

**Geometria: Soluções detalhadas para 20  
problemas de Olimpíadas Internacionais  
de Matemática. v. 2.**

**Prof. Dr. JUAN LÓPEZ LINARES**

JUAN LÓPEZ LINARES

**Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas  
Internacionais de Matemática. v. 2.**

DOI: 10.11606/9786587023113

Pirassununga - SP  
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)  
2020

# UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**Reitor:** Prof. Dr. Vahan Agopyan

**Vice-Reitor:** Prof. Dr. Antonio Carlos Hernandes

## FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

<http://www.fzea.usp.br>

**Diretora:** Profa. Dra. Elisabete Maria Macedo Viegas

**Vice-Diretor:** Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da  
Universidade de São Paulo

L864g	López Linares, Juan Geometria: soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v. 2 / Juan López Linares. -- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 69 p.  ISBN 978-65-87023-11-3 (e-book) DOI: 10.11606/9786587023113  1. Olimpíadas Internacionais de Matemática. 2. Ensino Médio. 3. Ensino universitário. 4. Geometria Plana Euclidiana. 5. Problemas resolvidos. I. Título.
-------	---

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

**Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.**



*Dedico este livro a minha família.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos Professores-Estudantes do curso de “Geometria, com o uso do software gratuito Geogebra, na solução de problemas de Olimpíadas e Vestibulares” que me motivaram a escrever este livro eletrônico.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

## AUTOR

Dr. JUAN LÓPEZ LINARES.

Professor Doutor 2 do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Atualmente ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de “Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio” e “Geometria, com o uso do software gratuito Geogebra, na solução de problemas de Olimpíadas e Vestibulares” para professores. Desenvolve projetos de pesquisa nas áreas de ensino e resolução de problemas de Olimpíadas.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respectivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela UFSCar em 2019. Segue link para uma lista de publicações do autor.

## **Título Curto**

Vinte Desafios de Geometria Plana Euclidiana II

## **Título Longo**

Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v. 2.

## **Resumo**

Este é o terceiro livro eletrônico do autor dedicado a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática. Nos dois anteriores foram discutidos desafios de Álgebra e Planimetria. Nesta oportunidade são apresentadas outras vinte questões de Geometria plana. O texto conta com 50 figuras que facilitam acompanhar as soluções. Muitos dos exercícios tem como complemento gráficos interativos no site do Geogebra e vídeos no YouTube. São discutidos assuntos como: trigonometria, quadriláteros notáveis e cíclicos, ângulos na circunferência, potência de um ponto e eixo radical, congruência e semelhança de triângulos e cálculo de área. Tipicamente cada questão usa conhecimentos ligados a mais de um ramo do conhecimento. A exposição procura que o material possa de fato ser lido e estudado por estudantes de língua portuguesa (e talvez espanhola) que se preparam para as fases finais das olimpíadas nacionais ou internacionais e vestibulares. Se espera também que a presente abordagem sirva de apoio aos professores do Ensino Médio que se aventuram em tópicos mais avançados. Em comparação com outras soluções disponíveis, as apresentadas neste texto usam argumentos menos rebuscados e um número menor de transições a serem preenchidas pelo leitor.

**Palavras Chaves:** Olimpíadas Internacionais de Matemática, Ensino Médio, Ensino Universitário, Geometria Plana Euclidiana, Problemas Resolvidos

### **Short Title**

Twenty Euclidean Plane Geometry Challenges II

### **Long Title**

Geometry: Detailed solutions to 20 problems in International Mathematical Olympiads. v. 2.

### **Abstract**

This is the third author's e-book dedicated to solving international mathematics Olympics problems. In the previous two, Algebra and Planimetry challenges were discussed. In this opportunity twenty other questions of plane geometry are presented. The text has 50 figures that make it easy to follow the solutions. Many of the exercises are complemented by interactive graphics on the Geogebra website and videos on YouTube. Subjects such as: trigonometry, notable and cyclic quadrilaterals, angles in the circumference, power of a point and radical axis, congruence and similarity of triangles and area calculation are discussed.

Typically each question uses knowledge linked to more than one branch of knowledge. The exhibition seeks that the material can, in fact, be read and studied by students of Portuguese (and perhaps Spanish) who are preparing for the final stages of national or international Olympics and vestibulars. The present approach is also expected to support high school teachers who venture into more advanced topics. In comparison with other available solutions, those presented in this text use less elaborate arguments and a smaller number of transitions to be completed by the reader.

**Keywords:** International Mathematical Olympiads, High School Education, University Teaching, Euclidean Plane Geometry, Problems Solved



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
1.1	Enunciados dos problemas . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Trigonometria e quadriláteros notáveis</b>	<b>16</b>
2.1	Ângulos, triângulos isósceles e equiláteros. P2 NE IGO 2015. . . . .	16
2.1.1	Resolução . . . . .	16
2.2	Trigonometria, triângulos isósceles e retângulos. P3 NE IGO 2015. . . . .	19
2.2.1	Resolução-1 . . . . .	19
2.2.2	Resolução-2 . . . . .	20
2.3	Ângulos, lei dos cossenos, paralelogramo. P3 NE IGO 2018. . . . .	22
2.3.1	Resolução-1 . . . . .	22
2.3.2	Resolução-2 . . . . .	24
2.4	Paralelogramos, áreas e retângulos. P4 NE IGO 2015. . . . .	25
2.4.1	Resolução . . . . .	25
2.4.2	Generalização . . . . .	26
2.5	Teorema de Pitágoras, triângulos isósceles, completar a construção. P1 NI IGO 2018. . . . .	28
2.5.1	Resolução . . . . .	28
2.6	Triângulos isósceles, semelhança e congruência. P2 NI IGO 2018. . . . .	30
2.6.1	Resolução . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Ângulos na circunferência</b>	<b>32</b>
3.1	Mediana relativa a hipotenusa, ângulos inscritos e de segmento e quadriláteros cíclicos. P1 NE IGO 2014-5. . . . .	32
3.1.1	Resolução . . . . .	32
3.2	Incírculo, ângulos inscritos e de segmento e semelhança de triângulos. P2 NE IGO 2014-5. . . . .	34
3.2.1	Resolução . . . . .	34

3.3	Arcos de circunferências, desigualdade triangular e circuncirculo. P5 NE IGO 2014-5. . . . .	36
3.3.1	Resolução . . . . .	37
3.4	Ângulos Inscritos e de Segmento. Tangente comum a duas circunferências. P1 NA IGO 2018. . . . .	38
3.4.1	Resolução . . . . .	38
3.5	Ângulos na circunferência, circuncentro e ortocentro. P2 NA IGO 2018. . . . .	40
3.5.1	Resolução . . . . .	40
3.6	Tangência a uma circunferência, ângulos inscritos e de segmento, potência de um ponto e eixo radical. P8 NA IGO 2014-5. . . . .	42
3.6.1	Resolução . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Quadriláteros Inscritíveis</b>	<b>45</b>
4.1	Ortocentro, quadrilátero inscritível e ângulos na circunferência. P3 NE IGO 2014-5. . . . .	45
4.1.1	Resolução . . . . .	45
4.2	Ângulos, quadriláteros inscritíveis, circunferências. P4 NE IGO 2018. . . . .	47
4.2.1	Resolução . . . . .	47
4.3	Ângulos na circunferência, quadriláteros cíclicos, circuncentro e triângulos isósceles. P1 NI IGO 2015. . . . .	50
4.3.1	Resolução-1 . . . . .	50
4.3.2	Resolução-2 . . . . .	51
4.4	Quadriláteros cíclicos, circuncentro e mediana num triângulo retângulo. P2 NI IGO 2015. . . . .	52
4.4.1	Resolução-1 . . . . .	53
4.4.2	Resolução-2 . . . . .	54
4.5	Quadriláteros cíclicos, ângulos na circunferência e colinearidade. P3 NI IGO 2015. . . . .	55
4.5.1	Resolução-1 . . . . .	56
4.5.2	Resolução-2 . . . . .	57
4.6	Quadriláteros inscritíveis, Semelhança e Congruência. P3 NI IGO 2018. . . . .	58
4.6.1	Resolução . . . . .	58
4.7	Quadriláteros inscritíveis, ângulos na circunferência e circuncirculo. P4 NI IGO 2015. . . . .	61
4.7.1	Resolução . . . . .	61
4.8	Quadriláteros cíclicos, potência de um ponto relativo a uma circunferência e semelhança de triângulos. P7 NA IGO 2014-5. . . . .	62
4.8.1	Resolução . . . . .	62



# Capítulo 1

## Introdução

Em um e-book anterior [1] apresentamos vinte problemas de planimetria. Nesta oportunidade são discutidos outros 20 desafios de Geometria Plana Euclidiana. O texto conta com 50 figuras que facilitam acompanhar a resolução. A maior parte dos desafios tem como complemento os gráficos interativos no site do Geogebra e vários a resolução em vídeo no YouTube.

Este livro faz parte de um projeto de longo prazo de resolução de problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemáticas. Outras publicações anteriores são [2], [3], [4], [5] e [6].

A Geometria é muito ampla. Escolhemos discutir alguns assuntos, mas sem a pretensão de esgotar o tema. Os problemas aparecem organizados em três capítulos. Porém, tipicamente cada desafio usa conhecimentos ligados a mais de uma área da Matemática.

Embora úteis e proveitosas, muitas resoluções apresentadas nos fóruns de problemas de Olimpíadas não detalham muitas transições, as quais ficam para o leitor. Os autores parecem supor que todos temos conhecimentos matemáticos suficientemente avançados. Adicionalmente, essas soluções se encontram frequentemente somente em inglês.

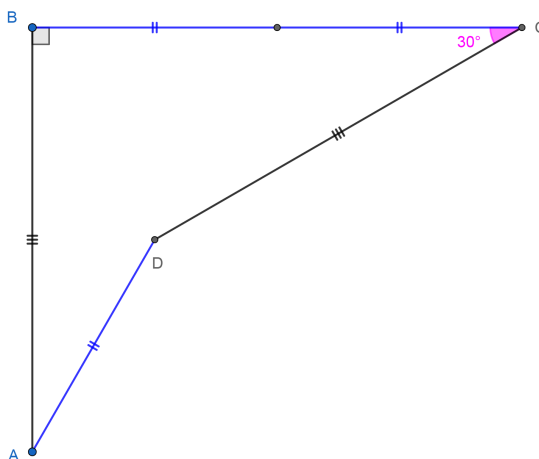
Nossa apresentação visa que o material possa de fato ser lido e estudado por estudantes de língua portuguesa (e talvez espanhola) que se preparam para as fases finais das olimpíadas nacionais ou internacionais. Esperamos também que a presente abordagem sirva de apoio aos professores do Ensino Médio que se aventuram em tópicos mais avançados. Em comparação com outras soluções disponíveis, as apresentadas neste texto usam argumentos menos rebuscados e um número menor de transições a serem preenchidas pelo leitor.

### 1.1 Enunciados dos problemas

**Problema 1** Seja  $ABC$  um triângulo com  $\angle A = 60^\circ$ . Os pontos  $M$ ,  $N$  e  $K$  estão nos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ , respectivamente, tal que  $BK = KM = MN = NC$ . Se  $AN = 2AK$ , encontrar os valores de  $\angle B$  e  $\angle C$ .

**Problema 2** Na figura a seguir sabemos que  $AB = CD$  e  $BC = 2AD$ . Provar que  $\angle BAD = 30^\circ$ .

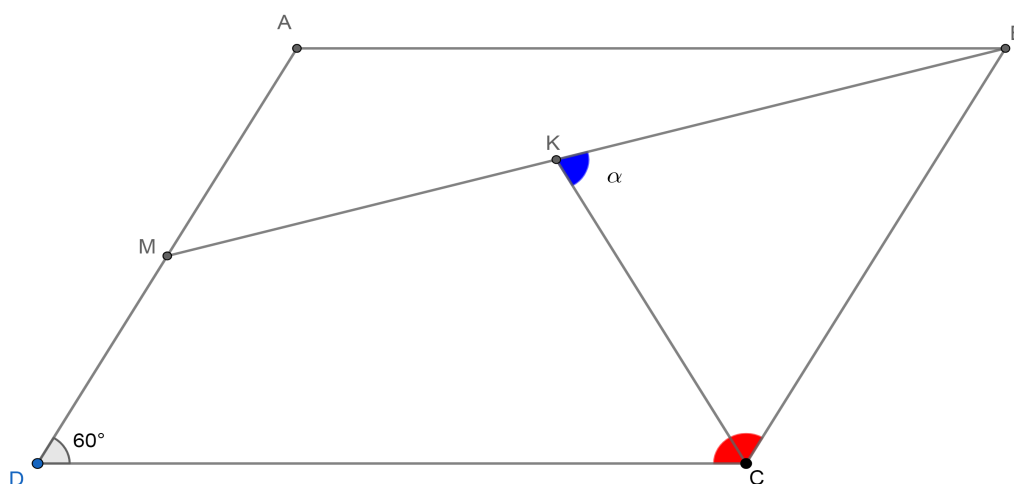
Figura 1.1.1: Ilustração do problema.



Fonte: O autor.

**Problema 3.** Na figura  $ABCD$  é um paralelogramo. Sabemos que  $\angle D = 60^\circ$ ,  $AD = 2$  e  $AB = \sqrt{3} + 1$ . O ponto  $M$  é o ponto médio de  $AD$ . O segmento  $CK$  é a bissetriz de  $C$ . Encontrar o ângulo  $BKC$ .

Figura 1.1.2: Ilustração do problema.

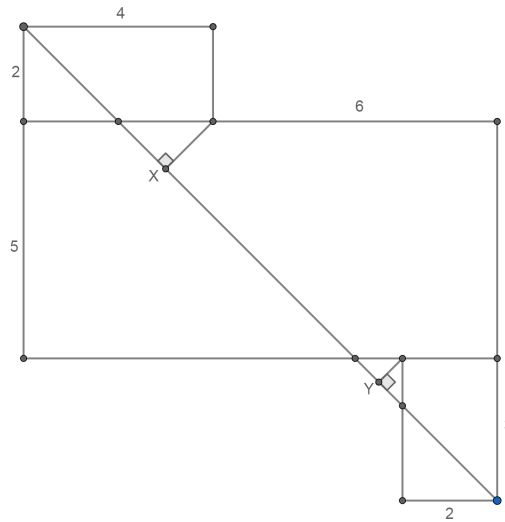


Fonte: O autor.

**Problema 4** No retângulo  $ABCD$  os pontos  $M$ ,  $N$ ,  $P$  e  $Q$  estão no lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  e  $DA$ , respectivamente, de modo que as áreas dos triângulos  $AQM$ ,  $BMN$ ,  $CNP$  e  $DPQ$  são iguais. Provar que o quadrilátero  $MNPQ$  é um paralelogramo.

**Problema 5.** Existem três retângulos na figura seguinte. Os comprimentos de alguns dos segmentos são mostrados. Achar o comprimento do segmento  $XY$ .

Figura 1.1.3: Ilustração do problema.



Fonte: O autor.

**Problema 6.** Em um quadrilátero convexo  $ABCD$ , as diagonais  $AC$  e  $BD$  se encontram no ponto  $P$ . Sabemos que  $\angle DAC = 90^\circ$  e  $2\angle ADB = \angle ACB$ . Se  $\angle DBC + 2\angle ADC = 180^\circ$  provar que  $2AP = BP$ .

**Problema 7** No triângulo retângulo  $ABC$  temos  $\angle A = 90^\circ$  e  $\angle C = 30^\circ$ . Denotamos por  $c$  a circunferência que passa por  $A$  e é tangente a  $BC$  no seu ponto médio. Assumir que  $c$  intersecta  $AC$  e a circunferência circunscrita do  $\triangle ABC$  em  $N$  e  $M$ , respectivamente. Provar que  $MN \perp BC$ .

**Problema 8** A circunferência inscrita no  $\triangle ABC$  toca os lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  em  $D$ ,  $E$  e  $F$ , respectivamente. Denotar os pés das perpendiculares de  $F$  e  $E$  a  $BC$  por  $K$  e  $L$ , respectivamente. Sejam as segundas interseções destas perpendiculares com o incírculo  $M$  e  $N$ , respectivamente. Representando com a letra  $S$  a área mostrar que

$$\frac{S(\triangle BMD)}{S(\triangle CND)} = \frac{KD}{LD}.$$

**Problema 9** Os pontos  $X$  e  $Y$  estão sobre o arco  $BC$  da circunferência circunscrita ao triângulo  $ABC$  (este arco não contém  $A$ ), de tal forma que  $\angle BAX = \angle CAY$ . Seja  $M$  o ponto médio da corda  $AX$ . Mostrar que  $BM + MC \geq AY$ .

**Problema 10** Duas circunferências  $w_1, w_2$  se intersectam nos pontos  $A$  e  $B$ . Sejam  $PQ$  uma linha tangente comum aos dois círculos com  $P \in w_1$  e  $Q \in w_2$  e um ponto arbitrário  $X \in w_1$ . A linha  $AX$  intersecta  $w_2$  pela segunda vez em  $Y$ . Os pontos  $Y' \neq Y$  estão em  $w_2$  de tal forma que  $QY = QY'$ . A linha  $Y'B$  intersecta  $w_1$  pela segunda vez em  $X'$ . Provar que  $PX = PX'$ .

**Problema 11** No triângulo acutângulo  $ABC$ ,  $\angle A = 45^\circ$ . Os pontos  $O, H$  são o circuncentro e o ortocentro de  $ABC$ , respectivamente.  $D$  é o pé da altura desde  $B$ .  $X$  é ponto médio do arco  $AH$  da circuncirculo do triângulo  $ADH$  que contém  $D$ . Provar que  $DX = DO$ .

**Problema 12** O triângulo  $ABC$  é acutângulo com  $AC > AB$ , de circunferência circunscrita  $c$  e circuncentro  $O$ . A linha tangente a  $c$  em  $A$  intersecta a continuação de  $BC$  em  $P$ .  $X$  é o ponto de  $OP$  tal que  $\angle AXP = 90^\circ$ . Os pontos  $E \in AB$  e  $F \in AC$  são escolhidos no mesmo lado de  $OP$  e satisfazem que  $\angle EXP = \angle ACX$  e  $\angle FXO = \angle ABX$ . Se  $K, L$  são os pontos de interseção de  $EF$  com  $c$ , mostrar que  $OP$  é tangente ao circuncirculo  $d$  do  $\triangle K LX$ .

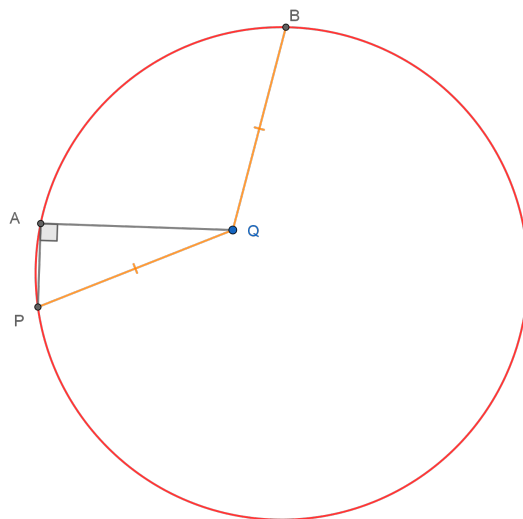
**Problema 13** Em um triângulo  $ABC$  temos  $\angle C = \angle A + 90^\circ$ . O ponto  $D$  na continuação de  $BC$  é tal que  $AC = AD$ . O ponto  $E$  está no lado de  $BC$  que não contém  $A$  e deve satisfazer que  $\angle EBC = \angle A$  e  $\angle EDC = \frac{1}{2}\angle A$ . Provar que  $\angle CED = \angle ABC$ .

**Problema 14.** É dado um círculo  $w$  no plano. Dois círculos com centros  $O_1, O_2$  estão contidos em  $w$  e são tangentes ao mesmo. A corda  $AB$  de  $w$  é tangente a esses dois círculos de modo que esses dois círculos estão em lados opostos dessa corda. Provar que  $\angle O_1AO_2 + \angle O_1BO_2 > 90^\circ$ .



**Problema 15** Na figura abaixo, os pontos  $P$ ,  $A$  e  $B$  pertencem a uma circunferência. O ponto  $Q$  está no interior do círculo de tal forma que  $\angle PAQ = 90^\circ$  e  $PQ = BQ$ . Provar que o valor de  $\angle AQB - \angle PQA$  é igual ao arco  $AB$ .

Figura 1.1.4: Ilustração do problema.



Fonte: O autor.

**Problema 16** Num triângulo acutângulo  $ABC$ ,  $BH$  é a altura relativa ao vértice  $B$ .  $D$  e  $E$  são pontos médios de  $AB$  e  $AC$ , respectivamente. O ponto  $F$  é a reflexão de  $H$  em relação a  $ED$ . Provar que a reta  $BF$  passa pelo circuncentro do  $\triangle ABC$ .

**Problema 17** No triângulo  $ABC$ ,  $M$ ,  $N$  e  $K$  são pontos médios dos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Sejam  $w_B$  e  $w_C$  semicircunferências de diâmetros  $AC$  e  $AB$ , respectivamente, fora dos triângulos. Supor que  $MK$  e  $MN$  intersectem  $w_C$  e  $w_B$  em  $X$  e  $Y$ , respectivamente. As tangentes em  $X$  e  $Y$  a  $w_C$  e  $w_B$ , respectivamente, se intersectam em  $Z$ . Provar que  $AZ \perp BC$ .

**Problema 18** Sejam  $w_1$ ,  $w_2$  circunferências com centros  $O_1$  e  $O_2$ , respectivamente.  $A$  e  $B$  os pontos de interseção de  $w_1$ ,  $w_2$ . A reta  $O_1B$  intersecta  $w_2$  pela segunda vez no ponto  $C$ , e a reta  $O_2A$  intersecta  $w_1$  pela segunda vez no ponto  $D$ . Seja  $X$  a segunda interseção de  $AC$  e  $w_1$  e  $Y$  a segunda interseção de  $BD$  com  $w_2$ . Provar que  $CX = DY$ .

**Problema 19** Seja  $ABC$  um triângulo equilátero com circuncirculo  $w$  e circuncentro  $O$ . Seja  $P$  um ponto no arco  $BC$  (o arco em que  $A$  não está). A reta tangente a  $w$  em  $P$  intersecta os prolongamentos de  $AB$  e  $AC$  em  $K$  e  $L$ , respectivamente. Mostrar que  $\angle KOL > 90^\circ$ .

**Problema 20** Um triângulo acutângulo  $ABC$  é dado. Uma circunferência de diâmetro  $BC$  intersecta  $AB$ ,  $AC$  em  $E$ ,  $F$ , respectivamente. Seja  $M$  o ponto médio de  $BC$  e  $P$  o ponto de interseção de  $AM$  e  $EF$ .  $X$  é um ponto no arco menor de  $EF$  e  $Y$  o segundo ponto de interseção de  $XP$  com a circunferência mencionada anteriormente. Mostrar que  $\angle XAY = \angle XYM$ .

## Capítulo 2

# Trigonometria e quadriláteros notáveis

### 2.1 Ângulos, triângulos isósceles e equiláteros. P2 NE IGO 2015.

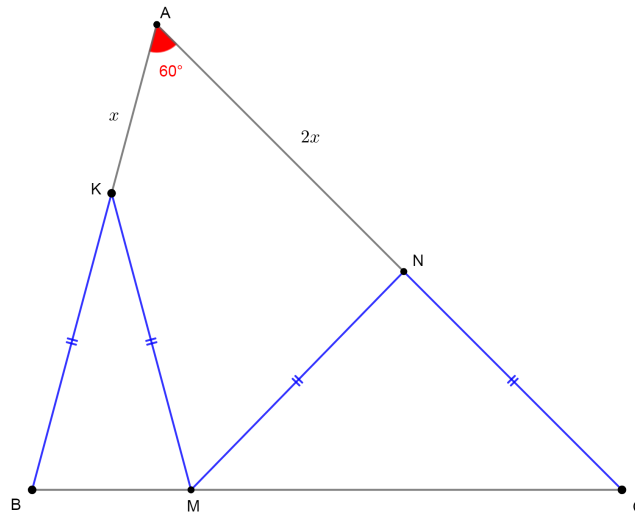
**Problema 1.** *Seja  $ABC$  um triângulo com  $\angle A = 60^\circ$ . Os pontos  $M$ ,  $N$  e  $K$  estão nos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ , respectivamente, tal que  $BK = KM = MN = NC$ . Se  $AN = 2AK$ , encontrar os valores de  $\angle B$  e  $\angle C$ .*

Problema 2 (Nível Elemental) da 2 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2015, proposto por Mahdi Etesami Fard [7].

#### 2.1.1 Resolução

A Figura 2.1.1 mostra uma construção geométrica inicial do problema.

Figura 2.1.1: Construção geométrica inicial do problema. Gráfico interativo no site do Geogebra em [8].



Fonte: O autor.

Seja  $P$  o ponto médio de  $AN$ . Como  $AK = AP$  e  $\angle KAP = 60^\circ$  temos que o  $\triangle KAP$  é equilátero. Segue que  $\angle AKP = \angle APK = 60^\circ$  e  $KP = AP = PN$ . Logo o  $\triangle PKN$  é isósceles de base  $KN$ . Como  $\angle KPN = 120^\circ$ , então  $\angle PKN = \angle PNK = 30^\circ$ .

Como  $MN = NC$  o  $\triangle NMC$  é isósceles de base  $MC$ . Sejam  $\angle NCM = \angle NMC = \alpha$ . Do  $\triangle ABC$  temos  $\angle ABC = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha = \angle KBM$ . Adicionalmente, de  $KB = KM$  o  $\triangle KBM$  é isósceles de base  $BM$ . Segue que  $\angle KBM = \angle KMB = 120^\circ - \alpha$ .

Notamos que  $\angle KMN = 60^\circ$ . Como  $KM = NM$  o  $\triangle KMN$  é equilátero. Logo,  $KN = MK$  e  $\angle MKN = \angle MNK = 60^\circ$ . Segue que  $\angle MNA = 90^\circ$  e no  $\triangle MNC$  temos  $\alpha = 45^\circ = \angle C$ . Finalmente, no  $\triangle KBM$  encontramos  $\angle BKM = 30^\circ$  e  $\angle KMB = \angle KBM = \angle B = 75^\circ$ .

Sejam  $AK = x$  e  $AN = 2x$ . No  $\triangle AKN$  usamos o teorema de Pitágoras para calcular

$$KN = \sqrt{AN^2 - AK^2} = \sqrt{3}x = KB.$$

Logo  $AB = (1 + \sqrt{3})x = (1 + \sqrt{3})AK$ . A seguir no  $\triangle ABC$  utilizamos a lei dos senos:

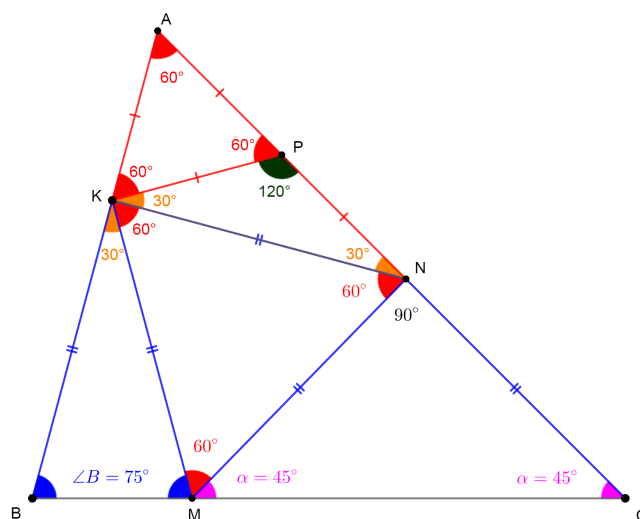
$$\frac{BC}{\sin(60^\circ)} = \frac{AB}{\sin(45^\circ)},$$

$$\frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{(1 + \sqrt{3})AK}{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$AK = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{BC}{1 + \sqrt{3}}.$$

O resultado anterior permite desenhar com precisão a Figura 2.1.2.

Figura 2.1.2: Guia para a resolução do problema. Gráfico interativo no site do Geogebra em [8].

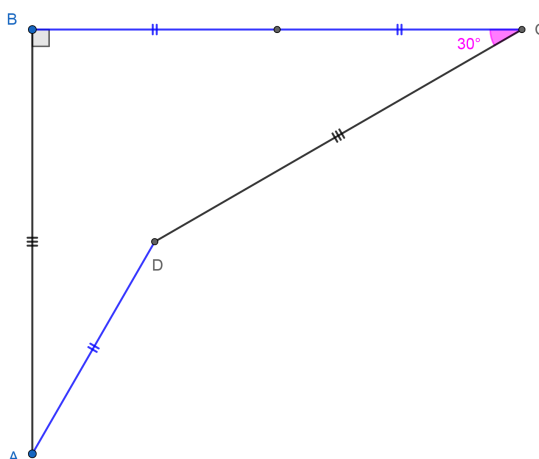


Fonte: O autor.

## 2.2 Trigonometria, triângulos isósceles e retângulos. P3 NE IGO 2015.

**Problema 2.** Na Figura 2.2.1 a seguir sabemos que  $AB = CD$  e  $BC = 2AD$ . Provar que  $\angle BAD = 30^\circ$ .

Figura 2.2.1: Ilustração do problema.



Fonte: O autor.

Problema 3 (Nível Elemental) da 2 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2015, proposto por Morteza Saghafian [7].

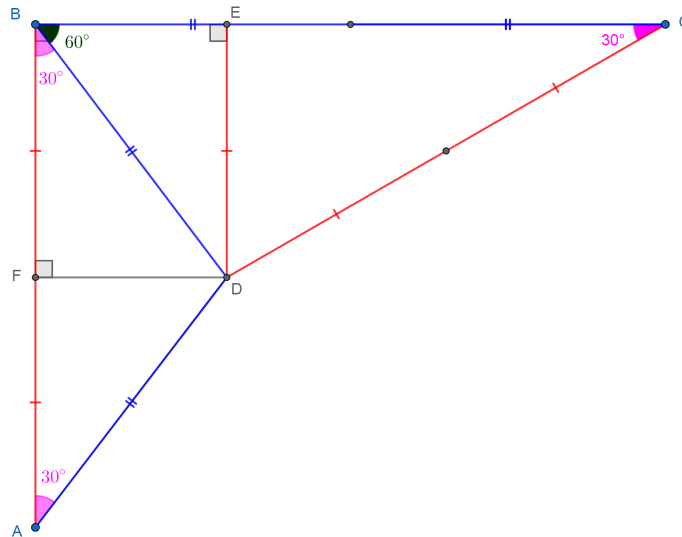
### 2.2.1 Resolução-1

Partindo do ponto  $D$  traçamos as perpendiculares a  $BC$  e  $AB$ . Sejam os pontos  $E$  e  $F$  as interseções, respectivamente. Como  $\angle FBE = 90^\circ$  o quadrilátero  $FBED$  é um retângulo e  $FB = DE$ . No  $\triangle DCE$  temos  $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} = \frac{DE}{DC}$ . Mas por hipótese  $DC = AB$ , logo  $F$  é ponto médio de  $AB$ .

Como  $DF$  é altura e mediana o  $\triangle DAB$  é isósceles de base  $AB$ . Logo  $AD = DB$  e  $\angle DAB = \angle DBA$ . Adicionalmente, de  $BC = 2AD$  segue  $\frac{DB}{BC} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2} = \sin(30^\circ)$ . Isto é, o  $\triangle BDC$  é retângulo em  $D$ . Concluimos que  $\angle DBC = 60^\circ$  e  $\angle DBA = \angle BAD = 30^\circ$ .

A Figura 2.2.2 mostra a construção geométrica correspondente a resolução-1 do problema.

Figura 2.2.2: Construção geométrica da resolução-1 do problema. Gráfico interativo no site do Geogebra em [9].



Fonte: O autor.

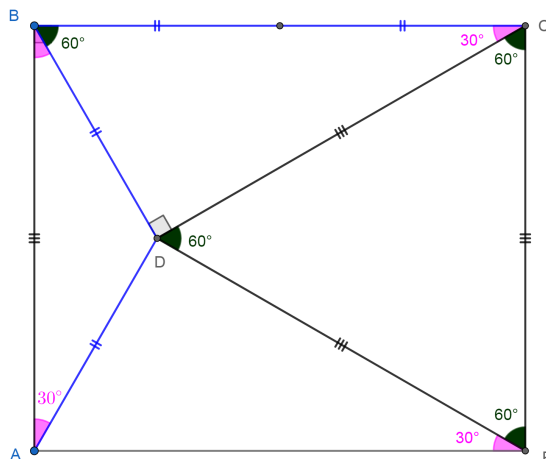
### 2.2.2 Resolução-2

Partindo do segmento  $CD$  construímos um triângulo equilátero  $DCP$  tal que  $\angle BCP = 90^\circ$ . O quadrilátero  $ABCP$  é um retângulo com  $AB = CP = DC$ . Temos  $\angle APD = \angle APC - \angle DPC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = \angle BCD$ .

Adicionalmente,  $AP = BC$  e  $PD = CD$ . Logo por LAL segue  $\triangle APD \equiv \triangle BCD$ . Consequentemente  $AD = BD$ , o  $\triangle DAB$  é isósceles de base  $AB$  e  $\angle DAB = \angle DBA$ .

Notamos ainda que  $BC = 2AD$ , segue  $\frac{DB}{BC} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2} = \text{sen}(30^\circ)$ . Isto é, o  $\triangle BDC$  é retângulo em  $D$ . Concluímos que  $\angle DBC = 60^\circ$  e  $\angle DBA = \angle BAD = 30^\circ$ . A Figura 2.2.3 mostra a construção geométrica correspondente a resolução-2 do problema.

Figura 2.2.3: Construção geométrica da resolução-2 do problema. Gráfico interativo no site do Geogebra em [10].



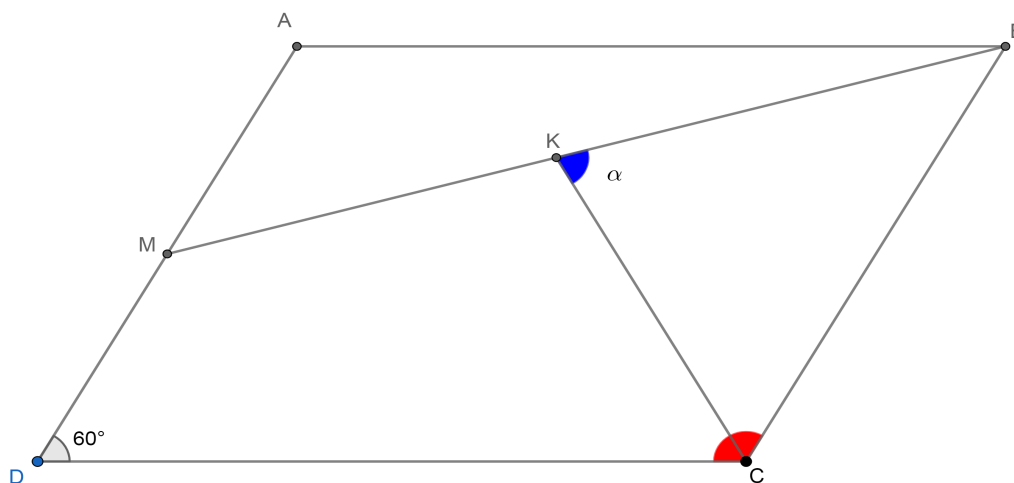
Fonte: O autor.

Uma solução em vídeo está disponível em [11].

## 2.3 Ângulos, lei dos cossenos, paralelogramo. P3 NE IGO 2018.

**Problema 3.** Na Figura 2.3.1  $ABCD$  é um paralelogramo. Sabemos que  $\angle D = 60^\circ$ ,  $AD = 2$  e  $AB = \sqrt{3} + 1$ . O ponto  $M$  é o ponto médio de  $AD$ . O segmento  $CK$  é a bissetriz de  $C$ . Encontrar o ângulo  $BKC$ .

Figura 2.3.1: Ilustração do problema.



Fonte: O autor.

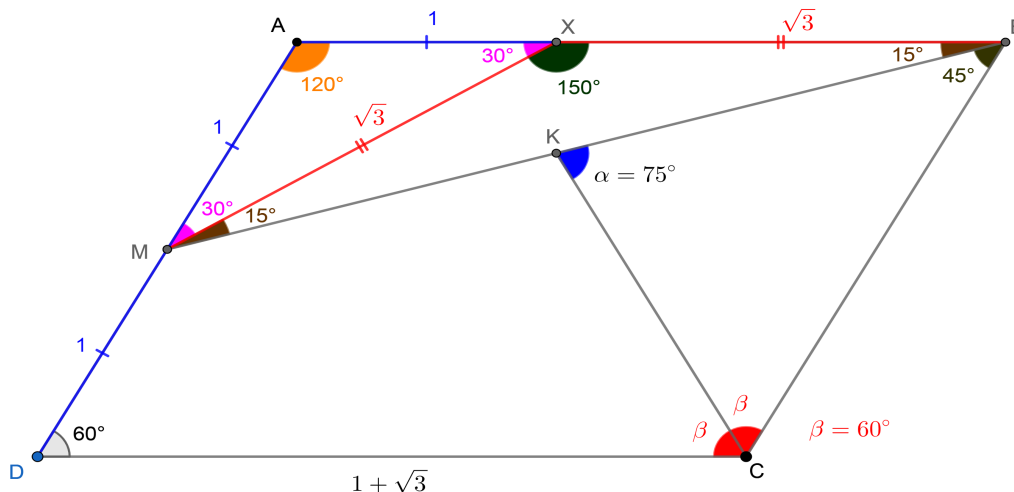
Problema 3 (Nível Elemental) da 5 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2018 [12].

### 2.3.1 Resolução-1

A Figura 2.3.2 ilustra uma construção geométrica possível para auxiliar na interpretação do problema.



Figura 2.3.2: Construção geométrica possível partindo do texto do problema para auxiliar na interpretação. Uma versão dinâmica da solução está disponível em [13].



Fonte: O autor.

Como o quadrilátero  $ABCD$  é um paralelogramo e  $\angle ADC = 60^\circ$  temos  $\angle ABC = 60^\circ$  e  $\angle BAD = \angle BCD = 120^\circ$ . Do segmento  $CK$  ser a bissetriz de  $\angle BCD$  segue que  $\angle BCK = \angle KCD = \beta = 60^\circ$ .

O fato de  $MA = 1$  e  $AB = 1 + \sqrt{3}$  sugere considerar um ponto  $X$  sobre  $AB$  tal que  $AX = AM = 1$  e  $XB = \sqrt{3}$ . A seguir esboçamos o segmento  $XM$ . Por construção, o triângulo  $AMX$  é isósceles de base  $MX$ , logo  $\angle AMX = \angle AXM = 30^\circ$ . O ângulo  $MXB$  é suplementar de  $MXA$ , logo  $\angle MXB = 150^\circ$ .

A seguir usaremos a Lei dos Cossenos no triângulo  $AMX$ :

$$MX^2 = AM^2 + AX^2 - 2AM \cdot AX \cdot \cos(\angle MAX),$$

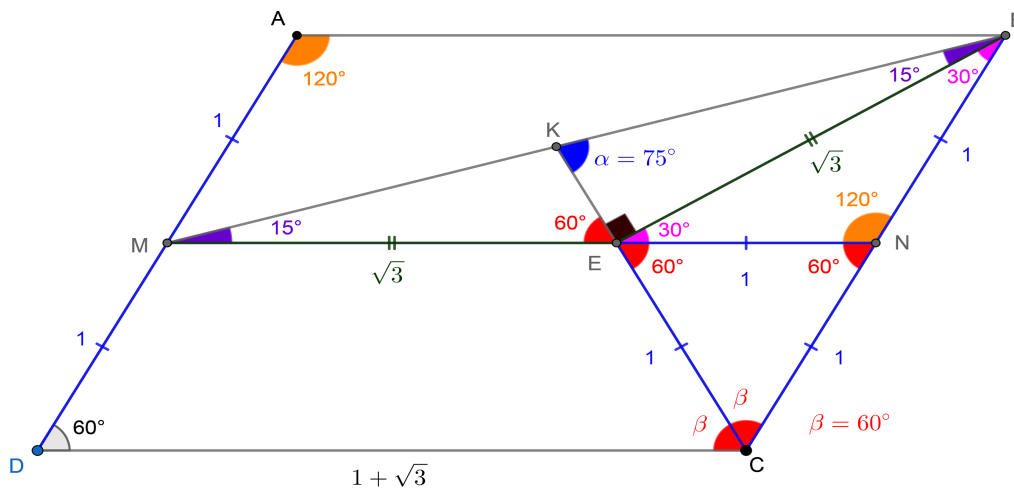
$$MX^2 = 1 + 1 - 2 \cos(120^\circ) = 2(1 + \cos(60^\circ)) = 3.$$

Segue que  $MX = \sqrt{3}$  e o triângulo  $MXB$  é isósceles de base  $MB$ . Logo,  $\angle XMB = \angle XBM = 15^\circ$ . Concluímos que  $\angle KBC = 45^\circ$  e  $\angle BKC = \alpha = 75^\circ$ .

### 2.3.2 Resolução-2

A Figura 2.3.3 ilustra uma construção geométrica possível para auxiliar na interpretação do problema.

Figura 2.3.3: Construção geométrica possível partindo do texto do problema para auxiliar na interpretação. Uma versão dinâmica está disponível em [14].



Fonte: O autor.

Como o quadrilátero  $ABCD$  é um paralelogramo e  $\angle ADC = 60^\circ$  temos  $\angle ABC = 60^\circ$  e  $\angle BAD = \angle BCD = 120^\circ$ . Do segmento  $CK$  ser a bissetriz de  $\angle BCD$  segue que  $\angle BCK = \angle KCD = \beta = 60^\circ$ .

Marcamos  $N$ , ponto médio do segmento  $BC$ , e traçamos  $NM$ . Segue que  $CD \parallel NM \parallel BA$  e  $CD = NM = BA$  pois  $NM$  é base média do paralelogramo  $ABCD$ . Seja o ponto  $E$  a interseção dos segmentos  $NM$  e  $CK$ . Temos  $\angle CEN = \angle ECD = 60^\circ$  por serem alternos entre paralelas e  $\angle CEN = \angle KEM = 60^\circ$  opostos pelo vértice. Segue que  $\angle ENC = 60^\circ$  e o triângulo  $ENC$  é equilátero com  $EN = NC = CE = 1$ . Adicionalmente  $ME = \sqrt{3}$ .

Os ângulos  $ENC$  e  $ENB$  são suplementares, logo  $\angle ENB = 120^\circ$ . O triângulo  $ENB$  é isósceles de base  $EB$ , segue que  $\angle NEB = \angle NBE = 30^\circ$  e  $\angle BEC = \angle BEK = 90^\circ$ . Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $BEC$  encontramos que  $BE = \sqrt{3}$ .

Como o triângulo  $BEM$  é isósceles de base  $BM$  e  $\angle BEM = 150^\circ$  temos  $\angle EMK = \angle EBK = 15^\circ$ . No triângulo  $BKE$  concluímos que  $\angle BKE = \angle BKC = \alpha = 75^\circ$ . Uma solução em vídeo está disponível em [15].

## 2.4 Paralelogramos, áreas e retângulos. P4 NE IGO 2015.

**Problema 4.** No retângulo  $ABCD$  os pontos  $M$ ,  $N$ ,  $P$  e  $Q$  estão no lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  e  $DA$ , respectivamente, de modo que as áreas dos triângulos  $AQM$ ,  $BMN$ ,  $CNP$  e  $DPQ$  são iguais. Provar que o quadrilátero  $MNPQ$  é um paralelogramo.

Problema 4 (Nível Elemental) da 2 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2015, proposto por Mahdi Etesami Fard [7].

### 2.4.1 Resolução

Sejam  $AB = CD = a$ ,  $AD = BC = b$ ,  $AM = x$ ,  $AQ = z$ ,  $PC = y$  e  $NC = t$ . Queremos provar que devemos ter  $x = y$ . Suponhamos, por absurdo, e sem perda de generalidade, que  $x > y$ . Logo devemos ter que

$$a - x < a - y. \quad (2.4.1)$$

Da igualdade das áreas do triângulos  $AQM$  e  $CNP$  segue que

$$zx = yt \Rightarrow z < t \Rightarrow b - t < b - z. \quad (2.4.2)$$

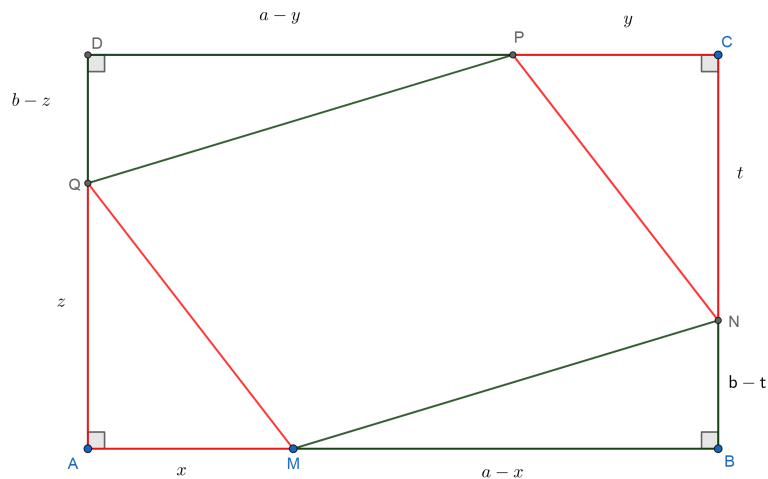
Pelas desigualdades (2.4.1) e (2.4.2) temos:

$$(a - x)(b - t) < (a - y)(b - z).$$

Mas a desigualdade anterior significa que a área do triângulo  $BMN$  é menor que a área do  $DPQ$ . Contradição. Concluimos que  $x = y$ . Analogamente se demonstra que  $z = t$ .

Por LAL temos que  $\triangle AMQ \equiv \triangle CPN$  e  $\triangle BMN \equiv \triangle DPQ$ . Consequentemente  $MQ = NP$  e  $MN = PQ$ . Como temos dois pares de lados congruentes o quadrilátero  $MNPQ$  é um paralelogramo. A Figura 2.4.1 mostra a construção geométrica correspondente a resolução do problema.

Figura 2.4.1: Construção geométrica da resolução do problema. Gráfico interativo no site do Geogebra em [16].



Fonte: O autor.

Na construção geométrica foi usado que somente um dos quatro pontos  $M$ ,  $N$ ,  $P$  e  $Q$  é independente. Do cálculo da área dos triângulos  $AMQ$  e  $DPQ$  temos:

$$xz = (a - y)(b - z) = (a - x)(b - z),$$

$$z = b\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Isto é, a área de cada triângulo pode ser escrita como:

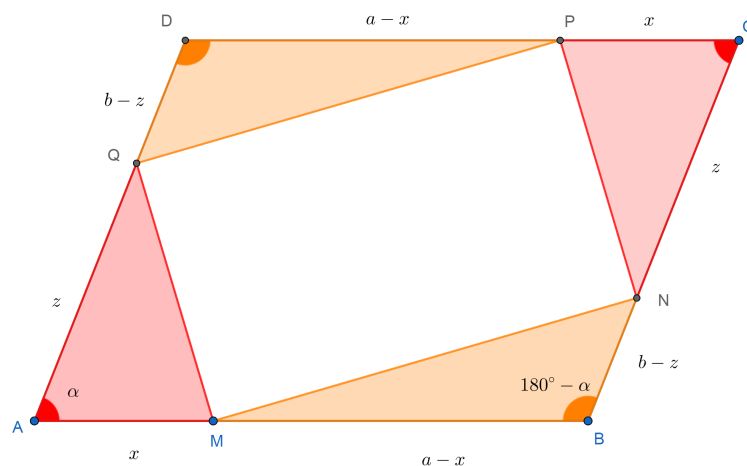
$$A_{TR}(x) = \frac{bx}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Pode ser provado que o máximo da área acima acontece quando  $x = \frac{a}{2}$ .

## 2.4.2 Generalização

A tese do problema continua valendo se o quadrilátero  $ABCD$  é um paralelogramo, não necessariamente retângulo. Isto é, sendo iguais as áreas dos triângulos  $AQM$ ,  $BMN$ ,  $CNP$  e  $DPQ$  o quadrilátero  $MNPQ$  é um paralelogramo. A Figura 2.4.2 mostra uma construção geométrica neste caso.

Figura 2.4.2: Construção geométrica partindo de um paralelogramo. Gráfico interativo no site do Geogebra em [17].



Fonte: O autor.

Na última construção geométrica foi usado que somente um dos quatro pontos  $M$ ,  $N$ ,  $P$  e  $Q$  é independente. Do cálculo da área dos triângulos  $AMQ$  e  $DPQ$  temos:

$$xz \operatorname{sen}(\alpha) = (a - x)(b - z) \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = (a - x)(b - z) \operatorname{sen}(\alpha),$$

$$z = b \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Isto é, a área de cada triângulo pode ser escrita como:

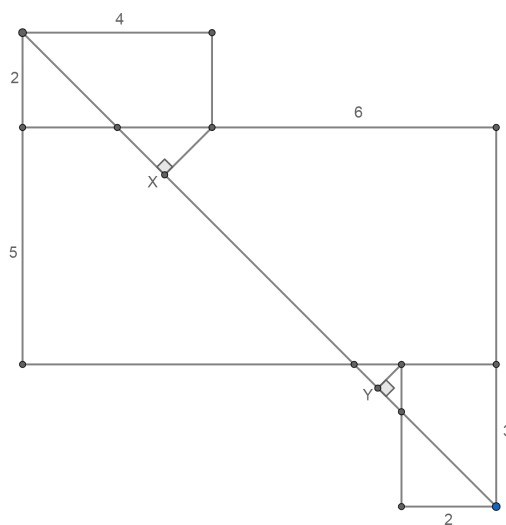
$$A_{TP}(x) = \frac{bx}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) \operatorname{sen}(\alpha).$$

Pode ser provado que o máximo da área acima acontece quando  $x = \frac{a}{2}$ .

## 2.5 Teorema de Pitágoras, triângulos isósceles, completar a construção. P1 NI IGO 2018.

**Problema 5.** *Existem três retângulos na figura seguinte. Os comprimentos de alguns dos segmentos são mostrados. Achar o comprimento do segmento  $XY$ .*

Figura 2.5.1: Ilustração do problema.



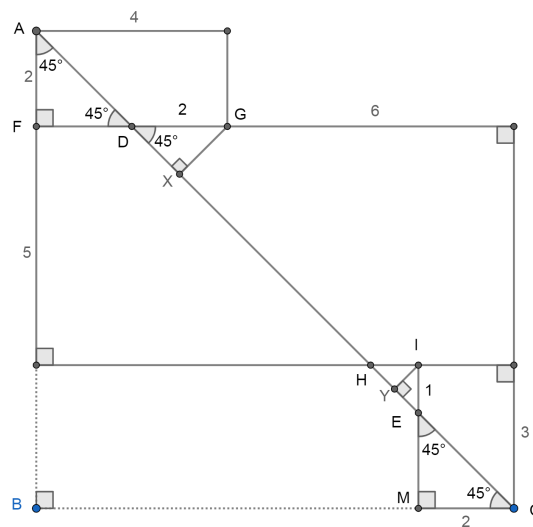
Fonte: O autor.

Problema 1 (Nível Intermediário) da 5 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2018, proposto por Hiran Aalipanah [12].

### 2.5.1 Resolução

A Figura 2.5.2 ilustra a resolução.

Figura 2.5.2: Guia para a resolução do problema. Solução no site do Geogebra em [18].



Fonte: O autor.

Pelo hipótese de termos três retângulos, iniciamos a solução prolongando uma linha vertical e outra horizontal para formar o triângulo isósceles  $ABC$ , retângulo em  $B$ . Notamos que  $AB = BC = 10$ ,  $\angle BAC = \angle BCA = 45^\circ$  e pelo Teorema de Pitágoras  $AC = 10\sqrt{2}$ .

Temos ainda que  $\angle ADF = \angle GDX = \angle CEM = \angle IEH = 45^\circ$ . Os triângulos  $AFD$  e  $CME$  são isósceles de base  $AD$  e  $EC$ , respectivamente, com  $FD = ME = 2$ . Analogamente, os triângulos  $DXG$  e  $EIH$  são isósceles de base  $DG$  e  $HE$ , respectivamente, com  $DG = 2$  e  $EI = 1$ . Usando novamente o Teorema de Pitágoras podemos calcular  $AD = 2\sqrt{2}$  e  $CE = 2\sqrt{2}$ .

Por outro lado, nos triângulos  $DXG$  e  $EIY$  encontramos  $DX = 2 \cos(45^\circ) = \sqrt{2}$  e  $YE = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Concluimos que

$$XY = AC - AD - DX - CE - YE,$$

$$XY = 10\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$XY = \frac{9}{2}\sqrt{2}.$$

## 2.6 Triângulos isósceles, semelhança e congruência. P2 NI IGO 2018.

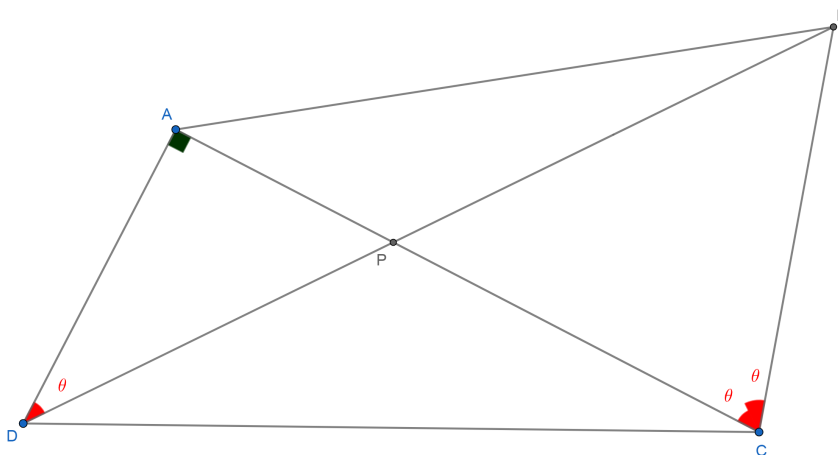
**Problema 6.** *Em um quadrilátero convexo  $ABCD$ , as diagonais  $AC$  e  $BD$  se encontram no ponto  $P$ . Sabemos que  $\angle DAC = 90^\circ$  e  $2\angle ADB = \angle ACB$ . Se  $\angle DBC + 2\angle ADC = 180^\circ$  provar que  $2AP = BP$ .*

Problema 2 (Nível Intermediário) da 5 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2018, proposto por Iman Maghsoudi [12].

### 2.6.1 Resolução

A Figura 2.6.1 mostra uma construção geométrica inicial para o problema.

Figura 2.6.1: Uma construção geométrica inicial. Solução no site do Geogebra em [19].



Fonte: O autor.

Seja o ponto  $M$  interseção da bissetriz do  $\angle PCB$  com  $PB$ . Como  $\angle ADP = \angle MCP = \theta$  e  $\angle APD = \angle MPC = 90^\circ - \theta$  por ângulo-ângulo temos  $\triangle ADP \sim \triangle MCP$ . Logo  $\angle PMC = \angle PAD = 90^\circ$ .

Adicionalmente, como  $MC$  é bissetriz e altura o triângulo  $CBP$  é isósceles de base  $BP$ . Segue que  $BC = PC$ ,  $MB = MP$  e  $\angle CBM = \angle CPM = 90^\circ - \theta$ . Por hipótese temos

$$\angle DBC + 2\angle ADC = 180^\circ,$$

$$90^\circ - \theta + 2\theta + 2\angle PDC = 180^\circ,$$



$$\theta + 2\angle PDC = 90^\circ. \tag{2.6.1}$$

No triângulo  $DMC$  temos

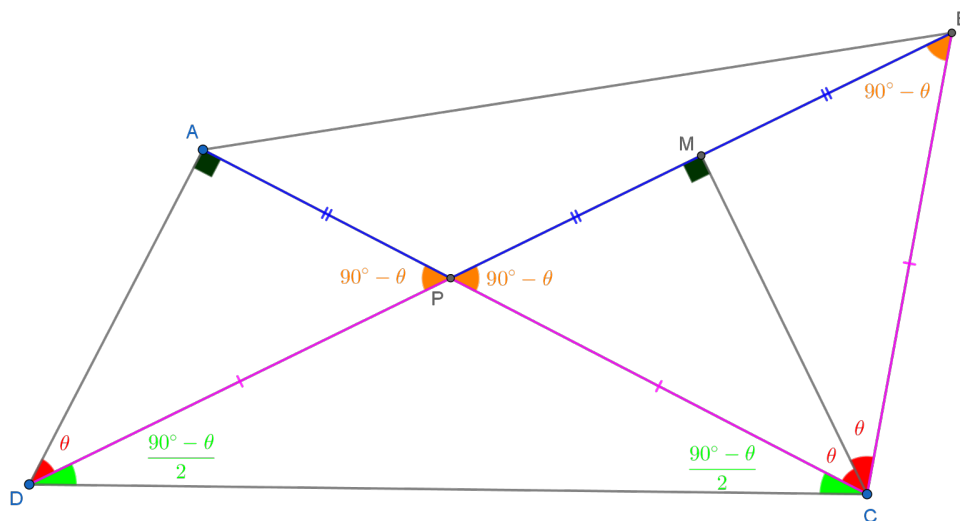
$$\theta + \angle PCD + \angle PDC = 90^\circ. \tag{2.6.2}$$

De (2.6.1) e (2.6.2) encontramos que

$$\angle PCD = \angle PDC = \frac{90^\circ - \theta}{2}.$$

Conseqüentemente o triângulo  $PCD$  é isósceles de base  $CD$ ,  $PD = PC$ . Por ALA  $\triangle ADP \equiv \triangle MCP$  e concluímos que  $PA = PM$  e  $2AP = BP$ . Uma solução em vídeo está disponível em [20]. A Figura 2.6.2 ilustra a resolução.

Figura 2.6.2: Guia para a resolução do problema. Solução no site do Geogebra em [19].



Fonte: O autor.

## Capítulo 3

### Ângulos na circunferência

#### 3.1 Mediana relativa a hipotenusa, ângulos inscritos e de segmento e quadriláteros cíclicos. P1 NE IGO 2014-5.

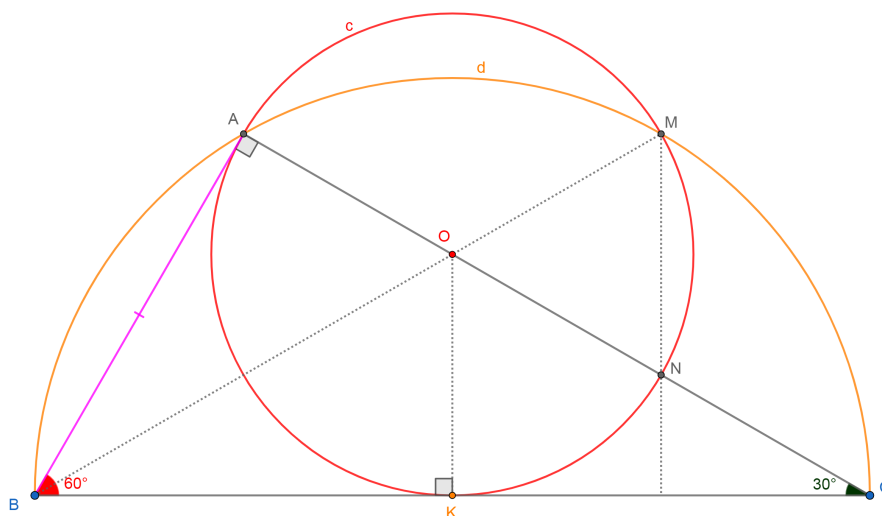
**Problema 7.** *No triângulo retângulo  $ABC$  temos  $\angle A = 90^\circ$  e  $\angle C = 30^\circ$ . Denotamos por  $c$  a circunferência que passa por  $A$  e é tangente a  $BC$  no seu ponto médio. Assumir que  $c$  intersecta  $AC$  e a circunferência circunscrita do  $\triangle ABC$  em  $N$  e  $M$ , respectivamente. Provar que  $MN \perp BC$ .*

Problema 1 (Nível Elemental) da 1 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2014-2015, proposto por Mahdi Etesami Fard [21].

##### 3.1.1 Resolução

A Figura 3.1.1 mostra uma construção geométrica inicial para o problema.

Figura 3.1.1: Uma construção geométrica inicial. Solução no site do Geogebra em [22].



Fonte: O autor.

Seja  $K$  o ponto médio do segmento  $BC$ . Para construir a circunferência  $c$  acima deve-se traçar uma perpendicular a  $BC$  passando por  $K$  e a mediatriz dos pontos  $A$  e  $K$ . As duas retas anteriores se interceptam no ponto  $O$ , centro de  $c$ . A semicircunferência  $d$  tem centro em  $K$ .

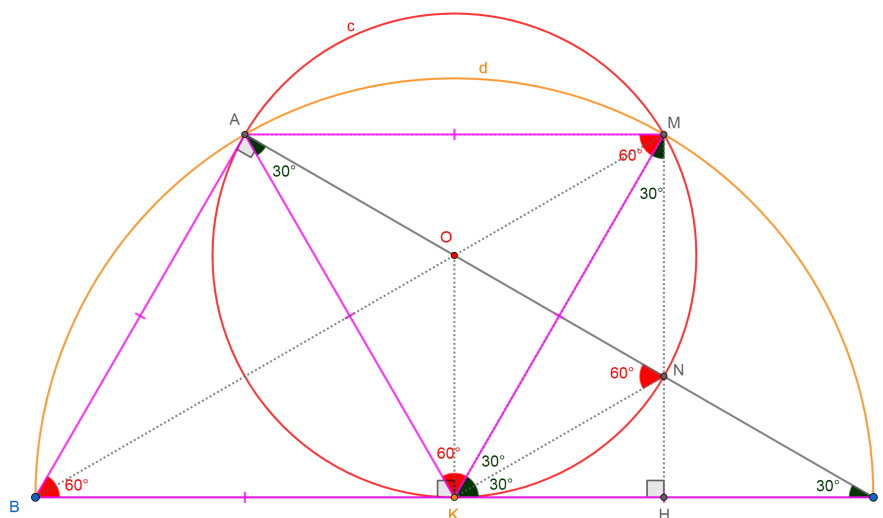
Como  $AK$  é mediana relativa a hipotenusa no triângulo  $ABC$  temos  $AK = BK = CK$ . Logo, o  $\triangle KAC$  é isósceles de base  $AC$  e  $\angle KAC = \angle KCA = 30^\circ$ .

Como  $BC$  é tangente a circunferência  $c$  o ângulo  $NKC$  é de segmento e o ângulo  $NAK$  é inscrito relativo a corda  $NK$ . Logo  $\angle NKC = \angle NAK = 30^\circ$ . Adicionalmente, por ângulo externo em  $N$  relativo ao triângulo  $NKC$ , temos  $\angle ANK = \angle NKC + \angle ACB = 60^\circ$ . Segue que  $\angle NKA = 90^\circ$  e o segmento  $AN$  é diâmetro de  $c$ .

Como o quadrilátero  $AKNM$  é cíclico por construção, então  $\angle KAN = \angle KMN = 30^\circ$  e  $\angle AMK = \angle ANK = 60^\circ$ . Por outro lado, o ponto  $K$  é o centro da circunferência  $d$  consequentemente  $KM = KA$ . Sendo  $\angle KMA = 60^\circ$ , segue que o  $\triangle AKM$  é equilátero e  $\angle AKM = 60^\circ$ . Logo  $\angle MKN = 30^\circ$  e  $\angle MKC = 60^\circ$ . Conclui-se que  $AM \parallel BC$  e  $MN \perp BC$ .

Pode-se verificar ainda que o  $\triangle ABK$  é equilátero e o quadrilátero  $ABKM$  é um losango. Uma solução em vídeo está disponível em [23]. A Figura 3.1.2 ilustra o problema resolvido.

Figura 3.1.2: Guia para a resolução do problema. Solução no site do Geogebra em [22].



Fonte: O autor.

### 3.2 Incírculo, ângulos inscritos e de segmento e semelhança de triângulos. P2 NE IGO 2014-5.

**Problema 8.** A circunferência inscrita no  $\triangle ABC$  toca os lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  em  $D$ ,  $E$  e  $F$ , respectivamente. Denotar os pés das perpendiculares de  $F$  e  $E$  a  $BC$  por  $K$  e  $L$ , respectivamente. Sejam as segundas interseções destas perpendiculares com o incírculo  $M$  e  $N$ , respectivamente. Representando com a letra  $S$  a área mostrar que

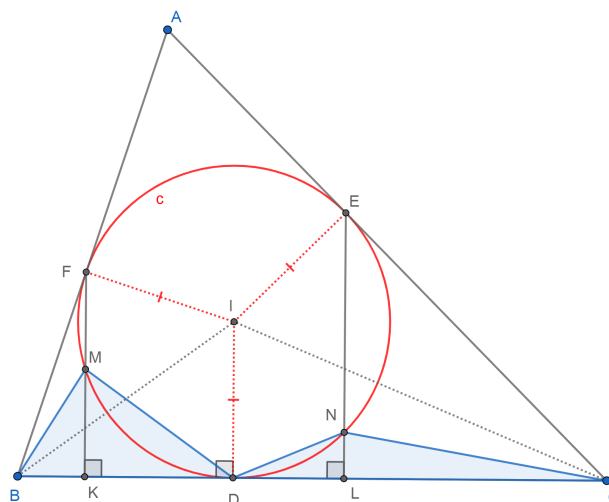
$$\frac{S(\triangle BMD)}{S(\triangle CND)} = \frac{KD}{LD}.$$

Problema 2 (Nível Elemental) da 1 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2014-2015, proposto por Mahdi Etesami Fard. [21].

#### 3.2.1 Resolução

A Figura 3.2.1 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 3.2.1: Uma construção geométrica inicial. Solução no site do Geogebra em [24].



Fonte: O autor.

Para construir a circunferência  $c$  acima devem-se traçar pelo menos duas bissetrizes internas do triângulo  $ABC$ . Estas se interceptam no ponto  $I$ , Incentro. Os segmentos  $ID$ ,  $IE$  e  $IF$  são raios de  $c$  e perpendiculares os lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ , respetivamente.

O  $\triangle BFD$  é isósceles de base  $FD$ , logo  $\angle BDF = \angle BFD = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$ . Por outro lado, no  $\triangle BKF$  temos  $\angle BFK = 90^\circ - \angle B$ . Segue dos dois resultados anteriores que  $\angle DFM = \frac{1}{2}\angle B$ .

Relativo a corda  $MD$  do incírculo encontramos um ângulo inscrito igual a um ângulo de segmento:  $\angle DFM = \angle MDK = \frac{1}{2}\angle B$ . Por ângulo-ângulo os triângulos  $MKD$  e  $IDB$  são semelhantes. Segue que

$$\frac{MK}{KD} = \frac{ID}{DB},$$

$$ID = DB \cdot \frac{MK}{KD}. \tag{3.2.1}$$

Analogamente, o  $\triangle CED$  é isósceles de base  $ED$ , logo  $\angle CDE = \angle CED = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}$ . Por outro lado, no  $\triangle CEL$  temos  $\angle CEL = 90^\circ - \angle C$ . Segue que  $\angle DEN = \frac{1}{2}\angle C$ .

Relativo a corda  $ND$  do incírculo encontramos um ângulo inscrito igual a um ângulo de segmento:  $\angle DEN = \angle NDL = \frac{1}{2}\angle C$ . Por ângulo-ângulo os triângulos  $NLD$  e  $IDC$  são semelhantes. Segue que

$$\frac{NL}{LD} = \frac{ID}{DC},$$

$$ID = DC \cdot \frac{NL}{LD}. \tag{3.2.2}$$

Das equações (3.2.1) e (3.2.2) temos

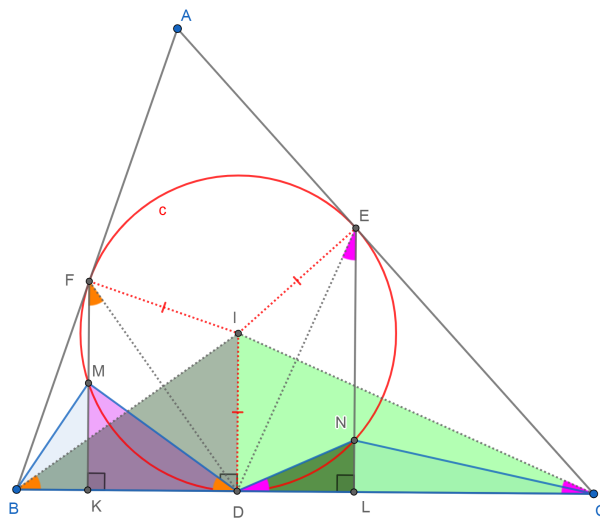
$$DB \cdot \frac{MK}{KD} = DC \cdot \frac{NL}{LD},$$

ou

$$\frac{DB \cdot MK}{DC \cdot NL} = \frac{KD}{LD}.$$

Esta última equação é equivalente ao pedido no enunciado do problema. Uma solução em vídeo está disponível em [25]. A Figura 3.2.2 ilustra a construção geométrica com o problema resolvido.

Figura 3.2.2: Guia para a resolução do problema. Solução no site do Geogebra em [24].



Fonte: O autor.

### 3.3 Arcos de circunferências, desigualdade triangular e circuncirculo. P5 NE IGO 2014-5.

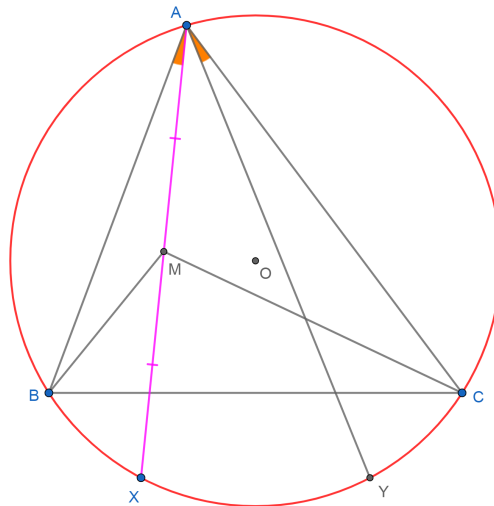
**Problema 9.** Os pontos  $X$  e  $Y$  estão sobre o arco  $BC$  da circunferência circunscrita ao triângulo  $ABC$  (este arco não contém  $A$ ), de tal forma que  $\angle BAX = \angle CAY$ . Seja  $M$  o ponto médio da corda  $AX$ . Mostrar que  $BM + MC \geq AY$ .

Problema 5 (Nível Elemental) da 1 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2014-2015, proposto por Mahan Tajrobekar. [21].

### 3.3.1 Resolução

A Figura 3.3.1 mostra a construção geométrica inicial do problema.

Figura 3.3.1: Construção geométrica inicial do problema. Solução no site do Geogebra em [26].



Fonte: O autor.

Como  $O$  é o circuncentro do  $\triangle ABC$ , temos  $OM \perp AX$ . Traçamos uma perpendicular a reta  $OM$  passando por  $B$  e marcamos o ponto  $Z$  como a interseção desta com o circuncirculo.

Sendo  $OM \perp BZ$ ,  $BZ$  uma corda e  $O$  o centro da circunferência, a reta  $OM$  é a mediatriz do segmento  $BZ$ . Logo,  $MZ = MB$ .

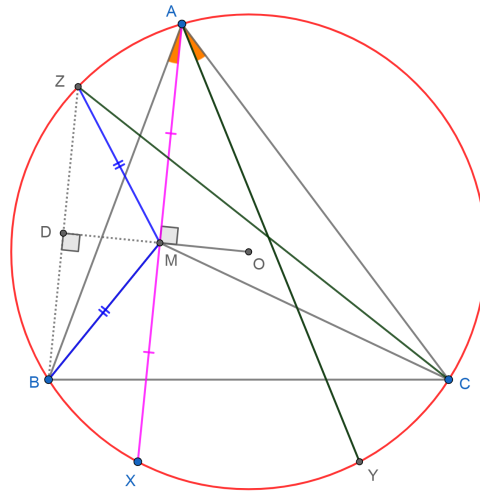
Pela desigualdade triangular aplicada no  $\triangle MZC$  temos  $BM + MC = ZM + MC \geq CZ$ . Vale a igualdade quando os pontos  $C$ ,  $M$  e  $Z$  são colineares.

Mas  $BZ \parallel AX$ , segue que

$$\widehat{AZ} = \widehat{BX} = \widehat{CY} \Leftrightarrow \widehat{ZAC} = \widehat{YCA} \Leftrightarrow CZ = AY.$$

Conseqüentemente,  $BM + MC \geq AY$ . Vale a igualdade quando os pontos  $C$ ,  $M$  e  $Z$  são colineares. A Figura 3.3.2 ilustra o problema resolvido.

Figura 3.3.2: Guia para a resolução do problema. Solução no site do Geogebra em [26].



Fonte: O autor.

Uma solução em vídeo está disponível em [27].

### 3.4 Ângulos Inscritos e de Segmento. Tangente comum a duas circunferências. P1 NA IGO 2018.

**Problema 10.** *Duas circunferências  $w_1$ ,  $w_2$  se intersectam nos pontos  $A$  e  $B$ . Sejam  $PQ$  uma linha tangente comum aos dois círculos com  $P \in w_1$  e  $Q \in w_2$  e um ponto arbitrário  $X \in w_1$ . A linha  $AX$  intersecta  $w_2$  pela segunda vez em  $Y$ . Os pontos  $Y' \neq Y$  estão em  $w_2$  de tal forma que  $QY = QY'$ . A linha  $Y'B$  intersecta  $w_1$  pela segunda vez em  $X'$ . Provar que  $PX = PX'$ .*

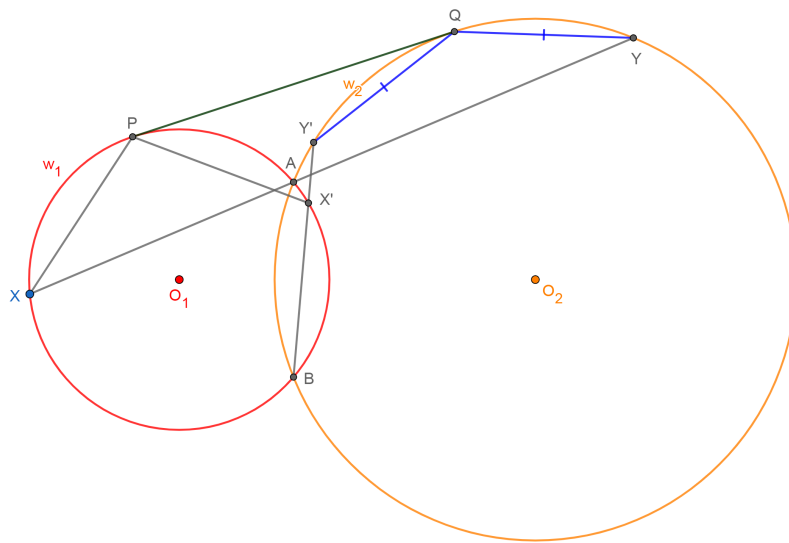
Problema 1 (Nível Avançado) da 5 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2018, proposto por Morteza Saghafian [12].

#### 3.4.1 Resolução

A Figura 3.4.1 ilustra uma construção geométrica inicial para o problema.



Figura 3.4.1: Uma construção geométrica inicial. Solução no site do Geogebra em [28].



Fonte: O autor.

Os passos para construir o segmento  $PQ$ , tangente comum as duas circunferências, podem ser encontrados em [29]. Temos que

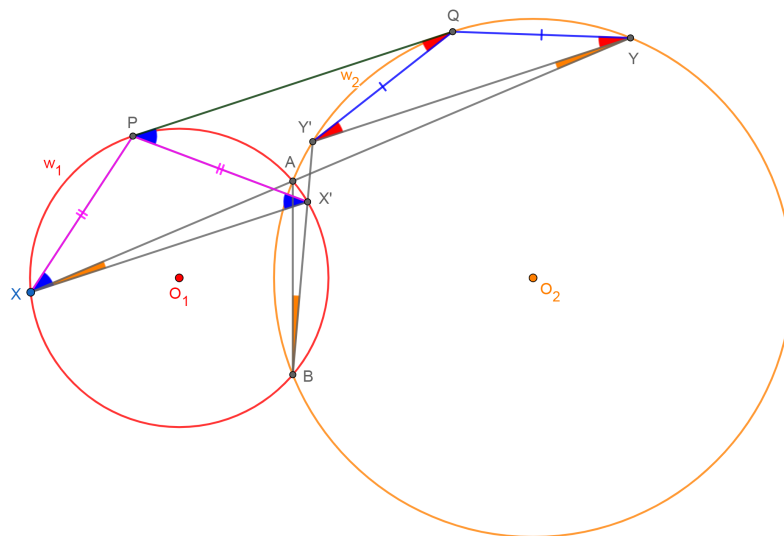
$$QY = QY' \Rightarrow \angle QYY' = \angle QY'A.$$

De  $w_2$  segue que  $\angle QYY' = \angle Y'QP$ , por serem ângulos inscritos e de segmento relativos a corda  $QY'$ . Logo,  $Y'Y \parallel PQ$ . Ainda em  $w_2$  temos  $\angle Y'YA = \angle Y'BA$ , por enxergarem a mesma corda  $Y'A$ .

Em  $w_1$  temos  $\angle ABX' = \angle AXX'$ , por enxergarem a mesma corda  $AX'$ . Dos ângulos alternos internos concluímos que  $XX' \parallel Y'Y \parallel PQ$ . Adicionalmente,  $\angle PXX' = \angle X'PQ$ , por serem ângulos inscritos e de segmento relativos a corda  $PX'$ .

Como  $XX' \parallel PQ$ , então  $\angle X'PQ = \angle PX'X$ . conclui-se que o triângulo  $PXX'$  é isósceles de base  $XX'$  e  $PX = PX'$ . Resolução em vídeo em [30]. A Figura 3.4.2 ilustra as construções geométricas usadas na solução do problema.

Figura 3.4.2: Guia para a resolução do problema. Solução no site do Geogebra em [28].



Fonte: O autor.

### 3.5 Ângulos na circunferência, circuncentro e ortocentro. P2 NA IGO 2018.

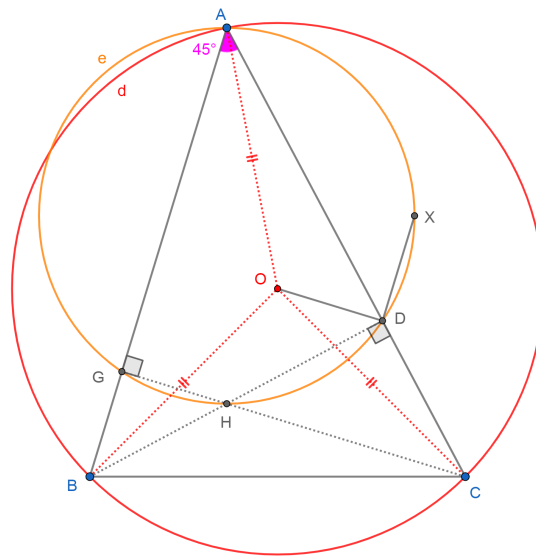
**Problema 11.** No triângulo acutângulo  $ABC$ ,  $\angle A = 45^\circ$ . Os pontos  $O$ ,  $H$  são o circuncentro e o ortocentro de  $ABC$ , respectivamente.  $D$  é o pé da altura desde  $B$ .  $X$  é ponto médio do arco  $AH$  da circuncirculo do triângulo  $ADH$  que contem  $D$ . Provar que  $DX = DO$ .

Problema 2 (Nível Avançado) da 5 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2018, proposto por Fatemeh Sajadi [12].

#### 3.5.1 Resolução

A Figura 3.5.1 ilustra uma construção geométrica inicial.

Figura 3.5.1: Uma construção geométrica inicial. Solução no site do Geogebra em [31].



Fonte: O autor.

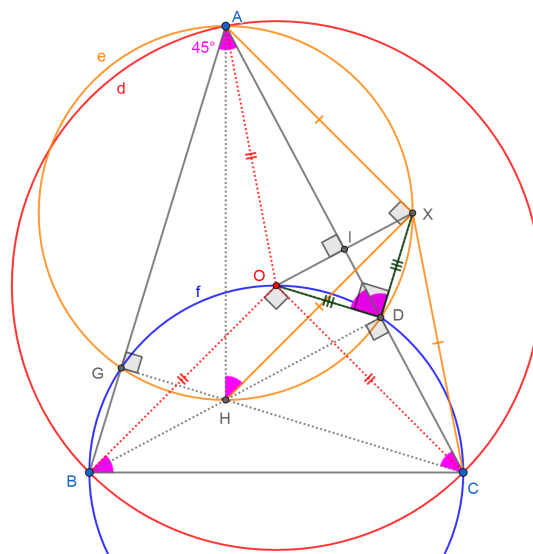
Primeiro notamos que  $AH$  é diâmetro da circunferência  $e$ , circunscrita ao triângulo  $ADH$  (em amarelo), pois  $\angle ADH = 90^\circ$ . Como  $\angle AXH = 90^\circ$  e  $XA = XH$ , por ser ponto médio do arco  $AH$ , concluímos que  $\angle AHX = 45^\circ$ . Adicionalmente,  $\angle AHX = \angle ADX$  por enxergarem a mesma corda  $AX$  de  $e$ .

Temos  $\angle BOC = 2\angle A = 90^\circ$ , pois o ângulo central da corda  $BC$  é duas vezes o ângulo inscrito. Como  $O$  é o circuncentro  $OA = OB = OC$ , o triângulo  $OBC$  é isósceles e  $\angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$ .

Como  $\angle BOC = \angle BDC = 90^\circ$  o quadrilátero  $BCDO$  é cíclico e  $BC$  é um diâmetro da circunferência  $f$  (em azul), circunscrita ao mesmo. Segue que  $\angle OBC + \angle ODC = 180^\circ$ . Do fato dos pontos  $A, D$  e  $C$  serem colineares temos  $\angle ODA + \angle ODC = 180^\circ$ . Consequentemente,  $\angle ODA = \angle OBC = 45^\circ$  e  $\angle ODX = 90^\circ$ .

Juntando  $\angle ACH = \frac{\angle AXH}{2}$  e  $AX = XH$  concluímos que  $X$  é o circuncentro do triângulo  $ACH$  e  $XA = XC$ . Como  $O$  e  $X$  equidistam de  $A$  e  $C$  o segmento  $OX$  está na mediatriz dos pontos  $A$  e  $C$  e  $AC \perp OX$ . Sendo  $I = OX \cap AC$  temos que  $ID$  é bissetriz e altura no triângulo  $OXD$ . Logo,  $OXD$  é isósceles de base  $OX$  e  $DX = DO$ . A Figura 3.5.2 mostra as construções usadas na resolução.

Figura 3.5.2: Guia para a resolução do problema. Solução no site do Geogebra em [31].



Fonte: O autor.

### 3.6 Tangência a uma circunferência, ângulos inscritos e de segmento, potência de um ponto e eixo radical. P8 NA IGO 2014-5.

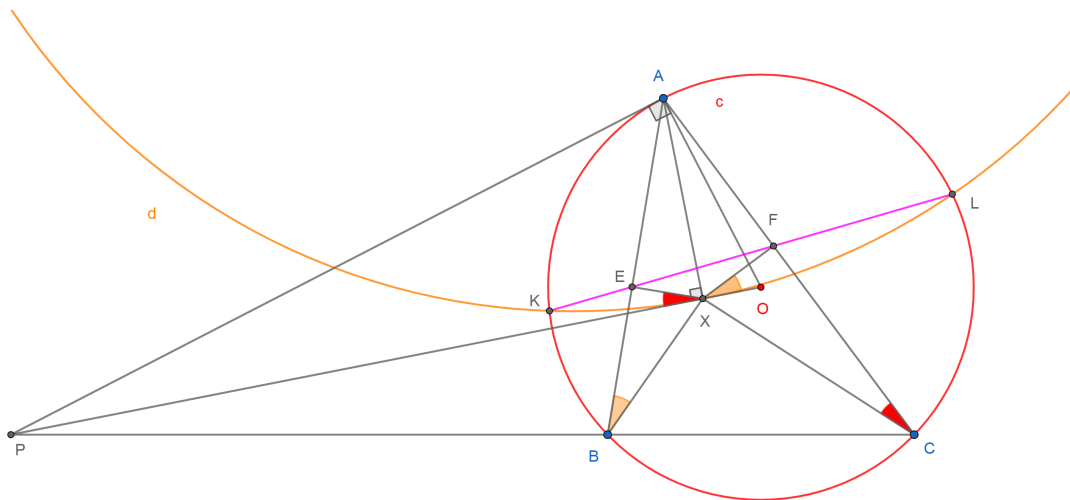
**Problema 12.** O triângulo  $ABC$  é acutângulo com  $AC > AB$ , de circunferência circunscrita  $c$  e circuncentro  $O$ . A linha tangente a  $c$  em  $A$  intersecta a continuação de  $BC$  em  $P$ .  $X$  é o ponto de  $OP$  tal que  $\angle AXP = 90^\circ$ . Os pontos  $E \in AB$  e  $F \in AC$  são escolhidos no mesmo lado de  $OP$  e satisfazem que  $\angle EXP = \angle ACX$  e  $\angle FXO = \angle ABX$ . Se  $K, L$  são os pontos de interseção de  $EF$  com  $c$ , mostrar que  $OP$  é tangente ao circuncirculo  $d$  do  $\triangle K LX$ .

Problema 8 (Nível Avançado) da 1 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2014-2015, proposto por Mahdi Etesami Fard. [21].

#### 3.6.1 Resolução

A Figura 3.6.1 mostra uma construção geométrica inicial do problema.

Figura 3.6.1: Construção geométrica inicial do problema. Gráfico interativo no site do Geogebra em [32].



Fonte: O autor.

Sejam  $M$  e  $N$  na continuação de  $XF$  e  $XE$  tal que  $M, L, X$  e  $K$  e  $N$  estejam na mesma circunferência  $d$ .

A seguir provaremos que  $\angle AMX = \angle ACX = \angle NXP$ . Depois que  $N, A$  e  $M$  são colineares, logo  $\angle AMX = \angle NMX$ . Em referência a corda  $NX$  de  $d$  o  $\angle NMX$  é inscrito. No caso de tangência de  $PX$  com  $d$  o  $\angle NXP$  é de segmento. Sendo válido que  $\angle NMX = \angle NXP$  estará demonstrada a tangência de  $PO$  com  $d$ .

O ponto  $F$  está sobre o eixo radical das circunferências  $c$  e  $d$ . Logo podemos calcular a potência de  $F$  como  $XF \cdot FM = FL \cdot FK = AF \cdot FC$ . Segue que o quadrilátero  $AMCX$  é cíclico (circunferência  $e$ ) e  $\angle AMX = \angle ACX$ .

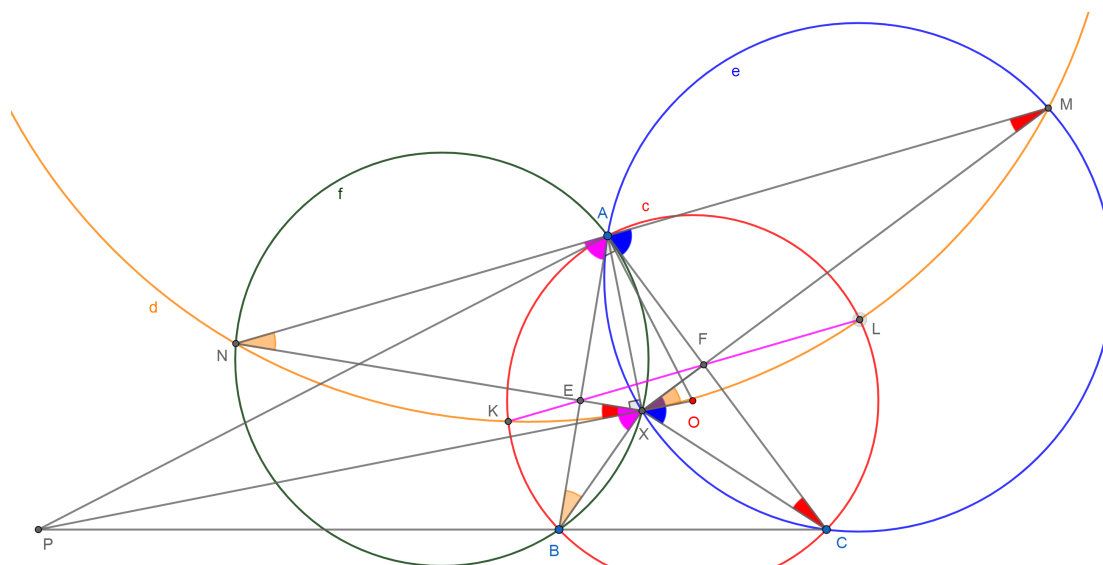
Analogamente, o ponto  $E$  está sobre o eixo radical das circunferências  $c$  e  $d$ . Logo podemos calcular a potência de  $E$  como  $XE \cdot EN = EL \cdot EK = AE \cdot EB$ . Segue que o quadrilátero  $ANBX$  é cíclico (circunferência  $f$ ) e  $\angle ANX = \angle ABX$ .

Agora provaremos que  $N, A$  e  $M$  são colineares. Como  $ANBX$  e  $AMCX$  são cíclico segue

$$\begin{aligned} \angle NAM &= \angle NAE + \angle A + \angle FAM = \angle EXB + \angle A + \angle CXF = \\ &= \angle A + 180^\circ - \angle BXC + \angle ABX + \angle ACX = \\ &= \angle A + 180^\circ - \angle BXC + \angle BXC - \angle A = 180^\circ. \end{aligned}$$

Concluimos que  $\angle AMX = \angle NMX$  e  $PO$  é tangente a circunferência  $d$  em  $X$ . A Figura 3.6.2 permite acompanhar a resolução do problema.

Figura 3.6.2: Guia para a resolução do problema. Gráfico interativo no site do Geogebra em [32].



Fonte: O autor.

## Capítulo 4

### Quadriláteros Inscritíveis

#### 4.1 Ortocentro, quadrilátero inscritível e ângulos na circunferência. P3 NE IGO 2014-5.

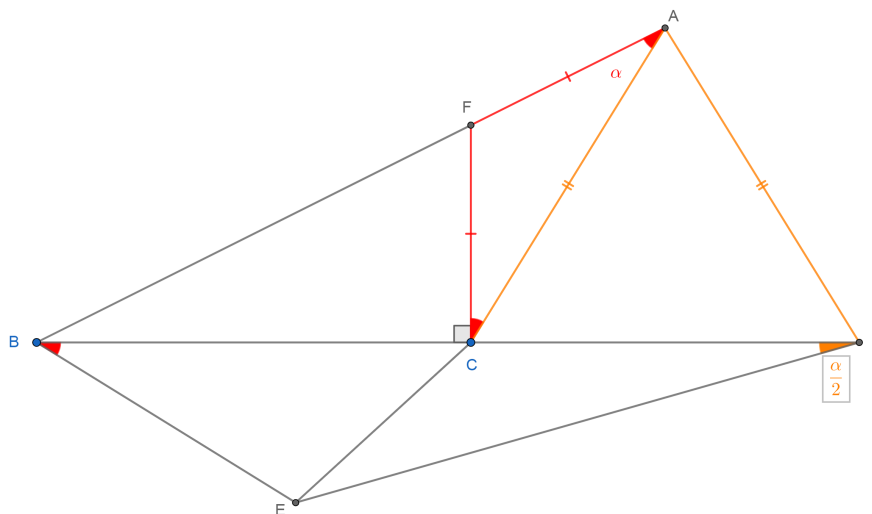
**Problema 13.** *Em um triângulo  $ABC$  temos  $\angle C = \angle A + 90^\circ$ . O ponto  $D$  na continuação de  $BC$  é tal que  $AC = AD$ . O ponto  $E$  está no lado de  $BC$  que não contém  $A$  e deve satisfazer que  $\angle EBC = \angle A$  e  $\angle EDC = \frac{1}{2}\angle A$ . Provar que  $\angle CED = \angle ABC$ .*

Problema 3 (Nível Elemental) da 1 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2014-2015, proposto por Morteza Saghafian. [21].

##### 4.1.1 Resolução

A Figura 4.1.1 ilustra uma construção geométrica inicial para o problema.

Figura 4.1.1: Uma construção geométrica inicial. Solução no site do Geogebra em [33].



Fonte: O autor.

Para construir o triângulo  $ABC$  usamos um ponto auxiliar  $F$  tal que  $CF \perp BC$  e  $CF = FA$ . Como o  $\triangle CFA$  é isóscele de base  $CF$  garantimos satisfazer que  $\angle FCA = \angle FAC = \alpha$  e  $\angle C = \alpha + 90^\circ$ .

Seja  $M$  o ponto médio  $CD$ . Como o triângulo  $ACD$  é isósceles, então  $AM$  está na mediatriz de  $CD$ . Sejam  $P$  e  $Q$  as interseções de  $AM$  com  $DE$  e  $BE$ , respectivamente.

Como o ponto  $P$  está na mediatriz de  $C$  e  $D$  temos  $PC=PD$  e  $\angle PCD = \frac{\alpha}{2}$ .

Pela soma dos ângulos internos no triângulo  $ABC$  encontramos  $\angle B = 90^\circ - 2\alpha$ . Logo  $\angle EBA + \angle CAB = \alpha + \angle B + \alpha = 90^\circ$ . Seja  $G = AC \cap BE$ . O resultado anterior garante que o  $\triangle AGB$  é retângulo em  $G$ .

No  $\triangle ABQ$  temos que  $BC$  e  $AC$  são alturas. Isto é, o ponto  $C$  é seu ortocentro. A seguir construímos a altura que falta. Seja  $H$  o pé da altura do ponto  $Q$  sobre  $AB$ .

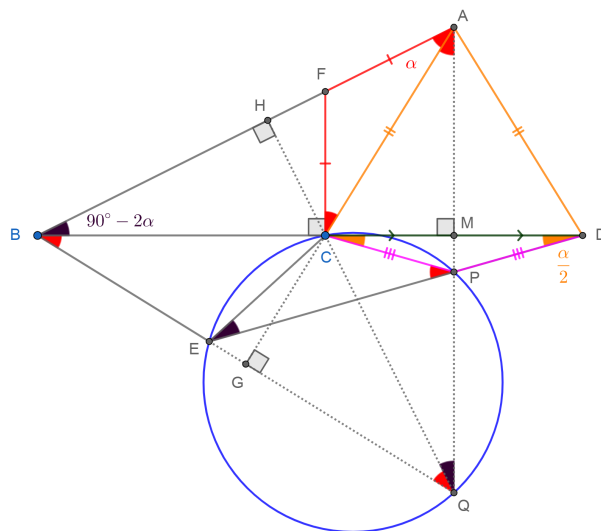
Pela soma dos ângulos internos no triângulo  $HQB$  temos  $\angle HQB = \angle CQE = \alpha$ . Adicionalmente, do  $\triangle PDC$  podemos escrever  $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \angle PDC + \angle PCD = \angle CPE$ . Na última passagem foi usado que a medida do ângulo externo de um triângulo é a soma dos internos não adjacentes.

Pela soma dos ângulos internos no triângulo  $AMB$  temos que  $\angle CAM = \alpha$ . Segue do  $\triangle HQA$  que  $\angle HQA = 90^\circ - 2\alpha$ .

Sendo  $\angle CPE = \angle CQE$  o quadrilátero  $CPQE$  é cíclico. Por outro lado, com referência a corda  $CP$ , temos  $\angle CEP = \angle CQP$ . Segue que  $\angle CED = \angle ABC$ , como queríamos provar. A Figura 4.1.2 ilustra o problema resolvido.



Figura 4.1.2: Guia para a resolução do problema. Solução no site do Geogebra em [33].



Fonte: O autor.

Uma solução em vídeo está disponível em [34].

## 4.2 Ângulos, quadriláteros inscritíveis, circunferências. P4 NE IGO 2018.

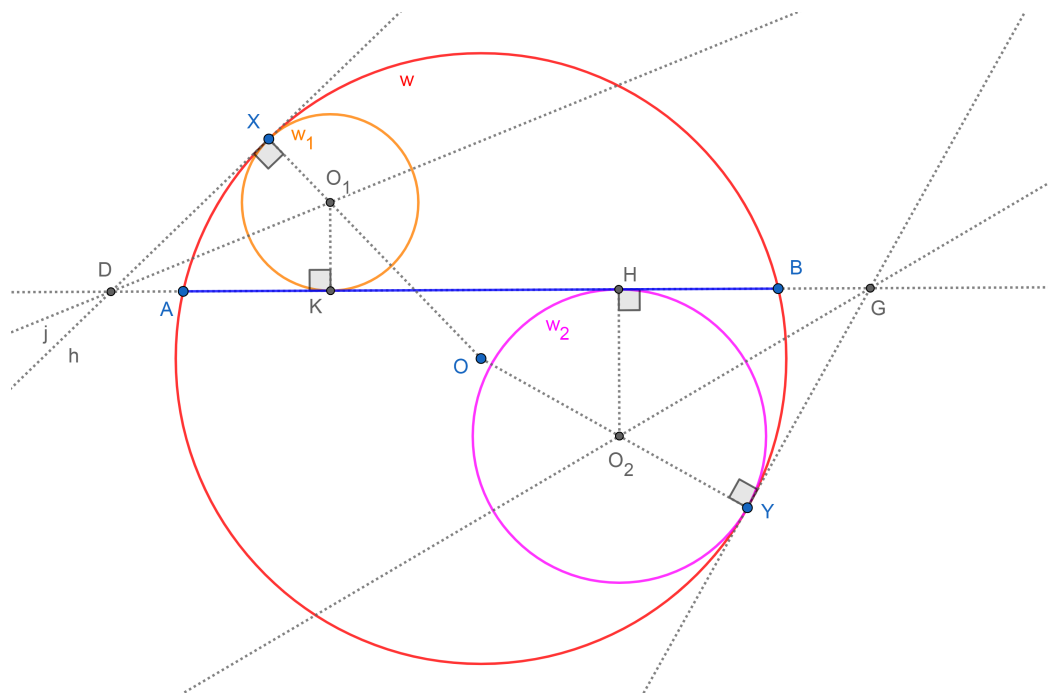
**Problema 14.** *É dado um círculo  $w$  no plano. Dois círculos com centros  $O_1, O_2$  estão contidos em  $w$  e são tangentes ao mesmo. A corda  $AB$  de  $w$  é tangente a esses dois círculos de modo que esses dois círculos estão em lados opostos dessa corda. Provar que  $\angle O_1AO_2 + \angle O_1BO_2 > 90^\circ$ .*

Problema 4 (Nível Elemental) da 5 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2018 [12].

### 4.2.1 Resolução

A Figura 4.2.1 ilustra os passos para a construção geométrica inicial.

Figura 4.2.1: Passos para a construção geométrica inicial. Uma versão dinâmica está disponível em [35].

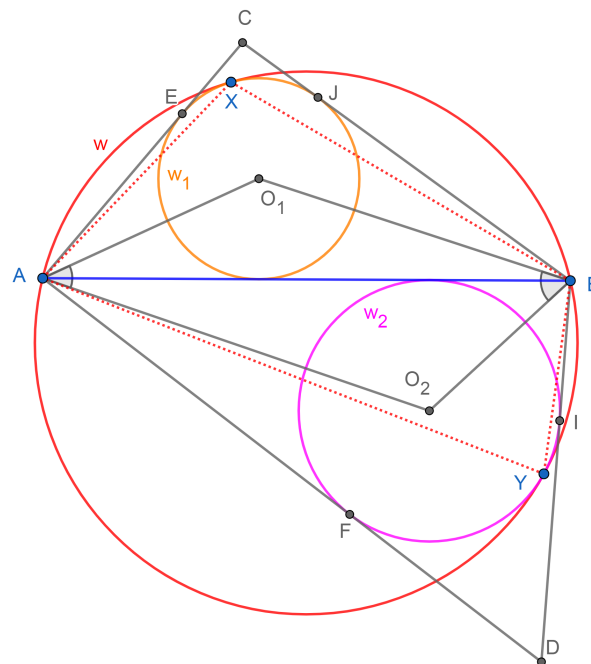


Fonte: O autor.

Iniciamos colocando um ponto  $X$  sobre o arco menor  $AB$  de  $w$  e traçamos o segmento  $XO$  ( $O$  ponto  $O$  é o centro de  $w$ ). O centro  $O_1$  de  $w_1$  deve estar contido em  $XO$ . Como  $w_1$  é tangente com  $w$  construímos uma perpendicular  $h$  a  $XO$  passando por  $X$ . Chamamos  $D$  ao ponto de interseção da reta  $AB$  com  $h$ . A distância de  $O_1$  até as retas  $AB$  e  $h$  deve ser a mesma. Isso indica traçar a bissetriz  $j$  do  $\angle XDB$  e marcar  $O_1$  na interseção da mesma com  $XO$ . A circunferência  $w_2$  é construída analogamente.

A Figura 4.2.2 auxilia na resolução do problema.

Figura 4.2.2: Construção geométrica para auxiliar na resolução do problema. Uma versão dinâmica está disponível em [36].



Fonte: O autor.

Construímos as tangentes faltando a  $w_1$  e  $w_2$  passando por  $A$  e  $B$ . Seja  $C$  o ponto de interseção das tangentes a  $w_1$  e  $D$  de  $w_2$ .

Queremos demonstrar que  $\angle O_1AO_2 + \angle O_1BO_2 > 90^\circ$ . Como  $\angle CAD = 2\angle O_1AO_2$  e  $\angle CBD = 2\angle O_1BO_2$ , então é equívale provar que  $\angle CAD + \angle CBD > 180^\circ$ .

Adicionalmente, no quadrilátero  $ACBD$  demonstrar que  $\angle CAD + \angle CBD > 180^\circ$  equivale a provar que  $\angle ACB + \angle ADB < 180^\circ$ .

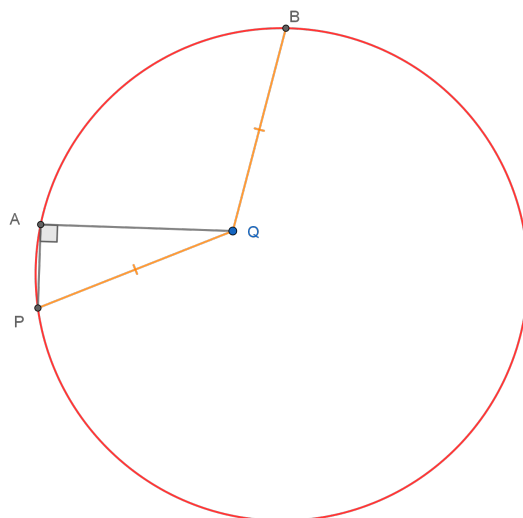
Como  $C$  e  $D$  estão fora de  $w$ , então  $\angle ACB < \angle AXB$  e  $\angle ADB < \angle AYB$ . Isto é,  $\angle ACB + \angle ADB < \angle AXB + \angle AYB$ .

O quadrilátero  $AXBY$  é cíclico por construção, logo  $\angle AXB + \angle AYB = 180^\circ$  e concluímos que  $\angle ACB + \angle ADB < 180^\circ$ . Uma solução em vídeo está disponível em [37].

### 4.3 Ângulos na circunferência, quadriláteros cíclicos, circuncentro e triângulos isósceles. P1 NI IGO 2015.

**Problema 15.** Na figura abaixo, os pontos  $P$ ,  $A$  e  $B$  pertencem a uma circunferência. O ponto  $Q$  está no interior do círculo de tal forma que  $\angle PAQ = 90^\circ$  e  $PQ = BQ$ . Provar que o valor de  $\angle AQB - \angle PQA$  é igual ao arco  $AB$ .

Figura 4.3.1: Ilustração do problema.



Fonte: O autor.

Problema 1 (Nível Intermediário) da 2 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2015, proposto por Davood Vakili [7].

#### 4.3.1 Resolução-1

A medida do arco  $\widehat{AB}$  é duas vezes o ângulo inscrito  $\angle APB = \alpha$ . Provar que o valor de  $\angle AQB - \angle PQA$  é igual  $\widehat{AB}$  equivale a demonstrar que  $\angle AQB - \angle PQA = 2\angle APB = 2\alpha$ .

Seja  $M$  o ponto médio do segmento  $PB$ . Como o  $\triangle PQB$  é isósceles de base  $PB$  temos que  $PM$  é mediana e altura. Logo  $\angle PMQ = 90^\circ$ . Segue que  $\triangle PMQ \cong \triangle BMQ$  e  $\angle PQM = \angle BQM = \delta$ .

Como  $\angle PAQ = \angle PMQ = 90^\circ$ , então o quadrilátero  $PAMQ$  é cíclico. Logo  $\angle APM = \angle AQM = \alpha$ . Por outra parte temos:  $\angle AQB = \alpha + \delta$  e  $\angle AQP = \delta - \alpha$ .

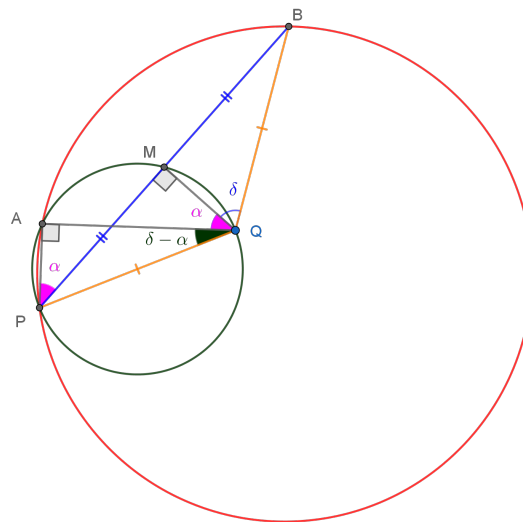
$$\angle AQB - \angle AQP = \alpha + \delta - (\delta - \alpha),$$

$$\angle AQB - \angle AQP = 2\alpha = 2\angle AQM,$$

$$\angle AQB - \angle AQP = 2\angle APB.$$

A Figura 4.3.2 mostra uma construção geométrica correspondente a Resolução-1.

Figura 4.3.2: Construção geométrica da resolução-1 do problema. Gráfico interativo no site do Geogebra em [38].



Fonte: O autor.

### 4.3.2 Resolução-2

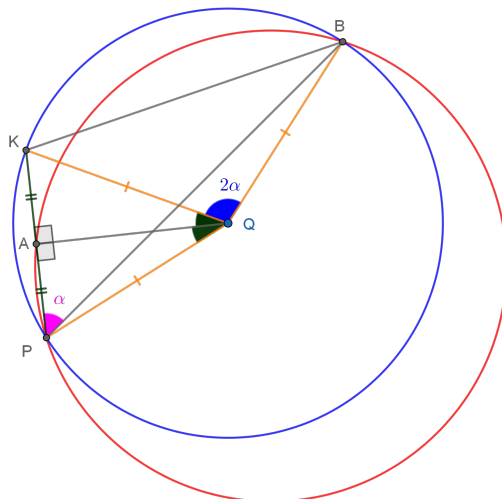
A medida do arco  $\widehat{AB}$  é duas vezes o ângulo inscrito  $\angle APB = \alpha$ . Provar que o valor de  $\angle AQB - \angle PQA$  é igual  $\widehat{AB}$  equivale a demonstrar que  $\angle AQB - \angle PQA = 2\angle APB = 2\alpha$ .

Seja o ponto  $K$  a reflexão de  $P$  no segmento  $AQ$ . Temos  $\angle AQB = \angle AQP$  e  $PQ = KQ = BQ$ . Segue que o ponto  $Q$  é o circuncentro do  $\triangle PKB$ . Sabemos que o ângulo central é duas vezes o ângulo inscrito:

$$2\angle APB = \angle KQB = \angle AQB - \angle AQB = \angle AQB - \angle AQP.$$

A Figura 4.3.3 mostra uma construção geométrica correspondente a Resolução-2.

Figura 4.3.3: Construção geométrica da resolução-2 do problema. Gráfico interativo no site do Geogebra em [39].



Fonte: O autor.

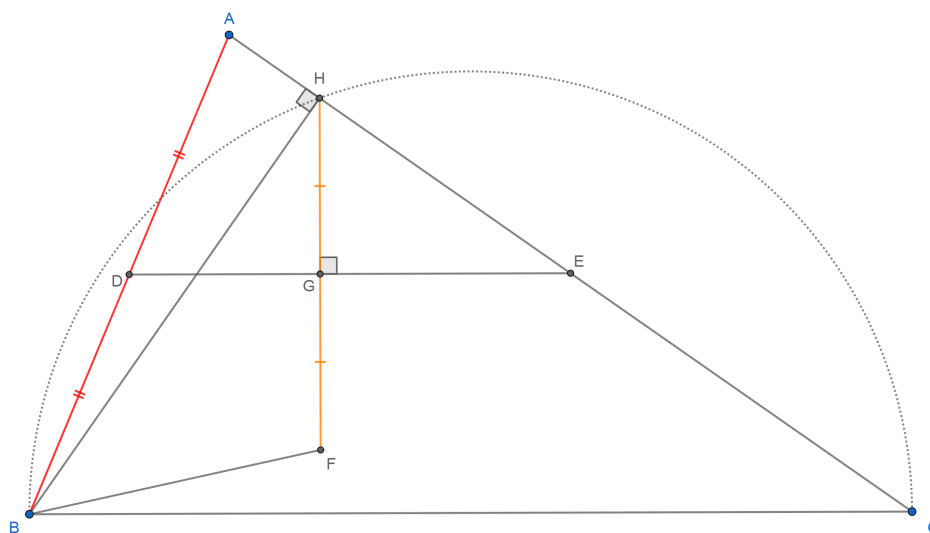
#### 4.4 Quadriláteros cíclicos, circuncentro e mediana num triângulo retângulo. P2 NI IGO 2015.

**Problema 16.** *Num triângulo acutângulo  $ABC$ ,  $BH$  é a altura relativa ao vértice  $B$ .  $D$  e  $E$  são pontos médios de  $AB$  e  $AC$ , respectivamente. O ponto  $F$  é a reflexão de  $H$  em relação a  $ED$ . Provar que a reta  $BF$  passa pelo circuncentro do  $\triangle ABC$ .*

Problema 2 (Nível Intermediário) da 2 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2015, proposto por Davood Vakili [7].

A Figura 4.4.1 mostra uma construção geométrica inicial para o problema.

Figura 4.4.1: Uma construção geométrica inicial.



Fonte: O autor.

#### 4.4.1 Resolução-1

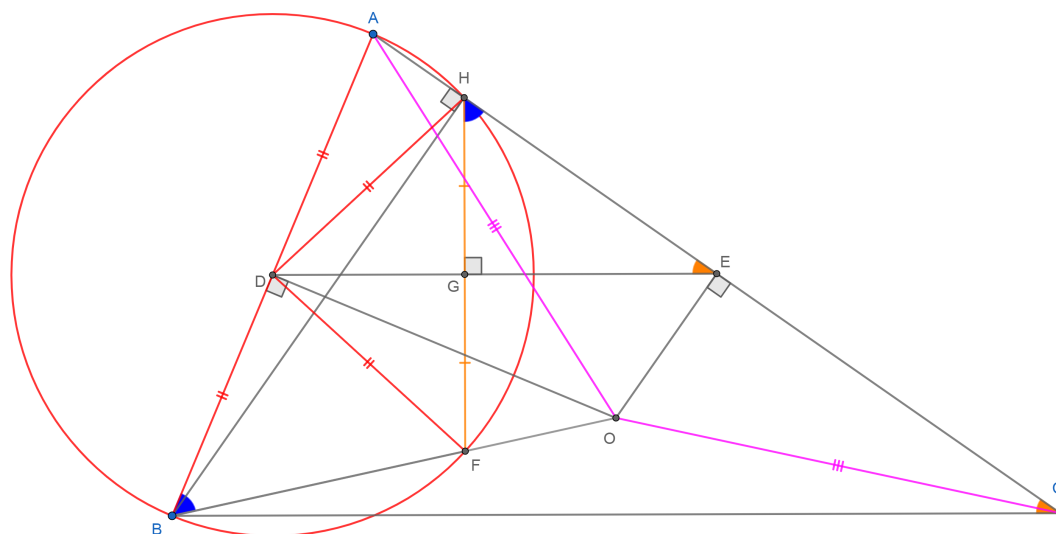
Seja  $O$  o circuncentro do  $\triangle ABC$ . Como os triângulos  $OBC$ ,  $OCA$  e  $OAB$  são isósceles temos  $\angle OBC = \angle OCB = \alpha$ ,  $\angle OCA = \angle OAC = \beta$  e  $\angle OAB = \angle OBA = \gamma$ . Da soma dos ângulos internos no  $\triangle ABC$  segue que  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$  e  $\angle OBA = \gamma = 90^\circ - \angle C$ . Para provar que a reta  $BF$  passa pelo circuncentro do  $\triangle ABC$ , bastará mostrar que  $\angle FBA = 90^\circ - \angle C$ .

Como  $D$  é ponto médio na hipotenusa do triângulo retângulo  $ABH$  temos  $AD = BD = DH$ . Da reflexão do ponto  $H$  em  $DE$  segue que  $DH = DF$ . Consequentemente, o quadrilátero  $AHFB$  é cíclico e a circunferência circunscrita tem centro em  $D$ .

Como  $\angle FBA + \angle FHA = \angle FHE + \angle FHA = 180^\circ$  temos  $\angle FBA = \angle FHE$ . Seja o ponto  $G$  a interseção de  $HF$  e  $DE$ . No triângulo retângulo  $GHE$  segue que  $\angle GHE = \angle FHE = 90^\circ - \angle GEH = 90^\circ - \angle DEH$ . Logo  $\angle FBA = 90^\circ - \angle DEH$ .

Como  $DE$  é base média no  $\triangle ABC$ , então  $DE \parallel BC$  e  $\angle DEH = \angle C$ . Concluímos que  $\angle FBH = 90^\circ - \angle C$  e a reta  $BF$  passa pelo circuncentro do  $\triangle ABC$ . A Figura 4.4.2 mostra uma construção geométrica correspondente a resolução-1 do problema.

Figura 4.4.2: Construção geométrica da resolução-1 do problema. Gráfico interativo no site do Geogebra em [40].



Fonte: O autor.

#### 4.4.2 Resolução-2

Seja  $O$  o circuncentro do  $\triangle ABC$ . Sabemos da resolução anterior que  $\angle OBA = 90^\circ - \angle C$ . Da soma dos ângulos no  $\triangle BDO$  concluimos que  $\angle DOB = \angle C$ . Iremos provar que  $\angle DOF = \angle DOB$ , logo os pontos  $B$ ,  $F$  e  $O$  são colineares.

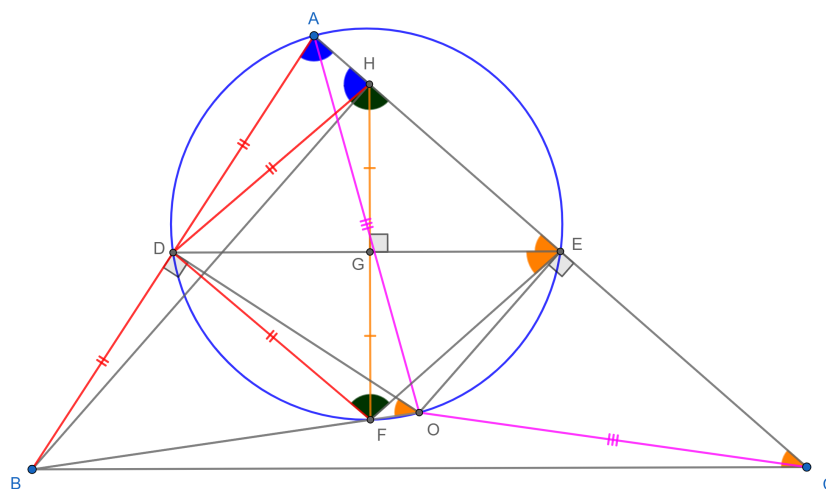
Como  $D$  é ponto médio na hipotenusa do triângulo retângulo  $ABH$  temos  $AD = BD = DH$ . Da reflexão segue  $DH = DF$ . De  $\angle ADO = \angle AEO = 90^\circ$  o quadrilátero  $ADOE$  é cíclico.

Temos  $\angle A = \angle DHA = 180^\circ - \angle DHE$ . Adicionalmente, por LAL segue que  $\triangle DHG \equiv \triangle DFG$  e  $\triangle EHG \equiv \triangle EFG$ . Logo  $\angle DHE = \angle DFE$ ,  $\angle A = 180^\circ - \angle DFE$  e o quadrilátero  $ADFE$  também é cíclico.

Como o pentágono  $ADFOE$  é cíclico, então o quadrilátero  $DFOE$  é inscritível. Segue que  $\angle C = \angle DEA = \angle DEF = \angle DOF$ . Tínhamos visto que  $\angle C = \angle DOB$ , logo  $\angle DOF = \angle DOB$  e  $B$ ,  $F$  e  $O$  são colineares. A Figura 4.4.3 mostra uma construção geométrica correspondente a resolução-2 do problema.



Figura 4.4.3: Construção geométrica da resolução-2 do problema. Gráfico interativo no site do Geogebra em [41].



Fonte: O autor.

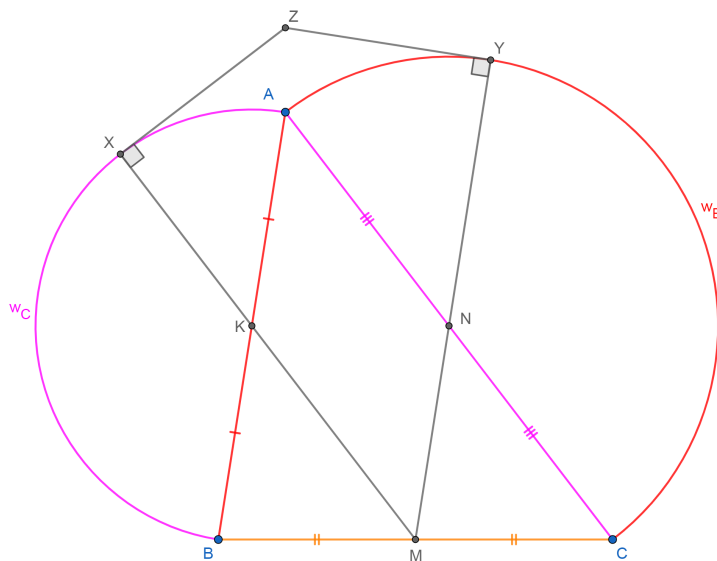
## 4.5 Quadriláteros cíclicos, ângulos na circunferência e colinearidade. P3 NI IGO 2015.

**Problema 17.** No triângulo  $ABC$ ,  $M$ ,  $N$  e  $K$  são pontos médios dos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Sejam  $w_B$  e  $w_C$  semicircunferências de diâmetros  $AC$  e  $AB$ , respectivamente, fora dos triângulos. Supor que  $MK$  e  $MN$  intersectem  $w_C$  e  $w_B$  em  $X$  e  $Y$ , respectivamente. As tangentes em  $X$  e  $Y$  a  $w_C$  e  $w_B$ , respectivamente, se intersectam em  $Z$ . Provar que  $AZ \perp BC$ .

Problema 3 (Nível Intermediário) da 2 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2015, proposto por Mahdi Etesami Fard [7].

A Figura 4.5.1 mostra uma construção geométrica inicial para o problema.

Figura 4.5.1: Uma construção geométrica inicial.



Fonte: O autor.

### 4.5.1 Resolução-1

Seja o ponto  $H \in BC$  tal que  $AH \perp BC$ . Como  $\angle BHA = 90^\circ$  o quadrilátero  $AXBH$  é cíclico ( $H$  está na continuação de  $w_C$ ). Analogamente, como  $\angle CHA = 90^\circ$  segue que  $AYCH$  é inscritível ( $H$  também está na continuação de  $w_B$ ).

$AKMN$  é um paralelogramo, dessa forma  $\angle AKX = \angle ANY = \angle A = \angle KMN$ . Como o ângulo inscrito é metade do ângulo central correspondente podemos escrever  $\angle ABX = \angle ACY = \frac{\angle A}{2}$ . Adicionalmente,  $\angle BXA = \angle CYA = 90^\circ$  logo  $\angle XAB = \angle YAC = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$ . Com isto,  $X, A$  e  $Y$  são colineares.

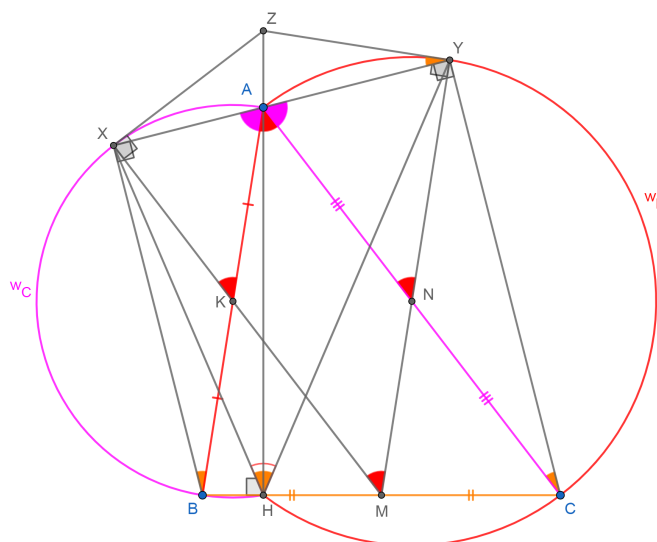
Do quadrilátero cíclico  $AHBX$  temos  $\angle AHX = \angle ABX = \frac{\angle A}{2}$ . E do quadrilátero inscritível  $AHCY$  segue  $\angle AHY = \angle ACY = \frac{\angle A}{2}$ . Logo  $\angle XHY = \angle XMY = \angle A$ . Consequentemente o quadrilátero  $XHMY$  é cíclico.

Por hipótese temos que  $\angle MXZ = \angle MYZ = 90^\circ$ , por conseguinte, o quadrilátero  $MYZX$  é cíclico. Portanto, o pentágono  $ZXHMY$  é inscritível e o quadrilátero  $ZXHY$  é cíclico.

Da semicircunferência  $w_B$ , relativo a corda  $AY$  temos a igualdade de um ângulo de segmento com um ângulo inscrito:  $\angle ZYA = \angle ZYX = \angle ACY = \frac{\angle A}{2}$ . Do quadrilátero cíclico  $ZXHY$  temos  $\angle ZHX = \angle ZYX = \frac{\angle A}{2}$ .

Tínhamos visto que  $\angle AHX = \frac{\angle A}{2}$ , logo  $\angle ZHX = \angle AHX$ . Concluimos que os pontos  $Z, A$  e  $H$  são colineares e  $AZ \perp BC$ . A Figura 4.5.2 mostra uma construção geométrica correspondente a resolução-1 do problema.

Figura 4.5.2: Construção geométrica da resolução-1 do problema. Gráfico interativo no site do Geogebra em [42].



Fonte: O autor.

### 4.5.2 Resolução-2

Seja o ponto  $H \in BC$  tal que  $AH \perp BC$ . Como  $\angle BHA = 90^\circ$  o quadrilátero  $AXBH$  é cíclico ( $H$  está na continuação de  $w_C$ ). Analogamente, como  $\angle CHA = 90^\circ$  segue que  $AYCH$  é inscritível ( $H$  também está na continuação de  $w_B$ ).

Temos que  $AKMN$  é um paralelogramo, segue que  $\angle AKX = \angle ANY = \angle A = \angle KMN$ .

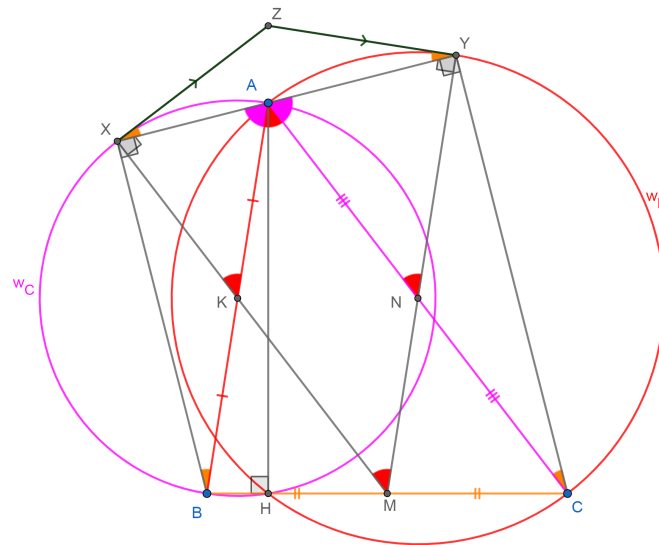
Como o ângulo inscrito é metade do ângulo central correspondente podemos escrever  $\angle ABX = \angle ACY = \frac{\angle A}{2}$ . Adicionalmente,  $\angle BXA = \angle CYA = 90^\circ$  logo  $\angle XAB = \angle YAC = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$ . Com isto,  $X, A$  e  $Y$  são colineares.

Da circunferência  $w_B$ , relativo a corda  $AY$ , temos a igualdade de um ângulo de segmento com um ângulo inscrito:  $\angle ZYA = \angle ACY = \frac{\angle A}{2}$ . Analogamente, de  $w_C$ , relativo a corda  $AX$ , temos a igualdade de um ângulo de segmento com um ângulo inscrito:  $\angle ZXA = \angle ABX = \frac{\angle A}{2}$ .

Conseqüentemente, o triângulo  $ZXY$  é isósceles de base  $XY$  e  $ZX = ZY$ . Do anterior a potência do ponto  $Z$  relativa a  $w_B$  e  $w_C$  é a mesma. Isto é,  $Z$  está sobre o eixo radical das duas circunferências. Também sabemos que o segmento  $AH$  está sobre o eixo radical. Concluimos que os pontos  $Z, A$  e  $H$  são colineares e  $AZ \perp BC$ .

A Figura 4.5.3 mostra uma construção geométrica correspondente a resolução-2 do problema.

Figura 4.5.3: Construção geométrica da resolução-2 do problema. Gráfico interativo no site do Geogebra em [43].



Fonte: O autor.

## 4.6 Quadriláteros inscritíveis, Semelhança e Congruência. P3 NI IGO 2018.

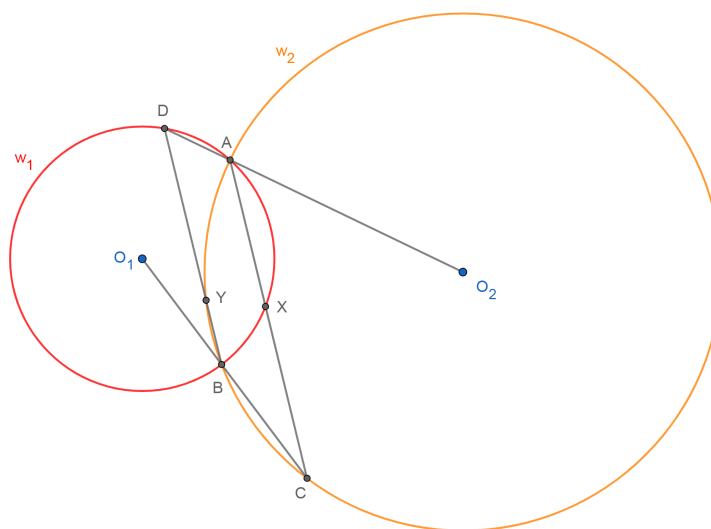
**Problema 18.** *Sejam  $w_1, w_2$  circunferências com centros  $O_1$  e  $O_2$ , respectivamente.  $A$  e  $B$  os pontos de interseção de  $w_1, w_2$ . A reta  $O_1B$  intersecta  $w_2$  pela segunda vez no ponto  $C$ , e a reta  $O_2A$  intersecta  $w_1$  pela segunda vez no ponto  $D$ . Seja  $X$  a segunda interseção de  $AC$  e  $w_1$  e  $Y$  a segunda interseção de  $BD$  com  $w_2$ . Provar que  $CX = DY$ .*

Problema 3 (Nível Intermediário) da 5 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2018, proposto por Alireza Dadgarnia [12].

### 4.6.1 Resolução

A Figura 4.6.1 ilustra uma construção geométrica inicial para o problema.

Figura 4.6.1: Uma construção geométrica inicial.

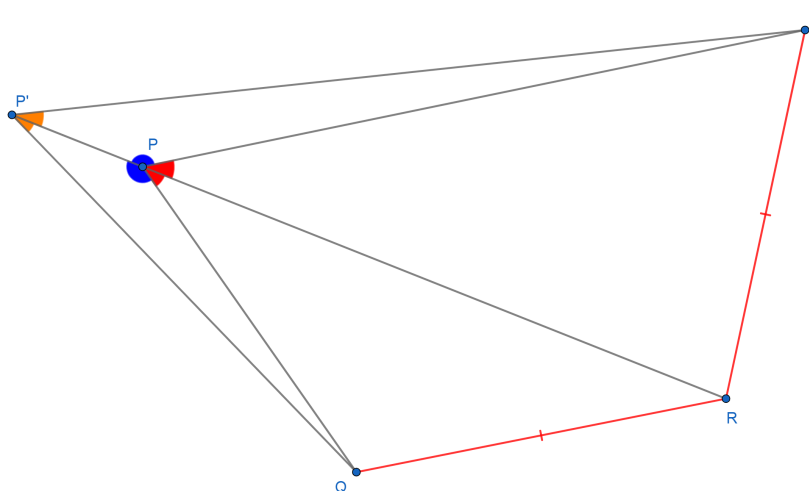


Fonte: O autor.

**Lema 1.** *Seja PQRS um quadrilátero convexo com  $RQ = RS$ ,  $\angle RPQ = \angle RPS$  e  $PQ \neq PS$ . Então PQRS é cíclico.*

*Demonstração.* A Figura 4.6.2 permite acompanhar a prova do lema.

Figura 4.6.2: Guia para a demonstração do Lema. Solução no site do Geogebra em [44].



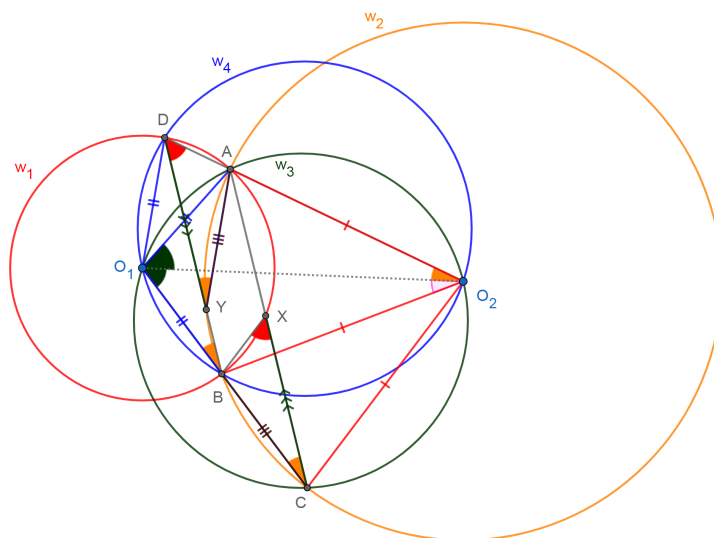
Fonte: O autor.

Suponhamos, por absurdo, que PQRS não é cíclico e seja  $P' \neq P$  e  $P' \in PR$  tal que  $P'QRS$  é inscritível. Temos que  $\angle QP'R = \angle SP'R$  pois “enxergam” cordas de igual medida.

Adicionalmente,  $\angle QPP' = \angle SPP'$  pois são suplementares de  $\angle RPQ = \angle RPS$ , respectivamente. Como  $PP'$  é lado comum segue, por ALA, que  $\triangle P'PQ \equiv \triangle P'PS$ . Logo,  $PQ = PS$ . Contradição, conclui-se que  $PQRS$  é cíclico.  $\square$

A Figura 4.6.3 ilustra a resolução do problema.

Figura 4.6.3: Guia para a resolução do problema. Solução no site do Geogebra em [45].



Fonte: O autor.

Por construção,  $BXAD$  é um quadrilátero inscrito. Segue que  $\angle YDA = \angle BDA = \angle BXC = 180^\circ - \angle BXA$ . Analogamente,  $BYAC$  é um quadrilátero inscrito. Logo  $\angle XCB = \angle ACB = \angle AYD = 180^\circ - \angle AYB$ . Por AA temos que  $\triangle AYD \sim \triangle BCX$ .

Adicionalmente,  $O_2C = O_2B = O_2A$ ,  $\angle AO_1O_2 = \angle BO_1O_2 = \angle CO_1O_2$  e  $AO_1 \neq CO_1$ . Pelo Lema 1 o quadrilátero  $AO_1CO_2$  é cíclico (circunferência  $w_3$ ). Analogamente,  $\angle DO_2O_1 = \angle AO_2O_1 = \angle BO_2O_1$  e  $DO_2 \neq BO_2$ . Pelo Lema 1 o quadrilátero  $BO_1DO_2$  é inscrito (circunferência  $w_4$ ).

Com foco em  $w_3$  encontramos  $\angle O_1CA = \angle O_1O_2A = \angle O_1O_2D$  e olhando para  $w_4$  descobrimos que  $\angle O_1O_2D = \angle O_1BD$ . Como  $\angle DBO_1 = \angle ACB$ , segue que  $AC \parallel DB$ . Notamos ainda que o trapézio  $AYBC$  está inscrito em  $w_2$ , logo seus lados não paralelos são congruentes:  $AY = BC$ . Uma demonstração deste fato está disponível em [46]. Agora por ALA temos que  $\triangle AYD \equiv \triangle BCX$ . Do qual se concluí que  $CX = DY$ .

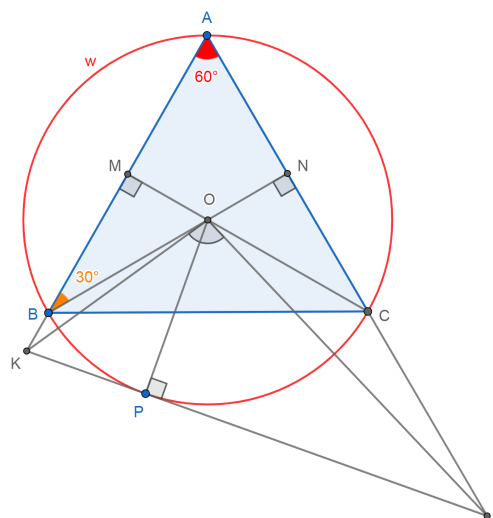
## 4.7 Quadriláteros inscritíveis, ângulos na circunferência e circuncirculo. P4 NI IGO 2015.

**Problema 19.** *Seja  $ABC$  um triângulo equilátero com circuncirculo  $w$  e circuncentro  $O$ . Seja  $P$  um ponto no arco  $BC$  (o arco em que  $A$  não está). A reta tangente a  $w$  em  $P$  intersecta os prolongamentos de  $AB$  e  $AC$  em  $K$  e  $L$ , respectivamente. Mostrar que  $\angle KOL > 90^\circ$ .*

Problema 4 (Nível Intermediário) da 2 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2015, proposto por Iman Maghsoudi [7].

A Figura 4.7.1 mostra uma construção geométrica inicial para o problema.

Figura 4.7.1: Uma construção geométrica inicial.



Fonte: O autor.

### 4.7.1 Resolução

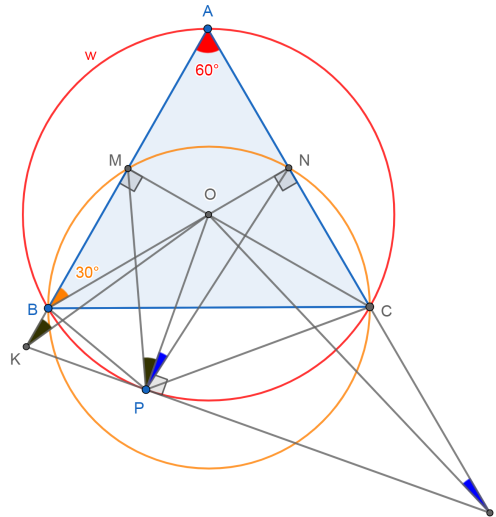
Sejam  $M$  e  $N$  os pontos médios de  $AB$  e  $AC$ , respectivamente. Como  $\angle BMC = \angle BNC = 90^\circ$  o quadrilátero  $BMNC$  é inscritível.

Adicionalmente, do quadrilátero cíclico  $ABPC$  temos  $\angle BPC = 120^\circ > 90^\circ$ . Consequentemente o ponto  $P$  está no interior do circuncirculo do quadrilátero  $BMNC$ . Portanto  $\angle MPN > \angle MBN = 30^\circ$ .

Por outra parte, como  $\angle KMO = \angle KPO = 90^\circ$  e  $\angle LNO = \angle LPO = 90^\circ$  os quadriláteros  $KMOP$  e  $LNOP$  são cíclicos. Logo  $\angle MKO = \angle MPO$  e  $\angle NLO = \angle NPO$ . Dessa forma  $\angle AKO + \angle ALO = \angle MPN > 30^\circ$ .

Concluimos que  $\angle KOL = \angle A + \angle AKO + \angle ALO > 90^\circ$ . A Figura 4.7.2 mostra uma construção geométrica correspondente a resolução do problema.

Figura 4.7.2: Construção geométrica da resolução do problema. Gráfico interativo no site do Geogebra em [47].



Fonte: O autor.

## 4.8 Quadriláteros cíclicos, potência de um ponto relativo a uma circunferência e semelhança de triângulos. P7 NA IGO 2014-5.

**Problema 20.** *Um triângulo acutângulo  $ABC$  é dado. Uma circunferência de diâmetro  $BC$  intersecta  $AB, AC$  em  $E, F$ , respectivamente. Seja  $M$  o ponto médio de  $BC$  e  $P$  o ponto de interseção de  $AM$  e  $EF$ .  $X$  é um ponto no arco menor de  $EF$  e  $Y$  o segundo ponto de interseção de  $XP$  com a circunferência mencionada anteriormente. Mostrar que  $\angle XAY = \angle XYM$ .*

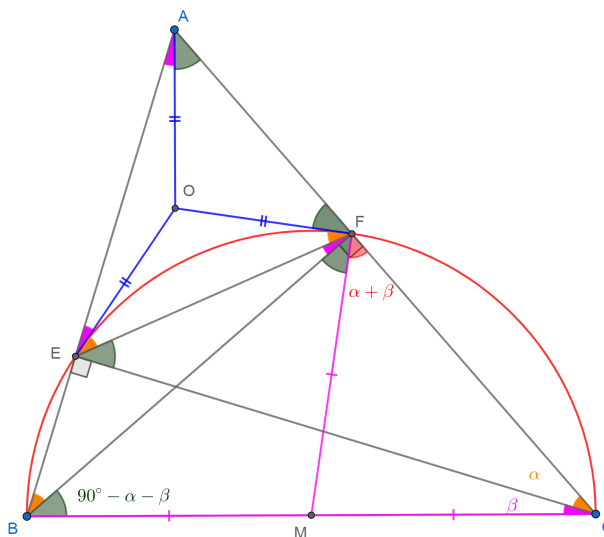
Problema 7 (Nível Avançado) da 1 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2014-2015, proposto por Ali Zooelm. [21].

### 4.8.1 Resolução

A Figura 4.8.1 permite acompanhar a resolução da primeira parte do problema.



Figura 4.8.1: Guia para a resolução da primeira parte do problema. Gráfico interativo no site do Geogebra em [48].



Fonte: O autor.

Temos  $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$ . Sejam  $\angle FCE = \alpha$  e  $\angle ECB = \beta$ . Como  $BEFC$  é um quadrilátero cíclico segue que  $\angle FBE = \angle FCE = \alpha$  e  $\angle EFB = \angle ECB = \beta$ .

Como  $MF = MB = MC$  temos  $\angle MFC = \angle MCF = \alpha + \beta$  e  $\angle FBC = \angle CEF = \angle MFB = 90^\circ - \alpha - \beta$ .

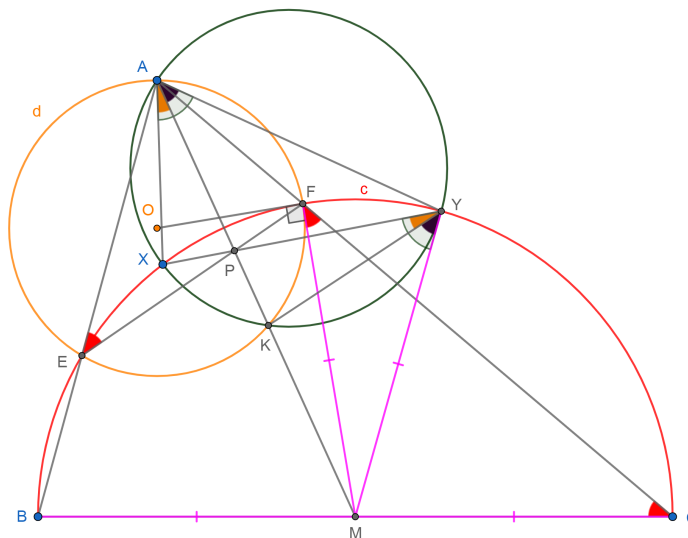
Também se encontram os ângulos suplementares em  $E$  e  $F$ . Isto é,  $\angle AEF = \alpha + \beta$  e  $\angle AFE = 90^\circ - \beta$ . Pela soma dos ângulos internos no  $\triangle AEF$  segue que  $\angle EAF = 90^\circ - \beta$ .

Chamamos com a letra  $O$  ao circuncentro do  $\triangle AEF$ . Isto define os triângulos isósceles  $OEF$ ,  $OFA$  e  $OAE$  de bases  $EF$ ,  $FA$  e  $AE$ , respetivamente.

Sejam  $\angle OEF = \angle OFE = x$ ,  $\angle OEA = \angle OAE = y$  e  $\angle OAF = \angle OFA = z$ . Como  $x + y = \alpha + \beta$ ,  $x + z = 90^\circ - \beta$  e  $y + z = 90^\circ - \alpha$ , resolvendo o sistema encontramos  $\angle OEF = \angle OFE = x = \alpha$ ,  $\angle OEA = \angle OAE = y = \beta$  e  $\angle OAF = \angle OFA = z = 90^\circ - \alpha - \beta$ . Logo,  $\angle MFO = 90^\circ$ .

A Figura 4.8.2 permite acompanhar a resolução da segunda parte do problema.

Figura 4.8.2: Guia para a resolução da segunda parte do problema. Gráfico interativo no site do Geogebra em [49].



Fonte: O autor.

Suponhamos que o ponto  $K$  é a interseção de  $AM$  com o círculo circunscrito (circunferência  $d$ , em amarelo) ao  $\triangle AEF$ . Vimos que  $\angle MFO = 90^\circ$ , então  $MF$  é tangente a  $d$  em  $F$ .

A potência do ponto  $M$  relativa a circunferência  $d$  pode ser escrita usando a tangente  $MF$  ou a corda  $KA$ :  $MF^2 = MK \cdot MA$ . Por outro lado,  $MY = MF$ . Logo,  $MY^2 = MK \cdot MA$ . Como  $\angle AMY = \angle YMK$  e  $\frac{MY}{MA} = \frac{MK}{MY}$ , então  $\triangle MYA \sim \triangle MKY$  e  $\angle YAM = \angle KYM$ .

Adicionalmente, calculamos a potência do ponto  $P$  de três formas:  $AP \cdot PK = PE \cdot PF = PX \cdot PY$ . Logo  $AXKY$  é cíclico (circunferência em verde). Com isto,  $\angle XAK = \angle XYK$ . Concluimos que  $\angle XAY = \angle XYM$ .

# Capítulo 5

## Referências

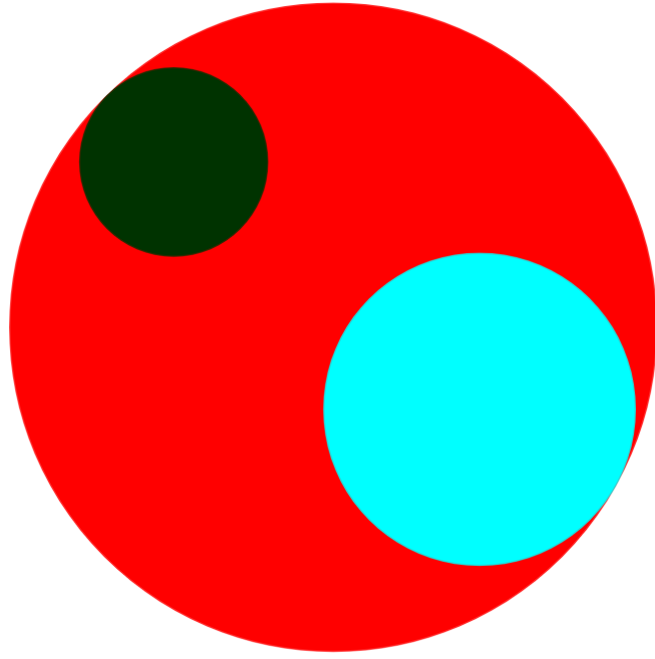
- [1] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023106>. Acesso em: 3 dez. 2020. 1
- [2] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática**. 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>. Acesso em: 3 dez. 2020. 1
- [3] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715>. Acesso em: 3 dez. 2020. 1
- [4] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdvoll7ermac202023169664jllabagfb127138. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 3 dez. 2020. 1
- [5] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI:

- 10.21167/cqdvoll8202023169664jllabagfb7888. Disponível em:  
<https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 3 dez. 2020. 1
- [6] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023045>. Acesso em: 3 dez. 2020. 1
- [7] **Problems and Solutions of the 2nd IGO**. 2015. Disponível em:  
<https://igo-official.ir/events/2/>. Acesso em: 3 dez. 2020. 2.1, 2.2, 2.4, 4.3, 4.4, 4.5, 4.7
- [8] LÓPEZ LINARES, J. **P2 NE IGO 2015**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/qumpyjtr>. Acesso em: 3 dez. 2020. 2.1.1, 2.1.2
- [9] LÓPEZ LINARES, J. **P3 NE IGO 2015**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/tbmehb4b>. Acesso em: 3 dez. 2020. 2.2.2
- [10] LÓPEZ LINARES, J. **P3 NE IGO 2015-s2**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/sqkdszga>. Acesso em: 3 dez. 2020. 2.2.3
- [11] LÓPEZ LINARES, J. **Encontro 10-1-Geometria, com o uso do Geogebra, na solução de problemas de Olimpíadas e Vestibulares** [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (1 h 13 min 49 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em:  
[https://youtu.be/KRBpoa5\\_xeY](https://youtu.be/KRBpoa5_xeY). Acesso em: 7 dez. 2020. 2.2.2
- [12] **Problems of 5th Iranian Geometry Olympiad 2018**. Disponível em:  
[https://www.obm.org.br/content/uploads/2018/09/IGO\\_2018.pdf](https://www.obm.org.br/content/uploads/2018/09/IGO_2018.pdf). Acesso em: 3 dez. 2020. 2.3, 2.5, 2.6, 3.4, 3.5, 4.2, 4.6
- [13] LÓPEZ LINARES, J. **P3 NE IGO 2018**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/h4bhryu3>. Acesso em: 3 dez. 2020. 2.3.2
- [14] LÓPEZ LINARES, J. **P3 NE IGO 2018-S2**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/nhy2cth2>. Acesso em: 3 dez. 2020. 2.3.3
- [15] LÓPEZ LINARES, J. **Encontro 01-1-Geometria, com o uso do Geogebra, na solução de problemas de Olimpíadas e Vestibulares**. [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (1 h 28 min 32 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em:  
<https://youtu.be/dnKbWqcRS9I>. Acesso em: 3 dez. 2020. 2.3.2

- [16] LÓPEZ LINARES, J. **P4 NE IGO 2015**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/vbhdcfvn>. Acesso em: 3 dez. 2020. 2.4.1
- [17] LÓPEZ LINARES, J. **P4 NE IGO 2015-paralelogramo**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/twgyjswz>. Acesso em: 3 dez. 2020. 2.4.2
- [18] LÓPEZ LINARES, J. **P1-NI-IGO-2018**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/xfd3q9eh>. Acesso em: 3 dez. 2020. 2.5.2
- [19] LÓPEZ LINARES, J. **P2 NI IGO 2018**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/ndmcscjj>. Acesso em: 3 dez. 2020. 2.6.1, 2.6.2
- [20] LÓPEZ LINARES, J. **Encontro 04-1-Geometria, com o uso do Geogebra, na solução de problemas de Olimpíadas e Vestibulares** [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (1 h 20 min 59 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em:  
[https://youtu.be/TT\\_FSHzBYF8](https://youtu.be/TT_FSHzBYF8). Acesso em: 3 dez. 2020. 2.6.1
- [21] **Problems and Solutions of 1st IGO**. 2014-2015. Disponível em:  
<https://igo-official.ir/events/1/>. Acesso em: 3 dez. 2020. 3.1, 3.2, 3.3, 3.6, 4.1, 4.8
- [22] LÓPEZ LINARES, J. **P1-NE-IGO-2014-5**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/n9b6acqg>. Acesso em: 3 dez. 2020. 3.1.1, 3.1.2
- [23] LÓPEZ LINARES, J. **Encontro 06-1-Geometria, com o uso do Geogebra, na solução de problemas de Olimpíadas e Vestibulares** [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (1 h 04 min 46 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em:  
<https://youtu.be/nTpKq5LSB5E>. Acesso em: 3 dez. 2020. 3.1.1
- [24] LÓPEZ LINARES, J. **P2 NE IGO 2014**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/bct7gcpq>. Acesso em: 3 dez. 2020. 3.2.1, 3.2.2
- [25] LÓPEZ LINARES, J. **Encontro 07-1-Geometria, com o uso do Geogebra, na solução de problemas de Olimpíadas e Vestibulares** [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (57 min 13 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em:  
<https://youtu.be/KtIi832Oj9M>. Acesso em: 3 dez. 2020. 3.2.1
- [26] LÓPEZ LINARES, J. **P5 NE IGO 2014**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/a2cvrmjv>. Acesso em: 3 dez. 2020. 3.3.1, 3.3.2
- [27] LÓPEZ LINARES, J. **Encontro 09-1-Geometria, com o uso do Geogebra, na solução de problemas de Olimpíadas e Vestibulares** [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (53 min 41 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em:  
<https://youtu.be/jZVLqNkFhCg>. Acesso em: 30 nov. 2020. 3.3.1

- [28] LÓPEZ LINARES, J. **P1 NA IGO 2018**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/xbarnhk>. Acesso em: 3 dez. 2020. 3.4.1, 3.4.2
- [29] LÓPEZ LINARES, J. **V6 Tangente Externas a duas circunferências. Encontro online do dia 30-03-20 parte 2 FZEA USP** [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (9 min 05 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em: [https://youtu.be/sYTII\\_rfjfw](https://youtu.be/sYTII_rfjfw). Acesso em: 3 dez. 2020. 3.4.1
- [30] LÓPEZ LINARES, J. **Encontro 05-1-Geometria, com o uso do Geogebra, na solução de problemas de Olimpíadas e Vestibulares** [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (1 h 30 min 55 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em:  
<https://youtu.be/50CkQPgMnmg>. Acesso em: 3 dez. 2020. 3.4.1
- [31] LÓPEZ LINARES, J. **P2 NA IGO 2018**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/bf9ze4uv>. Acesso em: 3 dez. 2020. 3.5.1, 3.5.2
- [32] LÓPEZ LINARES, J. **P8 NA IGO 2014**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/qztwd2fr>. Acesso em: 3 dez. 2020. 3.6.1, 3.6.2
- [33] LÓPEZ LINARES, J. **P3 NE IGO 2014**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/jz9mccjk>. Acesso em: 3 dez. 2020. 4.1.1, 4.1.2
- [34] LÓPEZ LINARES, J. **Encontro 08-1-Geometria, com o uso do Geogebra, na solução de problemas de Olimpíadas e Vestibulares** [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (1 h 12 min 51 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em:  
<https://youtu.be/RSM3o83-cwQ>. Acesso em: 3 dez. 2020. 4.1.1
- [35] LÓPEZ LINARES, J. **P4-NE-IGO-2018**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/vykfy3c>. Acesso em: 3 dez. 2020. 4.2.1
- [36] LÓPEZ LINARES, J. **P4-NE-IGO-2018-2**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/bfxzu2qc>. Acesso em: 3 dez. 2020. 4.2.2
- [37] LÓPEZ LINARES, J. **Encontro 02-1-Geometria, com o uso do Geogebra, na solução de problemas de Olimpíadas e Vestibulares**. [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (1 h 17 min 56 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em:  
<https://youtu.be/U4HSiKBxiz4>. Acesso em: 3 dez. 2020. 4.2.1
- [38] LÓPEZ LINARES, J. **P1 NI IGO 2015**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/vk9ty44x>. Acesso em: 3 dez. 2020. 4.3.2
- [39] LÓPEZ LINARES, J. **P1 NI IGO 2015-s2**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/rrphnbwq>. Acesso em: 3 dez. 2020. 4.3.3

- [40] LÓPEZ LINARES, J. **P2 NI IGO 2015**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/p49efhce>. Acesso em: 3 dez. 2020. 4.4.2
- [41] LÓPEZ LINARES, J. **P2 NI IGO 2015-s2**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/af5vduza>. Acesso em: 3 dez. 2020. 4.4.3
- [42] LÓPEZ LINARES, J. **P3 NI IGO 2015**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/emzubbbqw>. Acesso em: 3 dez. 2020. 4.5.2
- [43] LÓPEZ LINARES, J. **P3 NI IGO 2015-s2**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/hbwa2a6t>. Acesso em: 3 dez. 2020. 4.5.3
- [44] LÓPEZ LINARES, J. **P3 NI IGO 2018 Lema**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/hyn6bkud>. Acesso em: 3 dez. 2020. 4.6.2
- [45] LÓPEZ LINARES, J. **P3 NI IGO 2018**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/czsvggfg>. Acesso em: 3 dez. 2020. 4.6.3
- [46] LÓPEZ LINARES, J. **V39 Trapézio isósceles formado por 4 pontos numa circunferência - Geometria com Geogebra -FZEA - USP** [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (5 min 10 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em:  
<https://youtu.be/YZEU3dMH0Zc>. Acesso em: 3 dez. 2020. 4.6.1
- [47] LÓPEZ LINARES, J. **P4 NI IGO 2015-s1**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/gew3b8fb>. Acesso em: 3 dez. 2020. 4.7.2
- [48] LÓPEZ LINARES, J. **P7 NA IGO 2014-a**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/nkjdcvts>. Acesso em: 3 dez. 2020. 4.8.1
- [49] LÓPEZ LINARES, J. **P7 NA IGO 2014**. 2020. Disponível em:  
<https://www.geogebra.org/m/wycfqcrt>. Acesso em: 3 dez. 2020. 4.8.2



ISBN 978-65-87023-11-3 (e-book)