nu+2)}, \ \forall n \geq 0. \tag{5.10.12}$$

Segunda, como procuram-se coeficientes de subíndices pares será feita a troca de variáveis $n + 2 = 2s$ em (5.10.12):

$$a_{2s} = \frac{-a_{2s-2}}{2^2 s(s+\nu)}, \ \forall s \geq 1, \ s \in \mathbb{N}. \tag{5.10.13}$$

Terceira, retornamos a letra $n$ como subíndice. Isto é, $n = s$. Com isto (5.10.13) muda para:

$$a_{2n} = \frac{-a_{2n-2}}{2^2 n(n+\nu)}, \ \forall n \geq 1, \ n \in \mathbb{N}. \tag{5.10.14}$$

Em (5.10.14) avaliam-se os primeiros valores de $n$:

$$n = 1 \to a_2 = \frac{-a_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (\nu+1)},$$

$$\begin{aligned} n = 2 \to a_4 = \frac{-a_2}{2^2 \cdot 2 \cdot (\nu+2)} &= \frac{-1}{2^2 \cdot 2 \cdot (\nu+2)} \cdot \frac{-a_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (\nu+1)} = \\ &= \frac{a_0}{2^4 \cdot 2! \cdot (\nu+1)(\nu+2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 3 \to a_6 = \frac{-a_4}{2^2 \cdot 3 \cdot (\nu+3)} &= \frac{-1}{2^2 \cdot 3 \cdot (\nu+3)} \cdot \frac{a_0}{2^4 \cdot 2! \cdot (\nu+1)(\nu+2)} = \\ &= \frac{-a_0}{2^6 \cdot 3! \cdot (\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}, \end{aligned}$$

Dos resultados anteriores conjetura-se:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\cdots(\nu+n)}, \ \forall n \geq 1. \tag{5.10.15}$$

O valor de $a_0$ é uma constante arbitrária. Porém, devido a simplificações que serão feitas adiante é dado um valor específico para $a_0$ relacionado com a função Gama de Euler:

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}. \tag{5.10.16}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Com o valor anterior para $a_0$ volta-se em (5.10.15):

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} \cdot n! \cdot \Gamma(\nu+1) \cdot (\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\cdots(\nu+n)}, \ \forall n \geq 1. \tag{5.10.17}$$

Pelo uso repetido da propriedade $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu+1) \cdot (\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\cdots(\nu+n) &= \\ = \Gamma(\nu+2) \cdot (\nu+2)(\nu+3)\cdots(\nu+n) &= \\ = \Gamma(\nu+3) \cdot (\nu+3)\cdots(\nu+n) &= \\ = \cdots = \Gamma(\nu+n) \cdot (\nu+n) &= \\ = \Gamma(\nu+n+1). \end{aligned}$$

Com o resultado anterior volta-se em (5.10.17):

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} \cdot n! \cdot \Gamma(\nu+n+1)}, \ \forall n \geq 0. \tag{5.10.18}$$

Pela definição feita para $a_0$ em (5.10.16) o mesmo também pode ser calculado usando (5.10.18), motivo pelo qual o valor de $n$ começa em 0.

A série em (5.10.2) pode ser dividida em duas para considerar os coeficientes pares e ímpares por separado:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n+r}, \tag{5.10.19}$$

Substituindo (5.10.10) e (5.10.18) em (5.10.19) e lembrando que neste caso $r = \nu$ encontra-se a função de Bessel, de primeira especie, de ordem $\nu$. Isto é, $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}. \tag{5.10.20}$$

Analogamente, para $r = -\nu$ encontra-se a função de Bessel, de primeira especie, de ordem $-\nu$. Isto é, $J_{-\nu}(x)$:

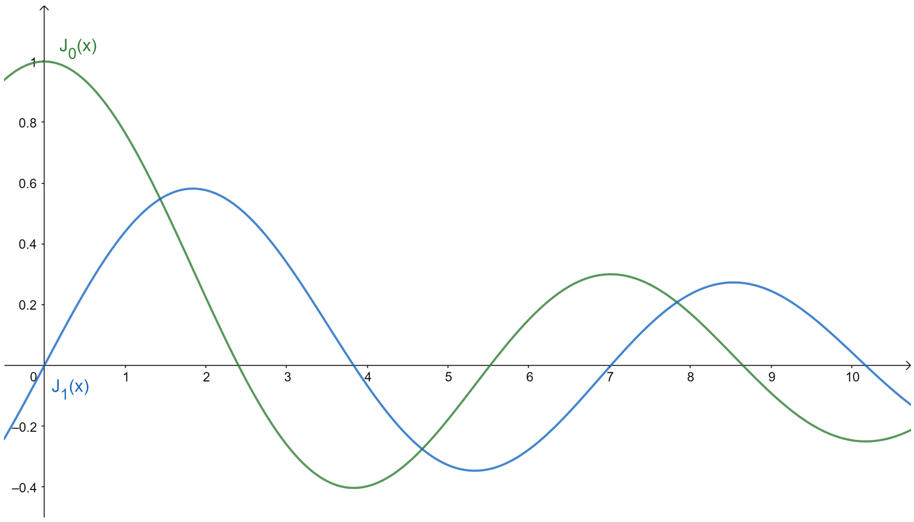
$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(-\nu+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}. \tag{5.10.21}$$

Pode ser provado usando o Teste da Razão que as séries que definem $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ são convergentes quando $x \in (0, \infty)$.

Se $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$. Isto é, as funções $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ não são linearmente independentes.

A Figura 5.10.1 mostra aproximações das funções $J_0(x)$ e $J_1(x)$.

Figura 5.10.1: Aproximações das funções $J_0(x)$ e $J_1(x)$. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

A seguir resumem-se os casos quando i) $\nu = 0$ ii) $\nu = \frac{1}{2}$ e iii) $\nu = 1$.

## 5.10.1 $\nu = 0$, Tipo III

No caso i) $\nu = 0$, como $r_1 = r_2 = 0$ a primeira solução básica da equação (5.10.1) pode ser escrita como:

$$y_1(x) = J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \tag{5.10.22}$$

Utilizo-se que $\Gamma(n+1) = n!$. A segunda solução é escrita com um termo logarítmico adicional:

$$y_2(x) = J_0(x) \cdot \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},\ x > 0,$$

onde

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

O $H_n$ é a soma parcial enésima da Série Harmônica.

Porém, com mais frequência é utilizada outra representação para a segunda solução básica da equação (5.10.1):

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[y_2(x) + [\gamma - \ln(2)]J_0(x)\right],\ x > 0. \tag{5.10.23}$$

Na equação (5.10.23) o valor de $\gamma$ é chamado de constante de Euler-Mascheroni:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right) \approx 0,5772.$$

A função $Y_0(x)$ é chamada função de Bessel, de segunda especie, de ordem zero.

A solução geral para a equação diferencial de Bessel quando $\nu = 0$ é uma combinação linear das funções (5.10.22) e (5.10.23):

$$y_{gh}(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x),\ x > 0,$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Quando $x \to +\infty$ podem ser encontradas aproximações assintóticas de (5.10.22) e (5.10.23):

$$J_0(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),\ x \to +\infty$$

$$Y_0(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right),\ x \to +\infty.$$

### 5.10.2 $\nu = \frac{1}{2}$, Tipo II, sem termo logarítmico

No caso ii) $\nu = \frac{1}{2}$, como $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = -\frac{1}{2}$ e $r_1 - r_2 = 1 \in \mathbb{N}$ se classifica como Tipo II. Aqui as funções $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ e $J_{\frac{1}{2}}(x)$ são linearmente independentes e a segunda solução não tem termo logarítmico.

As soluções básicas podem ser escritas como:

$$y_1(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\cdot\Gamma(\frac{3}{2}+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}}. \tag{5.10.24}$$

$$y_1(x) = J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\cdot\Gamma(\frac{1}{2}+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\frac{1}{2}}. \tag{5.10.25}$$

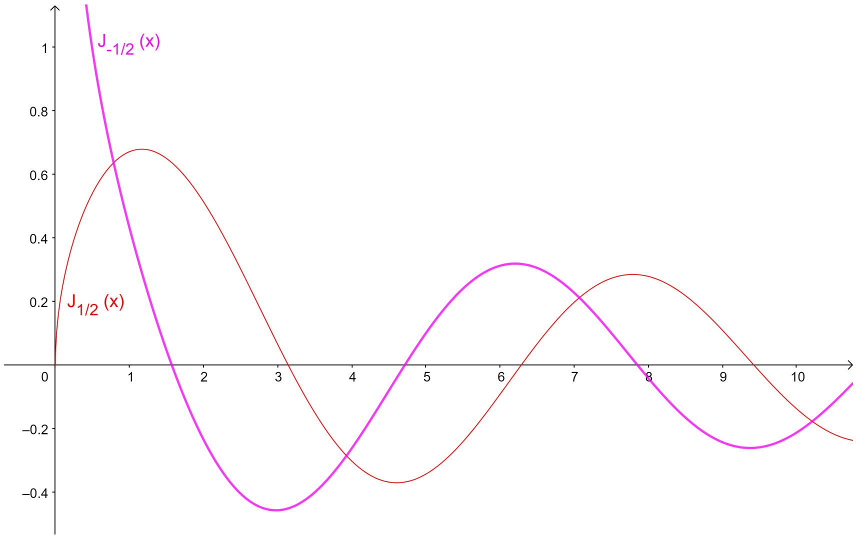
As equações (5.10.24) e (5.10.25) podem ser escritas de forma exata como:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(x),$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(x).$$

A Figura 5.10.2 mostra as funções $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ e $J_{\frac{1}{2}}(x)$.

Figura 5.10.2: Funções $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ e $J_{\frac{1}{2}}(x)$. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

A solução geral para a equação diferencial de Bessel quando $\nu = \frac{1}{2}$ é uma combinação linear das funções $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ e $J_{\frac{1}{2}}(x)$:

$$y_{gh}(x) = C_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x),$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

### 5.10.3 $\nu = 1$, Tipo II, com termo logarítmico

No caso iii) $\nu = 1$, como $r_1 = 1$, $r_2 = -1$ e $r_1 - r_2 = 2 \in \mathbb{N}$ se classifica como Tipo II. Aqui as funções $J_{-1}$ e $J_1(x)$ não são linearmente independentes e a segunda solução tem um termo logarítmico.

A primeira solução básica pode ser escrita como:

$$y_1(x) = J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}. \tag{5.10.26}$$

Utilizo-se que $\Gamma(n+2) = (n+1)!$. A segunda solução é escrita com um termo logarítmico adicional:

$$y_2(x) = -J_1(x) \cdot \ln(x) + \frac{1}{x}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left[H_n - H_{n-1}\right]}{n!(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right], \; x > 0,$$

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

Porém, com mais frequência é utilizada outra representação para a função anterior:

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}\left[-y_2(x) + [\gamma - \ln(2)]J_1(x)\right], \ x > 0. \tag{5.10.27}$$

A função $Y_1(x)$ é chamada função de Bessel, de segunda especie, de ordem um. A solução geral para a equação diferencial de Bessel quando $\nu = 1$ é uma combinação linear das funções (5.10.26) e (5.10.27):

$$y_{gh}(x) = C_1 J_1(x) + C_2 Y_1(x), \ x > 0,$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

A discussão anterior está disponível em quatro vídeos iniciando aqui.

LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023175.

# Capítulo 6

# Referências Bibliográficas

[1] William E. Boyce e Richard C. Diprima, **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno,** Editora: LTC; 10ª edição (19 fevereiro 2015), ISBN-10: 8521627351, ISBN-13: 978-8521627357, 680 páginas.

[2] Dennis G. Zill, **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem,** Editora: Cengage, segunda edição (2011), ISBN-10: 852211059X, ISBN-13: 978-8522110599, 410 páginas.

[3] Hamilton Luiz Guidorizzi, A.L. **Um Curso de Cálculo**. Editora LTC; 6ª edição (2018), 636 páginas, ISBN-10 : 8521635435, ISBN-13: 978-8521635437.

[4] James Stewart, **Cálculo vol.II,** Editora: Cengage Learning, quarta edição (2017), ISBN-10: 8522125848, ISBN-13: 978-8522125845, 672 páginas.

[5] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045. Acesso em: 08 out. 2021.

[6] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023106. Acesso em: 08 out. 2021.

[7] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN

978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023113. Acesso em: 08 out. 2021.

[8] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática v.3.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023144. Acesso em: 08 out. 2021.

[9] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática.** 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881. Acesso em: 08 out. 2021.

[10] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO),** v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. Disponível em: https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715. Acesso em: 08 out. 2021.

[11] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdvol17ermac202023169664jllabagfb127138. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 08 out. 2021.

[12] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdvol18202023169664jllabagfb7888. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 08 out. 2021.

[13] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdvol19202023169664jll118127. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 08 out. 2021.

---

[14] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, ISSN 2316-9664, v. 20, p. 22–40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdvol20202123169664jlljpmsafj2240. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 08 out. 2021.

[15] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825. Acesso em: 08 out. 2021.

[16] JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas.** Livro: Conhecimentos pedagógicos e conteúdos disciplinares das ciências exatas e da terra, DOI do Livro: 10.22533/at.ed.242213108, ISBN: 978-65-5983-424-2, 2021. Páginas: 161-175. Disponível em DOI do Capítulo: 10.22533/at.ed.24221310814. Acesso em: 08 out. 2021.

ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book)