

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de São Carlos

Estática das Estruturas
Material de Apoio e Complementar
Obtenção de Linhas de Influência e
Resolução de Estruturas Hiperestáticas

Rogério Carrazedo

Rodrigo Ribeiro Paccola

Professores do Departamento de Engenharia de Estruturas

Universidade de São Paulo - USP
Escola de Engenharia de São Carlos - EESC
Departamento de Engenharia de Estruturas - SET

Estática das Estruturas
Material de Apoio e Complementar
Obtenção de Linhas de Influência e
Resolução de Estruturas Hiperestáticas

Rogério Carrazedo

Rodrigo Ribeiro Paccola

Professores do Departamento de Engenharia de Estruturas

EESC-USP
São Carlos
2025

DOI: 10.11606/9786586954517

Universidade de São Paulo

Reitor: Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Júnior

Vice-Reitora: Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

Escola de Engenharia de São Carlos

Diretor: Prof. Dr. Fernando Martini Catalano

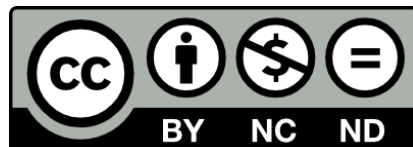
Vice-diretor: Prof. Dr. Antônio Néelson Rodrigues da Silva

Ficha catalográfica elaborada pela Seção de Atendimento ao Usuário do
Serviço de Biblioteca "Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes"

C311e Carrazedo, Rogério
Estática das estruturas: material de apoio e complementar: obtenção de linhas de influência e resolução de estruturas hiperestáticas / Rogério Carrazedo e Rodrigo Ribeiro Paccola. -- São Carlos: EESC-USP, 2025.
143 p.
ISBN 978-65-86954-51-7
DOI 10.11606/9786586954517
1. Linhas de influência. 2. Processo das cadeias cinemáticas. 3. Processo dos esforços. 4. Processo dos deslocamentos. I. Paccola, Rodrigo Ribeiro. II. Título.

Elaborado por Eduardo Graziosi Silva - CRB-8/8907

Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.



Este texto foi dividido em três partes. Na parte 1 são revisados os conceitos fundamentais, que são necessários à estática das estruturas, mas que são considerados de pleno conhecimento do leitor e são apenas brevemente revisitados.

Nesta parte 2 são apresentados três tópicos específicos à estática das estruturas – obtenção de linhas de influência e resolução de estruturas hiperestáticas pelo processo dos esforços e pelo processo dos deslocamentos. São pontos fundamentais para o estudo do comportamento de estruturas. Da mesma maneira que no primeiro livro, não cobrimos todos os detalhes das formulações, pois acredita-se que o leitor já tenha familiaridade com o tema.

Na parte 3, não menos importante, são estudadas formulações de problemas de valor de contorno e a sua resolução pelos métodos de Rayleigh-Ritz, de Resíduos Ponderados e pelo método dos elementos finitos. Uma extensão dos tópicos abordados na Estática das Estruturas, porém essenciais ao Engenheiro Moderno.

Por fim, salienta-se que este não é um texto introdutório. Traz apenas as relações mais importantes, necessárias para a compreensão de conceitos empregados ao longo do texto. Apenas as equações e discussões essenciais ao aprofundamento do estudo são trazidas ao texto. Deduções mais específicas devem ser consultadas em referências complementares.

Autores, março de 2025.

AGRADECIMENTOS

A Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, sempre produziu materiais didáticos de referência, de alta qualidade. Nos anos recentes, alguns desses livros deixaram de ser editados, por motivos diversos. Este é uma das razões que nos levou a fazer este livro. Assim, é irrefutável a contribuição dos seguintes:

- SOUZA, J.C.A.O., ANTUNES, H.M.C.C. Cargas Móveis em Estruturas Lineares. São Carlos, EESC-USP.
- SOUZA, J.C.A.O., ANTUNES, H.M.C.C. Processos gerais da hiperestática clássica. São Carlos, EESC-USP.
- SOUZA, J.C.A.O., ANTUNES, H.M.C.C. Introdução à análise matricial de estruturas. São Carlos, EESC-USP.

Além destes, os autores reconhecem as importantes contribuições das notas de aula dos professores Dagoberto Dario Mori e Márcio Roberto Silva Corrêa. Fica aqui registrado o nosso reconhecimento e agradecimento a estes importantes educadores, que tanto contribuíram em nossa formação!

Autores, março de 2025.

CAPÍTULO 1 - LINHAS DE INFLUÊNCIA	15
1.1 OBTENÇÃO DE LINHAS DE INFLUÊNCIA DE FORMA ANALÍTICA	16
1.2 TREM-TIPO	19
1.3 OBTENÇÃO DE UM EFEITO DEVIDO A ATUAÇÃO DE TREM-TIPO	20
1.4 ENVOLTÓRIA DE ESFORÇOS	23
1.5 PROCESSO DAS CADEIAS CINEMÁTICAS	26
1.5.1 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA PARA SISTEMAS ISOSTÁTICOS	26
1.5.2 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA PARA SISTEMAS HIPERESTÁTICOS	27
1.5.3 PROPRIEDADES DE POLOS	28
1.5.4 EXEMPLO EM VIGA GERBER	30
1.5.5 EXEMPLO EM PÓRTICO PLANO	33
1.5.6 OUTRO EXEMPLO EM PÓRTICO	41
1.6 SISTEMA ISOSTÁTICO DE PISOS	43
1.6.1 EXEMPLO DE SISTEMA ISOSTÁTICO DE PISO EM PÓRTICO	45
1.6.2 EXEMPLO DE LINHAS DE INFLUÊNCIA EM TRELIÇA	46
1.7 PRINCÍPIO DUAL DE MÜLLER-BRESLAU	57
1.7.1 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA	58
CAPÍTULO 2 - PROCESSO DOS ESFORÇOS	59
2.1 EXEMPLO MODELO – VIGA HIPERESTÁTICA (VH)	61
2.2 EXEMPLO – PÓRTICO PLANO SOB AÇÕES DIVERSAS (PP)	63
2.3 EXEMPLO – PÓRTICO MISTO (PM)	71
2.4 EXEMPLO – GRELHA COM TORÇÃO ESSENCIAL AO EQUILÍBRIO (GCT)	77
2.5 EXEMPLO – GRELHA DESCONSIDERANDO TORÇÃO (GDT)	82
2.6 EXEMPLO – GRELHA COM ELEMENTOS NÃO ORTOGONAIS (GNO)	87
CAPÍTULO 3 - PROCESSO DOS DESLOCAMENTOS	91
3.1 EXEMPLO MODELO – VIGA HIPERESTÁTICA (VH)	93
3.2 EXEMPLO – VIGA HIPERESTÁTICA DE TRÊS TRAMOS (VTT)	97
3.3 EXEMPLO – PÓRTICO PLANO COM BARRAS DEFORMÁVEIS AXIALMENTE (PP)	105
3.4 GRAU DE HIPOGEOMETRIA OU DE DESLOCABILIDADE	116
3.5 EXEMPLO – PÓRTICO PLANO COM BARRAS RÍGIDAS AXIALMENTE (PBR)	119

3.6	EXEMPLO – PÓRTICO PLANO SOB CAUSA FÍSICA DE RECALQUE (PBR)	125
3.6.1	EXEMPLO – PÓRTICO PLANO SOB CAUSA FÍSICA DE TEMPERATURA (PVT)	126
3.7	EXEMPLO – PÓRTICO COM BARRAS INCLINADAS E FLEXÍVEIS AXIALMENTE (PIF)	129
3.8	EXEMPLO – PÓRTICO COM BARRAS INCLINADAS E RÍGIDAS AXIALMENTE (PIR)	134
<u>CAPÍTULO 4 - REFERÊNCIAS COMPLEMENTARES</u>		<u>140</u>
<u>CAPÍTULO 5 - TABELAS</u>		<u>141</u>

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.	LI de E_c e valor de $E_c(s)$ para carga unitária posicionada na abscissa $x = s$.	16
Figura 2.	Linha de Influência de reação de apoio.	18
Figura 3.	LI de momento fletor em C.	19
Figura 4.	LI de esforço cortante em C.	19
Figura 5.	Exemplo de Trem-Tipo.	20
Figura 6.	Viga bi-apoiada sob carga unitária vertical móvel.	26
Figura 7.	Cadeia cinemática obtida pela remoção do vínculo vertical em B.	27
Figura 8.	Viga engastada-apoiada sob carga vertical unitária móvel.	27
Figura 9.	Estados de forças e deslocamentos de viga após remoção de vínculo em A.	28
Figura 10.	Alinhamento de Polos.	30
Figura 11.	Sistema Isotático de Piso.	44
Figura 12.	LI de Momento Fletor para Viga sem e com sistema isostático de piso.	44
Figura 13.	LI de Esforço Cortante para Viga sem e com sistema isostático de piso.	44
Figura 14.	Estados de forças e deslocamentos de viga para LI de deslocamentos.	58
Figura 15.	Processo dos Esforços: Viga Hiperestática.	61
Figura 16.	VH: Problema Isostático Equivalente.	62
Figura 17.	VH: Sobreposição dos problemas.	62
Figura 18.	Processo dos Esforços: Pórtico Plano.	63
Figura 19.	Alternativas para problema isostático equivalente do pórtico plano.	64
Figura 20.	PP: Problema Isostático Equivalente.	65
Figura 21.	PP: Sobreposição dos problemas.	65
Figura 22.	Processo dos Esforços: Pórtico Misto.	71
Figura 23.	PM: Problema Isostático Equivalente.	71
Figura 24.	PM: Sobreposição dos problemas.	72
Figura 25.	Esforços Solicitantes em uma Grelha.	78
Figura 26.	Determinação Geométrica de uma Grelha considerando Torção.	78
Figura 27.	Processo dos Esforços: Grelha com Torção.	79
Figura 28.	GCT: Problema Isostático Equivalente.	79
Figura 29.	GCT: Sobreposição dos problemas.	79
Figura 30.	Determinação Geométrica de uma Grelha desconsiderando Torção.	83
Figura 31.	Processo dos Esforços: Grelha desconsiderando Torção.	83

Figura 32.	GDT: Problema Isostático Equivalente.	84
Figura 33.	GDT: Sobreposição dos problemas.....	84
Figura 34.	Grelha desconsiderando Torção com elemento não ortogonal.....	87
Figura 35.	Determinação Geométrica para Grelha não ortogonal.....	88
Figura 36.	GNO: Problema Isostático Equivalente.....	88
Figura 37.	GNO: Sobreposição dos problemas.	89
Figura 38.	Obtenção de estrutura geometricamente determinada.....	91
Figura 39.	Processo dos Deslocamentos: Viga Hiperestática.	93
Figura 40.	VH: Estrutura Geometricamente Determinada.....	94
Figura 41.	VH: Sobreposição dos problemas.	94
Figura 42.	Trecho da tabela de Momentos de Engastamento Perfeito.	95
Figura 43.	Convenção de Sinais.	96
Figura 44.	VH: Problema (0).....	96
Figura 45.	VH: Problema (1).....	97
Figura 46.	Processo dos Deslocamentos: Viga de Três Tramos.....	97
Figura 47.	VTT: Estrutura Geometricamente Determinada.	98
Figura 48.	VTT: Sobreposição dos problemas.....	98
Figura 49.	Processo dos Deslocamentos: Barras Deformáveis Axialmente.	106
Figura 50.	PP: Estrutura Geometricamente Determinada.	107
Figura 51.	PP: Sobreposição dos problemas.....	108
Figura 52.	Exemplo 1 de Grau de Hipogeometria.	117
Figura 53.	Contabilizando Grau de Deslocabilidade Externa.....	118
Figura 54.	Exemplo 2 de Grau de Hipogeometria.	118
Figura 55.	PBR: Grau de Deslocabilidade.....	119
Figura 56.	PBR: Sobreposição dos problemas.	120
Figura 57.	Processo dos Deslocamentos: Pórtico Sob Recalque.	125
Figura 58.	Processo dos Deslocamentos: Pórtico Sob Variação Térmica.	127
Figura 59.	Processo dos Deslocamentos: Pórtico com Barras Inclínadas.....	129
Figura 60.	PIF: Sobreposição dos problemas.....	130
Figura 61.	Processo dos Deslocamentos: Pórtico com Barras Inclínadas Rígidas.	134
Figura 62.	PIR: Grau de Deslocabilidade.....	134
Figura 63.	PIR: Sobreposição dos problemas.....	135

LISTA DE QUADROS

Quadro 1. Linhas de Influência de Forma Analítica.....	17
Quadro 2. Linhas de influência de viga biapoiada.....	21
Quadro 3. Envoltória de esforços.....	25
Quadro 4. Viga Gerber – aplicação do processo cinemático.	31
Quadro 5. Pórtico Plano – aplicação do processo cinemático.....	33
Quadro 6. PP: LI de Reação vertical em A pelo processo cinemático.....	33
Quadro 7. PP: LI de Momento Fletor em D pelo processo cinemático.....	34
Quadro 8. PP: LI de Momento Fletor em B pelo processo cinemático.....	36
Quadro 9. PP: LI de Momento Fletor em C pelo processo cinemático.....	37
Quadro 10. PP: LI de Esforço Normal em D pelo processo cinemático.....	38
Quadro 11. PP: LI de Esforço Cortante em D pelo processo cinemático.....	39
Quadro 12. PP: LI de Esforço Cortante em E pelo processo cinemático.....	40
Quadro 13. Pórtico de barra inclinada.....	41
Quadro 14. PBI: LI de Momento Fletor em B.....	41
Quadro 15. PBI: LI de Esforço Cortante em A.....	42
Quadro 16. Exemplo de sistema isostático de piso em pórtico.....	45
Quadro 17. LI de momento fletor em pórtico com piso isostático.....	45
Quadro 18. Treliza com sistema isostático de piso nos nós 4, 5, 6 e 7.....	46
Quadro 19. TR: LI de esforço normal da barra 1-2.....	47
Quadro 20. TR: LI de esforço normal da barra 2-3.....	49
Quadro 21. TR: LI de esforço normal da barra 2-5.....	50
Quadro 22. TR: LI de esforço normal da barra 4-5.....	51
Quadro 23. TR: LI de esforço normal da barra 4-8.....	52
Quadro 24. TR: LI de esforço normal da barra 4-9.....	54
Quadro 25. TR: LI de esforço normal da barra 8-9.....	55
Quadro 26. TR: LI de esforço normal da barra 2-6.....	56
Quadro 27. PP: Diagrama de momentos fletores para o problema (0).....	68
Quadro 28. PP: Diagrama de momentos fletores para o problema (1).....	68
Quadro 29. PP: Diagrama de momentos fletores para o problema (2).....	68
Quadro 30. PP: Diagrama de esforços internos.....	70
Quadro 31. PM: Diagrama de momentos fletores para o problema (0).....	74

Quadro 32. PM: Diagrama de momentos fletores para o problema (1).....	74
Quadro 33. PM: Diagrama de momentos fletores para o problema (2).....	74
Quadro 34. PM: Diagrama de momentos fletores para o problema (3).....	74
Quadro 35. PM: Problema Isostático Equivalente já equilibrado.	77
Quadro 36. PM: Diagrama de Momento Fletor.	77
Quadro 37. GCT: Esforços Internos nos elementos de grelha.	80
Quadro 38. GCT: Diagrama de momentos fletores e Torsões para o problema (0).....	81
Quadro 39. GCT: Diagrama de momentos fletores e Torsões para o problema (1).....	81
Quadro 40. GCT: Diagrama de Momento Fletor e Torsor.....	82
Quadro 41. GDT: Esforços Internos nos elementos de grelha.	85
Quadro 42. GDT: Diagrama de momentos fletores para o problema (0) e (1).	86
Quadro 43. GDT: Diagrama de Momento Fletor.....	87
Quadro 44. GNO: Esforços Internos na extremidade dos elementos.	89
Quadro 45. GNO: Diagrama de momentos fletores para o problema (0) e (1).	90
Quadro 46. GNO: Diagrama de Momento Fletor.	90
Quadro 47. VTT: Problema (0).....	99
Quadro 48. VTT: Diagrama de Momento Fletor do Problema (0).	100
Quadro 49. VTT: Problema (1).....	101
Quadro 50. VTT: Diagrama de Momento Fletor do Problema (1).	102
Quadro 51. VTT: Problema (2).....	102
Quadro 52. VTT: Diagrama de Momento Fletor do Problema (2).	103
Quadro 53. VTT: Diagrama de Momento Fletor Real na Convenção de Grinter.	103
Quadro 54. VTT: Diagrama de Momento Fletor Real na Convenção Usual.....	104
Quadro 55. VTT: Equilíbrio de esforços.....	105
Quadro 56. VTT: Diagrama de Esforço Cortante.	105
Quadro 57. PP: Separação em tramos e Esforços Solicitantes.....	109
Quadro 58. PP: Problema (0).....	109
Quadro 59. PP: Diagrama de Momento Fletor do Problema (0).....	110
Quadro 60. PP: Problema (1).....	111
Quadro 61. PP: Diagrama de Momento Fletor do Problema (1).....	112
Quadro 62. PP: Problema (2).....	112
Quadro 63. PP: Diagrama de Momento Fletor do Problema (2).....	113
Quadro 64. PP: Problema (3).....	114

Quadro 65. PP: Diagrama de Momento Fletor do Problema (3).....	115
Quadro 66. PP: Diagrama de Momento Fletor Real na Convenção de Grinter.	116
Quadro 67. PP: Diagrama de Momento Fletor Real na Convenção Usual.....	116
Quadro 68. PBR: Esforços Solicitantes.	121
Quadro 69. PBR: Momentos Fletores e Reações nos apoios fictícios.....	123
Quadro 70. PBR: Diagrama de Momento Fletor.	124
Quadro 71. PBR: Esforços Solicitantes.	124
Quadro 72. PCF: Problema (0) – Recalque.	125
Quadro 73. PCR: Diagrama de Momento Fletor.	126
Quadro 74. PVT: Problema (0) – Variação de temperatura.	128
Quadro 75. PVT: Diagrama de Momento Fletor.	128
Quadro 76. PIF: Esforços Solicitantes nos Trechos e Nos nós.....	130
Quadro 77. PIF: Deslocamento associado ao Problema (2).	132
Quadro 78. PIF: Diagrama de Momento Fletor.....	133
Quadro 79. PIR: Deslocamento associado ao Recalque.....	136
Quadro 80. PIR: Esforços Solicitantes nos Trechos e Nos nós.	136
Quadro 81. PIR: DiagramaS de Momento Fletor.....	138
Quadro 82. PIR: Diagrama de Esforço Cortante.....	138

Capítulo 1 - Linhas de Influência

Neste capítulo você vai ver:

- Obtenção de linhas de influência por equilíbrio;
- Princípio de Muller-Breslau;
- Linhas de influência em pórticos;
- Linhas de influência em treliças;
- Sistemas isostáticos de pisos.

NO projeto de uma estrutura, os esforços internos dos elementos estruturais são determinados em função das solicitações que atuam sobre eles. As ações são divididas, essencialmente, em dois grandes grupos: ações permanentes e variáveis.

As ações permanentes atuam na estrutura durante toda a sua vida útil, com valores e posições conhecidos. Decorrem do peso próprio da estrutura e dos elementos construtivos, das instalações e equipamentos, além de empuxos de água/solo, por exemplo.

As ações variáveis são aquelas que atuam de forma intermitente ao longo da vida útil da estrutura, não tendo necessariamente uma posição fixa. Decorrem do uso da construção, da ação de intempéries, de veículos, entre outras possibilidades. Seus valores podem variar e são estabelecidos por códigos normativos conforme a probabilidade de ocorrência. No caso de cargas de posição fixa e conhecida, basta calcular envoltórias das grandezas de interesse para o dimensionamento da estrutura (deslocamentos, reações e esforços internos) para identificar os estados limites últimos e de serviço.

No caso de veículos e pontes rolantes, por exemplo, não apenas os valores das cargas podem variar, mas também sua posição sobre a estrutura. Por serem móveis, podem prover solicitações distintas em uma mesma seção de um elemento estrutural a depender da posição em que está atuando em determinado momento. Para obtenção de envoltórias das grandezas de interesse, os valores deveriam ser calculados para cada possível posição da carga móvel, em cada seção do elemento, tornando o processo de análise muito oneroso.

No entanto, para auxiliar na determinação das grandezas de interesse decorrentes de ações móveis, e apropriando-se do princípio de superposição dos efeitos, utilizam-se as chamadas Linhas de Influência, definidas da seguinte forma:



Linha de Influência (ou simplesmente LI) de um determinado efeito E em uma dada seção C de um elemento estrutural é a representação gráfica ou analítica do valor desse efeito E naquela seção C , produzido por uma carga vertical unitária, de cima para baixo, que percorre a estrutura ou parte dela.

Na Figura 1 apresenta-se a linha de influência de um efeito E para uma seção C indicada (LI de E_c), ou simplesmente $n(s)$, para carga unitária percorrendo uma estrutura, no caso linear ou reticulada, segundo seu eixo longitudinal em um sistema de coordenadas orientado da esquerda para a direita. Representa-se ainda $E_c(s)$, que é o valor do efeito na seção C quando a carga unitária se encontra na coordenada $x = s$.

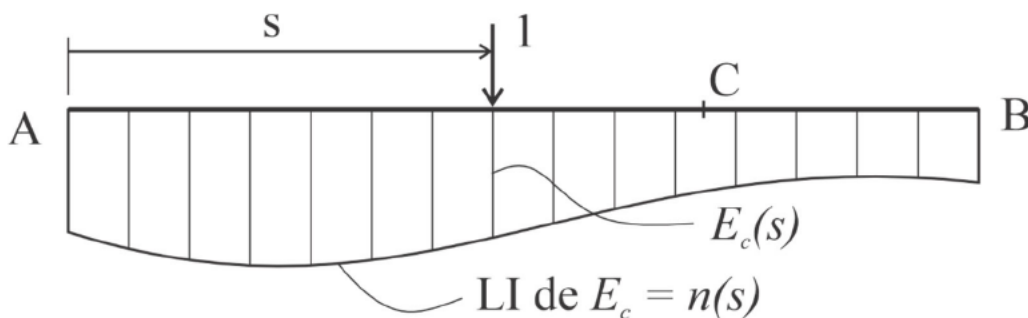


FIGURA 1. LI DE E_c E VALOR DE $E_c(s)$ PARA CARGA UNITÁRIA POSICIONADA NA ABSCISSA $x = s$.

O efeito E (ou grandeza de interesse) pode ser uma reação de apoio, um deslocamento ou um esforço interno que se deseja quantificar na determinada seção C de um elemento estrutural específico para diferentes posições de uma carga unitária percorrendo a estrutura. Diferentemente da representação de diagramas de esforços solicitantes ou linhas elásticas – em que se varia a seção onde se está calculando um efeito mantendo-se a posição do carregamento fixo –, em Linhas de Influência o efeito e a seção são fixos, enquanto o que se varia é a posição de aplicação da carga vertical unitária (carregamento). Em resumo, cada ordenada da LI representa o valor do efeito em uma seção fixa previamente escolhida para a carga vertical unitária atuando na posição onde se tem a referida ordenada.

1.1 Obtenção de Linhas de Influência de Forma Analítica

As linhas de influência podem ser obtidas de forma analítica, pois são função apenas de uma carga unitária e de sua posição na estrutura. A título de exemplo, são apresentadas algumas LI's de uma viga bi-apoiada com balanço no Quadro 1. Estas foram obtidas por equações de equilíbrio, tendo-se como incógnitas as reações e esforços das LI's desejadas.

<p>a) Representação esquemática da viga</p>	
	$\sum M_B = 0$ $-5R_A + 1(5 - s) = 0$ $R_A = 1 - s/5$
<p>b) LI de reação em A</p>	
	$\sum M_A = 0$ $5R_B - 1 \cdot s = 0$ $R_B = s/5$
<p>c) LI de reação em B</p>	
	$P/0 \leq s \leq 2 \quad P/2 \leq s \leq 7$ $\sum M_C^{\rightarrow} = 0 \quad \sum M_C^{\leftarrow} = 0$ $-M_c + 3R_B = 0 \quad -M_c + 2R_A = 0$ $M_c = 3s/5 \quad M_c = 2(1 - s/5)$
<p>d) LI de momento fletor em C</p>	
	$P/0 \leq s < 2 \quad P/2 < s \leq 7$ $\sum V_C^{\rightarrow} = 0 \quad \sum V_C^{\leftarrow} = 0$ $V_c + R_B = 0 \quad -V_c + R_A = 0$ $V_c = -s/5 \quad V_c = 1 - s/5$
<p>e) LI de esforço cortante em C</p>	

QUADRO 1. LINHAS DE INFLUÊNCIA DE FORMA ANALÍTICA.

As expressões analíticas definem a Linha de Influência respectiva ao efeito visado. Na LI da reação vertical R_A (Quadro 1b), uma expressão linear foi obtida para toda a estrutura, e representa o valor da reação no apoio A quando a carga unitária está na abscissa correspondente (valor de s).

O mesmo é válido para a reação vertical R_B (Quadro 1c). Ou seja, a LI representa o valor do efeito (reação vertical) quando a ação unitária se encontra sobre aquele ponto, e cada LI representa apenas um único efeito, numa dada seção. Por convenção, independente do efeito em análise, considera-se positivo na parte inferior e negativo na parte superior da linha de influência.

Observa-se ainda que, nas LI de M_C e V_C (Quadro 1d e Quadro 1e), foram obtidas expressões lineares relacionadas com o efeito da carga unitária no ponto em análise (ponto C). Em toda e qualquer LI de estruturas isostáticas, as expressões lineares já são esperadas, pois as estruturas são isostáticas e as linhas de influência são advindas de uma carga unitária. Não há possibilidade de estas terem um grau maior para a expressão analítica sendo apenas uma carga concentrada aplicada em uma estrutura isostática.

O traçado das LI por meio da dedução analítica do efeito e da posição da carga unitária pode se mostrar oneroso em estruturas mais complexas. Portanto, mais a frente, será apresentado um método que emprega considerações geométricas da estrutura, sem perda de generalidade. Não obstante, algumas informações essenciais podem ser extraídas das expressões analíticas para embasar as futuras discussões.

É fato que, nas linhas de influência referentes a reações de apoio, a ordenada da LI será unitária sobre o próprio apoio considerado e nula nos demais pontos de apoio. Isto é destacado na Figura 2. Conhecidos dois pontos da LI, na inexistência de descontinuidades na estrutura (ou entre descontinuidades), esta já pode ser traçada, haja vista sua linearidade.

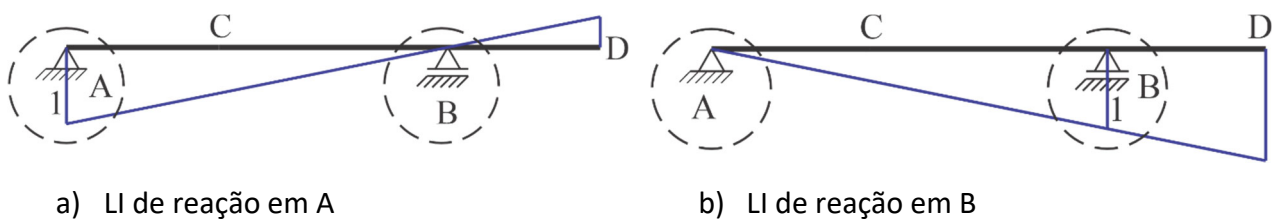


FIGURA 2. LINHA DE INFLUÊNCIA DE REAÇÃO DE APOIO.

Nas linhas de influência de momento fletor, a extensão das linhas de influência até os pontos de apoio permite observar algumas relações primordiais, vide Figura 3. Considere α e β como sendo a distância entre a seção considerada (ponto C) e apoios A e B.

Percebe-se, por semelhança de triângulos, que os valores das ordenadas nas extensões da LI são as próprias distâncias α e β , e a ordenada na seção C é $\alpha \cdot \beta / L$. Isto implica que os giros dos trechos da LI são dados por $w_1 = \alpha / L$ e $w_2 = \beta / L$, e que o giro relativo entre os dois trechos w_{12} , dado pela soma dos giros dos trechos, é unitário (i.e. $w_{12} = w_1 + w_2 = 1$). Estas relações serão amplamente empregadas posteriormente.

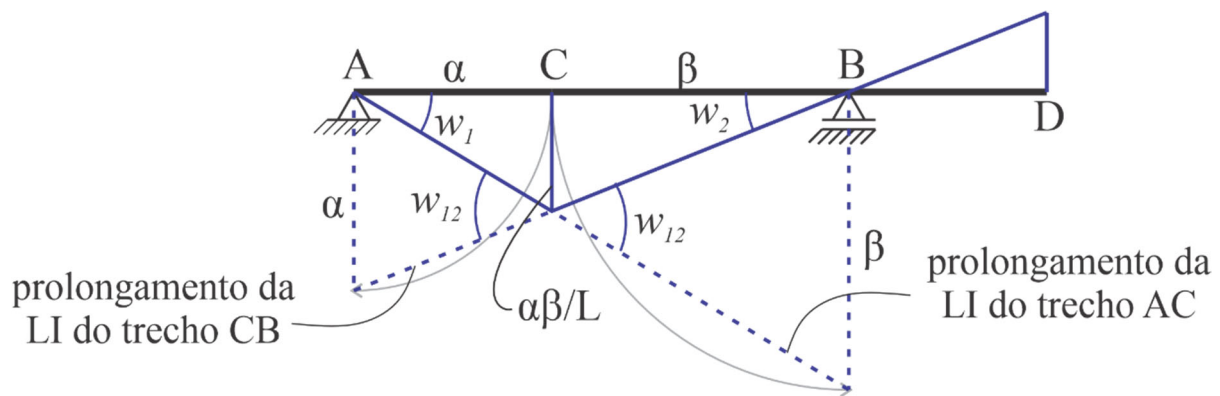


FIGURA 3. LI DE MOMENTO FLETOR EM C.

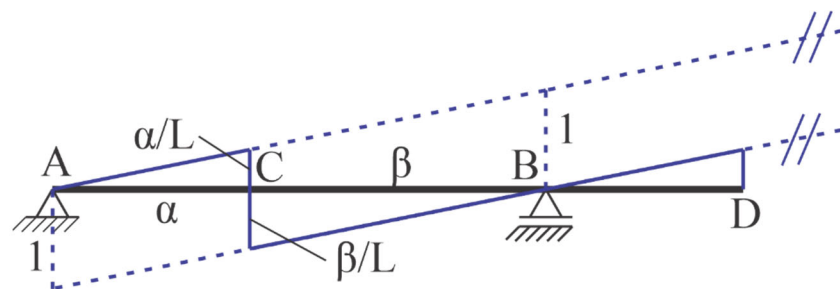


FIGURA 4. LI DE ESFORÇO CORTANTE EM C.

Nas linhas de influência de esforço cortante, a extensão das linhas de influência também traz relações essenciais, vide Figura 4. O valor da ordenada da extensão da LI sobre o apoio é sempre unitário, correspondente ao valor da carga. Assim, o giro das chapas é igual, e de valor $w_1 = w_2 = 1/L$. Desta forma, as linhas auxiliares são paralelas, devendo-se apenas observar o sentido positivo das ordenadas da LI. Recobrando a definição das distâncias α e β , as ordenadas no ponto C são dadas por α/L junto a α e β/L junto a β , e $\alpha + \beta = L$.

1.2 Trem-tipo

Conhecida a LI de um efeito E_C , pode-se calcular o valor do referido efeito provocado por um carregamento móvel composto por cargas concentradas e/ou distribuídas utilizando os princípios da superposição de efeitos e da proporcionalidade entre causa e efeito. Este procedimento é empregado para determinar os valores máximos e mínimos de um efeito em determinada seção, bastando fixar o carregamento móvel nas posições mais desfavoráveis.

A forma do carregamento móvel é definida em projeto, se adequando a finalidade da estrutura. No caso de pontes rodoviárias e ferroviárias, os códigos normativos definem veículos padrões, chamados de “trens-tipo”.



Trem-tipo é uma representação normativa de veículos que trafegam na estrutura, segundo a finalidade e natureza desta. São compostos por cargas concentradas e distribuídas, com grandezas e espaçamento pré-estabelecidos.

Uma ilustração de um trem-tipo é provida na Figura 5, composto por cargas concentradas e distribuídas, de valores e posições conhecidos. Destaca-se, em especial, as cargas distribuídas de comprimento variável (indicadas por ...), que serão discutidas em momento oportuno.

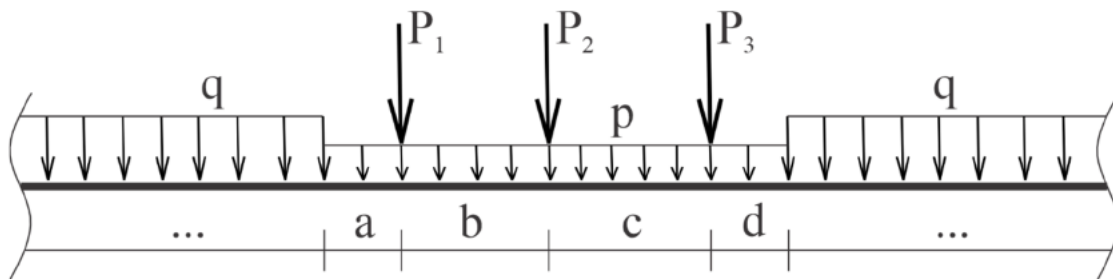


FIGURA 5. EXEMPLO DE TREM-TIPO.

1.3 Obtenção de um efeito devido a atuação de trem-tipo

A composição de E_c devido a atuação do trem-tipo se dá pelo princípio da proporcionalidade entre causa e efeito. Assim, o efeito é dado pelo produto entre o valor da carga que compõem o carregamento móvel e a ordenada da LI correspondente ao seu ponto de aplicação.

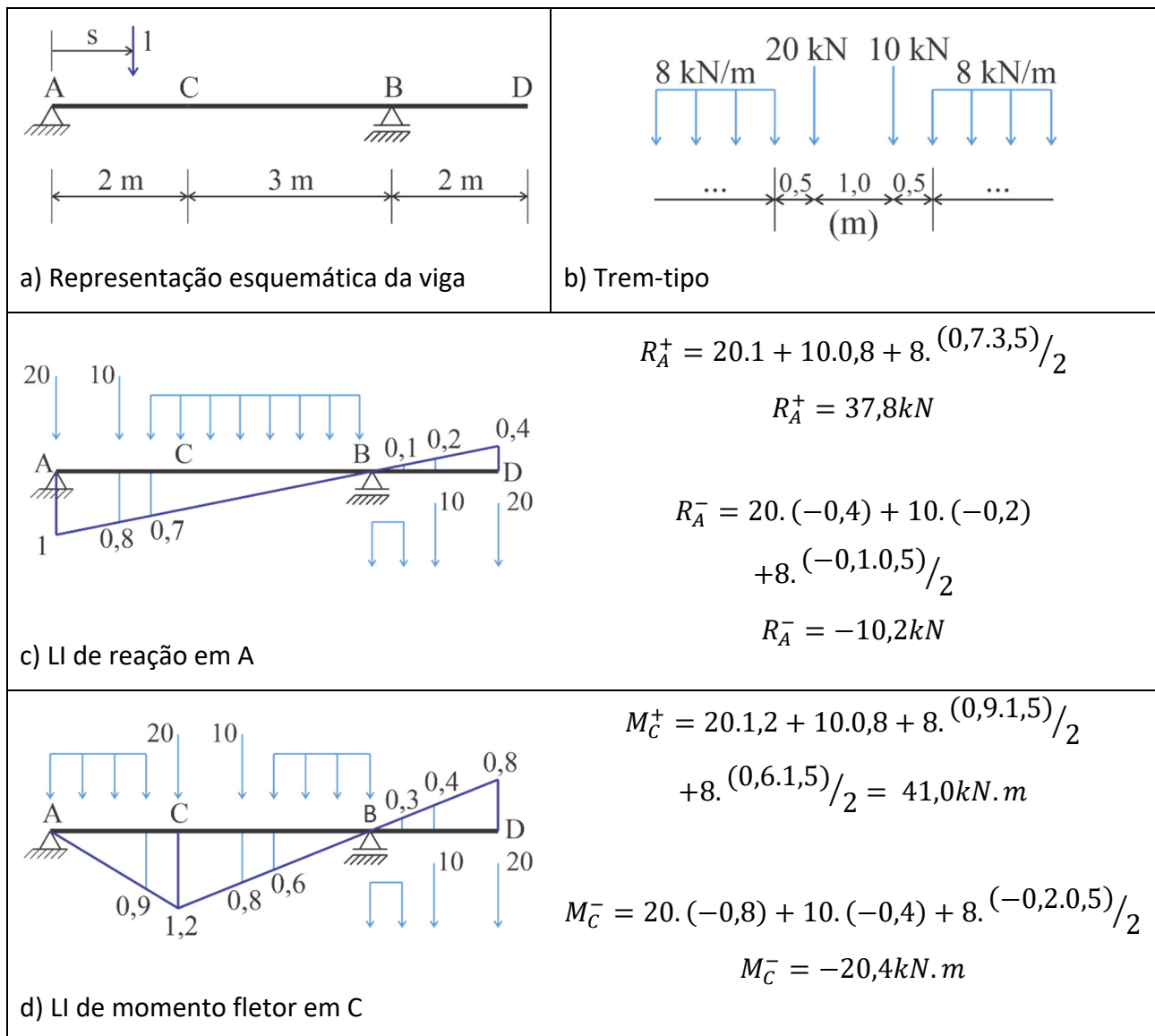
No caso de cargas concentradas, isso se dá de forma direta, multiplicando-se o valor da ordenada pelo valor da carga. No caso de cargas distribuídas, o produto é dado pela integração da expressão relativa ao carregamento móvel e da LI onde a carga se encontra aplicada, i.e.:

$$E_c = \int_s q(s) \cdot n(s) ds \quad (1.1)$$

Para carregamento uniformemente distribuído, o procedimento equivale ao cálculo da área da LI onde atua o carregamento, ou seja:

$$E_c = q \int_s n(s) ds \quad (1.2)$$

De forma ilustrativa, considera-se um trem-tipo composto por duas cargas variáveis concentradas assim como uma carga variável distribuída de 8 kN/m, conforme indicado no Quadro 2b. Em todas as possíveis posições do trem-tipo, duas situações devem ser consideradas – de máximo e de mínimo efeito, para posterior dimensionamento.



QUADRO 2. LINHAS DE INFLUÊNCIA DE VIGA BIAPOIADA.

Tendo sido consideradas apenas ações variáveis, então atuam apenas no trecho que contribuem para obter o maior / menor valor do efeito, respeitando as distâncias de ação do trem-tipo. É importante notar que o comprimento da carga distribuída é variável, devendo ser ajustada conforme a necessidade, inclusive podendo ser dividida em trechos. As cargas concentradas são posicionadas de forma que sua contribuição ao efeito pretendido seja o “maior” possível.

Considerando inicialmente a reação vertical em A (Quadro 2c), duas situações são passíveis de ocorrer – uma levando ao maior efeito positivo, outra ao maior negativo. Ou, em outras palavras, o maior e menor efeito devido ao trem-tipo. Buscando o maior efeito, a carga concentrada de maior valor do trem-tipo (de 20 kN) é posicionada na maior ordenada positiva da LI, ou seja, sobre o apoio A. A outra carga (de 10 kN) é então posicionada à distância fixa de 1 m, determinada pelo trem-tipo, para direita ou para esquerda, em que seu efeito seja maior – portanto para a direita.

Uma vez posicionadas as cargas concentradas, marca-se a região da carga distribuída – também a uma distância fixa das cargas concentradas, conforme o trem-tipo considerado. Como é uma carga variável, impõem apenas na região de maior efeito – positiva, para a análise atual. A posição de aplicação das cargas decorrente deste processo está destacada na própria LI, acima da viga. A partir disto, pode-se efetuar o cálculo da máxima ação, resultando em reação de 37,8 kN.

No caso da menor ação, o mesmo processo deve ser adotado, porém considerando apenas a região negativa da LI. A posição resultante foi representada na parte inferior da LI de R_A (0c). É interessante notar que o trem-tipo foi posicionado de forma inversa – as posições das cargas concentradas foram trocadas. Não há nenhum impedimento para que isto ocorra, pois considera-se que o veículo possa estar transitando em ambos os sentidos de fluxo. A menor ação obtida foi negativa, de -10,2 kN.

Por sua vez, para obter o máximo momento fletor no ponto C da estrutura, a carga concentrada de maior valor é posicionada sobre a maior ordenada positiva da LI. Em seguida, é posicionada a segunda carga concentrada respeitando a distância fixada pelo trem-tipo. Deve-se verificar em qual lado será obtido o maior efeito – ou seja, o trecho de LI que tiver menor inclinação. A carga distribuída é então posicionada respeitando sua configuração, e o valor da ação pode ser obtido. Todo o procedimento é repetido para o mínimo momento fletor (ou máximo negativo). Repare que, no Quadro 2d, a posição do trem-tipo também foi indicada acima e abaixo da viga nas situações de máximo e mínimo momento fletor.

Considere, de forma complementar, a existência de uma carga permanente adicional ao trem-tipo, no valor de 15 kN/m (esta não foi indicada no Quadro 2). Para determinar seu efeito, por ser permanente, não se faz distinção entre trechos positivos e negativos, e sua contribuição deve atingir toda a estrutura. Para a viga em questão, no caso da reação no apoio A, tal contribuição adicional, tanto para máximo quanto para mínimo efeito, seria dada por:

$$R_A = 15 \cdot \frac{1,5}{2} + 15 \cdot \frac{(-0,4) \cdot 2}{2} = 31,5 \text{ kN}$$

No caso do momento fletor na seção C, o adicional seria dado por:

$$M_C = 15 \cdot \frac{1,2,5}{2} + 15 \cdot \frac{(-0,8) \cdot 2}{2} = 33 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Em suma, as cargas distribuídas permanentes atuam sobre toda viga, não fazendo distinção entre trechos positivos e negativos. Para obter o valor máximo / mínimo considerando tanto ações variáveis e permanentes, realiza-se a adição dos respectivos valores. Por exemplo, para a reação de apoio em A, os valores máximo e mínimo são dados por:

$$R_A^+ = 37,5 + 31,5 = 69kN$$

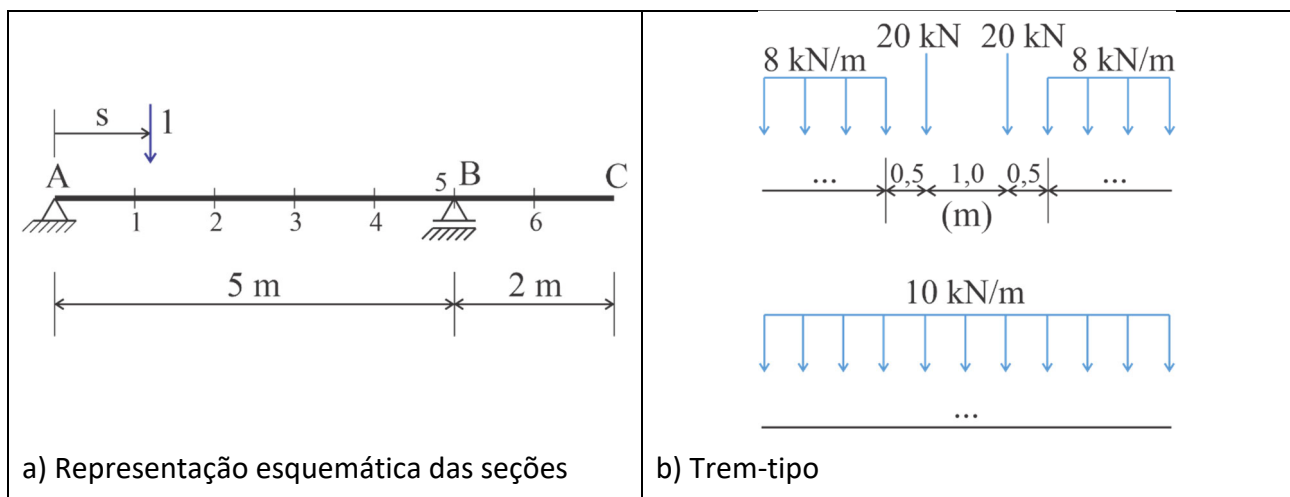
$$R_A^- = -10,2 + 31,5 = 21,3kN$$

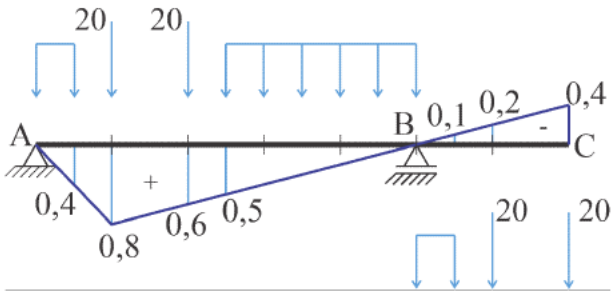
1.4 Envoltória de Esforços

Para dimensionar uma estrutura, não basta conhecer o efeito de um trem-tipo em uma seção. Deve-se conhecer o efeito do trem-tipo em diversas seções. Para facilitar o dimensionamento, cria-se outro diagrama, a envoltória de esforços. Este consiste na representação gráfica, para cada seção transversal da estrutura, da variação máxima e mínima de um efeito decorrente da ação dos carregamentos (permanentes e variáveis). Para tanto, divide-se a estrutura em uma série de seções, e em cada seção faz-se a linha de influência e posterior imposição do trem-tipo. Os valores são registrados na envoltória na própria seção, formando o diagrama.

Para exemplificar o processo, considere a viga biapoiada do Quadro 3. Decidiu-se realizar uma seção a cada metro, observando o trem-tipo indicado (composto de ações variáveis e permanentes), fazendo a envoltória de momento fletor. A distância é arbitrada, não existe um valor padrão. Deve ser adotada conforme a complexidade da estrutura.

Inicia-se fazendo a linha de influência de momento fletor para cada seção. Em cada LI, determina-se o maior e menor efeito devido ao trem-tipo considerado, considerando tanto ações variáveis quanto permanentes. Os valores obtidos são marcados no diagrama de Envoltória, na seção transversal correspondente. Por fim, os pontos obtidos são conectados por uma linha curva (vide Quadro 3i).

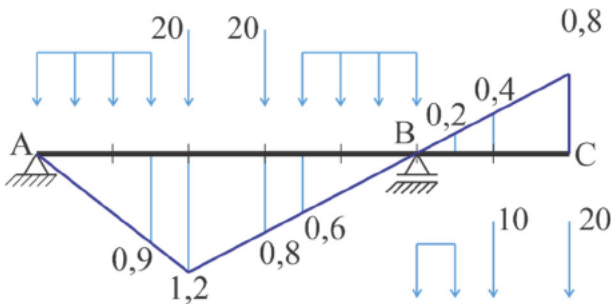




$$M_1^+ = 20 \cdot 0,8 + 20 \cdot 0,6 + 8 \cdot \frac{(0,4 \cdot 0,5)}{2} + 8 \cdot \frac{(0,5 \cdot 2,5)}{2} + 10 \cdot \frac{(0,8 \cdot 5)}{2} - 10 \cdot \frac{(0,4 \cdot 2)}{2} = 49,8 \text{ kN.m}$$

$$M_1^- = 3,8 \text{ kN.m}$$

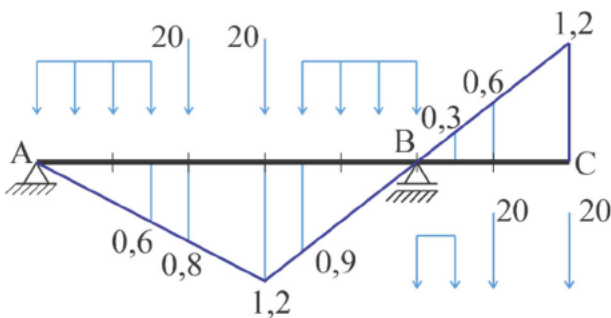
c) LI de momento fletor em 1



$$M_2^+ = 71,0 \text{ kN.m}$$

$$M_2^- = -2,4 \text{ kN.m}$$

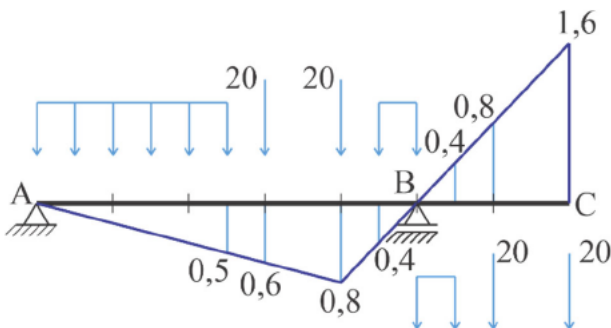
d) LI de momento fletor em 2



$$M_3^+ = 67,0 \text{ kN.m}$$

$$M_3^- = -18,6 \text{ kN.m}$$

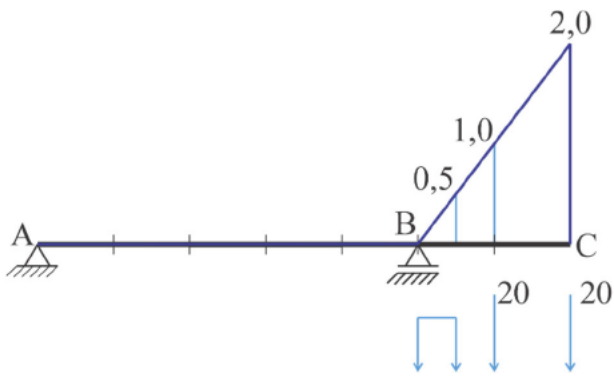
e) LI de momento fletor em 3



$$M_4^+ = 37,8 \text{ kN.m}$$

$$M_4^- = -44,8 \text{ kN.m}$$

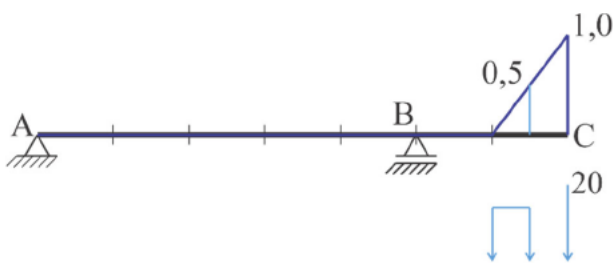
f) LI de momento fletor em 4



$$M_5^+ = -20,0 \text{ kN.m}$$

$$M_5^- = -81,0 \text{ kN.m}$$

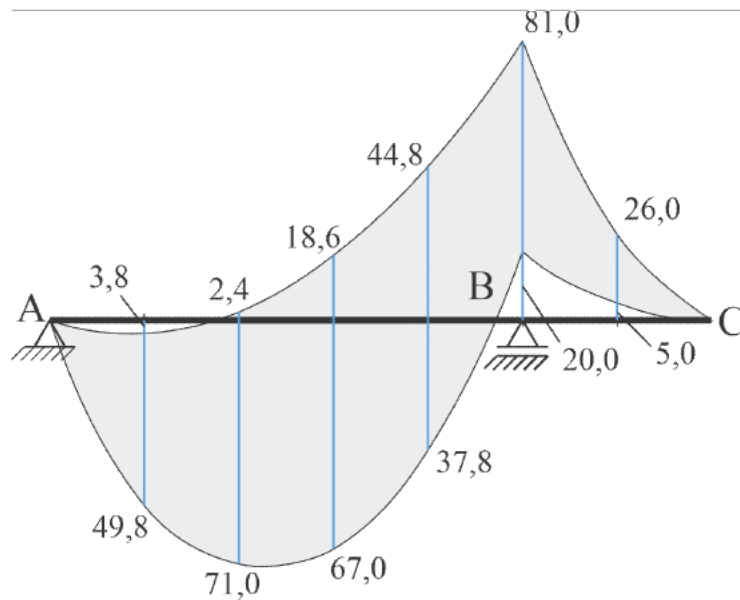
g) LI de momento fletor em 5



$$M_6^+ = -5,0 \text{ kN.m}$$

$$M_6^- = -26,0 \text{ kN.m}$$

h) LI de momento fletor em 6



i) Envoltória

QUADRO 3. ENVOLTÓRIA DE ESFORÇOS.

1.5 Processo das Cadeias Cinemáticas

Uma estratégia alternativa para obtenção das linhas de influência é o emprego do processo de cadeias cinemáticas por meio do Princípio dos Trabalhos Virtuais, na forma do Teorema de Müller-Breslau, que diz o seguinte:



A linha de influência de um determinado efeito E na seção de abscissa c provocado por uma força unitária vertical P é igual à deslocada vertical δ_v obtida a partir da introdução de um deslocamento unitário associado ao efeito E .

Em outras palavras, o teorema estabelece que, retirando-se o vínculo associado ao esforço interno ou à reação cuja LI se deseja determinar, a deslocada vertical obtida ao se aplicar um deslocamento unitário de sentido contrário ao arbitrado positivo na direção do respectivo esforço ou reação é igual à LI do referido esforço ou reação para carga vertical unitária percorrendo a estrutura. Desta forma, a obtenção de linhas de influência de estruturas isostáticas se torna um processo geométrico, sem precisar manusear condições de equilíbrio.

1.5.1 Demonstração do teorema para sistemas isostáticos

Para demonstração do teorema em sistemas isostáticos, considere uma viga bi-apoiada com carga unitária vertical percorrendo a estrutura, em que se deseja obter a LI da reação vertical do apoio em B, conforme a Figura 6.

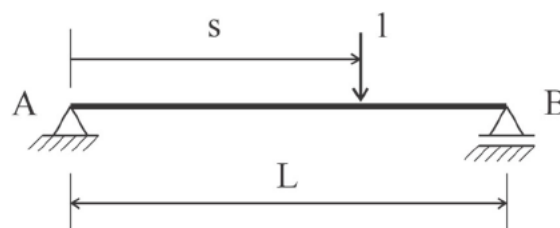


FIGURA 6. VIGA BI-APOIADA SOB CARGA UNITÁRIA VERTICAL MÓVEL.

Retirando-se o vínculo da reação no apoio e substituindo-se pela correspondente reação adotada positiva para cima, obtém-se a estrutura apresentada na Figura 7a, caracterizando um estado de forças ainda em equilíbrio, porém sobre uma cadeia cinemática com um grau de deslocabilidade (estrutura uma vez hipostática). Sobre a mesma estrutura / cadeia cinemática, impõem-se um deslocamento unitário na direção da reação vertical em B, porém em sentido contrário ao da reação arbitrada positiva, obtendo-se a deslocada vista na Figura 7b.

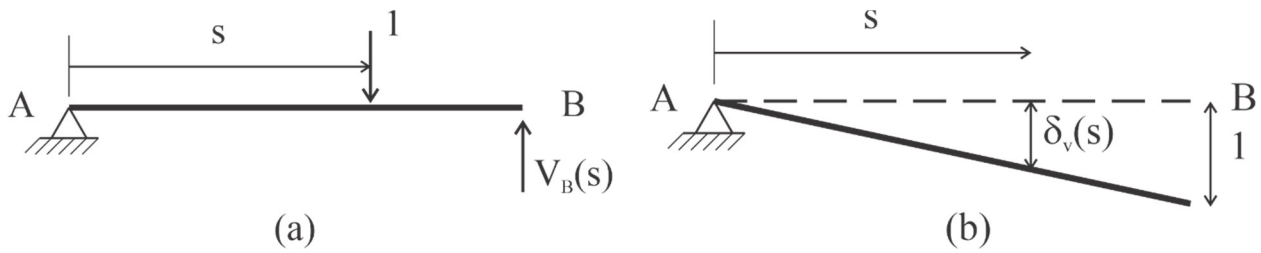


FIGURA 7. CADEIA CINEMÁTICA OBTIDA PELA REMOÇÃO DO VÍNCULO VERTICAL EM B.

Ao aplicar o Princípio dos Trabalhos Virtuais sobre os estados (a) e (b), e lembrando que a cadeia cinemática com um grau de liberdade se move como um corpo rígido, tem-se que:

$$\sum T_{ext} = \sum T_{int} \rightarrow \sum T_{ext} = 0 \quad (1.3)$$

Aplicando a Equação (1.3) para os casos da Figura 7, em que $V_B(s)$ é o valor da reação no apoio em B para carga unitária atuando em s e $\delta_v(s)$ é o deslocamento vertical na seção s devido à imposição do deslocamento unitário em B, tem-se:

$$\begin{aligned} -1 \cdot V_B(s) + 1 \cdot \delta_v(s) &= 0 \\ V_B(s) &= \delta_v(s) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ou seja, o trabalho dado pelo deslocamento vertical unitário em B do estado (b) multiplicado por $V_B(s)$ do estado (a) somado ao deslocamento $\delta_v(s)$ de (b) multiplicado à carga unitária de (a) é nulo. Não há energia de deformação associada (pois ocorre apenas deslocamento) tampouco trabalho das demais forças existentes (i.e., $V_A(s)$).

Disto fica demonstrado o Teorema de Müller-Breslau para o caso isostático. O procedimento para demonstrar o teorema para obter LI de esforços internos é semelhante, porém os esforços são aplicados aos pares quando retirado o vínculo interno e, ao invés de um deslocamento absoluto unitário, deve ser aplicado um deslocamento relativo entre as seções geradas com a remoção do vínculo.

1.5.2 Demonstração do teorema para sistemas hiperestáticos

Para o caso hiperestático, considera-se uma viga engastada-apoiada com carga unitária vertical percorrendo a estrutura, em que se deseja obter a LI da reação vertical em A, Figura 8.

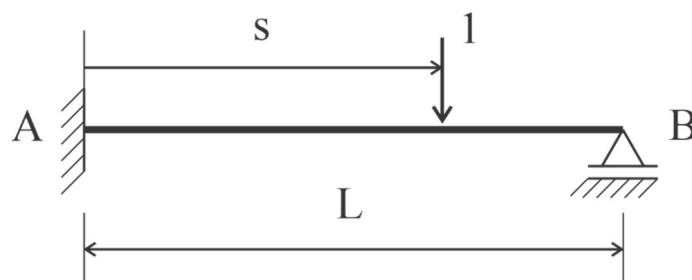


FIGURA 8. VIGA ENGASTADA-APOIADA SOB CARGA VERTICAL UNITÁRIA MÓVEL.

Os distintos estados (de forças e de deslocamentos) são obtidos pela remoção do vínculo da reação no apoio, substituindo pela correspondente ação, e pela imposição de um deslocamento unitário de sentido contrário ao vínculo removido, como mostra a Figura 9. Em contraste às estruturas isostáticas, não ocorre um deslocamento de corpo rígido, devendo-se aplicar metodologia adequada para sua obtenção.

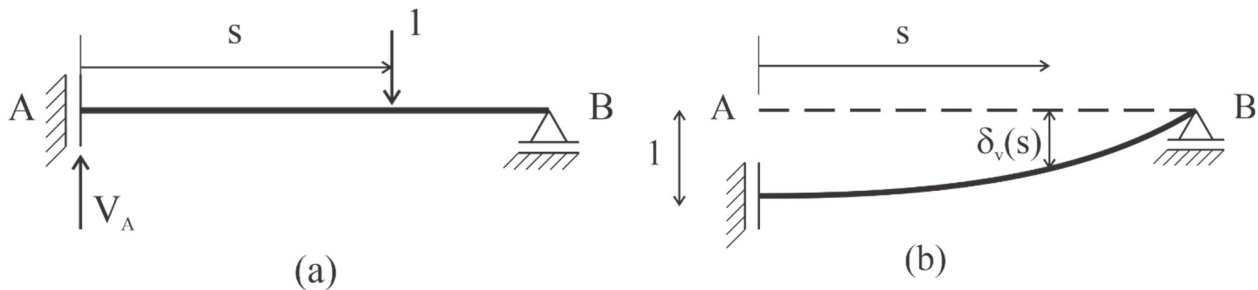


FIGURA 9. ESTADOS DE FORÇAS E DESLOCAMENTOS DE VIGA APÓS REMOÇÃO DE VÍNCULO EM A.

$V_A(s)$ é o valor da reação no apoio em A para carga unitária atuando em s e $\delta_v(s)$ é o deslocamento vertical em s devido a imposição do deslocamento unitário em A. Aplicando-se o PTV sobre os estados, impondo-se inicialmente que (a) é o estado de forças e (b) é o estado de deslocamentos, tem-se que:

$$-1 \cdot V_A(s) + 1 \cdot \delta_v(s) = \int \frac{N_a N_b}{EA} dx + \int \frac{V_a V_b}{GA} \chi dx + \int \frac{M_a M_b}{EI} dx \quad (1.5)$$

Impondo-se, agora, que (a) é o estado de deslocamentos e (b) é o estado de forças, pelo PTV tem-se que:

$$0 = \int \frac{N_b N_a}{EA} dx + \int \frac{V_b V_a}{GA} \chi dx + \int \frac{M_b M_a}{EI} dx \quad (1.6)$$

As equações (1.5) e (1.6) levam a:

$$\begin{aligned} -1 \cdot V_A(s) + 1 \cdot \delta_v(s) &= 0 \\ V_A(s) &= \delta_v(s) \end{aligned} \quad (1.7)$$

em que se estabelece o Teorema de Müller-Breslau para o caso hiperestático.

1.5.3 Propriedades de Polos

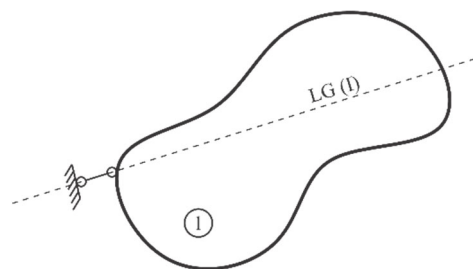
Um passo importante para o traçado de linhas de influência de estruturas isostáticas pelo processo cinemático é a criação de uma cadeia cinemática com um grau de liberdade. A cadeia cinemática é formada por chapas rígidas ligadas entre si por articulações e barras vinculares. Toda cadeia cinemática é conectada a um referencial fixo, também chamado “chapa terra”, que é qualquer ponto que não apresenta deslocamentos (i.e. vínculos).

As chapas são livres para girar em relação a um ponto, chamado de polo. O polo pode ser absoluto ou relativo caso se refira ao giro de uma chapa isoladamente, ou entre duas chapas ligadas, respectivamente. A posição de um polo é definida pelo encontro das linhas que definem um Lugar Geométrico (LG). Lugares Geométricos e Polos são definidos pelas seguintes propriedades:

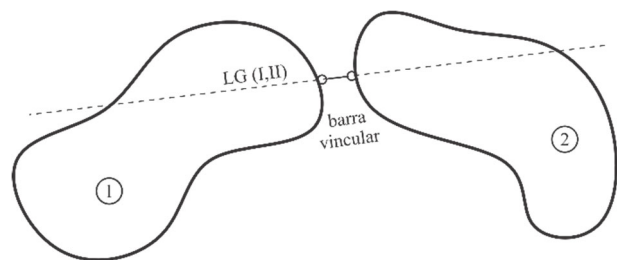
- Figura 10a / Figura 10b: Uma barra vincular define um LG de um polo, seja com a chapa terra (absoluto), seja entre chapas (relativo);
- Figura 10c / Figura 10d: O encontro de dois LG nas imediações das chapas define a posição de um polo próprio (absoluto ou relativo);
- Figura 10e / Figura 10f: Dois LG paralelos definem um polo impróprio;
- Figura 10g: Os polos absolutos e relativo de duas chapas em uma cadeia cinemática estão sempre contidos em uma mesma linha.

Importante notar que a definição de um polo impróprio implica que a(s) chapa(s) apenas desloca(m) perpendicularmente ao mesmo – ou seja, o giro da chapa é nulo no caso de polo absoluto (Figura 10e) ou o giro das chapas é igual no caso de polo relativo (Figura 10f). Para maiores detalhes da representação da ligação entre duas chapas, vide o Livro 1¹, em especial na seção de idealização sobre condições de vinculação e na representação dos vínculos por barras vinculares.

Recobrando do Livro 1, emprega-se número indo-arábico para enumerar a chapa, circunscrivendo o seu número – e.g. ①. O polo absoluto da chapa recebe a mesma numeração, porém escrito em romanos e entre parênteses – (I). O polo relativo entre duas chapas recebe a numeração de ambas, também escrito em romanos e entre parênteses – (I,II). O Lugar Geométrico de um polo precede de um LG de sua definição – LG (I).

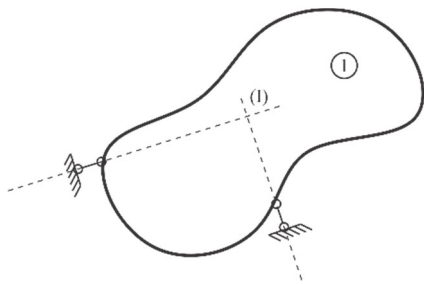


a) Barra vincular e LG de polo absoluto;

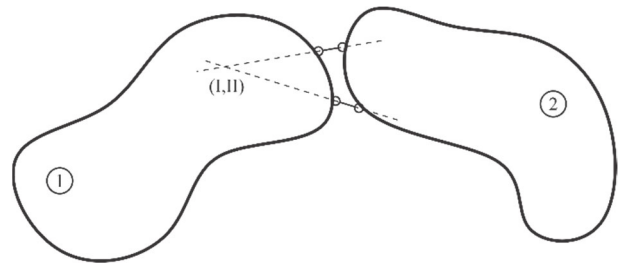


b) Barra vincular e LG de polo relativo;

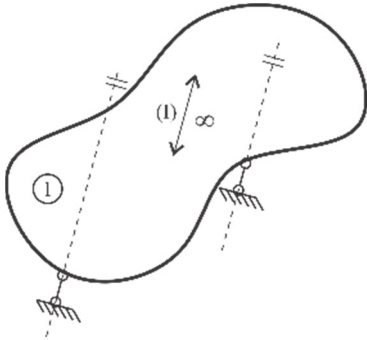
¹ PACCOLA, R. R.; CARRAZEDO, R. Estática das estruturas: material de apoio e complementar: conceitos básicos. 1. ed. São Carlos: Portal de Livros Abertos da USP, 2022. v. 1/3. DOI: <https://doi.org/10.11606/9786586954227>



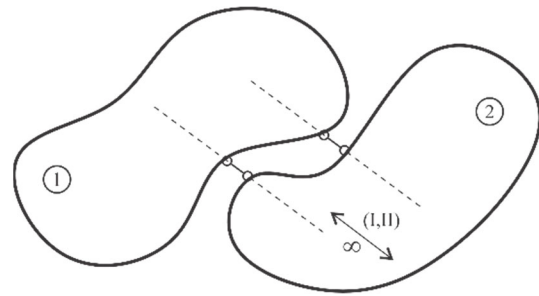
c) Polo absoluto próprio;



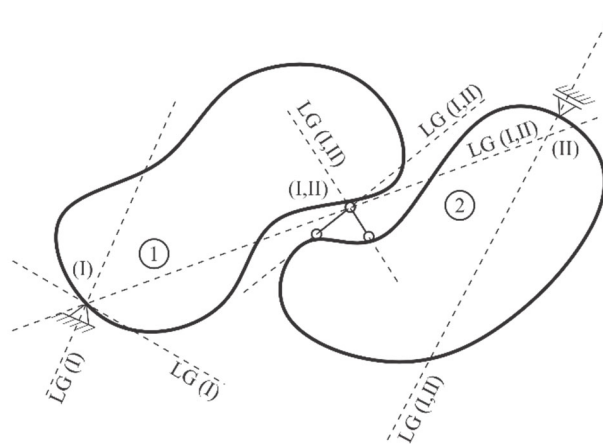
d) Polo relativo próprio;



e) Polo absoluto impróprio;



f) Polo relativo impróprio;



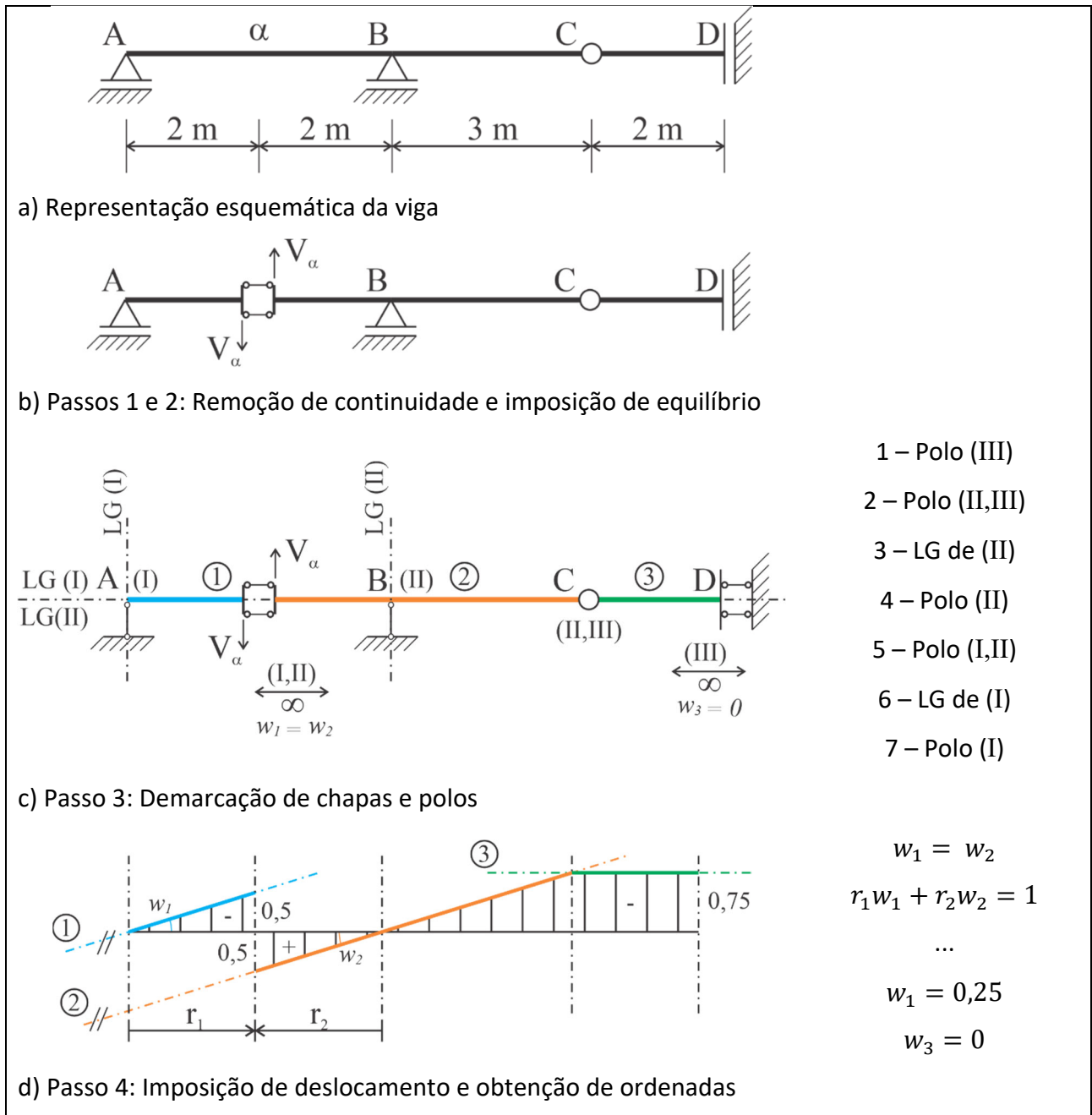
g) Polos absolutos e relativos alinhados.

FIGURA 10. ALINHAMENTO DE POLOS.

1.5.4 Exemplo em Viga Gerber

Como primeiro exemplo, pede-se a linha de influência de esforço cortante no meio do vão AB de uma viga Gerber. A primeira etapa consiste na remoção da continuidade associada ao referido esforço no centro do tramo, permitindo o deslizamento das seções, tornando a estrutura em uma cadeia cinemática com um grau de liberdade (Passo 1). Para manter o equilíbrio, um esforço positivo cisalhante correspondente foi adicionado, ou seja, duas forças de sentido contrário (Passo 2).

No quadro de exemplo (Quadro 4), é apresentado na coluna à direita o sequenciamento empregado para definir as chapas e a posição dos polos (Passo 3), assim como para definir os valores de giro das chapas (Passo 4). A explanação é feita na sequência.



QUADRO 4. VIGA GERBER – APLICAÇÃO DO PROCESSO CINEMÁTICO.

O terceiro passo consiste em demarcar os trechos contínuos, que vão se comportar como uma chapa (indicadas com cores distintas e numeradas – nos círculos). Toda chapa tem um polo absoluto, e pode ter um ou mais polos relativos, segundo sua conectividade com outras chapas. Desta forma, marcam-se os polos que são imediatamente conhecidos, ao se analisar os vínculos entre as chapas (relativos) e entre chapas com a chapa terra (absolutos).

O polo (III) é definido por duas barras vinculares com a chapa terra em D, paralelas e horizontais, o que implica que o polo absoluto é impróprio – localizado no infinito horizontal. Por ser um engaste móvel, percebe-se que esta chapa é passível de se deslocar verticalmente, dedução confirmada pela posição do polo – no infinito horizontal – não sofrendo, portanto, giro / rotação.

O polo (II,III) é definido por duas barras vinculares concorrentes à própria rótula, portanto ambas chapas giram relativamente a este ponto. Desta forma, o polo relativo é próprio. Ou seja, uma articulação entre duas chapas irá definir um polo relativo próprio.

O polo (II) é definido pelo encontro de seus Lugares Geométricos – um é definido pela barra vincular relativa ao apoio móvel em B (uma reta vertical) e outro pelo alinhamento dos polos (III) e (II,III) – uma reta horizontal passando por (II,III). Desta forma, o polo absoluto é próprio, localizado sobre o apoio móvel em B.

O polo (I,II) é um polo relativo impróprio, pois as barras vinculares que conectam as duas chapas só se encontram, hipoteticamente, no infinito horizontal. Por fim, o polo absoluto próprio (I) é definido da mesma forma que o (II), pelo encontro de seus Lugares Geométricos – um LG definido pelo apoio móvel em A e outro pelo alinhamento dos polos (II) e (I,II) – uma reta horizontal passando pelo polo (II), ou seja, mesmo (I,II) estando no infinito horizontal, os polos estão alinhados.

No quarto passo, o deslocamento relativo contrário ao esforço cortante aplicado é imposto, a as chapas giram respeitando a posição dos polos (centros de giro). Como as chapas 1 e 2 estão interligadas por um polo impróprio, o giro de ambas é igual:

$$w_1 = w_2 \quad (1.8)$$

em que w_i é o giro da chapa i .

A outra equação relaciona a distância entre o polo e o deslocamento imposto, medido perpendicularmente, chamado de raio vetor r_i :

$$r_1 w_1 + r_2 w_2 = 1 \quad (1.9)$$

Uma vez definido o giro da chapa 2, o deslocamento da chapa 3 é definido por geometria. A chapa 3 não gira, pois a posição do polo no infinito horizontal implica que ela só pode se deslocar verticalmente ($w_3 = 0$).



Passo a passo para obtenção de LI's pelo Processo Cinemático:

Passo 1 – Remova o vínculo correspondente à LI que se deseja obter;

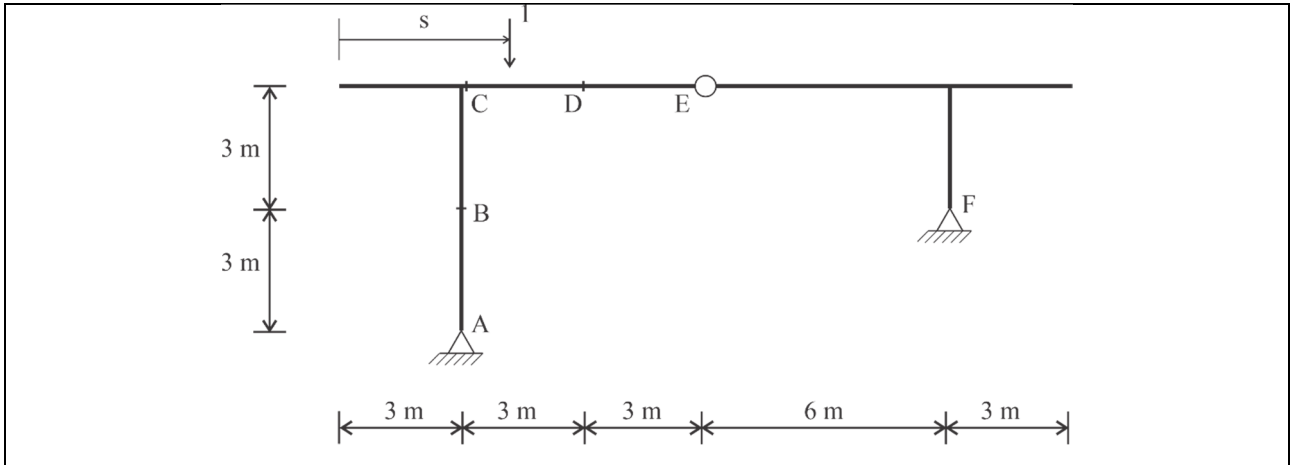
Passo 2 – Aplique uma força / esforço de sentido positivo, mantendo o equilíbrio;

Passo 3 – Determine as chapas rígidas e os respectivos polos;

Passo 4 – Imponha um deslocamento absoluto ou relativo unitário de sentido contrário ao esforço arbitrado positivo;

Passo 5 – Por geometria, determine as ordenadas da LI.

1.5.5 Exemplo em Pórtico Plano

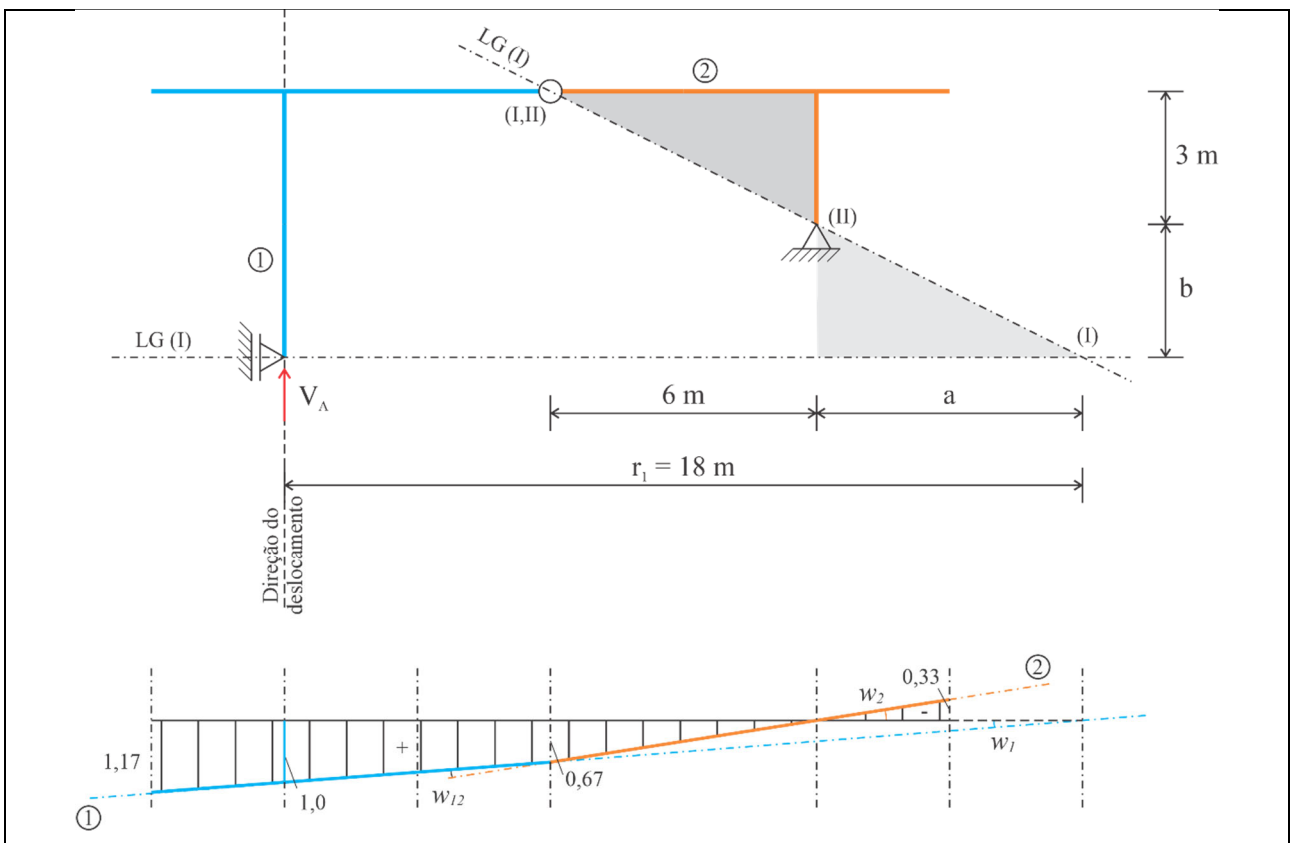


QUADRO 5. PÓRTICO PLANO – APLICAÇÃO DO PROCESSO CINEMÁTICO.

Neste exemplo são apresentadas diversas linhas de influência para a mesma estrutura. É um exemplo didático, cada LI com algum acréscimo de dificuldade. Não obstante, os passos para determinação são sempre os mesmos – remoção de continuidade; imposição de equilíbrio; demarcação de chapas e polos; imposição de deslocamento/giro; e obtenção de giros e ordenadas.

LI de reação vertical em A (Quadro 6)

A cadeia cinemática é formada por duas chapas, conectadas por uma articulação. Isto implica que os polos (II) e (I,II) já estão definidos, sendo ambos próprios.



QUADRO 6. PP: LI DE REAÇÃO VERTICAL EM A PELO PROCESSO CINEMÁTICO.

O polo (I) é definido pelo encontro dos lugares geométricos dados pelo alinhamento dos polos (II) e (I,II) e pela barra vincular horizontal remanescente em A. Como é um polo próprio, é necessário definir a sua posição exata para estabelecer o centro de rotação da chapa ①. A posição do polo (I) é obtida por relações trigonométricas – ou seja, pela semelhança de triângulo entre a distância horizontal de \overline{EF} , vertical de \overline{EF} , a e b :

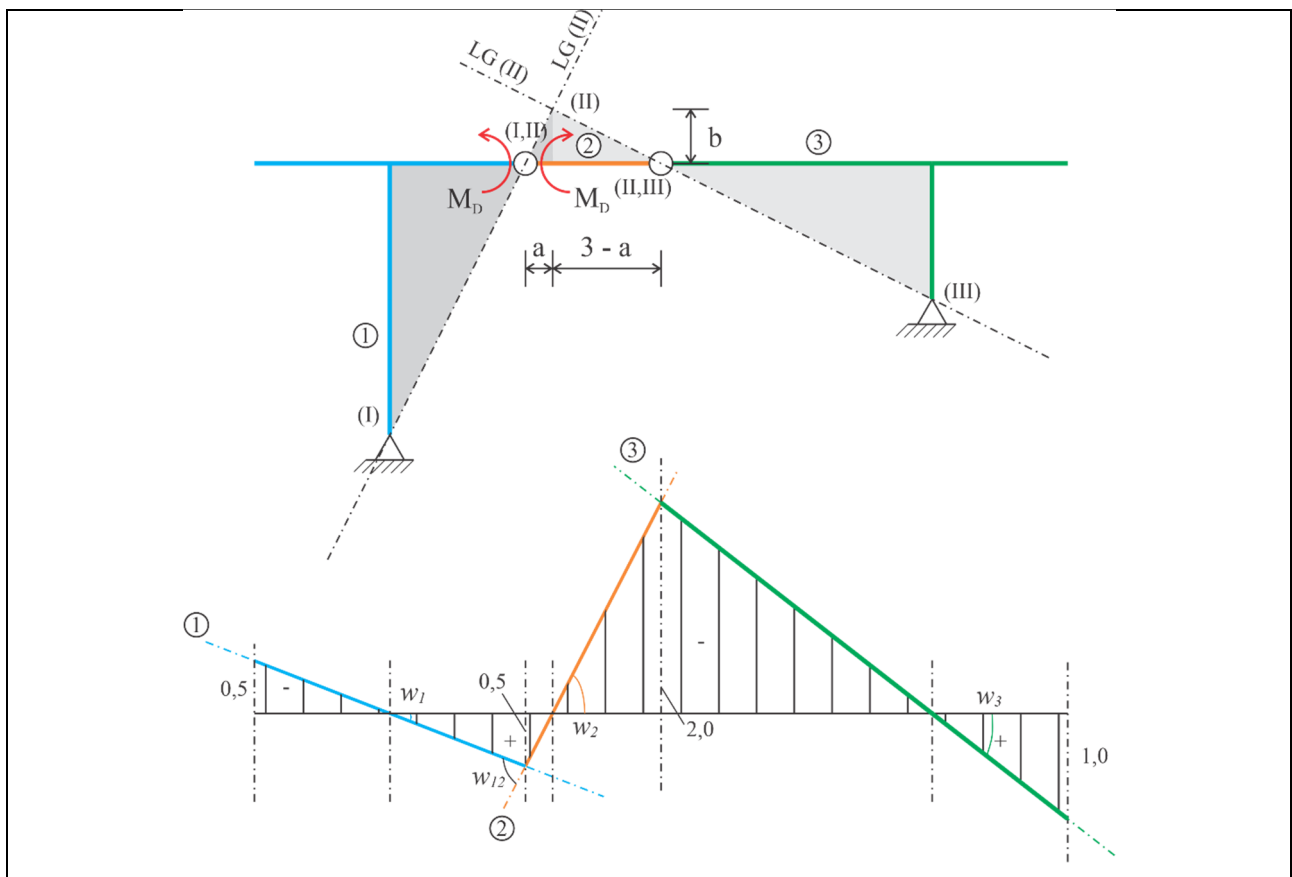
$$\frac{\overline{EF}_{(h)}}{\overline{EF}_{(v)}} = \frac{a}{b} \rightarrow \frac{6}{3} = \frac{a}{3} \rightarrow a = 6m$$

Conhecidos os polos e suas posições, as informações são transferidas para a LI – lembrando que, na projeção dos polos absolutos, a ordenada do deslocamento da chapa respectiva é nula. Assim, impõe-se o deslocamento vertical unitário contrário ao arbitrado positivo em A. A chapa 1 gira em torno de seu polo (I), definindo a ordenada em (I,II). A chapa 2, por fim, gira em torno de (II). Todos os valores da LI podem ser obtidos por simples semelhança de triângulos.

Destaca-se o raio vetor r_1 , que é a distância perpendicular do polo absoluto (I) à direção do deslocamento. Como o deslocamento é aplicado apenas na chapa 1, tem-se que $w_1 = 1/r_1$.

LI de momento fletor em D (Quadro 7)

Uma vez removida a continuidade de giro e imposto um esforço de sentido arbitrado positivo (um par de momentos M_D), percebe-se a existência de três chapas.



QUADRO 7. PP: LI DE MOMENTO FLETOR EM D PELO PROCESSO CINEMÁTICO.

Do Quadro 7, verifica-se que as chapas 1 e 3 tem seus polos absolutos definidos pelos apoios fixos. As articulações definem polos relativos entre as chapas 1 e 2, e entre as chapas 2 e 3. O único polo faltante é o polo absoluto (II), que é definido pelo encontro de seus lugares geométricos – um definido pelo alinhamento de (I) e (I,II) e o outro pelo alinhamento de (III) e (II,III). Sua posição é dada por relações trigonométricas associadas aos lugares geométricos de (II). Para a primeira relação, observa-se a semelhança de triângulos formados pelas distâncias horizontal \overline{AC} e vertical \overline{CD} com as distâncias a e b , ou seja:

$$\frac{\overline{AC}_{(h)}}{\overline{CD}_{(v)}} = \frac{a}{b} \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{a}{b}$$

Como a e b são desconhecidos, remete-se à segunda relação, formadas pela distância horizontal de \overline{EF} , vertical de \overline{EF} , a e b :

$$\frac{\overline{EF}_{(h)}}{\overline{EF}_{(v)}} = \frac{3-a}{b} \rightarrow \frac{6}{3} = \frac{3-a}{b}$$

Das duas relações geométricas, obtêm-se o valor de $a = 0,6m$.

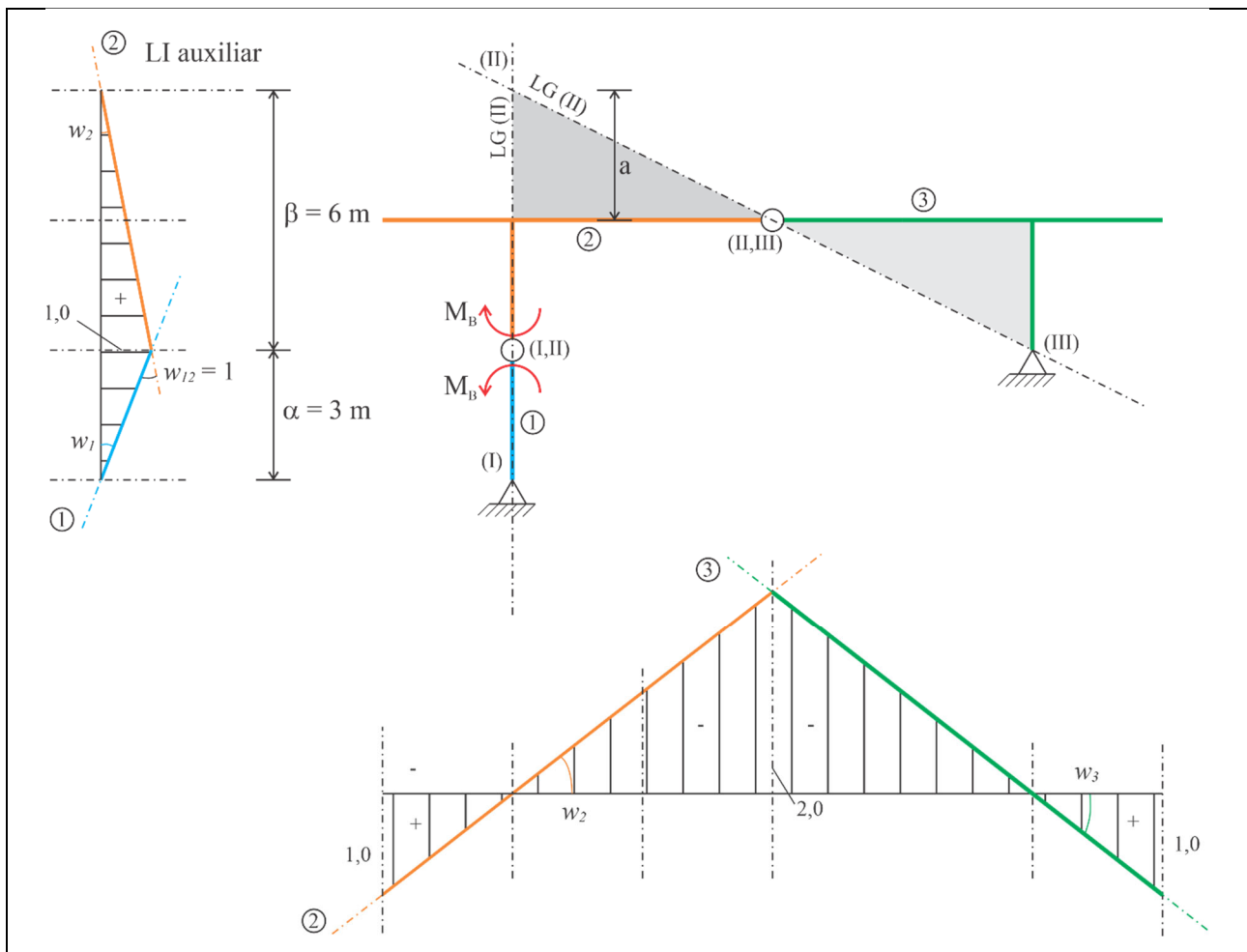
Uma vez transferida a posição dos polos para a linha de influência, impõem-se o giro relativo unitário em (I,II). Recobrando as relações obtidas na seção 1.1 (vide Figura 3), os giros das chapas 1 e 2 são dados por $w_1 = \alpha/L = 3/3,6$ e $w_2 = \beta/L = 0,6/3,6$ em que L é a distância entre os polos (I) e (II), e α e β são as distâncias entre os polos absolutos e relativos. Ademais, como esperado, o giro relativo entre os dois trechos $w_{12} = w_1 + w_2$ é unitário.

É interessante notar que, por ser um processo cinemático, e para que o giro seja contrário aos momentos impostos para equilíbrio, a projeção do polo relativo (I,II) deve se deslocar para baixo para respeitar a indeslocabilidade das projeções dos polos absolutos (I) e (II) – desta forma girando as chapas em relação a estes pontos.

Além disso, ao girar a chapa 2, ocorre o deslocamento vertical para cima da projeção do polo (II,III). A chapa 3 acompanha o movimento pois o polo (II,III) é próprio, caracterizando ponto comum dos trechos na LI. Ademais, percebe-se a chapa 3 girando em relação ao seu polo absoluto. Conhecidos os giros, as ordenadas da linha de influência são obtidas por simples relações trigonométricas.

LI de momento fletor em B (Quadro 8)

Após a ruptura do vínculo correspondente ao esforço, promove a existência de três chapas. As chapas 1 e 3 tem seus polos absolutos definidos pelos apoios fixos e polos relativos (com a chapa 2) pelas articulações. O polo absoluto da chapa 2 é encontrado pelo alinhamento dos polos, assim como na LI anterior.



QUADRO 8. PP: LI DE MOMENTO FLETOR EM B PELO PROCESSO CINEMÁTICO.

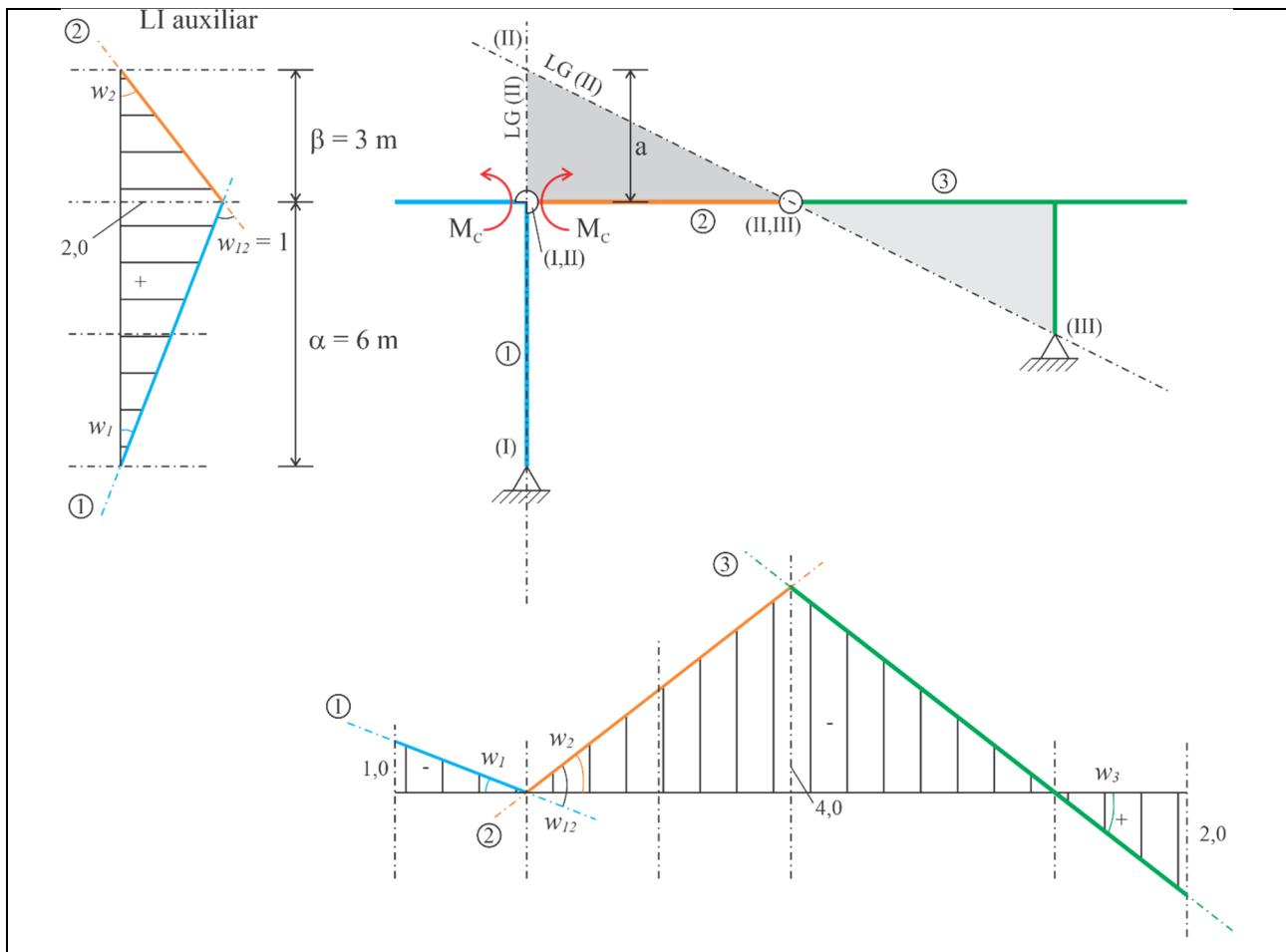
Ocorre neste exemplo um fato interessante: o ponto para imposição do giro relativo – no polo (I,II) – está alinhado verticalmente com os dois polos absolutos aos quais o giro está associado – polos (I) e (II). Assim, requer-se o emprego de uma LI auxiliar para determinar o giro absoluto das referidas chapas. Uma vez entendido isto, percebe-se a necessidade de definir a distância vertical entre o polo (II) e (I,II), aqui chamada de a . Esta é definida por relações trigonométricas:

$$\frac{\overline{EF}_{(h)}}{\overline{EF}_{(v)}} = \frac{\overline{CE}_{(h)}}{a} \rightarrow \frac{6}{3} = \frac{6}{a} \rightarrow a = 3m$$

A LI auxiliar provê o giro da chapa 2 ($w_2 = \beta/L = 3/9$), que é levada à LI a ser obtida. O sentido de w_2 deve ser mantido (anti-horário). Ao ser imposto, ocorre deslocamento vertical da LI na projeção do polo (II,III). A chapa 3 acompanha o movimento, girando relativamente e respeitando seu polo absoluto. As ordenadas são obtidas por relações trigonométricas.

LI de momento fletor em C (Quadro 9)

A quarta LI tem grande semelhança com a anterior – três chapas, com definição dos polos de maneira análoga. Tem-se a necessidade de uma LI auxiliar devido ao alinhamento vertical dos polos associados ao giro relativo – polo (I,II).



QUADRO 9. PP: LI DE MOMENTO FLETOR EM C PELO PROCESSO CINEMÁTICO.

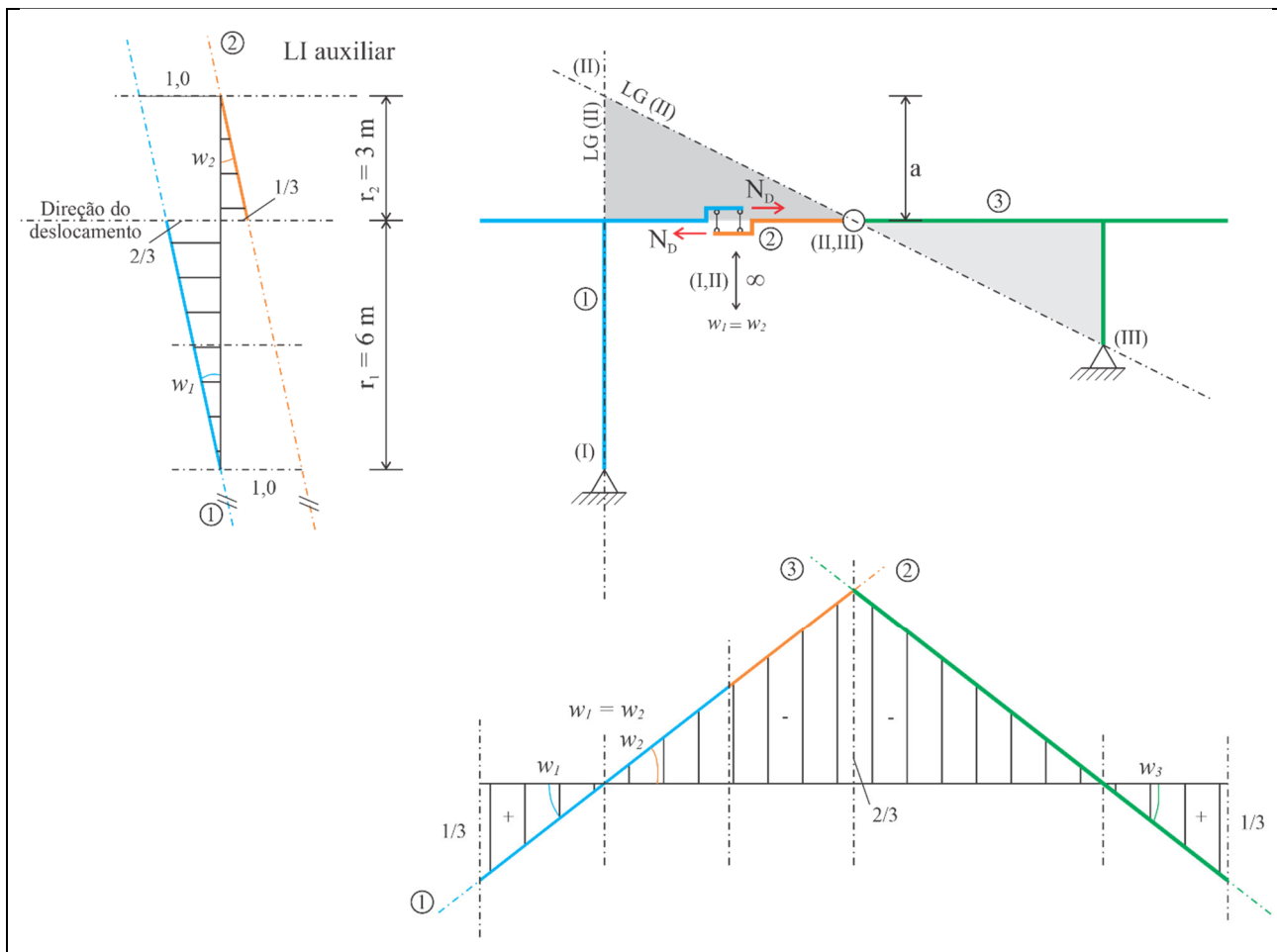
As distâncias entre os polos são definidas por relações geométricas da mesma forma que nas análises anteriores, sendo necessárias à determinação de w_2 . Este é dado por $w_2 = 6/9$.

Diferentemente da LI anterior, há um trecho da chapa 1 pertencente a esta LI referente ao balanço esquerdo da estrutura. Isto implica que o giro da chapa 1 (w_1) também é necessário, e é facilmente obtido $\rightarrow w_1 = \alpha/L = 3/9$.

O giro w_2 é imposto na chapa 2, sobre o polo (II), respeitando o sentido obtido na LI auxiliar. O mesmo é feito com w_1 , o que leva a LI mostrada no Quadro 9. As ordenadas da LI são definidas a partir dos giros w_1 e w_2 . Destaca-se, tanto na LI auxiliar quanto na LI principal, o giro relativo w_{12} , que ocorre entre as chapas 1 e 2. O giro é unitário, afinal é o deslocamento imposto.

LI de esforço normal em D (Quadro 10)

Para entender a geração da cadeia cinemática pelo rompimento de uma barra vincular, destacam-se as duas barras vinculares remanescentes. São observadas três chapas. Os polos absolutos (I) e (III) são definidos pelos apoios fixos, o polo relativo (II,III) pela articulação e o polo relativo (I,II) é definido pelas duas barras vinculares remanescentes do rompimento da continuidade em D. Estas barras são paralelas, o que implica que seu encontro ocorrerá, hipoteticamente, no infinito vertical.



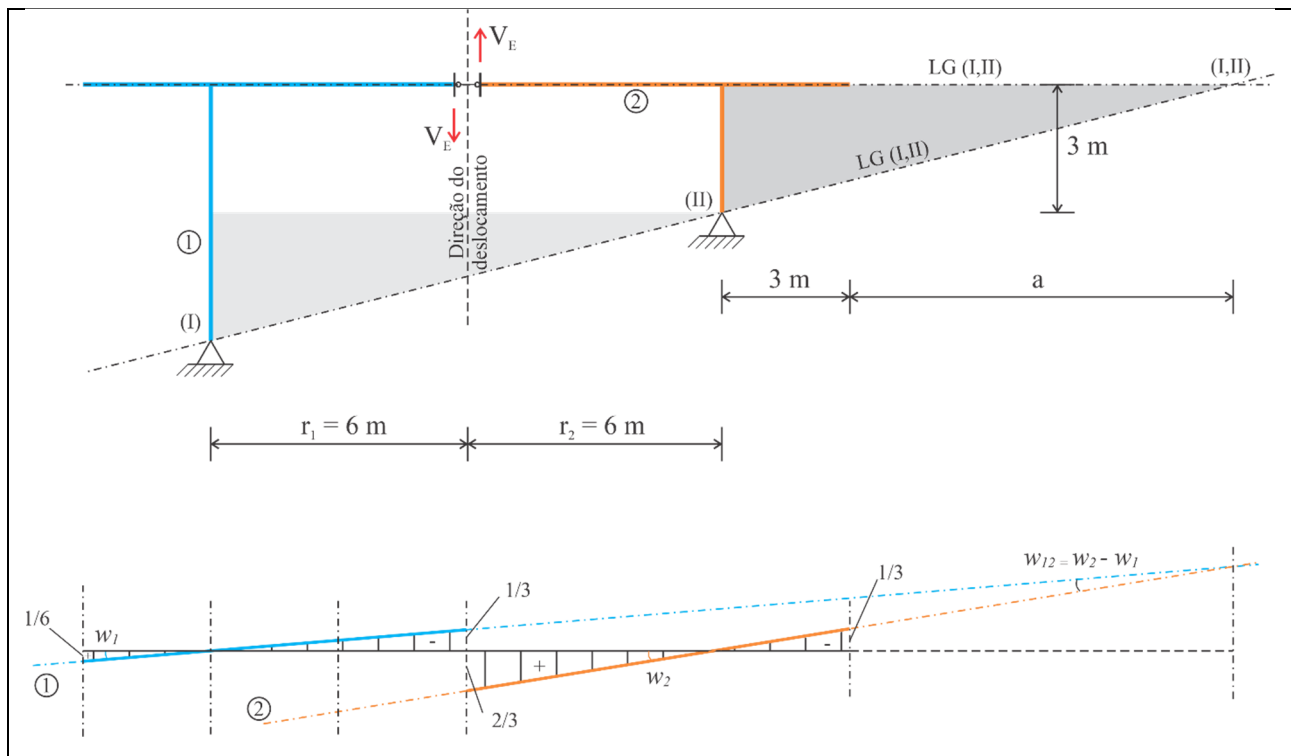
QUADRO 10. PP: LI DE ESFORÇO NORMAL EM D PELO PROCESSO CINEMÁTICO.

Resta definir o polo absoluto (II), que é dado pelo encontro de seus Lugares Geométricos, definido pelo alinhamento de (III) e (II,III) e de (I) e (I,II). Como (I,II) está no infinito vertical, uma reta vertical passando por (I) define um LG de (II).

Nesta linha, destacam-se os raios vetores r_1 e r_2 , definidos pela distância ortogonal à direção de deslocamento até os polos absolutos das chapas. Seus valores são determinados por relações trigonométricas já discutidas.

Novamente tem-se os três polos das chapas associadas com o deslocamento alinhados verticalmente, necessitando de uma LI auxiliar. O deslocamento relativo horizontal devido ao rompimento da continuidade se torna transversal na LI auxiliar. Esta remete a uma LI de cortante. Recobram-se as relações obtidas na seção 1.1 (vide Figura 3), em que o giro das chapas é igual, de valor $w_1 = w_2 = 1/L$, sendo L é a distância entre os polos (I) e (II) na LI auxiliar.

A LI da estrutura é dada pela imposição dos giros obtidos na LI auxiliar, e adequando-se a movimentação à posição da projeção dos polos. Como os giros são conhecidos, a obtenção das ordenadas é trivial.



QUADRO 12. PP: LI DE ESFORÇO CORTANTE EM E PELO PROCESSO CINEMÁTICO.

LI de esforço cortante em E (Quadro 12)

É interessante destacar que o ponto E já era uma rótula, ou seja, já havia uma descontinuidade de giro. Com o rompimento de outra barra vincular no referido ponto, apenas uma barra vincular faz a conexão das duas chapas.

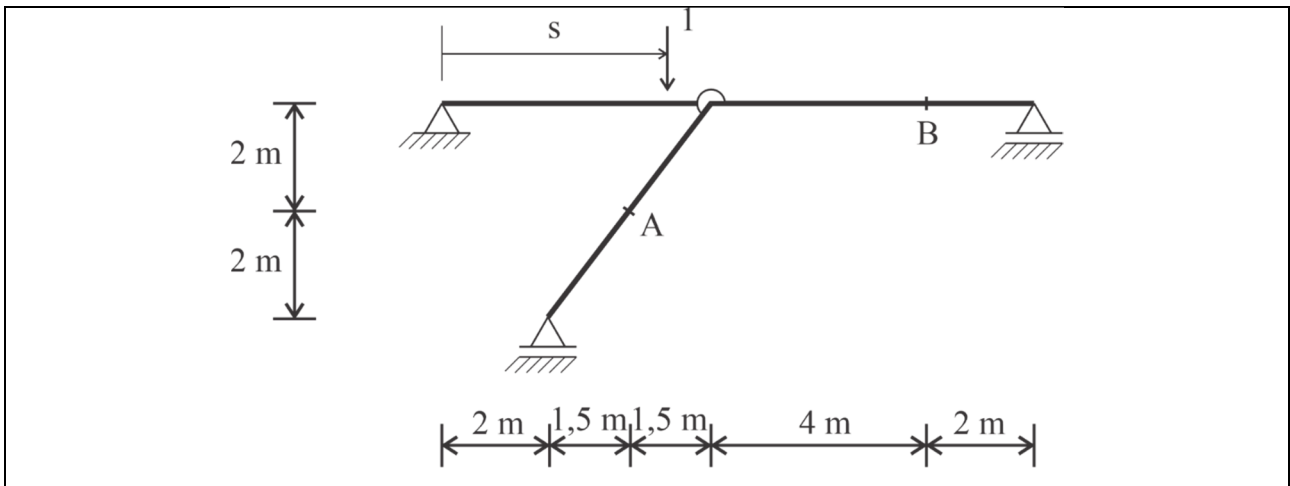
Na cadeia cinemática provida pelo rompimento da barra vincular, apenas duas chapas são vislumbradas. Os polos (I) e (II) são imediatamente estabelecidos pelos apoios fixos, e um dos Lugares Geométricos do polo relativo (I,II) é estabelecido pelo alinhamento dos polos absolutos (I) e (II). Falta definir o outro LG de (I,II).

Este é definido pela barra vincular remanescente em E – uma barra horizontal. O encontro dos lugares geométricos define a posição de (I,II). A distância horizontal entre os polos pode ser definida novamente por relações trigonométricas.

A obtenção da LI decorre das seguintes definições: o deslocamento vertical entre as chapas 1 e 2 é unitário; o giro $w_{12} = 1/L$, sendo L a distância entre o polo relativo (I,II) e o ponto de imposição de deslocamento (18 m); a equação (1.9) deve ser atendida, i.e. $r_1 w_1 + r_2 w_2 = 1$; e, conforme percebe-se no Quadro 12, $w_2 - w_1 = w_{12}$. Recobrando, r_1 e r_2 são os raios vetores, distância entre o polo absoluto e a direção de imposição de deslocamento.

Nota-se que, embora seja uma LI de cortante, os trechos não resultaram paralelos, uma vez que o polo relativo (I,II) é próprio. A partir das definições realizadas, pode-se obter o valor dos giros das chapas e, por consequência, das ordenadas da LI.

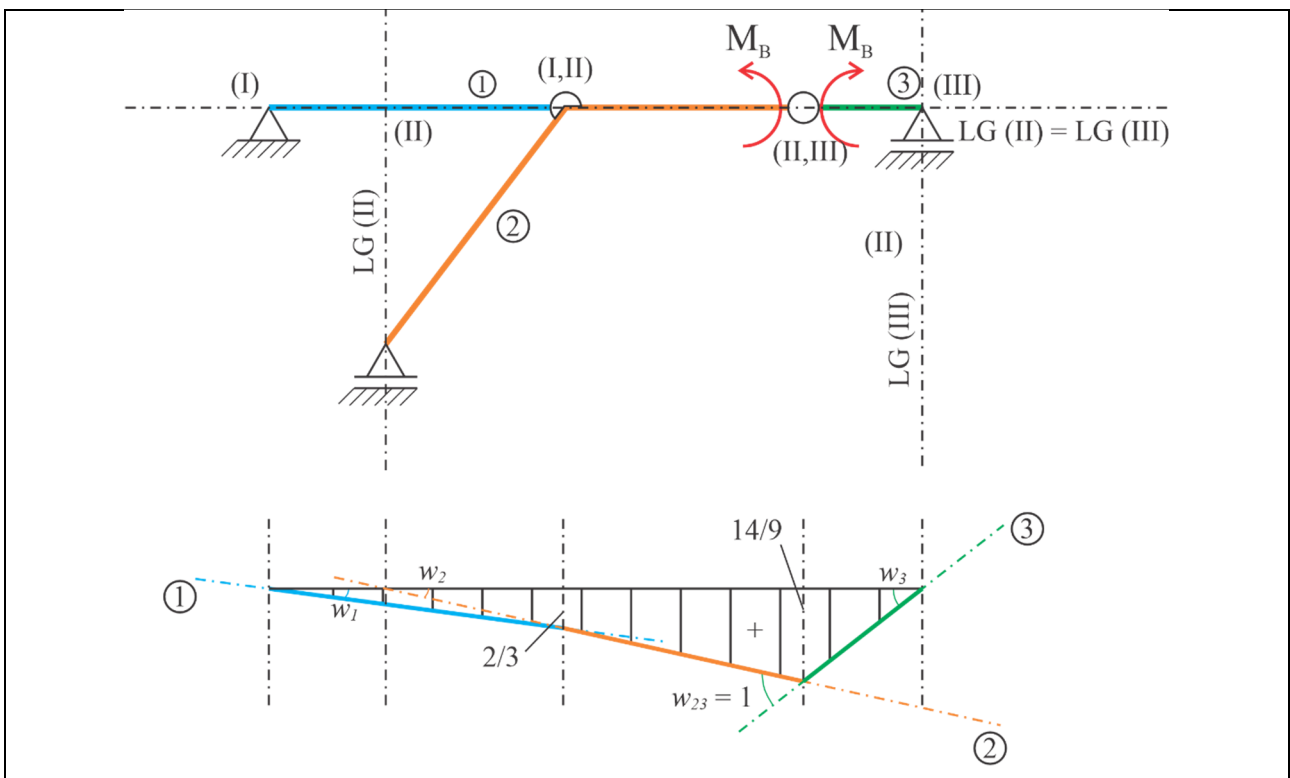
1.5.6 Outro exemplo em Pórtico



QUADRO 13. PÓRTICO DE BARRA INCLINADA.

Neste exemplo, serão reforçados os conceitos desenvolvidos anteriormente. Inicia-se com a linha de influência de momento fletor em B (Quadro 14). Para tanto, viola-se a continuidade de giro em B para gerar a cadeia cinemática com um grau de liberdade, impondo-se um esforço positivo para manutenção do equilíbrio. Percebe-se que a cadeia cinemática é formada por três chapas.

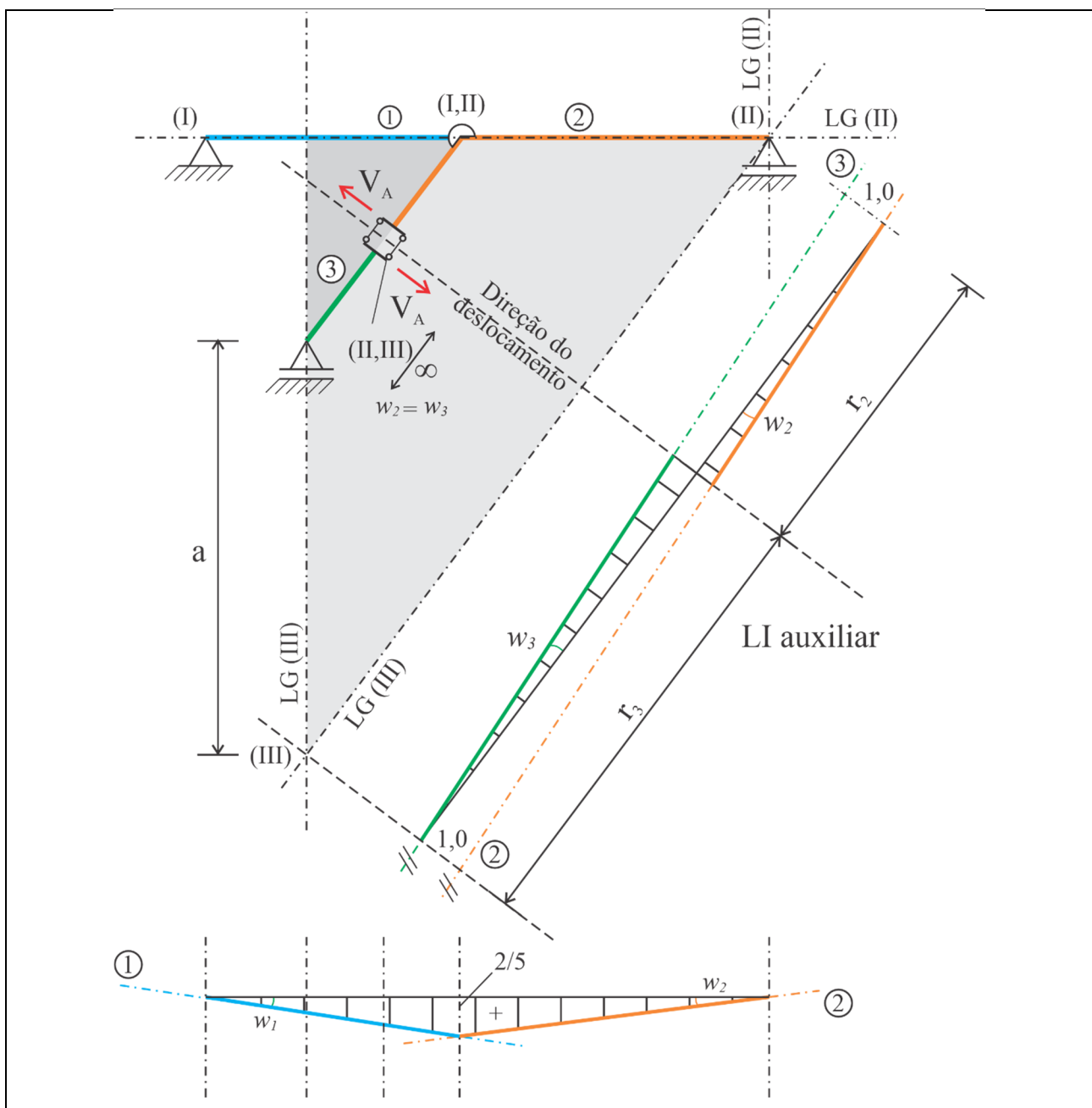
O polo absoluto (I) é estabelecido pelo apoio fixo, e o polo relativo (I,II) pela articulação existente. O polo relativo (II,III) é determinado pela articulação imposta em B. Os polos absolutos (II) e (III) são definidos pelo encontro dos seus lugares geométricos decorrentes dos apoios móveis e do alinhamento dos polos já conhecidos.



QUADRO 14. PBI: LI DE MOMENTO FLETOR EM B.

A LI é definida pela imposição do giro relativo unitário entre as chapas 2 e 3, contrário ao sentido de M_B , imposto no polo (II,III). É interessante notar que, para que o giro seja contrário ao par de momentos de equilíbrio, o polo relativo deve descer para respeitar os polos absolutos (II) e (III). Recobrando as relações obtidas na seção 1.1 (vide Figura 3), o deslocamento vertical do polo (ou seja, da ordenada no ponto) é dado por $\alpha \cdot \beta / L$, sendo α a distância entre (II) e (II,III), β a distância entre (III) e (II,III), e L a distância entre (II) e (III).

A chapa 1, porém, se encerra no polo relativo próprio (I,II), ponto comum entre as chapas 1 e 2, que se deslocou verticalmente para baixo. Como a chapa 1 deve girar em torno de seu polo absoluto, implica em simplesmente traçar uma reta entre as duas ordenadas conhecidas – deslocada de (I,II) e nula em (I).



QUADRO 15. PBI: LI DE ESFORÇO CORTANTE EM A.

A segunda LI traçada neste exemplo é de esforço cortante em A, no centro da barra inclinada (vide Quadro 15). Ao violar a continuidade no referido ponto, impõem-se a existência de esforços transversais contrários, em sentido arbitrado positivo.

A cadeia cinemática fica definida por três chapas. O polo absoluto da chapa 1 é estabelecido pelo apoio fixo, enquanto o polo relativo entre as chapas 1 e 2 é definido pela articulação existente. O polo relativo entre as chapas 2 e 3 é determinado pelas barras vinculares remanescentes em α . Como são paralelas, as barras só se “encontram” no infinito inclinado, gerando um polo impróprio. É consequência imediata que o giro das chapas 2 e 3 são iguais ($w_2 = w_3$).

O polo absoluto da chapa 2 é definido por seus lugares geométricos – um LG vertical passando pelo apoio móvel e um LG horizontal devido ao alinhamento dos polos (I) e (I,II). O polo absoluto da chapa 3 é passível de obtenção, pois um lugar geométrico é definido pelo apoio móvel e o outro pelo alinhamento dos polos (II) e (II,III). Como (II,III) está no infinito inclinado, uma reta de mesma inclinação deve ser traçada passando por (II). O cruzamento desta reta com o LG definido anteriormente determinará a posição do polo (III).

A LI é definida pelo deslocamento relativo unitário imposto no ponto de violação de continuidade, ou seja, uma translação entre as chapas 2 e 3. Este deslocamento deve ocorrer transversalmente à chapa, em sentido contrário ao esforço aplicado. Para facilitar a visualização e explanação, no Quadro 15 foi representada uma LI auxiliar, com destaque às relações geométricas.

Os polos absolutos das chapas envolvidas (II) e (III) foram projetados na LI auxiliar. As distâncias transversais à direção do deslocamento, entre a projeção dos polos absolutos e o ponto de imposição de deslocamento definem os raios vetores (r_2 e r_3). Como o polo relativo (II,III) está no infinito, o giro é dado simplesmente por $w_2 = w_3 = 1/(r_2 + r_3) = 1/L$.

Conhecido os giros, transfere-se esta informação para a LI. No caso, a chapa 3 não participa da LI, pois a carga unitária não transita por ela, apenas pelas chapas 1 e 2. Assim, impõem-se o giro w_2 na posição de seu polo absoluto e, no polo relativo (I,II), promove-se o giro relativo entre as chapas 1 e 2, respeitando o polo absoluto (I). A ordenada é dada simplesmente pelo giro w_2 .

1.6 Sistema Isostático de Pisos

Em alguns sistemas estruturais, o carregamento atua indiretamente sobre os elementos, por intermédio de um sistema secundário chamado Sistema Isostático de Pisos, também conhecido como Piso Isostático. Este é definido por um conjunto de vigas biarticuladas horizontais apoiadas em barras verticais, como tirantes ou montantes. A Figura 11 mostra um exemplo de sistema isostático de piso sobre uma estrutura portante em arco.

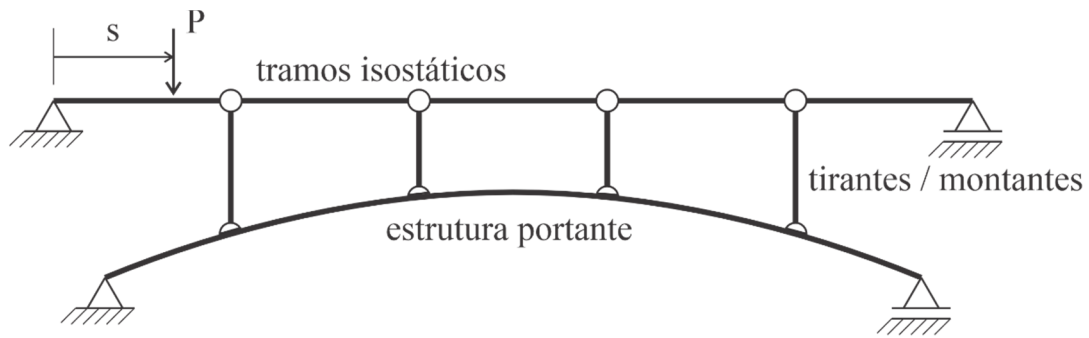


FIGURA 11. SISTEMA ISOTÁTICO DE PISO.

Neste caso, o carregamento móvel atua sobre o sistema isostático de piso, transmitindo à estrutura portante apenas nos pontos de apoio. Considere as Linhas de Influência de momento fletor no centro de uma viga biapoiada, sem e com o sistema isostático de piso, Figura 12.

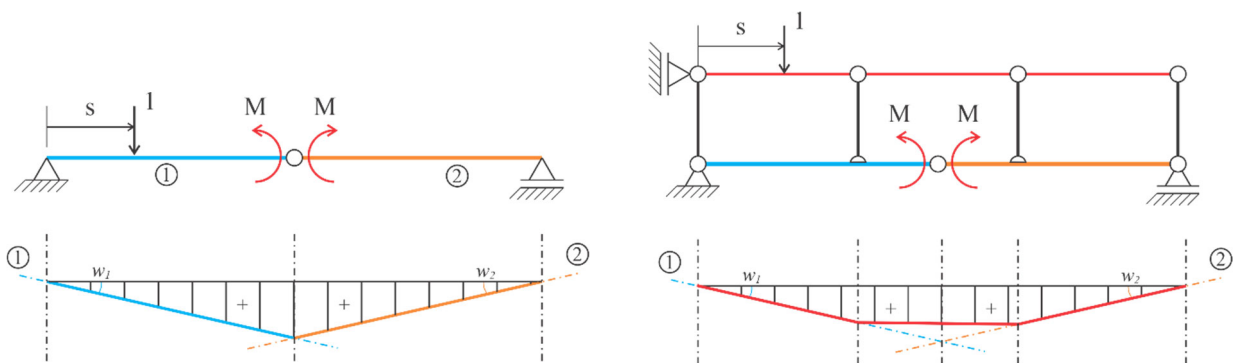


FIGURA 12. LI DE MOMENTO FLETOR PARA VIGA SEM E COM SISTEMA ISOTÁTICO DE PISO.

Percebe-se que a Linha de Influência da estrutura não se altera nos pontos de apoios do sistema de piso, sendo a LI final, com piso, dada pelo polígono que une esses pontos. Este tipo de sistema é fundamental no caso das treliças, em que os carregamentos devem ser transmitidos diretamente aos nós, não podendo ser aplicados diretamente às barras.

Como reforço, observe que isto se repete em uma Linha de Influência de esforço cortante no centro da mesma viga biapoiada, Figura 13. A LI do piso isostático é determinada pelas ordenadas da LI da estrutura onde o piso se apoia, com validade apenas ao longo da projeção do piso, por onde o carregamento se movimenta.

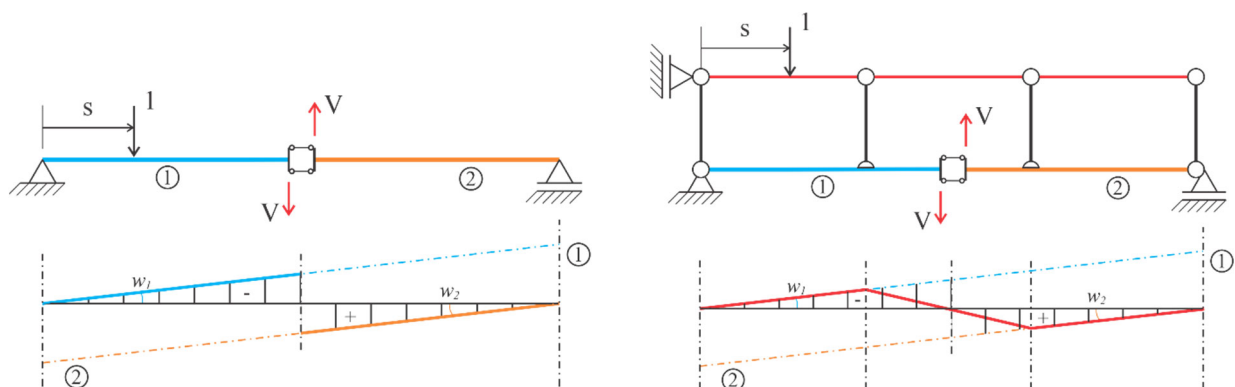
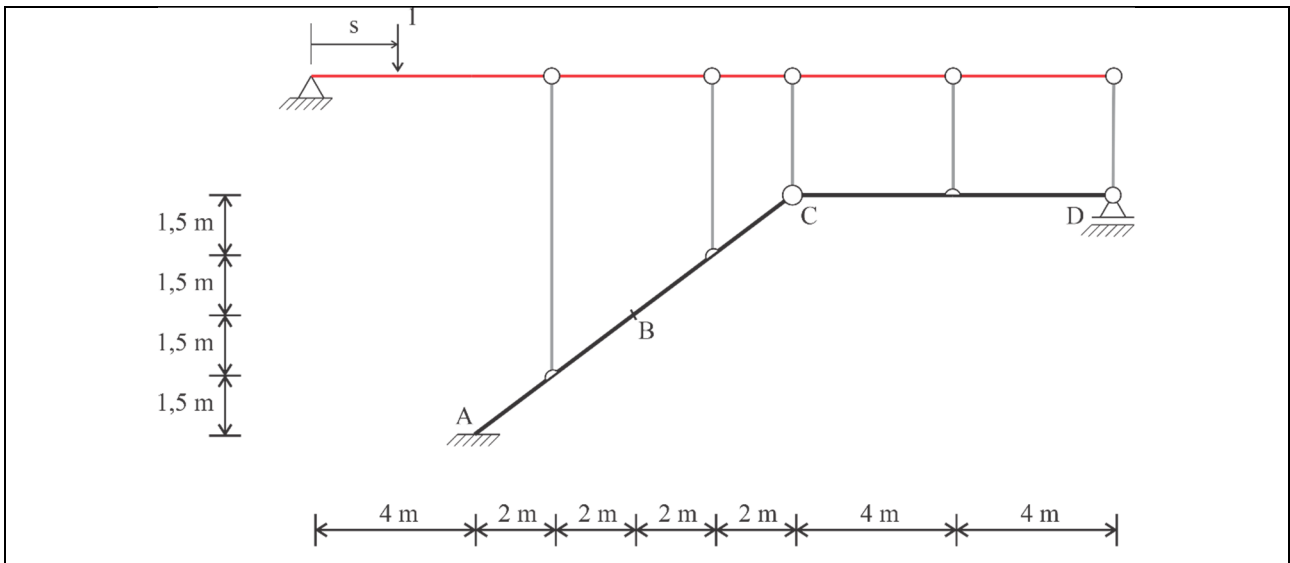


FIGURA 13. LI DE ESFORÇO CORTANTE PARA VIGA SEM E COM SISTEMA ISOTÁTICO DE PISO.

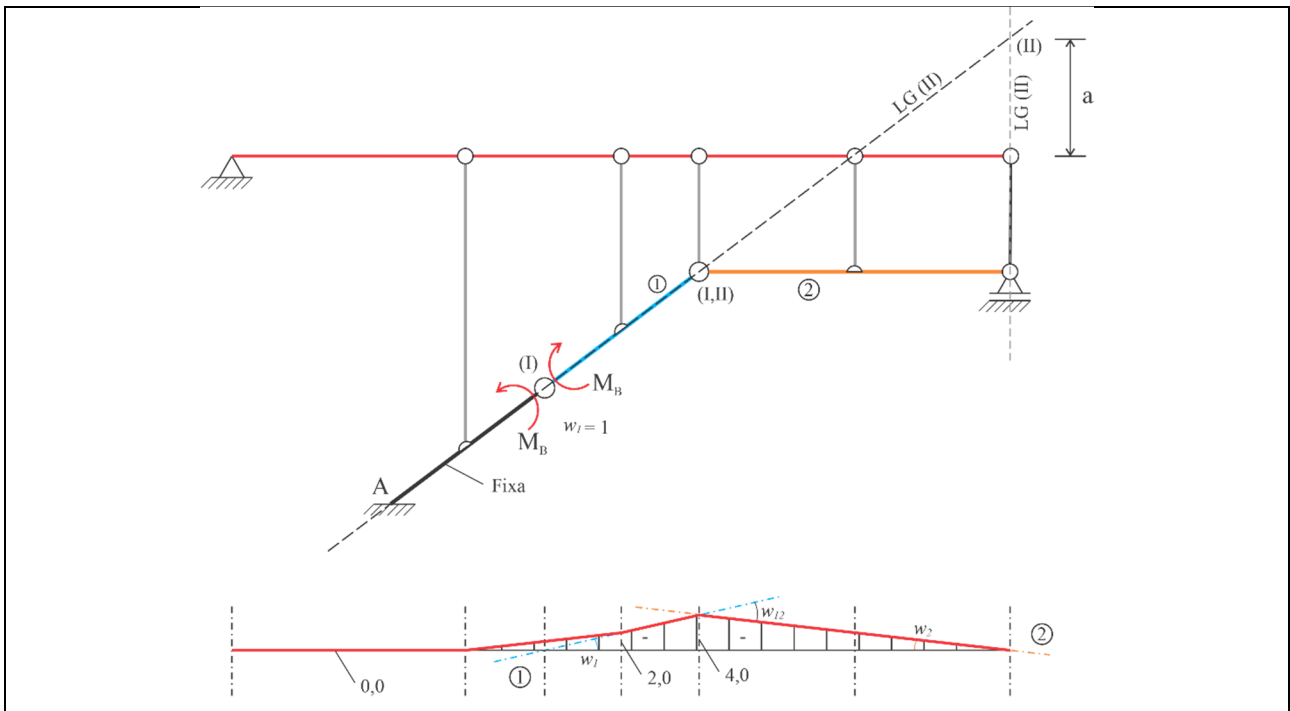
1.6.1 Exemplo de Sistema Isostático de Piso em Pórtico



QUADRO 16. EXEMPLO DE SISTEMA ISOSTÁTICO DE PISO EM PÓRTICO.

Para exercitar o conceito de sistema isostático de piso, considere o pórtico do Quadro 16, sobre o qual encontra-se um sistema de piso (destacado em vermelho). Busca-se a linha de influência de momento fletor no ponto B, no centro do tramo AC.

As etapas do Processo Cinemático são as mesmas para determinação das chapas e respectivos polos, distinguindo-se apenas na etapa final com a inclusão do piso isostático – inicia-se removendo o vínculo associado à LI que se deseja obter (a continuidade de rotação no ponto B, neste caso) e aplicando um esforço correspondente ao vínculo removido (ou seja, um par de momentos positivos na descontinuidade), conforme o Quadro 17.



QUADRO 17. LI DE MOMENTO FLETOR EM PÓRTICO COM PISO ISOSTÁTICO.

Os polos já estão indicados, tendo sido realizadas as seguintes considerações: O vínculo em A é um engaste, o que torna o trecho AB isostático. Isto implica que a chapa é fixa, não havendo polos a serem obtidos para este trecho. Os tramos BC e CD, no entanto, formam uma cadeia cinemática com um grau de deslocabilidade. A chapa 1 (tramo BC) foi destacada em azul e a chapa 2 (tramo CD) em laranja.

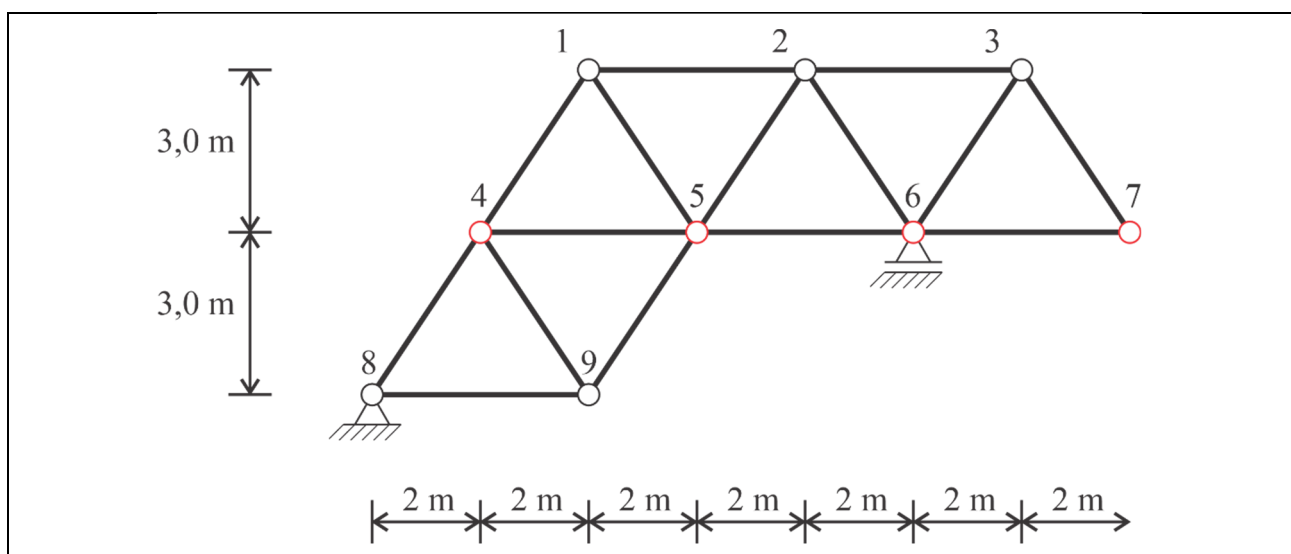
Como o trecho AB é isostático (portanto fixo), o ponto B não pode se deslocar horizontalmente ou verticalmente, apenas girar. Isto implica que este é um polo absoluto próprio, associado a chapa 1 - (I). O ponto C conecta as chapas 1 e 2, portanto define um polo relativo próprio (I,II). Pelo alinhamento dos polos (I) e (I,II), define-se um LG (II), que se cruza com o outro LG (II) definido pelo apoio móvel em D.

Obtidos os polos, impõem-se um deslocamento unitário de sentido contrário ao arbitrado positivo para M_B . Ou seja, foi aplicado um giro unitário na chapa 1 em seu polo absoluto próprio (I). A movimentação devido ao deslocamento imposto determina a LI da cadeia cinemática, o que implica em atender a nulidade da LI em (II), promovendo um giro relativo entre as chapas em (I,II).

Quanto ao piso isostático, as ordenadas definidas pela LI da estrutura são transferidas à LI do piso (destacada em vermelho). Assim, uma vez obtida a LI da estrutura, observam-se os pontos em que o piso isostático se apoia sobre a mesma, demarcando apenas as ordenadas. Estas ordenadas são conectadas ponto a ponto, gerando-se a LI do piso isostático.

Repare que a LI tem a extensão do piso isostático. Interessante também notar o trecho inicial da LI, que é nulo, pois os dois pontos iniciais à esquerda do piso estão apoiados em pontos que não se deslocam – apoio fixo e polo (I).

1.6.2 Exemplo de Linhas de Influência em Treliza



QUADRO 18. TRELIÇA COM SISTEMA ISOSTÁTICO DE PISO NOS NÓS 4, 5, 6 E 7.

Conforme mencionado anteriormente, treliças devem contemplar um sistema isostático de pisos para transferência das ações verticais para os nós da estrutura. Considere, portanto, a treliça indicada no Quadro 18, em que existe de um sistema de pisos apoiando-se nos nós 4, 5, 6 e 7 (destacados em vermelho).

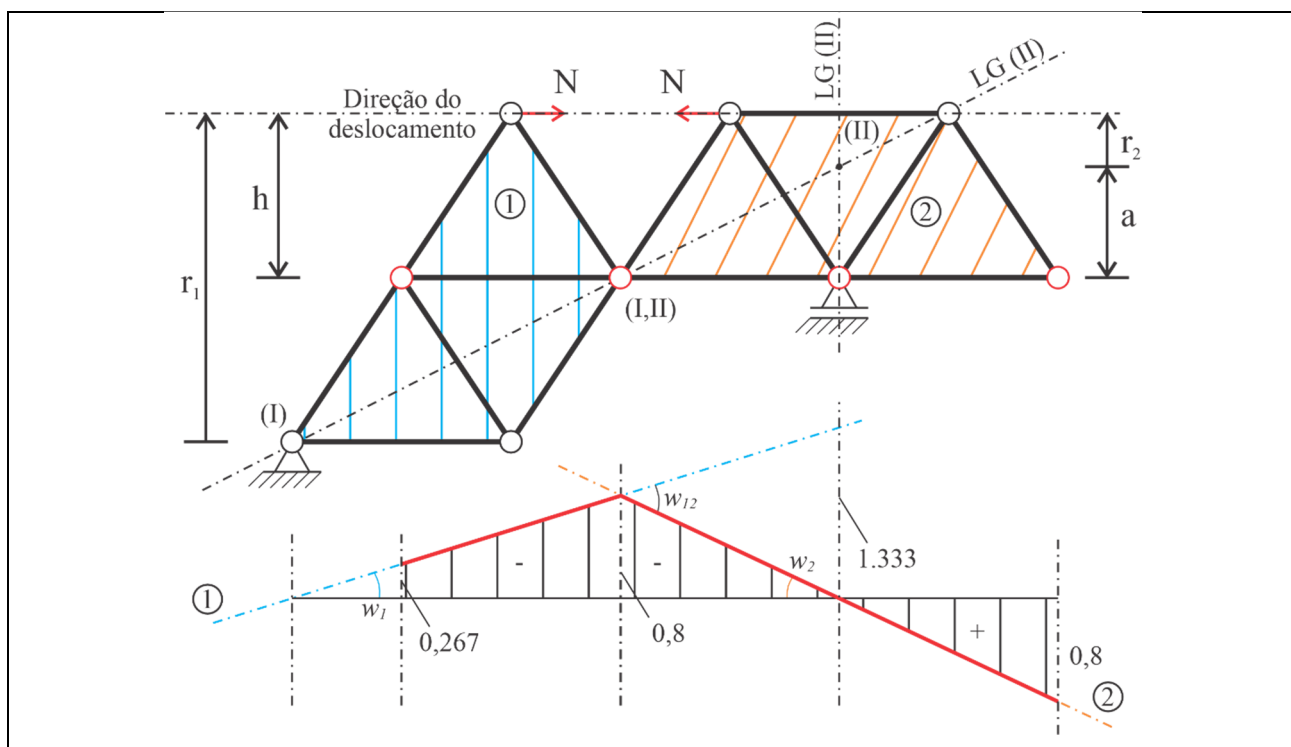
LI da barra 1-2

A primeira LI deste exemplo se refere ao esforço normal da barra 1-2. Inicialmente são demarcadas as chapas de treliça, que são os conjuntos reticulados indeformáveis formados por conjunto de barras, como mostrado no Quadro 19. Foram identificadas duas chapas de treliça, hachuradas em azul e laranja.

Ao demarcar as chapas, fica clara a conexão de uma única articulação entre as duas chapas. Ou seja, haverá uma tendência de giro relativo em torno deste ponto, que é o polo relativo (I,II) entre as chapas. Isto implica que a LI irá se assemelhar a uma LI de momento fletor.

Continuando com a demarcação dos polos, o polo absoluto da chapa 1 é identificado de imediato – apoio fixo em 8. O polo absoluto da chapa 2 é definido pelos seus dois lugares geométricos – o apoio móvel e o alinhamento dos polos (I) e (I,II).

Com os polos demarcados, busca-se determinar os giros das chapas. Em LI de treliças, é usual determinar os giros por meio dos raios vetores, que são definidos pela distância do polo absoluto até a direção de aplicação do deslocamento. Estes foram destacados no Quadro 19 (r_1 e r_2).



QUADRO 19. TR: LI DE ESFORÇO NORMAL DA BARRA 1-2.

$$r_1 w_1 + r_2 w_2 = 1 \rightarrow 6w_1 + 1w_2 = 1$$

Destaca-se que o sinal da equação deriva do fato de as duas chapas terem tendência de girarem em sentidos contrários.

Uma segunda relação é necessária, sendo esta obtida do polo relativo. Assim, sendo este próprio, portanto um ponto comum entre as chapas, basta se escrever o deslocamento deste ponto, em qualquer direção, para as duas chapas e igualá-los – por exemplo, escrevendo o deslocamento vertical do polo relativo pensado pelas chapas 1 e 2. Ou seja, multiplicam-se as distâncias horizontais dos polos absolutos das chapas ao polo relativo pelos respectivos giros:

$$3w_1 = 2w_2 \rightarrow w_1 = 2/15 \text{ e } w_2 = 1/5$$

A partir das duas últimas relações, definem-se os giros das chapas. Após isso, impõem-se os mesmos nas respectivas projeções dos polos absolutos na LI. O sentido é determinado pela tendência natural da estrutura se deslocar verticalmente, ou seja, ao afastar os nós 1 e 2, há tendência do nó 5 subir, portanto o giro w_1 será anti-horário e w_2 será horário. A LI será obtida com base nestas informações.

O emprego das equações que utilizam o raio vetor para determinação dos giros não é o único caminho para obter a LI. Uma alternativa é observar o giro relativo w_{12} . Como os pontos 1 e 2 devem se afastar em 1 (que é o deslocamento imposto), o giro relativo é dado por:

$$w_{12} = 1/h \rightarrow w_{12} = 1/3$$

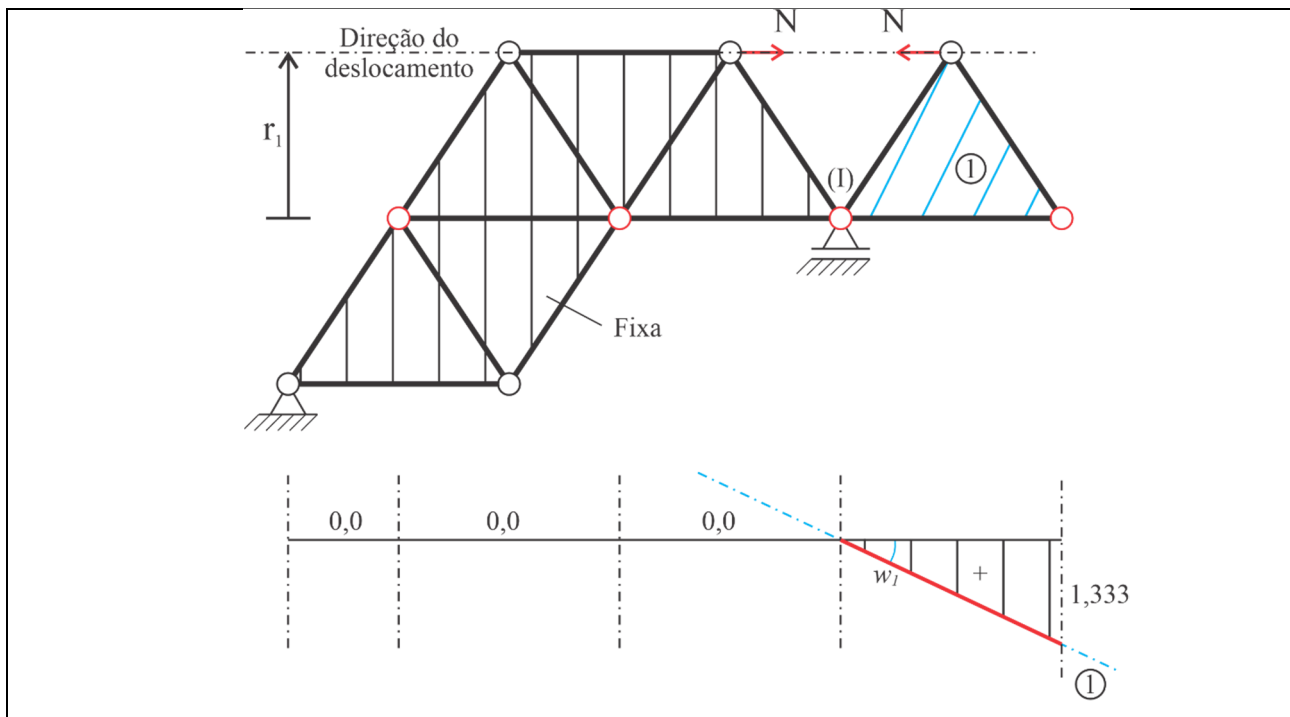
em que h é a distância entre o polo relativo e a direção do deslocamento, medido transversalmente.

Conhecido o giro relativo, e sabendo que a LI se assemelhará a uma LI de momento fletor, faz-se diretamente o traçado da LI, sem necessidade de se determinar os giros w_1 e w_2 . Com vistas à Figura 3, a imposição de w_{12} irá determinar a ordenada auxiliar na projeção dos polos (aqui indicada no polo 2). Todas as demais componentes podem ser obtidas por semelhança de triângulos.

LI da barra 2-3

A segunda LI apresentada para esta treliça é da barra 2-3. Se torna simples ao perceber que todo um trecho da estrutura é fixo (vide Quadro 20). Uma vez demarcadas as chapas de treliça, percebe-se que a chapa à esquerda está conectada a um apoio fixo e um apoio móvel. Não há possibilidade de movimentação alguma sem que haja deformações. Neste caso, não é parte da cadeia cinemática. Fato semelhante ocorreu no exemplo 1.6.1.

Assim, resta analisar a chapa à direita, claramente passível de se movimentar. Como está conectada a uma chapa fixa no nó 6, com possibilidade de giro, este nó é identificado como seu polo absoluto próprio.



QUADRO 20. TR: LI DE ESFORÇO NORMAL DA BARRA 2-3.

Da mesma forma que o exemplo anterior, os pontos 2 e 3 devem se afastar em 1 (que é o deslocamento imposto). Como o ponto 2 é fixo, o nó 3 deve se deslocar em 1 para a direita, e o giro ocorrerá em sentido horário, sendo dado por:

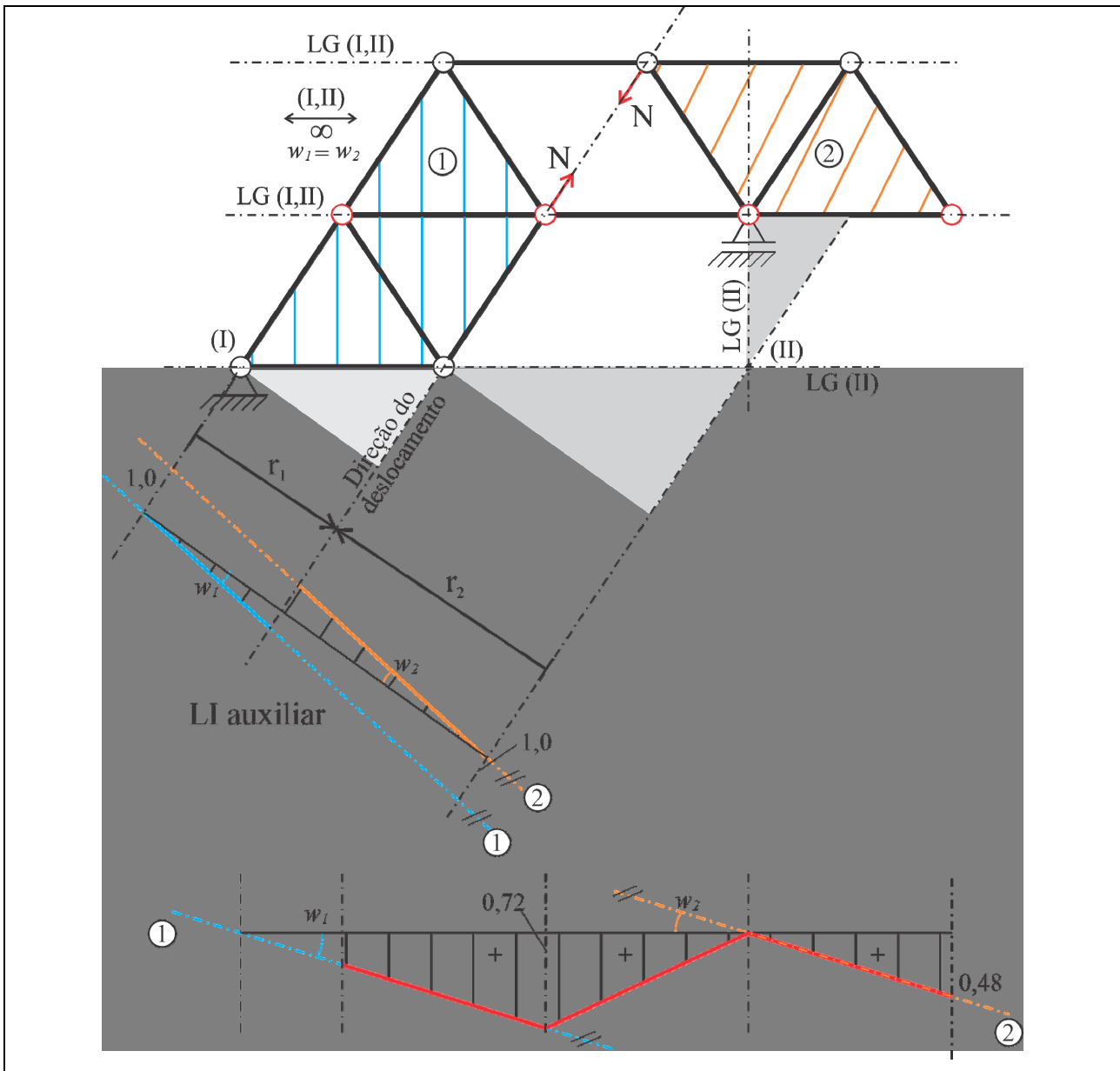
$$w_1 = 1/r_1 \rightarrow w_1 = 1/3$$

Em paralelo ao exemplo anterior, o raio vetor r_1 se assemelha à distância h , medidos da direção do deslocamento ao polo (aqui absoluto, lá relativo). Como apenas a chapa 1 pode girar, a LI é determinada pela imposição de w_1 na projeção do polo sobre a LI.

LI da barra 2-5

A próxima LI decorre do rompimento da barra 2-5, como mostrado no Quadro 21. Duas chapas são identificadas (e destacadas na figura). Percebe-se que as chapas estão conectadas por duas barras paralelas, entre os nós 1-2 e 5-6. Estas funcionam como barras vinculares, se tornando Lugares Geométricos do polo relativo (I,II). Como estão paralelas, o polo relativo está no infinito horizontal, o que implica que $w_1 = w_2$.

O polo absoluto da chapa 1 se encontra no apoio fixo, e o polo absoluto da chapa 2 é determinado pelo encontro dos seus lugares geométricos – uma reta vertical devido ao apoio móvel e uma reta horizontal passando por (I) e por (I,II). Como o polo relativo está no infinito, pode-se associar com uma LI de esforço cortante. As chapas se deslocam relativamente sem girar – porém a unidade está na direção do deslocamento. Uma LI auxiliar foi feita para destacar tal fato.



QUADRO 21. TR: LI DE ESFORÇO NORMAL DA BARRA 2-5.

A distância entre os polos absolutos é necessária para determinar os giros, porém neste caso foram determinados ambos os raios vetores – obtidos por simples geometria:

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \rightarrow r_1 = 4 \cdot \cos \alpha; r_2 = 6 \cdot \cos \alpha$$

Devido ao polo relativo impróprio, os giros das chapas são iguais, dados por:

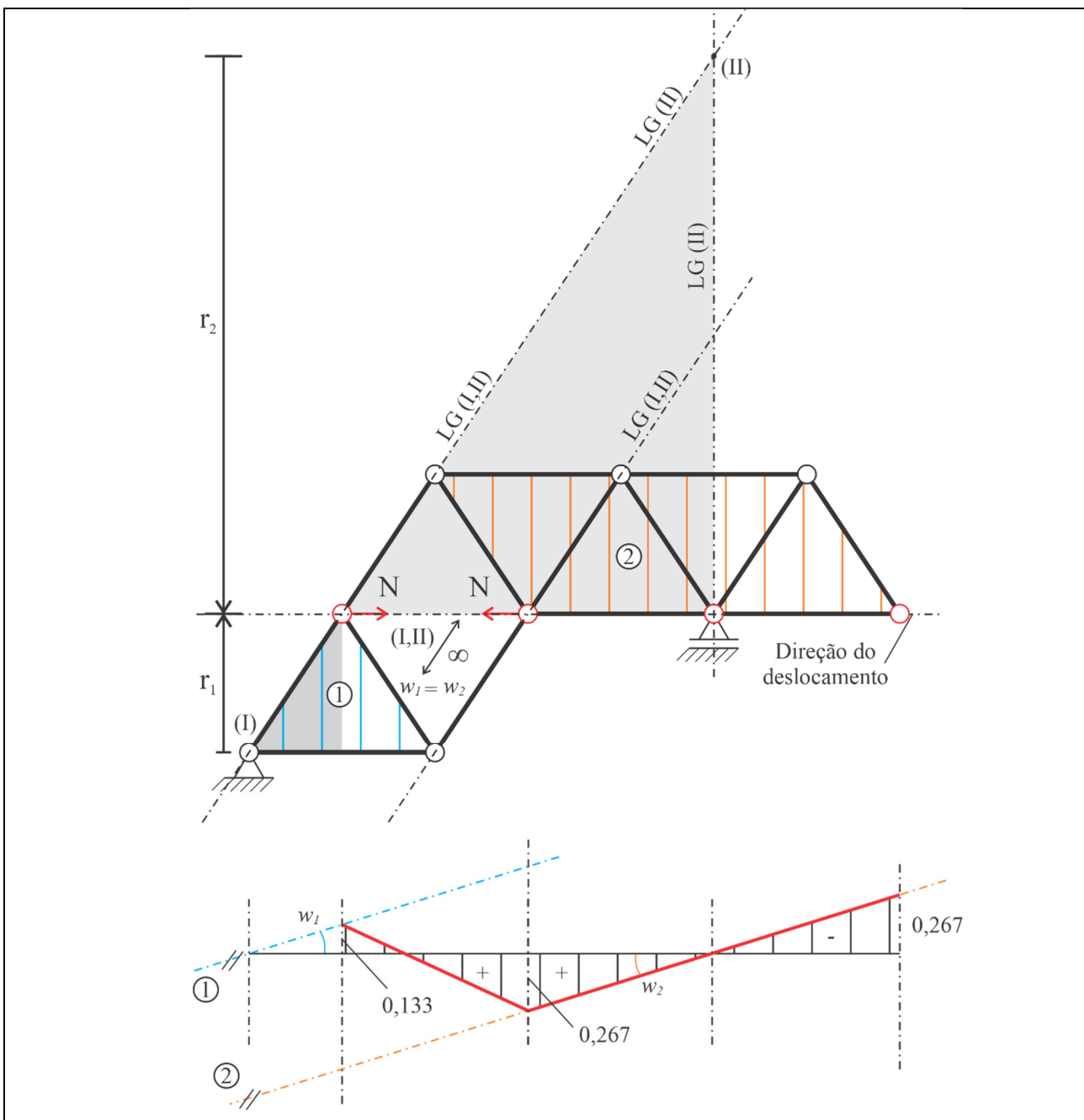
$$w_1 = w_2 = \frac{1}{(r_1 + r_2)} = \frac{1}{8,32}$$

Impondo-se os giros, ambos horários (como pode ser visto na LI auxiliar), resta apenas obter a LI do piso isostático. Impondo-se os giros na projeção dos polos, as chapas giram mantendo o paralelismo. O piso isostático (destacado em vermelho) é então determinado segundo as ordenadas nos seus pontos de apoio.

LI da barra 4-5

A quarta LI deste exemplo se refere à barra 4-5, vista no Quadro 22. Novamente o rompimento promove a existência de duas chapas conectadas por duas barras (1-4 e 5-9) que se tornam Lugares Geométricos do polo relativo (I,II). Por serem paralelas, fica determinado que o polo relativo está no infinito inclinado e que $w_1 = w_2$.

O polo absoluto (I) é dado pelo apoio fixo, e o polo absoluto (II) é dado pelo encontro dos Lugares Geométricos definidos pelo apoio móvel vertical e pelo alinhamento dos polos (I) e (I,II). O alinhamento dos polos é estabelecido por uma reta inclinada – tal qual a inclinação do polo relativo (I,II) – passando pelo polo (I).



QUADRO 22. TR: LI DE ESFORÇO NORMAL DA BARRA 4-5.

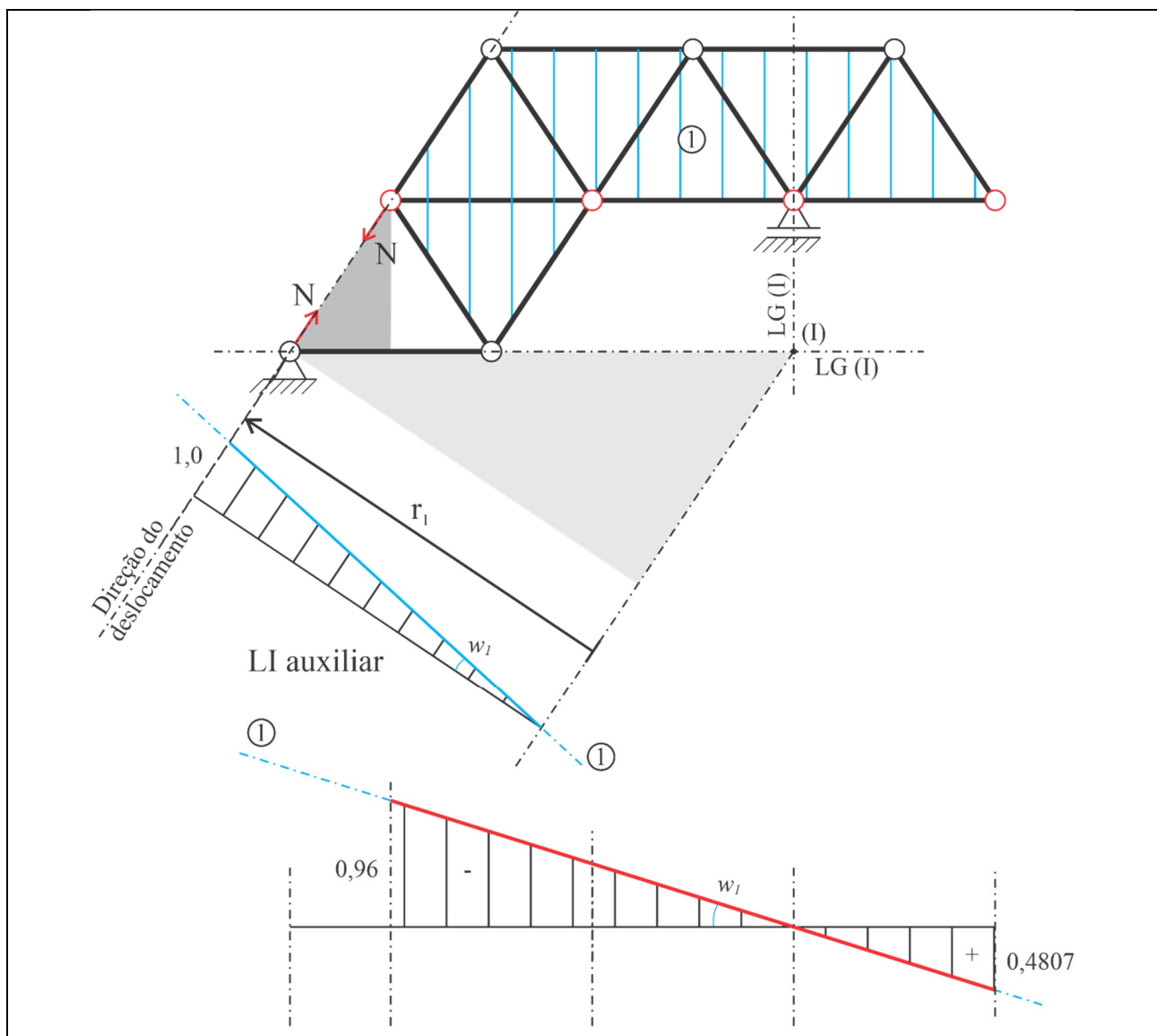
Os triângulos em destaque (em cinza) esquematizam as relações para determinar r_2 . Como o polo relativo está no infinito, tem-se que:

$$w_1 = w_2 = 1/(r_1 + r_2) = 1/15$$

Impondo-se os giros, desta vez anti-horários (deixado a cargo do leitor perceber isto), resta apenas obter a LI do piso isostático, determinada segundo as ordenadas nos respectivos pontos de apoio. Como nos diagramas anteriores, a LI da chapa 1 foi mantida em azul, da chapa 2 em laranja e do piso isostático em vermelho.

LI da barra 4-8

A quinta LI desta sequência se refere à barra 4-8 apresentada no Quadro 23. É interessante notar a formação das chapas de treliça. Apenas uma chapa é formada, mas esta não é fixa, há um grau de mobilidade. Percebe-se que esta chapa está conectada à chapa terra (o apoio fixo) por meio da barra 8-9, tomada como vincular.



QUADRO 23. TR: LI DE ESFORÇO NORMAL DA BARRA 4-8.

Desta forma, a barra 8-9 pode ser reconhecida como um Lugar Geométrico do polo absoluto (I), assim como o apoio móvel vertical em 6. O encontro destes LG's marca a posição do polo.

Conhecida a posição do polo, deve-se determinar a distância até a direção de deslocamento, medida transversalmente. Isto foi destacado no Quadro 23 pela confecção de uma LI auxiliar. O deslocamento unitário deve ser imposto na chapa 1, afinal não é possível movimentar o apoio fixo. Desta forma:

$$w_1 = 1/r_1 = 1/8,32$$

Cabe ressaltar que o raio vetor r_1 foi determinado observando-se os triângulos que foram destacados em cinza, por simples regra de proporcionalidade:

$$10/\sqrt{13} = r_1/3 \rightarrow r_1 = 8,3205 \text{ m}$$

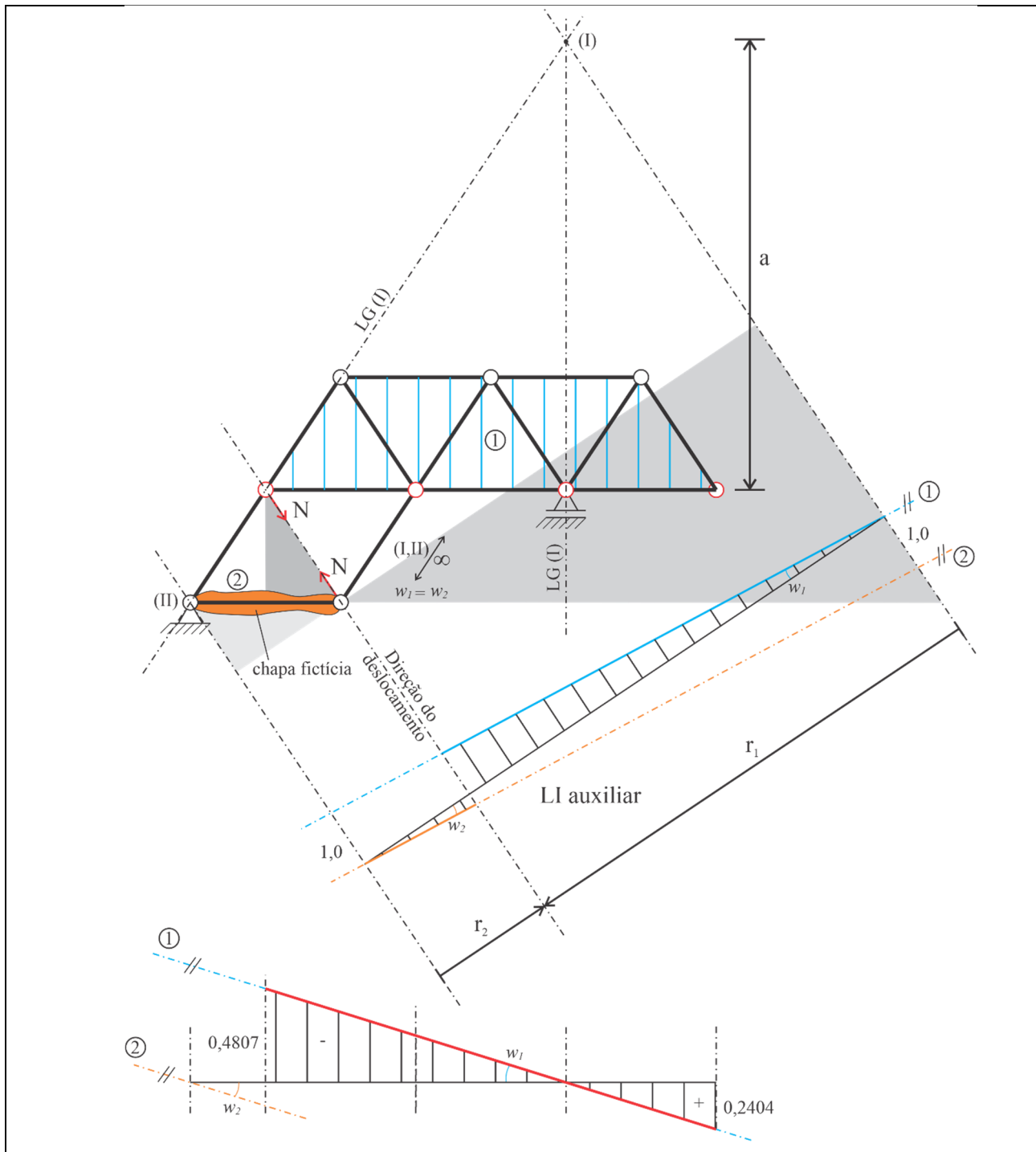
Uma vez conhecido o giro w_1 , este é imposto na projeção do seu polo na LI, com sentido correspondente ao determinado na LI auxiliar. Após isso, é só questão de observar os pontos de apoio do piso isostático para traçado da LI.

LI da barra 4-9

A sexta linha de influência se refere ao esforço normal da barra 4-9. Uma vez rompida, destaca-se a formação da chapa 1, porém algumas barras não chegam a formar uma chapa de treliça. Via de regra, não podem existir nós que não pertençam a ao menos uma chapa, seja de treliça, seja da chapa terra. Assim, faz necessário adotar uma barra como chapa fictícia. Neste exemplo, foi adotada a barra 8-9 como fictícia, de forma a não haverem nós soltos (livres para deslocarem) – vide Quadro 24.

Com isso, a chapa 2 tem seu polo absoluto determinado no apoio fixo, e está conectada com a chapa 1 por meio de duas barras paralelas (4-8 e 5-9) – que determinam um polo relativo impróprio. O polo (I) é estabelecido pelos seus lugares geométricos (apoio móvel e alinhamento dos polos (II) e (I,II)).

Devido ao polo relativo impróprio, a LI auxiliar se assemelha a uma LI de cortante. Além disso $w_1 = w_2$, e as distâncias a , r_1 e r_2 podem ser obtidas por meio de relações geométricas advindas dos triângulos em destaque. Conhecidos os giros, estes são impostos na projeção dos respectivos polos, com direção definida na LI auxiliar. A LI final é dada pelo traçado da LI do piso isostático (em vermelho).

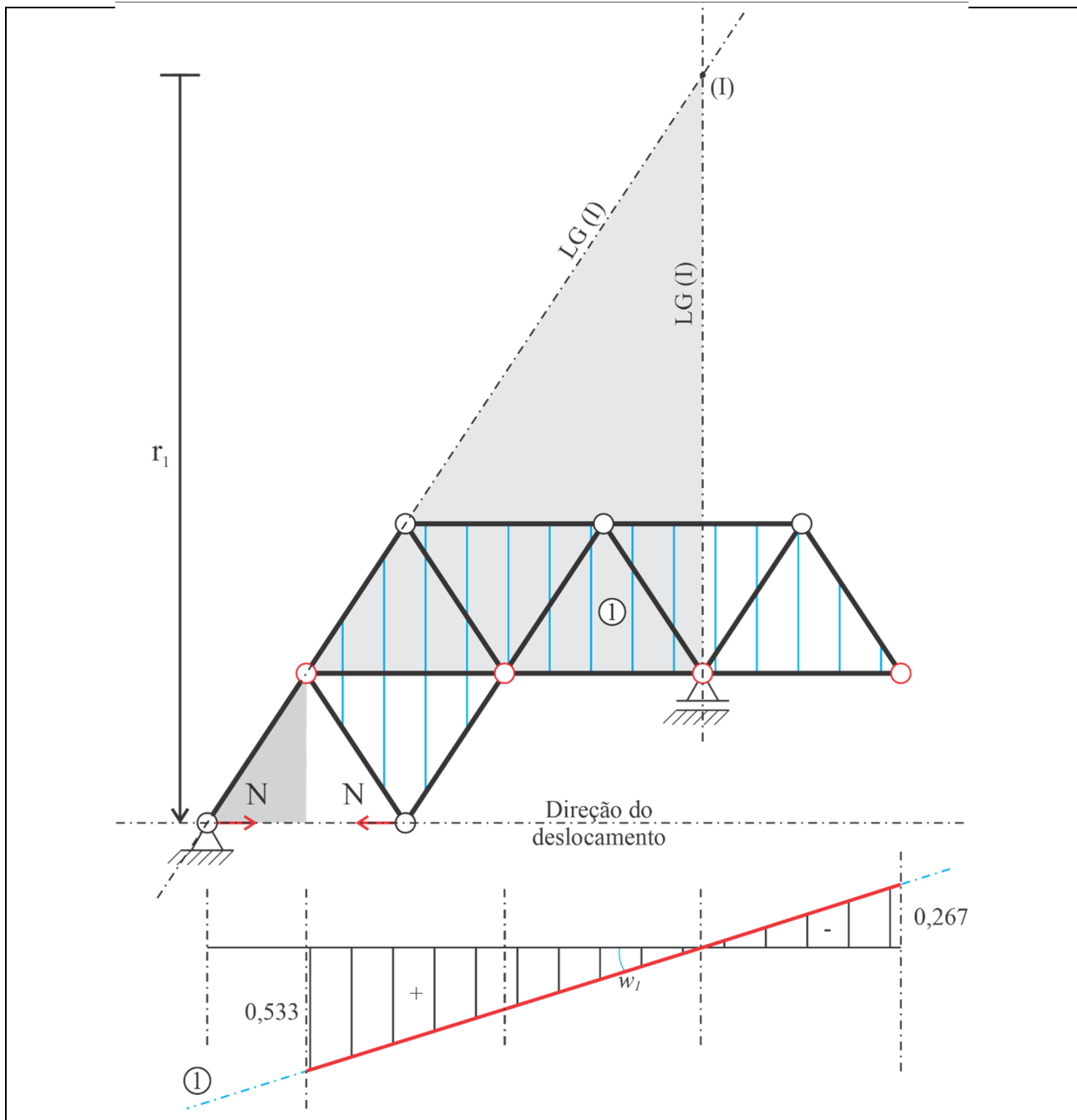


QUADRO 24. TR: LI DE ESFORÇO NORMAL DA BARRA 4-9.

LI da barra 8-9

A sétima LI deste exemplo se refere à barra 8-9, apresentada no Quadro 25. Uma vez rompida a barra, há a formação de apenas uma chapa de treliça na cadeia cinemática. Não há polos relativos a serem considerados.

Ademais, da mesma forma que a LI da barra 4-8 (exemplo 5), uma barra conecta a chapa de treliça à chapa terra, se tornando um Lugar Geométrico do polo absoluto (I). O outro Lugar Geométrico é dado pelo apoio móvel em 6.



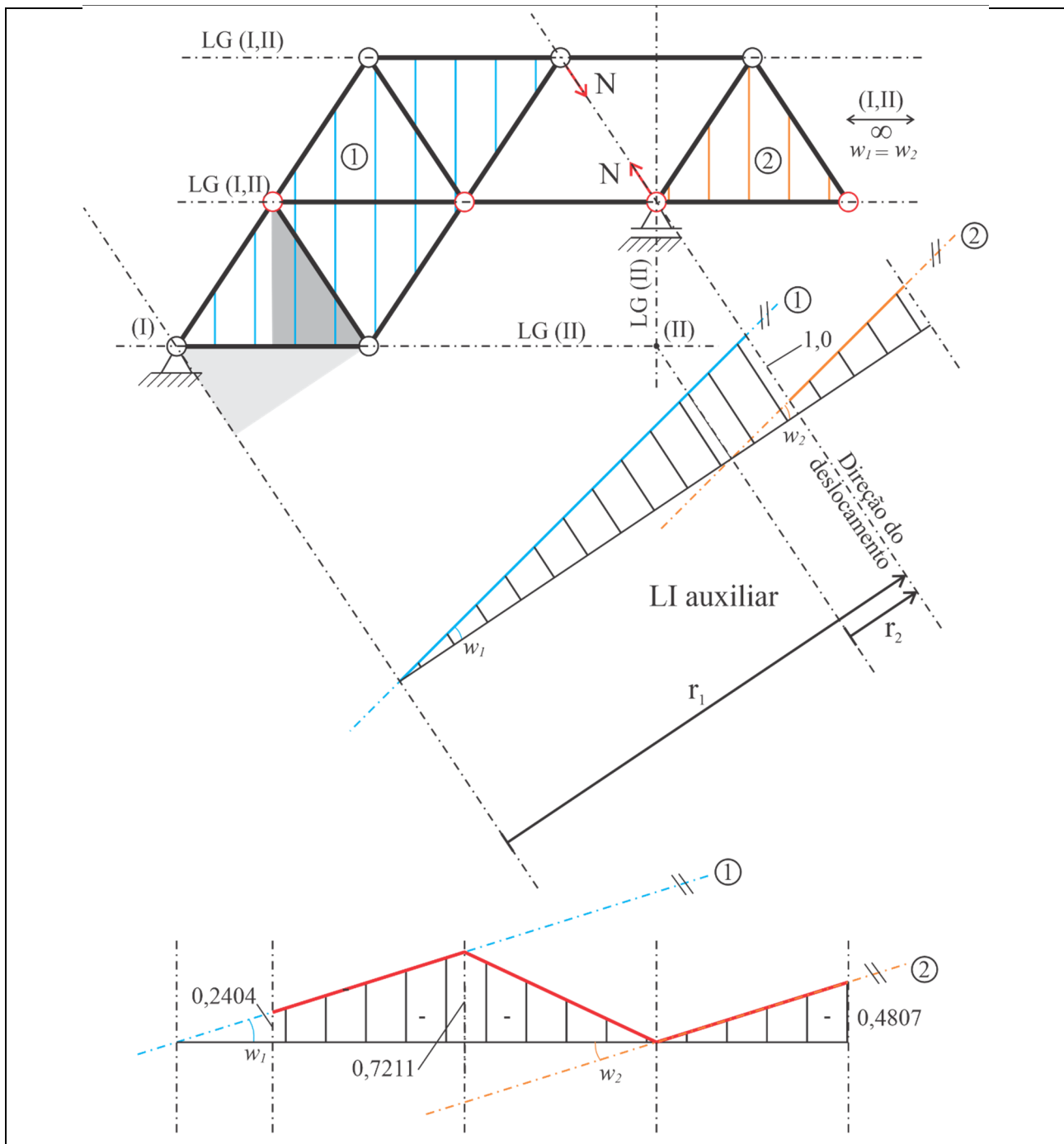
A posição do polo (e, por conseguinte, r_1) é encontrado por simples semelhança de triângulos, conforme destacado no Quadro 25. O deslocamento unitário é imposto unicamente na chapa 1, pois o nó 8 concorre com o apoio fixo. Dito isto, o giro da chapa 1 é dado por:

$$w_1 = 1/r_1 = 1/15$$

Uma vez conhecido o giro w_1 , este é imposto na projeção do seu polo na LI, com sentido correspondente à imposição do deslocamento em relação ao polo absoluto – neste caso anti-horário. Após isso, é só questão de observar os pontos de apoio do piso isostático para traçado da Linha de Influência.

LI da barra 2-6

A última LI deste exemplo se refere ao esforço normal da barra 2-6. Rompida a barra, e substituindo pelo esforço correspondente, identificam-se duas chapas (vide Quadro 26). Dois polos são identificados de imediato – o apoio fixo do nó 8 como sendo o polo absoluto (I) e o polo relativo impróprio (I,II) dado pelo paralelismo das barras 2-3 e 5-6. O fato do polo relativo ser impróprio implica, necessariamente, na igualdade entre os giros das duas chapas, ou seja, $w_1 = w_2$. O polo absoluto (II) é identificado pelos seus Lugares Geométricos – a barra vincular existente no nó 6 e o alinhamento dos polos (I) e (I,II).



QUADRO 26. TR: LI DE ESFORÇO NORMAL DA BARRA 2-6.

O próximo passo é a imposição do deslocamento unitário relativo de afastamento entre os nós 2 e 6. Uma linha de influência auxiliar foi incluída no Quadro 26 para auxiliar na discussão. Em algumas linhas de influência, a depender da relação entre a posição de seus polos e de imposição de deslocamento, pode ocorrer de ambos nós deverem se deslocar no mesmo sentido. É o que acontece nesta LI. Como o giro das chapas é igual, para que estes se afastem, um dos nós deverá sofrer um deslocamento maior que a unidade – e o deslocamento relativo será dado pela diferença dos deslocamentos, não pela soma.

Usando as relações geométricas indicadas no Quadro 26, é simples determinar os valores dos raios vetores, sendo dados por:

$$r_1 = 9,9846m; r_2 = 1,6641m;$$

Como as chapas giram no mesmo sentido, percebe-se que o nó 2 terá maior deslocamento (por estar vinculado à chapa 1, que possui maior raio vetor). Assim, a relação para se determinar o valor dos giros é dada por:

$$r_1 w_1 - r_2 w_2 = 1$$

Repare no sinal da equação, que agora é negativo. Como $w_1 = w_2$, então $w_1 = 1/(r_1 - r_2) = 0,1202$. Impondo-se os giros, ambos anti-horários, resta apenas obter a LI do piso isostático, determinado segundo as ordenadas nos pontos de apoio.

Este exemplo destaca que a obtenção dos giros a partir dos raios vetores nem sempre se dá pela soma das parcelas de $r_1 w_1$ e $r_2 w_2$. Quando o deslocamento resultante for dado pela diferença das partes, a equação será dada pela subtração. Portanto, é essencial visualizar o deslocamento que a cadeia cinemática sofrerá, compatível com a vinculação entre chapas e com vínculos, para se escrever a relação de deslocamento com o sinal correto.

1.7 Princípio dual de Müller-Breslau

Para o caso de linhas de influência de deslocamentos, deve-se aplicar o teorema dual de Müller-Breslau:



O valor da ordenada $n(s)$ da linha de influência de um determinado deslocamento (ou rotação) δ_c na seção de abscissa c provocado por uma força unitária P é igual à deslocada δ obtida a partir da introdução de uma força (ou momento) unitária associada ao deslocamento (ou rotação) δ_c .

Em outras palavras, o teorema dual estabelece que, aplicando-se uma força (ou momento) unitária na direção do deslocamento (ou rotação) cuja LI se deseja determinar, no sentido arbitrado positivo para o deslocamento (ou rotação), a componente vertical da deslocada obtida para a estrutura é igual à LI do referido deslocamento (ou rotação) para carga vertical percorrendo a estrutura. O teorema dual é aplicável tanto para estruturas isostáticas quanto para hiperestáticas.

1.7.1 Demonstração do teorema

Para demonstração do Teorema dual, já para o caso geral hiperestático, considera-se uma viga engastada-apoiada com carga unitária vertical percorrendo a estrutura, onde deseja-se obter a LI do deslocamento no ponto c dado por $\delta_c(s)$, tal como indicado na Figura 14a. Considera-se ainda outro problema, sobre a mesma estrutura da Figura 14a, submetido a uma força unitária na posição, direção e sentido do deslocamento cuja LI se deseja obter, apresentado na Figura 14b. Os dois problemas podem ser assumidos, alternadamente, como estados de forças e de deslocamentos.

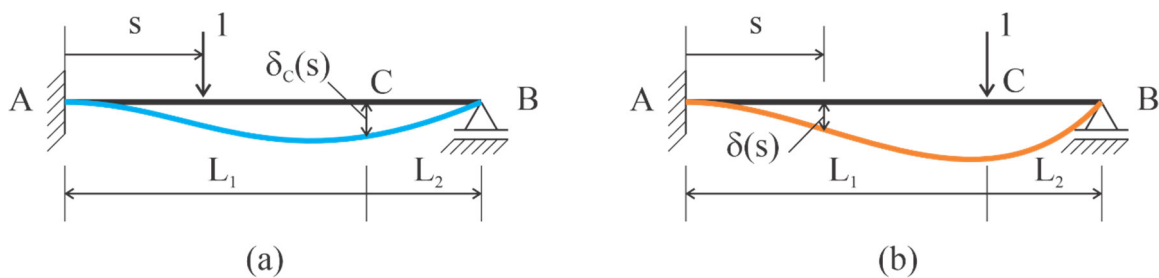


FIGURA 14. ESTADOS DE FORÇAS E DESLOCAMENTOS DE VIGA PARA LI DE DESLOCAMENTOS.

Aplicando-se o PTV sobre os problemas, considerando (a) como estado de forças e (b) como de deslocamentos, em que $\delta_c(s)$ é o valor do deslocamento no ponto C cuja LI se deseja determinar para carga unitária atuando em s e $\delta(s)$ é o deslocamento vertical calculado no ponto de aplicação da carga unitária, tem-se que:

$$1. \delta(s) = \int \frac{N_a N_b}{EA} dx + \int \frac{V_a V_b}{GA} \chi dx + \int \frac{M_a M_b}{EI} dx \quad (1.10)$$

Outrossim, considerando (b) o estado de forças sobre o estado de deslocamentos (a), tem-se que:

$$1. \delta_c(s) = \int \frac{N_a N_b}{EA} dx + \int \frac{V_a V_b}{GA} \chi dx + \int \frac{M_a M_b}{EI} dx \quad (1.11)$$

o que implica que:

$$\delta_c(s) = \delta(s) \quad (1.12)$$

Desta forma demonstrando a validade do teorema dual de Müller-Breslau tanto para estruturas isostáticas quanto para estruturas hiperestáticas.

Capítulo 2 - Processo dos Esforços

Neste capítulo você vai ver:

- Obtenção da Estrutura Isostática Auxiliar (Sistema Principal);
- Definição dos Hiperestáticos;
- Definição dos Deslocamentos (Termos de Cargas e Coeficientes de Flexibilidade);
- Superposição de efeitos para restauração de compatibilidade;
- Superposição de efeitos para determinação de diagramas.

Em problemas hiperestáticos, as condições de equilíbrio da estática não são suficientes para determinação dos esforços internos e/ou reações, pois são em menor número do que as incógnitas existentes. Desta forma, existe a necessidade de se gerar equações adicionais, utilizando-se das relações entre deslocamentos e deformações (condições de compatibilidade) e das restrições impostas pelas leis constitutivas dos materiais que compõem a estrutura (relações constitutivas).

O Processo dos Esforços promove uma maneira intuitiva e relativamente simples para prover estas equações. Para tanto, utiliza o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) associado ao Princípio da Superposição de Efeitos e à Proporcionalidade entre Causa e Efeito. Desta forma, a aplicação do Processo dos Esforços fica limitada a problemas que respeitam as hipóteses da elasticidade linear, ou seja, problemas elástico-lineares em regime de pequenos deslocamentos, giros e deformações.

O Processo dos Esforços permite a resolução de uma estrutura hiperestática recaindo no cálculo de problemas isostáticos, obtidos a partir da estrutura original, possíveis de serem resolvidos apenas com as equações de equilíbrio da estática e da aplicação do PTV. Tendo isso em mente, o Processo propõe transformar a estrutura hiperestática em uma isostática auxiliar ao impor o rompimento de vínculos (internos e/ou externos) em número igual ao grau de hiperestaticidade da estrutura. Esta estrutura isostática auxiliar é usualmente chamada de Sistema Principal.

Os vínculos rompidos são substituídos pelos correspondentes esforços ou reações, que recebem o nome de Incógnitas Hiperestáticas, enumeradas como F_1 a F_n , em que n é o número de incógnitas hiperestáticas. Tal procedimento mantém a condição de equilíbrio original, mesmo sem serem conhecidos em princípio os valores das incógnitas hiperestáticas, porém ferindo as condições de vinculação e de continuidade de deslocamentos nos vínculos removidos. Assim, os problemas



Passo a passo:

- 1 – Determine o grau de hiperstaticidade da estrutura (n);
- 2 – Crie a estrutura isostática auxiliar;
- 3 – Determine os problemas de (0) a (n);
- 4 – Restaure a compatibilidade, sobrepondo os problemas.

No caso de vínculos externos rompidos, o deslocamento δ_{ir} do problema (r) na direção da incógnita hiperestática F_i assume valor nulo ou do recalque de apoio, caso exista. Para vínculos internos, como a incógnita hiperestática está associada a um deslocamento relativo entre seções transversais sucessivas, o deslocamento δ_{ir} do problema (r) para este caso será sempre nulo.

Os deslocamentos dos demais problemas são facilmente determinados com a aplicação do PTV, por se tratar do cálculo de deslocamento em determinada estrutura isostática. Esse tópico pode ser revisitado no Livro 1.

2.1 Exemplo Modelo – Viga Hiperestática (VH)

Considere, como exemplo, uma viga duas vezes hiperestática submetida a um recalque rotacional no engaste em A e um carregamento distribuído ao longo de toda a viga, tal como ilustrado na Figura 15. A linha tracejada em azul reflete a deslocada da estrutura real, a ser obtida.

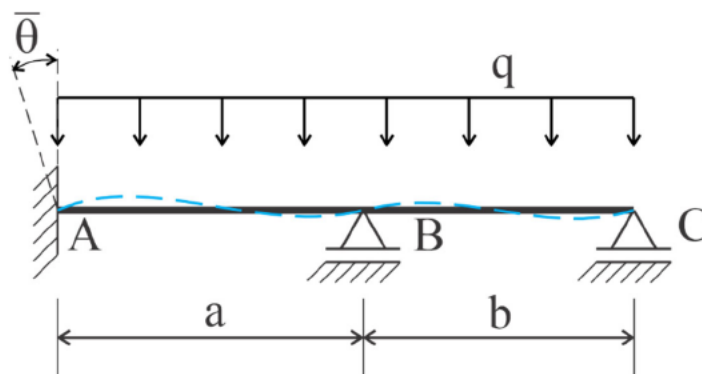


FIGURA 15. PROCESSO DOS ESFORÇOS: VIGA HIPERESTÁTICA.

A estrutura isostática auxiliar é obtida rompendo-se dois vínculos da estrutura real. Adotando-se como incógnitas hiperestáticas a reação de momento no ponto A e o momento fletor na seção B, denominadas de F_1 e F_2 respectivamente, gera-se o problema isostático equivalente, como mostrado na Figura 16. Destaca-se que o problema isostático equivalente deve respeitar o recalque rotacional em A e a continuidade de rotação em B, refletindo a deslocada da estrutura real (em azul).

É interessante notar que, ao romper o vínculo interno em B, o equilíbrio equivalente exige um par de esforços contrários no referido vínculo.

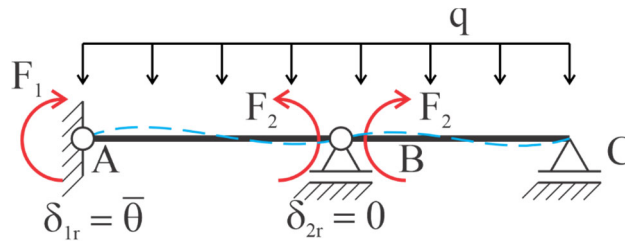


FIGURA 16. VH: PROBLEMA ISOSTÁTICO EQUIVALENTE.

A resposta do problema (r) é dividida em $n + 1$ problemas, levando à situação esquematizada na Figura 17. O problema isostático equivalente será igual ao real caso se obtenham F_1 e F_2 de tal forma que o giro do ponto A e o giro relativo no ponto B no problema equivalente sejam iguais aos respectivos giros naqueles pontos no problema real.

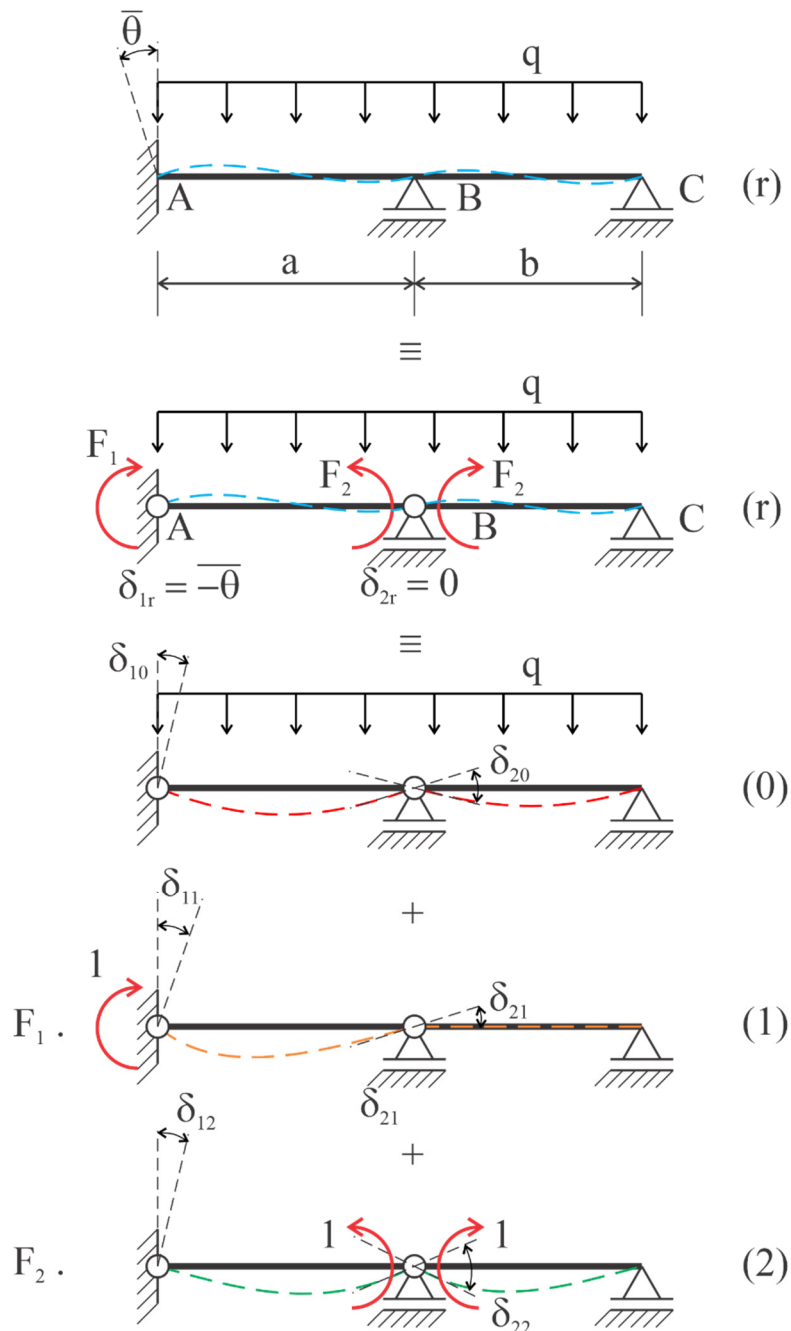


FIGURA 17. VH: SOBREPOSIÇÃO DOS PROBLEMAS.

Fazendo-se a sobreposição dos problemas, conforme mostrado na equação (2.2), gera-se um sistema linear de duas equações e duas incógnitas, dado por:

$$\begin{aligned}\delta_{1r} &= -\bar{\theta} = \delta_{10} + \delta_{11}F_1 + \delta_{12}F_2 \\ \delta_{2r} &= 0 = \delta_{20} + \delta_{21}F_1 + \delta_{22}F_2\end{aligned}\quad (2.3)$$

Obtidos os valores das incógnitas hiperestáticas F_1 e F_2 , as grandezas de interesse do problema (r) podem ser obtidas aplicando-se a equação (2.1) ou diretamente do problema isostático equivalente, já com os valores conhecidos das incógnitas hiperestáticas, por simples equilíbrio.

2.2 Exemplo – Pórtico Plano sob ações diversas (PP)

Como segundo exemplo, considere o pórtico plano ilustrado na Figura 18, submetido simultaneamente a ação do carregamento distribuído no trecho BC, momento concentrado na extremidade esquerda do trecho BC, variação de temperatura nos trechos AB e CD, e recalque de apoio vertical em A. Adota-se para o problema as seguintes propriedades físicas: $EI = 20.000 \text{ kN.m}^2$, $EA = 80.000 \text{ kN}$, $k = 5.000 \text{ kN/m}$, $\alpha = 0.00001^\circ\text{C}^{-1}$ e altura da seção transversal $h = 0,4 \text{ m}$. Destaca-se que, para o trecho BC, adota-se inércia de 2 vezes o valor da inércia dos demais trechos, sendo, portanto, o valor do EI para o referido trecho igual a 40.000 kN.m^2 .

Nota-se ainda que o trecho AB está submetido apenas a esforço axial, uma vez que se encontra bi-rotulado e as causas físicas atuantes no referido trecho não causam flexão. Já os trechos BC e CD estão submetidos a esforços axiais, cisalhantes e de flexão, por conta das configurações de extremidade e causas físicas às quais se encontram submetidos.

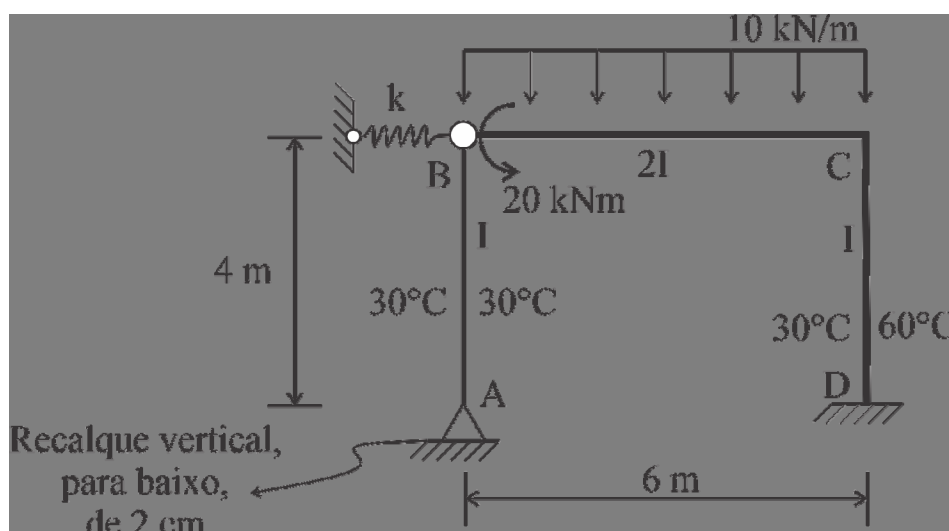
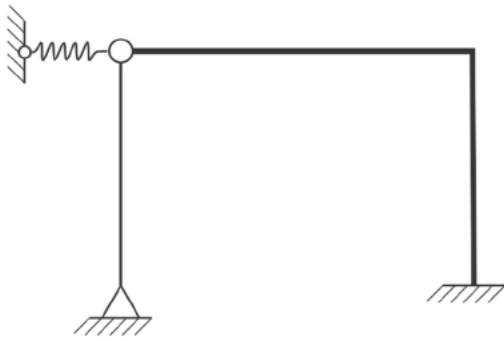
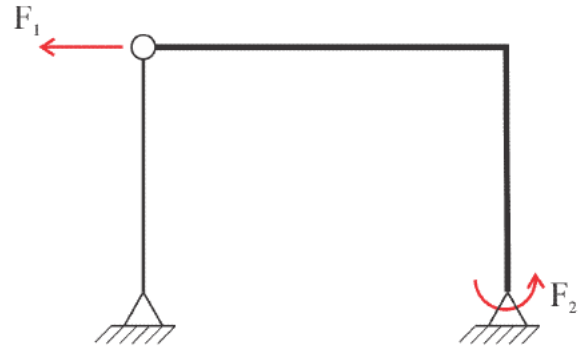


FIGURA 18. PROCESSO DOS ESFORÇOS: PÓRTICO PLANO.

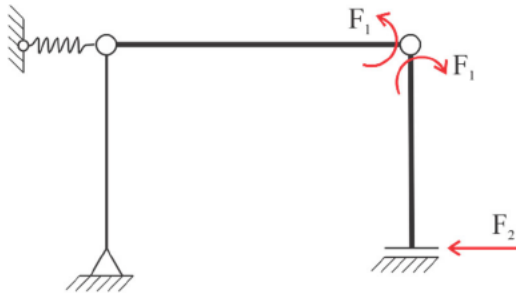
O primeiro passo para aplicação do Processo dos Esforços é a obtenção de um problema isostático equivalente. Como o grau de hiperestaticidade da estrutura deste exemplo é dois, serão rompidos dois vínculos da estrutura real. São inúmeras as alternativas para escolha das incógnitas hiperestáticas a serem adotadas para resolver o problema, sendo algumas dessas alternativas apresentadas na Figura 19.



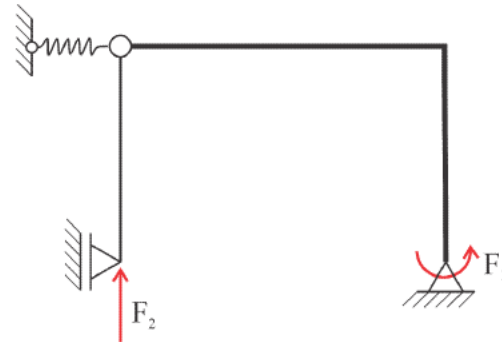
a) Estrutura hiperestática original.



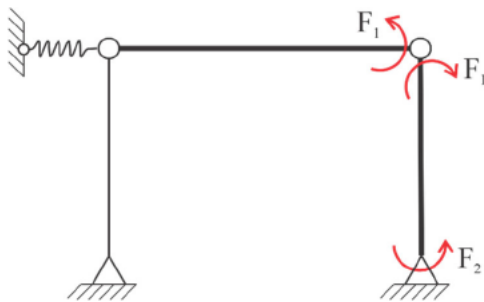
b) Remoção de mola em B e engaste em D.



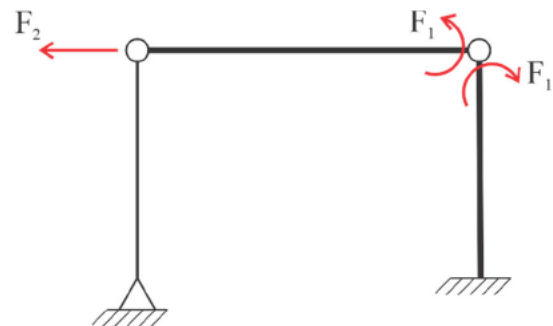
c) Rótula em C e apoio horizontal em D.



d) Apoio vertical em A e engaste em D.



e) Rótula em C e engaste em D.



f) Mola em B e rótula em C.

FIGURA 19. ALTERNATIVAS PARA PROBLEMA ISOSTÁTICO EQUIVALENTE DO PÓRTICO PLANO.

Adota-se o problema isostático equivalente da Figura 19e, que apresenta como incógnitas hiperestáticas o esforço interno de momento fletor no ponto C e a reação de momento no ponto D, denominadas de F_1 e F_2 respectivamente, gerando o problema isostático equivalente da Figura 20.

A resposta do problema (r) é dividida em $2 + 1$ problemas, levando à situação esquematizada na Figura 21.

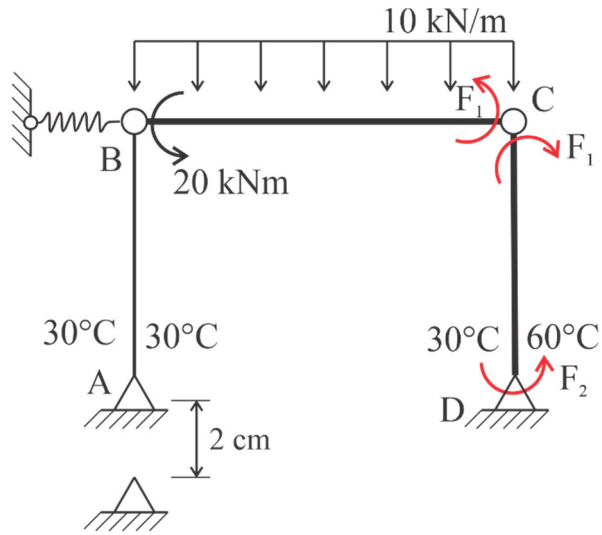


FIGURA 20. PP: PROBLEMA ISOSTÁTICO EQUIVALENTE.

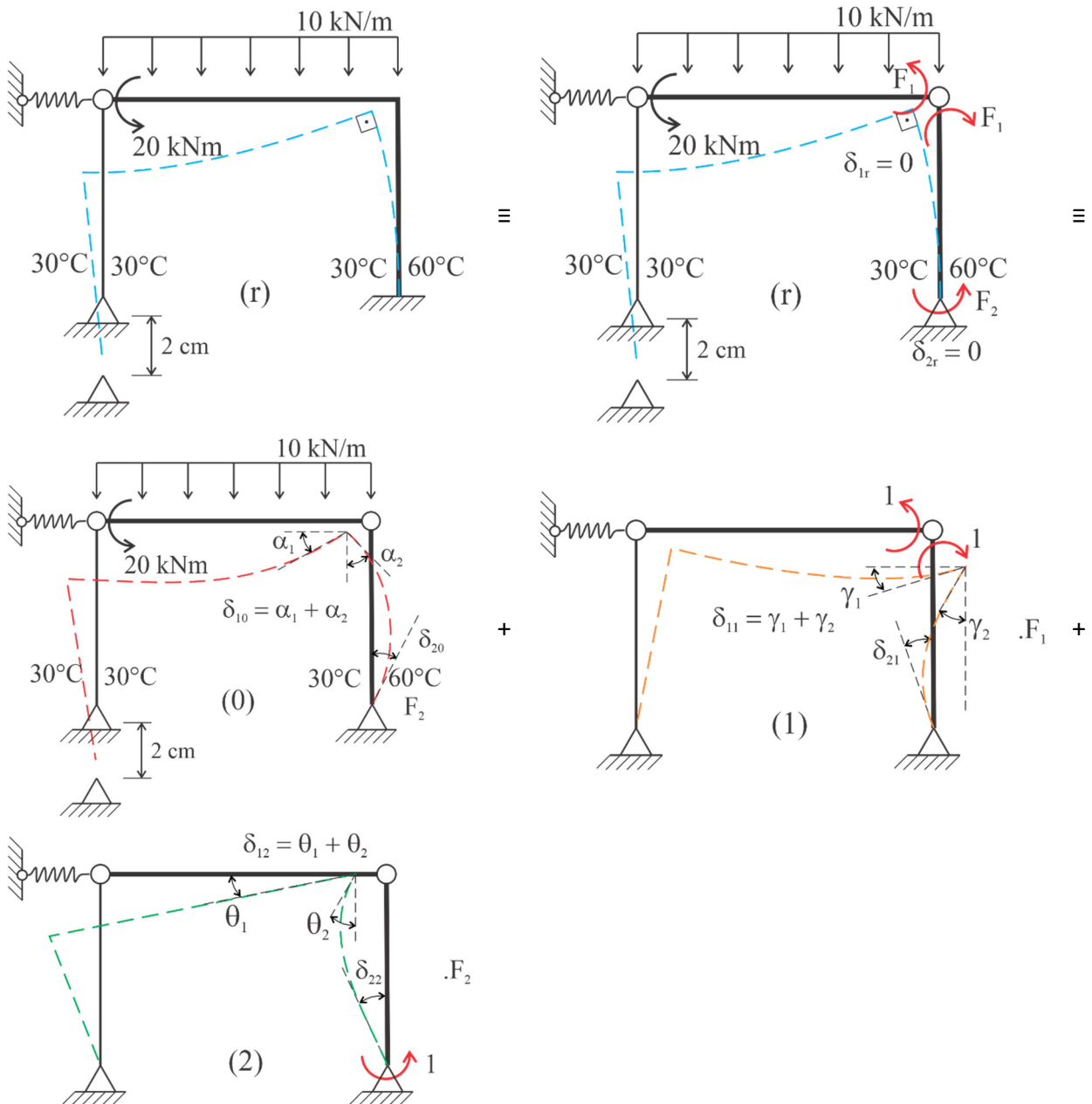


FIGURA 21. PP: SOBREPOSIÇÃO DOS PROBLEMAS.

Novamente, o problema isostático equivalente será igual ao real caso se obtenham F_1 e F_2 de tal forma que o giro relativo no ponto C e o giro absoluto no ponto D, no problema equivalente, sejam iguais aos respectivos giros naqueles pontos no problema real.

A sobreposição dos problemas gera um sistema linear de duas equações com duas incógnitas, denominadas equações de compatibilidade de deslocamentos, dado por:

$$\begin{aligned}\delta_{1r} = 0 &= \delta_{10} + \delta_{11}F_1 + \delta_{12}F_2 \\ \delta_{2r} = 0 &= \delta_{20} + \delta_{21}F_1 + \delta_{22}F_2\end{aligned}\quad (2.4)$$

Deve-se determinar os deslocamentos δ_{ij} dos diversos problemas, que são o giro relativo entre trechos BC e CD e o giro do ponto D da estrutura causados pelas ações atuantes em cada um dos problemas. Para determinar os deslocamentos, emprega-se o princípio dos trabalhos virtuais, impondo-se o estado de deslocamentos (j) ao estado de forças (i), conforme a equação (2.5).

$$\underbrace{\sum R_i \cdot \rho_j}_{\text{Recalque}} + 1 \cdot \delta_{ij} = \underbrace{\int N_i du_j}_{\text{Normal}} + \underbrace{\int V_i dv_j}_{\text{Cortante}} + \underbrace{\int M_i d\phi_j}_{\text{Momento Fletor}} + \underbrace{\sum \frac{F_i^m F_j^m}{k}}_{\text{Molas}} \quad (2.5)$$

em que a primeira parcela se refere à soma do produto entre recalques de apoios ρ_j do estado de deslocamento j com respectivas reações de apoio R_i no estado de forças i , a segunda parcela é o produto da força (ou momento) unitária com o deslocamento (ou giro) que se deseja calcular δ_{ij} , as três parcelas seguintes se referem às contribuições do esforço normal N_i , do esforço cortante V_i e do momento fletor M_i associadas com os respectivos deslocamentos relativos du_j , dv_j e $d\phi_j$, determinados de acordo com a cinemática adotada e com as causas físicas às quais se encontram submetidos os elementos da estrutura, e a última parcela se refere às forças atuantes nas molas existentes nos dois problemas.

A contribuição do deslocamento prescrito, quando não estiver associado à alguma incógnita hiperestática, aparece apenas nos termos de carga (δ_{i0}), a partir do trabalho externo promovido pelas reações do estado de forças (i) com os recalques de apoio do estado de deslocamentos (0). No caso de o recalque estar associado à incógnita hiperestática, este refletirá o valor do respectivo deslocamento no problema (0), conforme já apresentado anteriormente.

Ou seja, a contribuição do recalque é dada pela multiplicação do deslocamento prescrito existente no problema isostático equivalente (0) pela respectiva reação do problema (i) em estudo. No caso de haverem diversos recalques, estes devem ser devidamente associados unicamente às respectivas reações.

**Recalques de apoios:**

- São considerados apenas no problema (0);
- São associados apenas com as respectivas reações dos problemas (1) a (n);
- Sua contribuição é positiva caso a reação e o recalque estejam na mesma direção;
- Não afetam, de maneira alguma, os coeficientes de flexibilidade.

Vale lembrar que a maior contribuição aos deslocamentos de uma estrutura sujeita à causa física carregamento se dá, em geral, pela parcela de flexão. Pode-se, assim, desprezar as contribuições das parcelas dos demais esforços quando atua esta causa física.

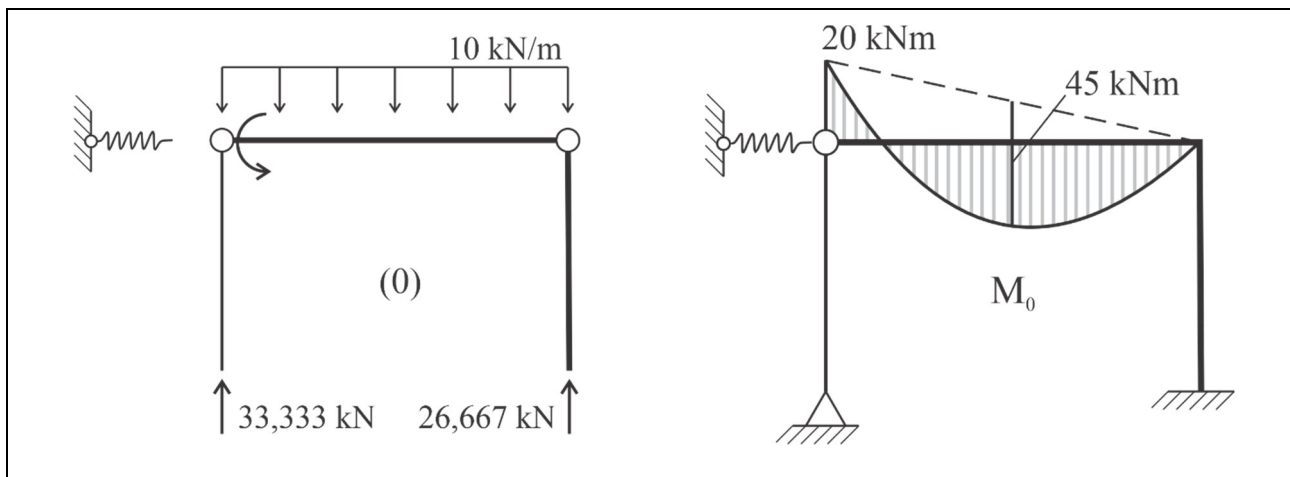
No entanto, para as demais causas físicas, todas as parcelas devem ser consideradas. Esta afirmação também é válida para casos especiais de estruturas e específicos de carregamento, ficando a cargo do profissional de engenharia avaliar e adotar eventuais simplificações.

Portanto, verifica-se a necessidade de consideração de diferentes esforços e reações em cada trecho, a depender da parcela que se está calculando e por qual causa física ela foi ocasionada. Esse assunto pode ser revisitado no Capítulo 4 do Livro 1 para melhor entendimento das diferentes situações.

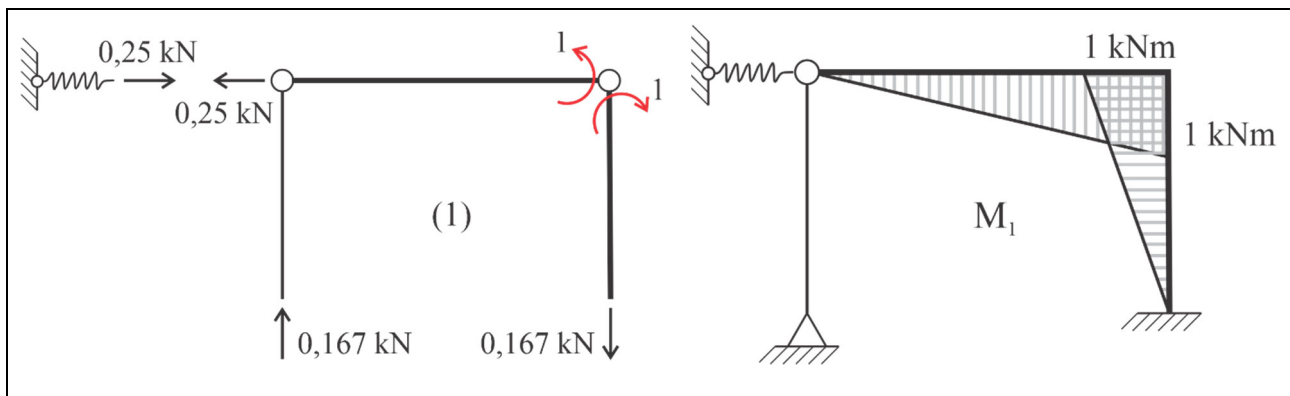
Dito isso, para o cálculo dos deslocamentos envolvidos na análise, é necessário que se determinem:

- a) para a parcela do carregamento: o diagrama de momentos fletores nos trechos fletidos BC e CD e o diagrama de esforço normal no trecho sem flexão AB, para os problemas de (0) até (2);
- b) para a parcela da temperatura: os diagramas de esforço normal e de momentos fletores nos trechos AB e CD para os problemas (1) e (2);
- c) para a parcela referente à mola: o esforço na mola nos problemas (0) a (2);
- d) finalmente, para a parcela do recalque: a reação vertical no apoio em A nos problemas (1) e (2).

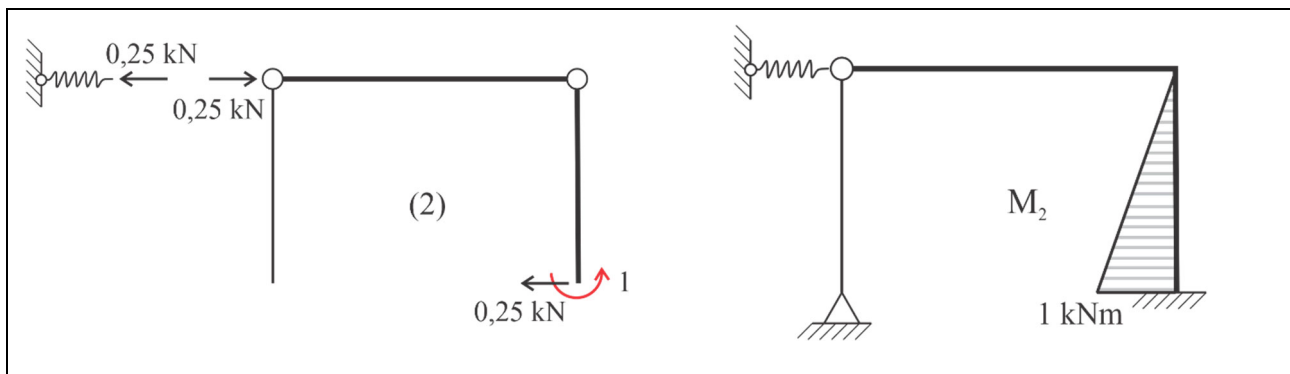
Os diagramas de corpo livre (D.C.L.) e de momentos fletores para cada um dos problemas, acrescidos dos demais esforços necessários, são apresentados no Quadro 27, Quadro 28 e Quadro 29. Os esforços normais, nas barras em que são necessários, podem ser obtidos diretamente das reações de apoio indicadas.



QUADRO 27. PP: DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES PARA O PROBLEMA (0).



QUADRO 28. PP: DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES PARA O PROBLEMA (1).



QUADRO 29. PP: DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES PARA O PROBLEMA (2).

Assim, para cada problema, são calculados os termos de carga e coeficientes de flexibilidade (deslocamentos δ_{ij}) por meio da equação (2.5), considerando-se a cinemática adotada e com as causas físicas às quais encontram-se submetidos os elementos em cada problema. Cuidado deve ser tomado em relação às unidades, utilizando-se unidades coerentes para cada uma das grandezas, derivadas sempre das mesmas unidades de comprimento e força adotadas para o problema.

O primeiro termo de carga é dado por:

$$\delta_{10} = \int N_1 du_0 + \int V_1 dv_0 + \int M_1 d\phi_0 + \frac{F_1^m F_0^m}{k} - R_1 \cdot \rho_0$$

$$= \alpha \Delta T_{cg} \int N_1 ds + \alpha \frac{\Delta T_i - \Delta T_s}{h} \int M_1 ds + \int \frac{N_1 N_0}{EA} dx + \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \frac{F_1^m F_0^m}{k} - R_1 \cdot \rho_0$$

Para facilitar o entendimento, as parcelas foram desmembradas a seguir:

$$\alpha \Delta T_{cg} \int N_1 ds = \alpha \underbrace{\frac{30 + 30}{2} (-0,167) \cdot 4}_{\text{Barra AB}} + \alpha \underbrace{\frac{30 + 60}{2} 0,167 \cdot 4}_{\text{Barra CD}}$$

$$\alpha \frac{\Delta T_i - \Delta T_s}{h} \int M_1 ds = \alpha \underbrace{\frac{30 - 60}{0,4} \cdot \frac{1,4}{2}}_{\text{Barra CD}}$$

$$\int \frac{N_1 N_0}{EA} dx = \underbrace{\frac{33,333 \cdot 0,167}{EA} \cdot 4}_{\text{Barra AB}} \qquad \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx = \underbrace{\frac{-20,1}{2EI} \cdot \frac{6}{6}}_{\text{Barra CD}} + \underbrace{\frac{45,1}{2EI} \cdot \frac{6}{3}}_{\text{Barra CD}}$$

$$\frac{F_1^m F_0^m}{k} = \frac{0,0,25}{\underbrace{k}_{\text{mola em B}}} \qquad R_1 \cdot \rho_0 = \underbrace{0,167 \cdot 0,02}_{\text{recalque em A}}$$

Somando-se as contribuições, com os respectivos sinais, o termo de carga δ_{10} é dado por:

$$\delta_{10} = 0,0039685 \text{ rad}$$

Destaca-se a unidade em radianos, por ser um deslocamento de giro. O segundo termo de carga é obtido de forma análoga. No entanto, apenas a parcela referente à temperatura na barra CD não é nula:

$$\delta_{20} = \alpha \frac{30 - 60}{0,4} \cdot \frac{1,4}{2} = -0,0015 \text{ rad}$$

Os próximos termos a serem determinados são os coeficientes de flexibilidade, em que as unidades são dadas pelo deslocamento em relação ao esforço unitário imposto. O primeiro termo δ_{11} é dado por:

$$\delta_{11} = \int \frac{N_1 N_0}{EA} dx + \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \frac{F_1 F_0}{k}$$

$$\delta_{11} = \underbrace{\frac{0,167^2}{EA} \cdot 4}_{\text{barra AB}} + \underbrace{\frac{1^2}{2EI} \cdot \frac{6}{3}}_{\text{BC}} + \underbrace{\frac{1^2}{EI} \cdot \frac{4}{3}}_{\text{CD}} + \underbrace{\frac{0,25^2}{k}}_{\text{mola}} = 0,00013056 \frac{\text{rad}}{\text{kN.m}}$$

δ_{12} e δ_{21} são obtidos da seguinte forma:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \underbrace{\frac{1,1}{EI} \cdot \frac{4}{6}}_{\text{barra CD}} + \underbrace{\frac{-0,25 \cdot 0,25}{k}}_{\text{mola}} = 0,000020833 \frac{\text{rad}}{\text{kN.m}}$$

Por fim, δ_{22} :

$$\delta_{22} = \underbrace{\frac{1^2}{EI} \cdot \frac{4}{3}}_{\text{barra CD}} + \underbrace{\frac{0,25 \cdot 0,25}{k}}_{\text{mola}} = 0,000079167 \frac{\text{rad}}{\text{kN.m}}$$

Substituindo os termos de carga e coeficientes de flexibilidade na equação (2.4), tem-se que:

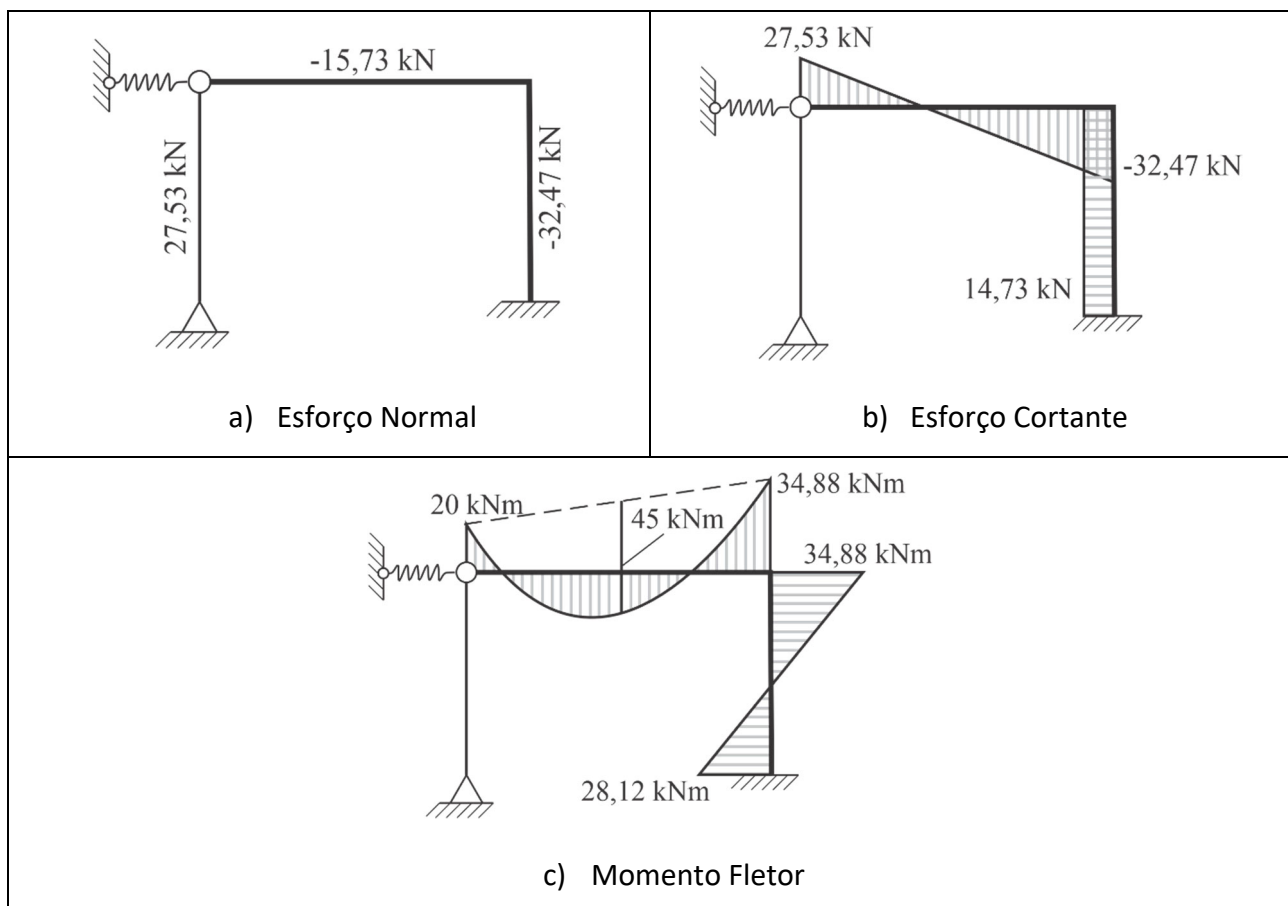
$$\begin{aligned} 0,0039685 + 0,00013056F_1 + 0,000020833F_2 &= 0 \\ -0,0015 + 0,000020833F_1 + 0,000079167F_2 &= 0 \end{aligned}$$

Se for realizada a compatibilização de unidades, o leitor irá perceber que a equação é uma simples relação de deslocamentos, de mesma grandeza. Resolvendo o conjunto de equações de compatibilidade de deslocamentos, obtém-se os valores das incógnitas hiperestáticas:

$$\begin{aligned} F_1 &= -34,8842 \text{ kN.m} \\ F_2 &= 28,1274 \text{ kN.m} \end{aligned}$$

De posse dos valores das incógnitas hiperestáticas F_1 e F_2 , as grandezas de interesse do problema (r) podem ser obtidas aplicando-se a equação (2.1) ou diretamente do problema isostático equivalente, já com os valores conhecidos das incógnitas hiperestáticas.

Em outras palavras, os diagramas de esforços solicitantes podem ser obtidos de duas formas: a) por superposição de efeitos, seguindo a ideia da equação (2.4); ou b) pelo equilíbrio do problema isostático equivalente, agora que são conhecidos os valores das incógnitas hiperestáticas. Qualquer dos caminhos adotados vai levar aos diagramas de esforços solicitantes para a estrutura hiperestática real apresentados no Quadro 30.



QUADRO 30. PP: DIAGRAMA DE ESFORÇOS INTERNOS.

2.3 Exemplo – Pórtico Misto (PM)

Neste terceiro exemplo, considere o pórtico plano ilustrado na Figura 22, constituída por barra submetida exclusivamente ao esforço normal (barra BE), assim como barras sujeitas ao momento fletor. Dentre as causas físicas, observam-se a ação de carregamento distribuído ortogonalmente nos trechos AB e BD, e enviesado no trecho BC, além de um recalque de apoio vertical em A. Adota-se para o problema as propriedades físicas: $EI = 20.000 \text{ kN.m}^2$, $EA = 50.000 \text{ kN}$, $k = 5.000 \text{ kN/m}$.

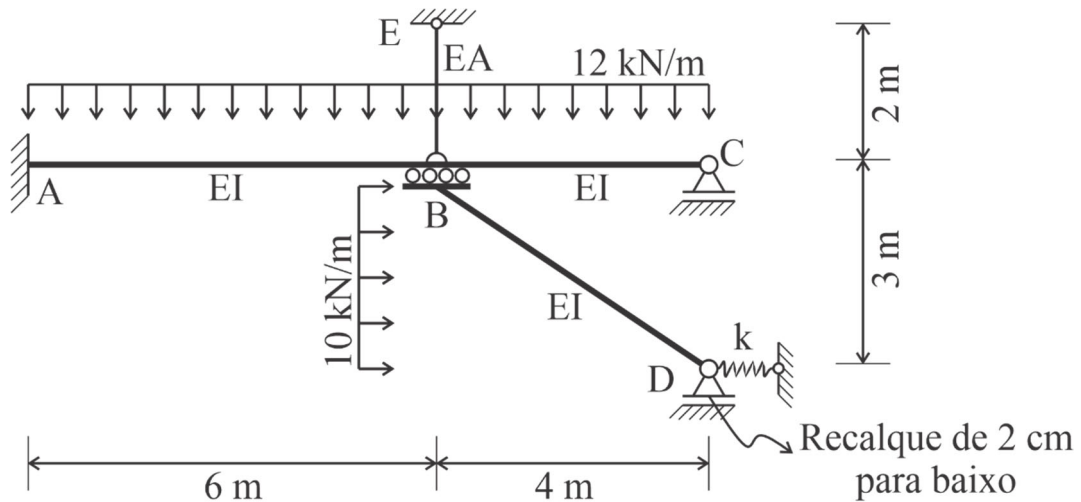


FIGURA 22. PROCESSO DOS ESFORÇOS: PÓRTICO MISTO.

Segundo o Processo dos Esforços, o primeiro passo é a obtenção de um problema isostático equivalente, o Sistema Principal. Como o grau de hiperstaticidade da estrutura deste exemplo é três, serão rompidos três vínculos da estrutura real.

Dentre as inúmeras alternativas para escolha das incógnitas hiperestáticas, adotam-se a reação de momento no ponto A, o esforço interno de esforço normal na barra EB, e o esforço interno de momento fletor no ponto B, junto à barra BD, sendo denominadas de F_1 a F_3 , respectivamente, gerando o problema isostático equivalente da Figura 23.

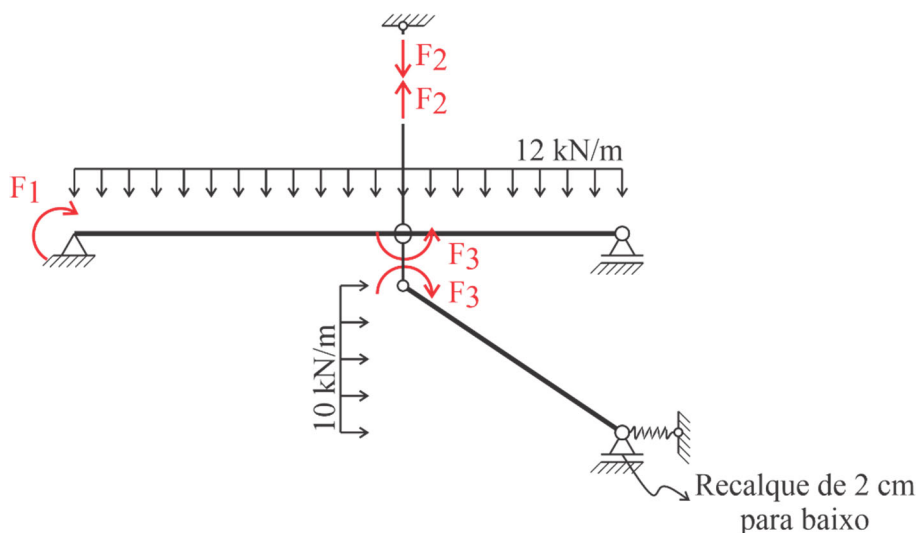


FIGURA 23. PM: PROBLEMA ISOSTÁTICO EQUIVALENTE.

A resposta do problema (r) é dividida em 3 + 1 problemas, levando à situação esquematizada na Figura 24.

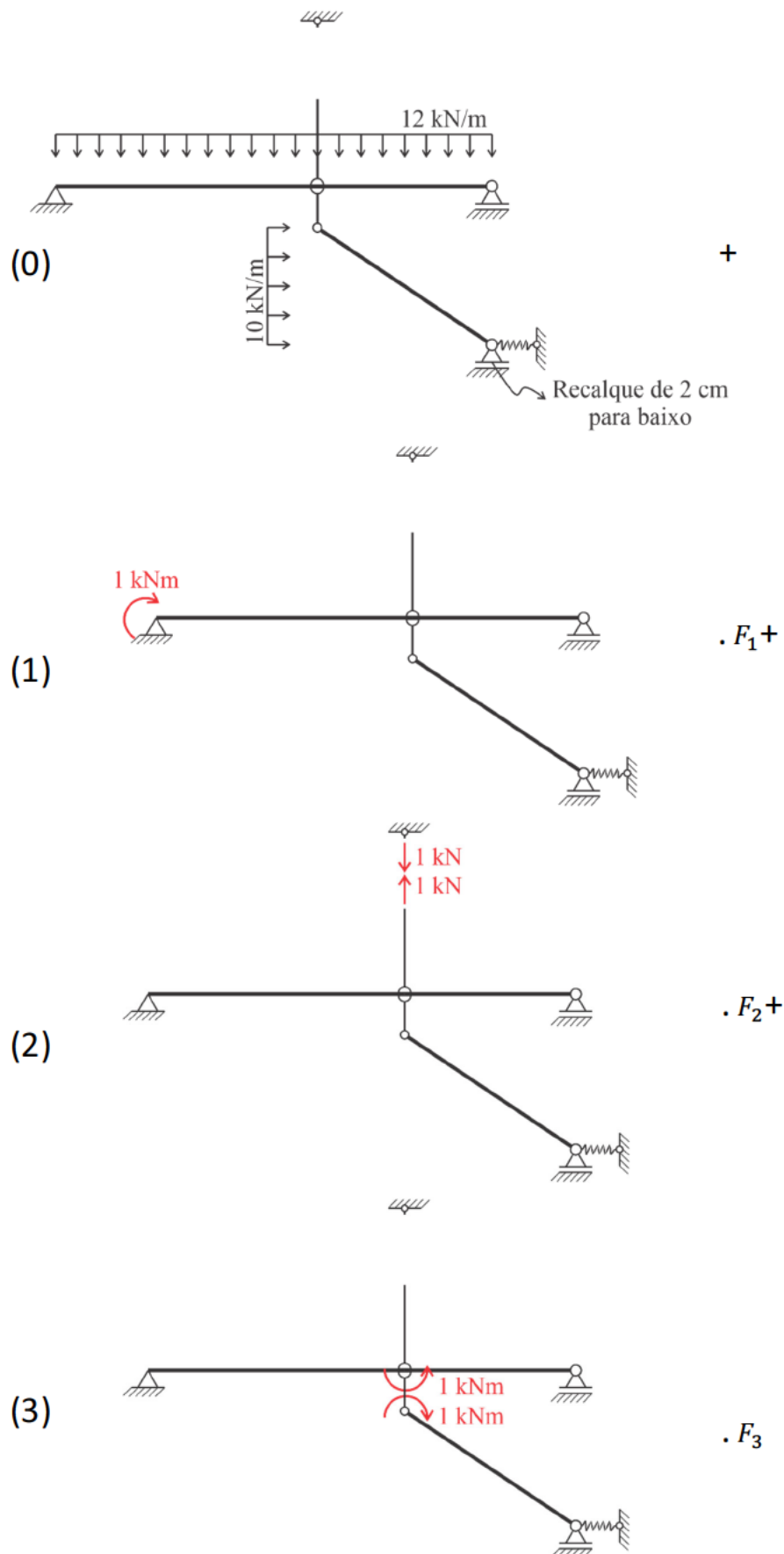


FIGURA 24. PM: SOBREPOSIÇÃO DOS PROBLEMAS.

O problema isostático equivalente será igual ao real caso se obtenham F_1 , F_2 e F_3 de tal forma que o giro absoluto no ponto A, o deslocamento relativo na barra EB, e o giro relativo no ponto B, do problema equivalente, sejam iguais aos respectivos valores naqueles pontos no problema real.

A sobreposição dos problemas gera um sistema linear de três equações com três incógnitas, denominadas equações de compatibilidade de deslocamentos, dado por:

$$\begin{aligned}\delta_{1r} = 0 &= \delta_{10} + \delta_{11}F_1 + \delta_{12}F_2 + \delta_{13}F_3 \\ \delta_{2r} = 0 &= \delta_{20} + \delta_{21}F_1 + \delta_{22}F_2 + \delta_{23}F_3 \\ \delta_{3r} = 0 &= \delta_{30} + \delta_{31}F_1 + \delta_{32}F_2 + \delta_{33}F_3\end{aligned}\quad (2.6)$$

Para determinar os deslocamentos δ_{ij} , emprega-se o princípio dos trabalhos virtuais, impondo-se o estado de deslocamentos (j) ao estado de forças (i), conforme a equação (2.7).

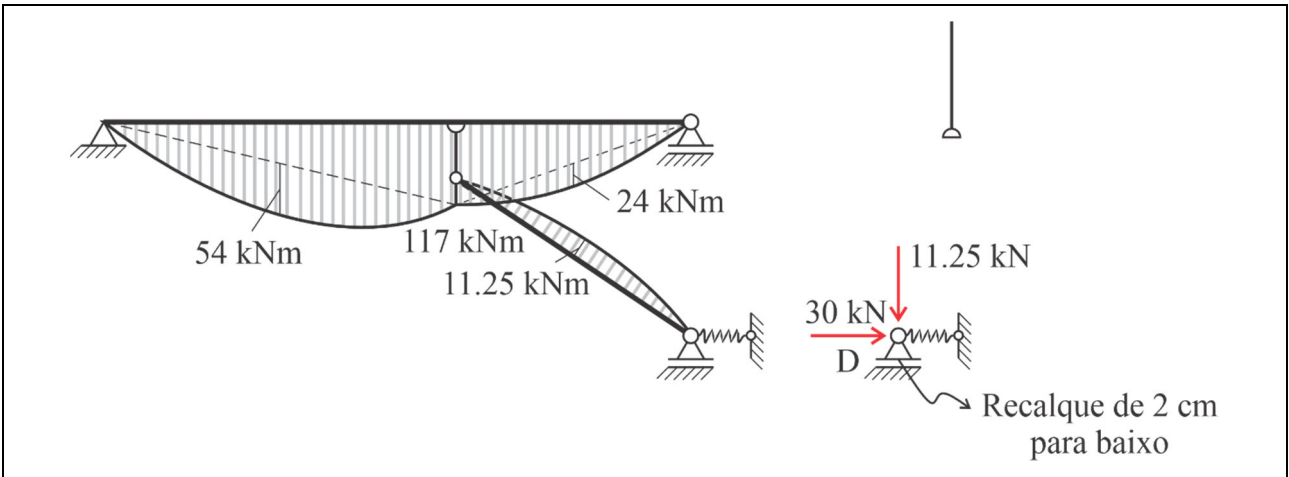
$$\underbrace{R_i \cdot \rho_j}_{\text{Recalque}} + 1 \cdot \delta_{ij} = \underbrace{\int N_i du_j}_{\text{Normal}} + \underbrace{\int M_i d\phi_j}_{\text{Momento}} + \underbrace{\frac{F_i^m F_j^m}{k}}_{\text{Molas}} \quad (2.7)$$

em que a primeira parcela se refere ao produto entre o recalque de apoio ρ_j do estado de deslocamento j com respectivas reações de apoio R_i no estado de forças i , a segunda parcela é o produto da força (ou momento) unitária(o) com o deslocamento (ou giro) que se deseja calcular δ_{ij} , as duas parcelas seguintes se referem às contribuições do esforço normal N_i e do momento fletor M_i associadas com os respectivos deslocamentos relativos du_j e $d\phi_j$, determinados de acordo com a cinemática adotada e com as causas físicas às quais se encontram submetidos os elementos da estrutura, e a última parcela se refere às forças atuantes nas molas existentes. A parcela referente ao cortante será desprezada, para fins de cálculo simplificado.

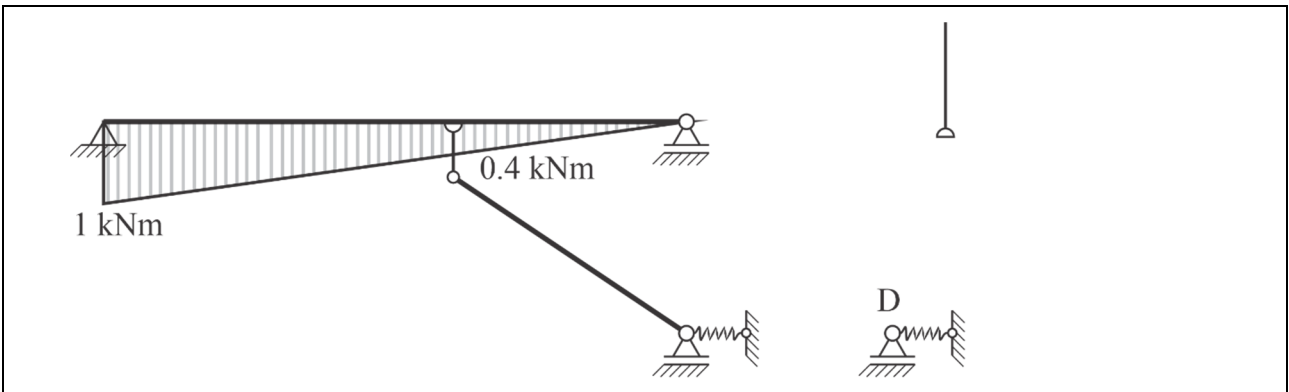
Dito isso, para o cálculo dos deslocamentos envolvidos na análise, é necessário que se determinem:

- para a parcela do carregamento: o diagrama de momentos fletores nos trechos fletidos AB, BC e BD, e o diagrama de esforço normal no trecho BE, em todos os problemas;
- para a parcela referente à mola: o esforço na mola nos problemas (0) a (3);
- para a parcela do recalque: a reação vertical no apoio em D nos problemas (1) a (3).

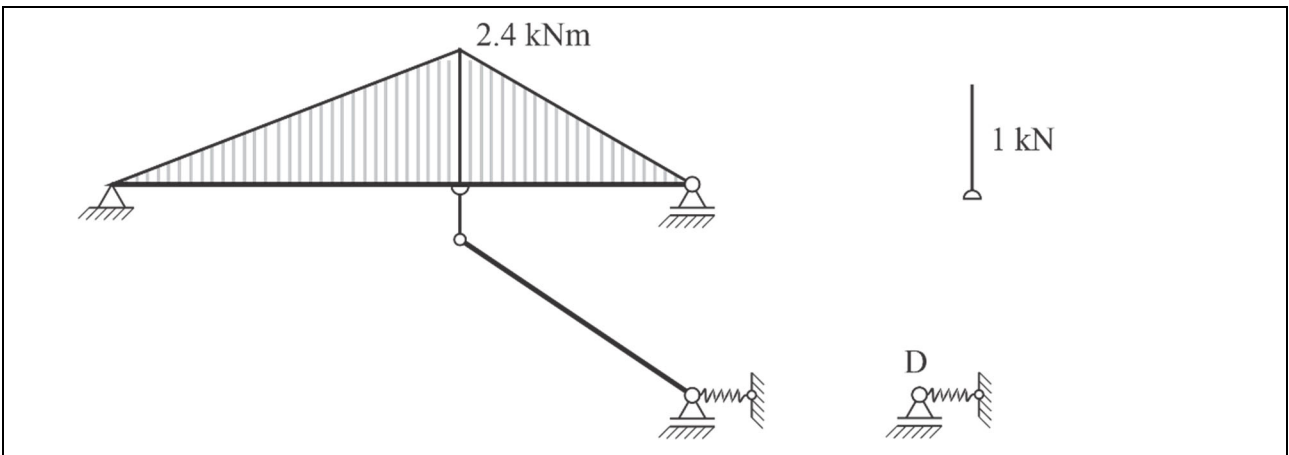
Os diagramas de momentos fletores para cada um dos problemas são apresentados nos quadros abaixo. Além dos diagramas de momentos fletores, são apresentados os esforços normais na barra BE, a reação vertical no apoio D, e o esforço na mola, quando existentes.



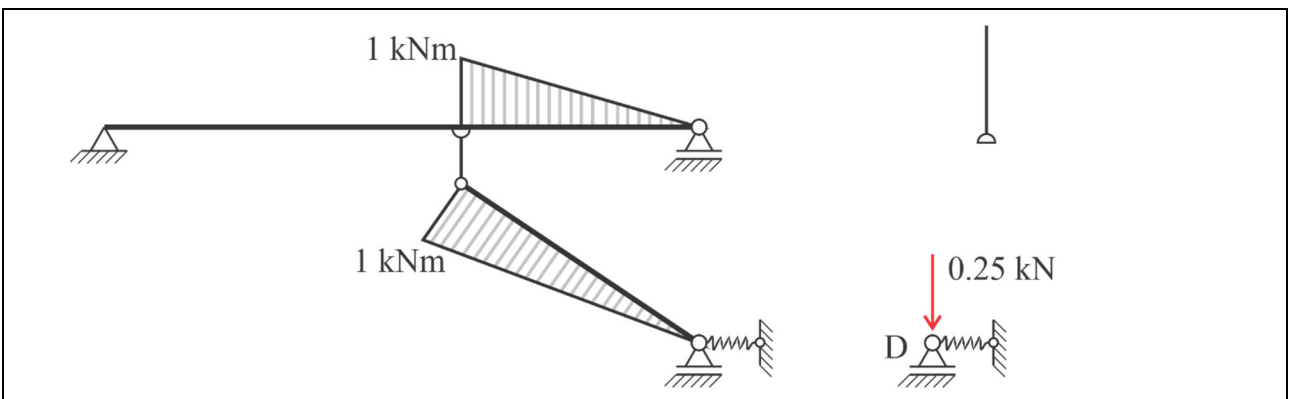
QUADRO 31. PM: DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES PARA O PROBLEMA (0).



QUADRO 32. PM: DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES PARA O PROBLEMA (1).



QUADRO 33. PM: DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES PARA O PROBLEMA (2).



QUADRO 34. PM: DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES PARA O PROBLEMA (3).

Assim, para cada problema, são calculados os termos de carga e coeficientes de flexibilidade (deslocamentos δ_{ij}) por meio da equação (2.7), considerando-se a cinemática adotada e com as causas físicas às quais encontram-se submetidos os elementos em cada problema. Cuidado deve ser tomado em relação às unidades, que devem ser coerentes para cada uma das grandezas, derivadas sempre das mesmas unidades de comprimento e força adotadas para o problema.

O primeiro termo de carga é dado por:

$$\begin{aligned}\delta_{10} &= \int N_1 du_0 + \int M_1 d\phi_0 + \frac{F_1^m F_0^m}{k} - R_1 \cdot \rho_0 \\ &= \int \frac{N_1 N_0}{EA} dx + \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \frac{F_1^m F_0^m}{k} - R_1 \cdot \rho_0\end{aligned}$$

Para facilitar o entendimento, as parcelas foram desmembradas a seguir:

$$\begin{aligned}\int \frac{N_1 N_0}{EA} dx &= 0 \\ \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx &= \frac{1}{EI} \left[\underbrace{(1 + 2,0,4) \cdot 117 \cdot \frac{6}{6}}_{\text{Barra AB}} + \underbrace{(1 + 0,4) \cdot 54 \cdot \frac{6}{3}}_{\text{Barra AB}} + \underbrace{0,4 \cdot 117 \cdot \frac{4}{3}}_{\text{Barra BC}} + \underbrace{0,4 \cdot 24 \cdot \frac{4}{3}}_{\text{Barra BC}} \right] \\ &= \frac{437}{EI} \\ \frac{F_1^m F_0^m}{k} &= \frac{0,30}{\underbrace{k}_{\text{mola em D}}} = 0 \\ R_1 \cdot \rho_0 &= \underbrace{0,0,02}_{\text{recalque em D}} = 0\end{aligned}$$

Somando-se as contribuições, com os respectivos sinais, o termo de carga δ_{10} é dado por:

$$EI\delta_{10} = 437$$

Para facilitar o desenvolvimento, tanto os termos de carga quanto os coeficientes de flexibilidade serão escritos em função de EI. O segundo termo de carga é obtido de forma análoga. No problema (2), não há reação no apoio em D, tampouco ação na mola, portanto estes termos não contribuem no cálculo. O mesmo vale para a normal no problema (0).

$$\delta_{20} = \int \frac{M_2 M_0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\underbrace{-2,4 \cdot 117 \cdot \frac{10}{3}}_{\text{Barra ABC}} - \underbrace{2,4 \cdot 54 \cdot \frac{6}{3}}_{\text{Barra AB}} - \underbrace{2,4 \cdot 24 \cdot \frac{4}{3}}_{\text{Barra BC}} \right] = \frac{-1272}{EI}$$

O terceiro termo de carga é dado pela relação entre o problema (0) e (3). Neste caso, existe reação vertical em D no problema (3), portanto há contribuição associada ao recalque:

$$-0,25 \cdot 0,02 + \delta_{30} = \frac{1}{EI} \left[\underbrace{-1 \cdot 117 \cdot \frac{4}{3}}_{\text{Barra BC}} - \underbrace{1 \cdot 24 \cdot \frac{4}{3}}_{\text{Barra AB}} - \underbrace{1 \cdot 11,25 \cdot \frac{5}{3}}_{\text{Barra BD}} \right] \therefore \delta_{30} = \frac{-106,75}{EI}$$

Os próximos termos a serem determinados são os coeficientes de flexibilidade, conforme segue:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\underbrace{1^2 \cdot \frac{10}{3}}_{\text{Barra ABC}} \right] \therefore EI \delta_{11} = 3,333$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \left[\underbrace{-2,4(1 + 2 \cdot 0,4) \cdot \frac{6}{6}}_{\text{Barra AB}} - \underbrace{2,4 \cdot 0,4 \cdot \frac{4}{3}}_{\text{barra BC}} \right] \therefore EI \delta_{12} = -5,6$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{1}{EI} \left[\underbrace{-1 \cdot 0,4 \cdot \frac{4}{3}}_{\text{barra BC}} \right] \therefore EI \delta_{13} = -0,533$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\underbrace{(-2,4)^2 \cdot \frac{10}{3}}_{\text{Barra ABC}} \right] + \frac{1}{EA} \left[\underbrace{(1)^2 \cdot 2}_{\text{Barra BD}} \right] \therefore EI \delta_{22} = 20$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{EI} \left[\underbrace{(-2,4)(-1) \cdot \frac{4}{3}}_{\text{Barra BC}} \right] \therefore EI \delta_{23} = 3,2$$

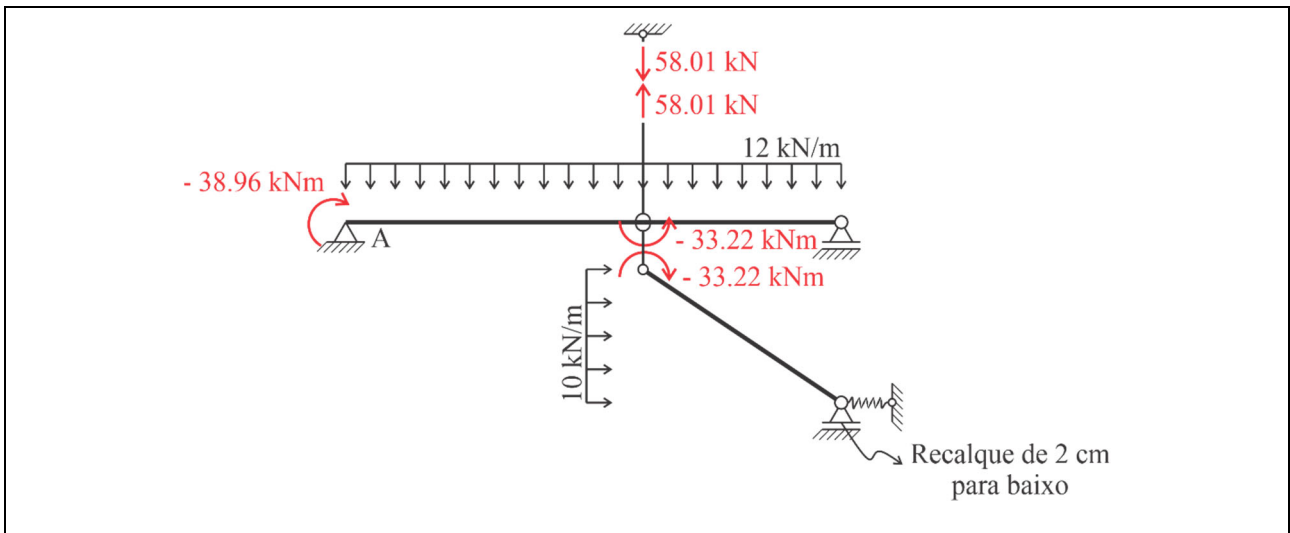
$$\delta_{33} = \frac{1}{EI} \left[\underbrace{1^2 \cdot \frac{4}{3}}_{\text{Barra BC}} + \underbrace{1^2 \cdot \frac{5}{3}}_{\text{Barra BD}} \right] \therefore EI \delta_{33} = 3$$

É interessante notar que em nenhum coeficiente de flexibilidade a mola foi solicitada. Em outras palavras, a hiperestaticidade da estrutura não interfere no deslocamento da mola. A ação na mola decore exclusivamente pela ação horizontal distribuída na barra BD, e só aparece no problema (0). Isto mostra que, por vezes, a redundância estrutural promove redistribuição de esforços, mas não necessariamente a todos os vínculos da estrutura.

Como todos os termos de carga e coeficientes de flexibilidade foram escritos em função de EI, este pode ser simplificado. Substituindo os termos de carga e coeficientes de flexibilidade na equação (2.6), tem-se que:

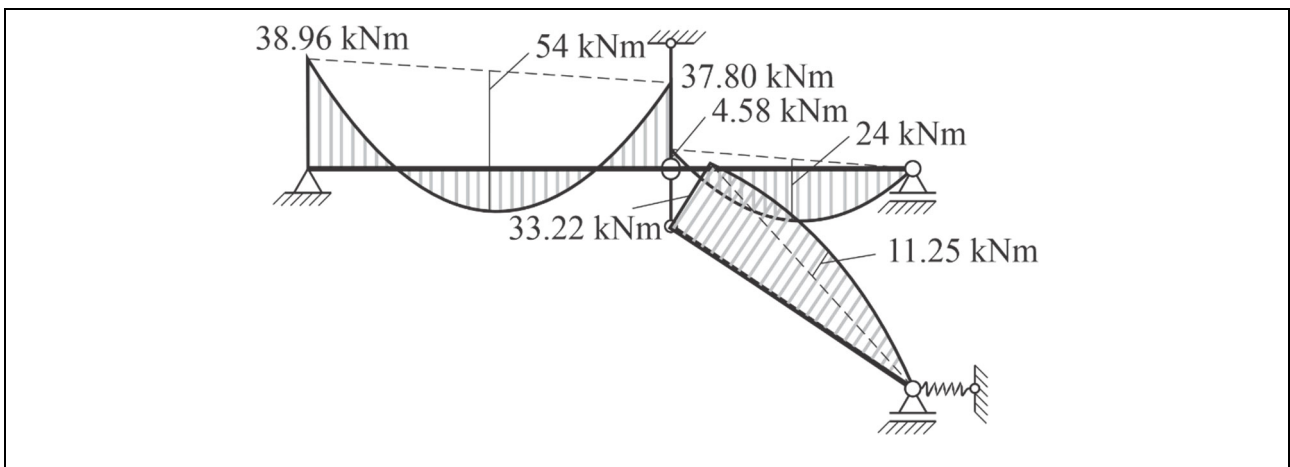
$$\begin{cases} \delta_{1r} = 0 = 437 + 3,333F_1 - 5,6F_2 - 0,533F_3 \\ \delta_{2r} = 0 = -1272 - 5,6F_1 + 20F_2 + 3,2F_3 \\ \delta_{3r} = 0 = -106,75 - 0,533F_1 + 3,2F_2 + 3F_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_1 = -38,96 \text{ kN.m} \\ F_2 = 58,01 \text{ kN} \\ F_3 = -33,22 \text{ kN.m} \end{cases}$$

De posse dos valores das incógnitas hiperestáticas F_1 a F_3 , as grandezas de interesse do problema r podem ser obtidas aplicando-se a equação (2.1) ou diretamente do problema isostático equivalente, já com os valores conhecidos das incógnitas hiperestáticas. A estrutura isostática equivalente com os valores obtidos para as incógnitas hiperestáticas é mostrada no Quadro 35.



QUADRO 35. PM: PROBLEMA ISOSTÁTICO EQUIVALENTE JÁ EQUILIBRADO.

Em outras palavras, os diagramas de esforços solicitantes podem ser obtidos de duas formas: a) por superposição de efeitos, seguindo a ideia da equação (2.6); ou b) pelo equilíbrio do problema isostático equivalente, agora que conhecidos valores das incógnitas hiperestáticas. Qualquer dos caminhos adotados vai levar aos diagramas esforços solicitantes para a estrutura hiperestática real apresentados no Quadro 36.



QUADRO 36. PM: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR.

2.4 Exemplo – Grelha com Torção Essencial ao Equilíbrio (GCT)

Recobrando do livro 1, uma grelha é definida como uma estrutura plana sujeita a ações normais ao plano em que está contida. O elemento de grelha é sujeito a solicitações transversais à sua seção, em um dos planos ortogonais, como mostrado na Figura 25. Seus esforços internos (solicitantes) são o momento fletor, o esforço cortante e o momento torsor, em torno do eixo do elemento. Tais esforços promovem deformações normais devido a flexão, e deformações de distorção transversais decorrentes do esforço cortante e do momento torsor.

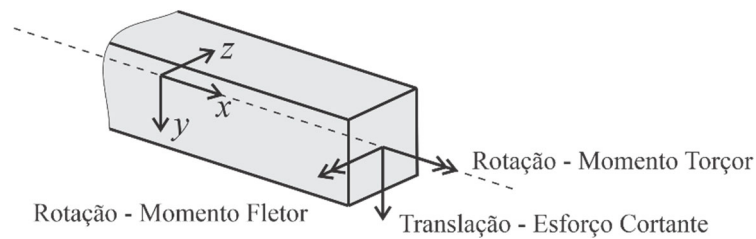


FIGURA 25. ESFORÇOS SOLICITANTES EM UMA GRELHA.

A depender do arranjo estrutural em grelha, a torção é essencial ao seu equilíbrio. Para estabelecer o grau de hiperestaticidade da estrutura, e definir o número de vínculos a serem suprimidos, deve-se realizar a determinação geométrica. A Figura 26 apresenta a representação em barras vinculadas dos apoios e ligações usualmente observados em grelhas quando considerada a torção essencial ao equilíbrio.

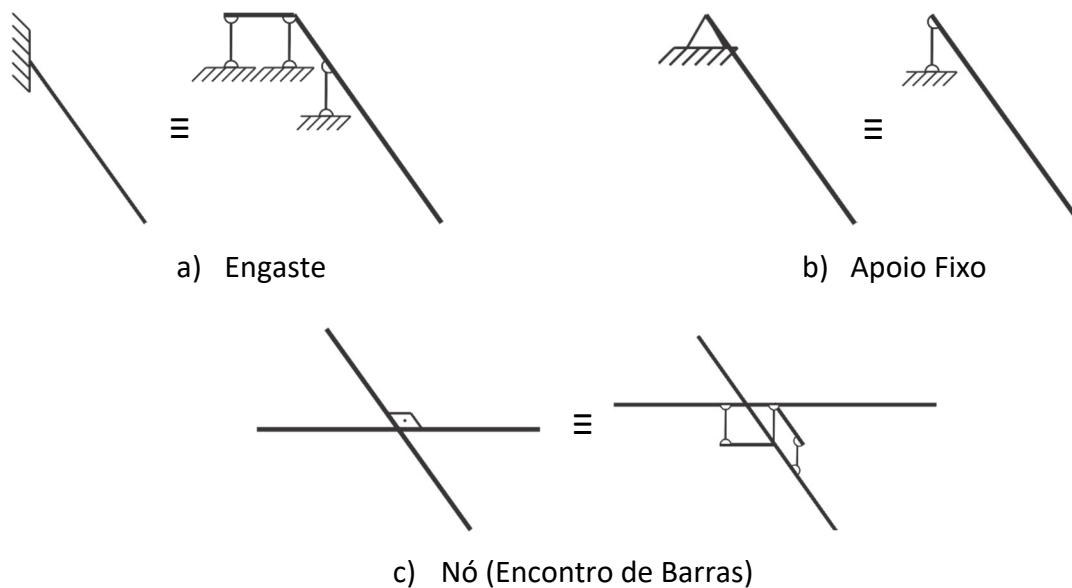


FIGURA 26. DETERMINAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA GRELHA CONSIDERANDO TORÇÃO.

Em uma grelha com torção, um engaste impede o deslocamento vertical (cortante), o giro ao longo do eixo (flexão) e em torno do eixo (torção). Já um apoio fixo impede apenas o deslocamento vertical. No encontro entre barras, ou seja, um nó, há a transferência de deslocamento vertical e de giro – no caso em que as barras forem ortogonais, o giro devido à flexão é transferido como giro à torção para a outra barra, e o giro à torção é transferido como giro à flexão.

No caso da grelha deste exemplo, ilustrada na Figura 27, a rigidez à torção é necessária ao equilíbrio. De forma simplificada, por simples análise da estrutura, percebe-se que o ponto D é livre ao deslocamento vertical se não for restringido o giro por flexão em C. Este giro só é contido pela torção da barra BC.

Voltando à determinação geométrica, para estabelecer o grau de hiperestaticidade, o número de barras necessárias ao equilíbrio é dado por $b_n = 3c = 3 \cdot 3 = 9$, em que c é o número de chapas. Neste caso, cada trecho foi considerado como uma chapa.

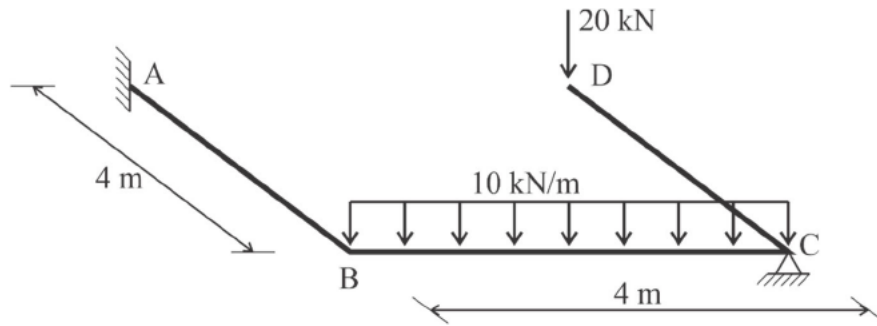


FIGURA 27. PROCESSO DOS ESFORÇOS: GRELHA COM TORÇÃO.

O número de barras deste exemplo é contabilizado pelas três barras vinculares do engaste em A, uma barra vincular no apoio fixo em C, e três barras vinculares em cada nó, resultando em $b = 10$. Como há uma barra vincular em excesso, o grau de hiperestaticidade da estrutura é 1.

Novamente, o primeiro passo é a obtenção de um problema isostático equivalente. Será rompido um vínculo da estrutura – a reação de apoio em C, que será denominada F_1 .

O problema estático equivalente é apresentado na Figura 28. Como só há um parâmetro incógnito, a resposta do problema real é dividida em 1 + 1 problemas, levando à situação esquematizada na Figura 29.

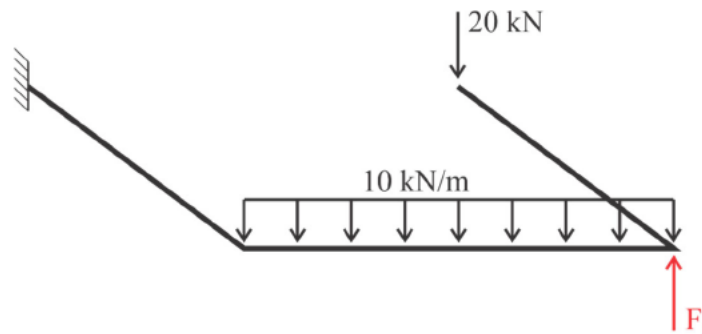


FIGURA 28. GCT: PROBLEMA ISOSTÁTICO EQUIVALENTE.

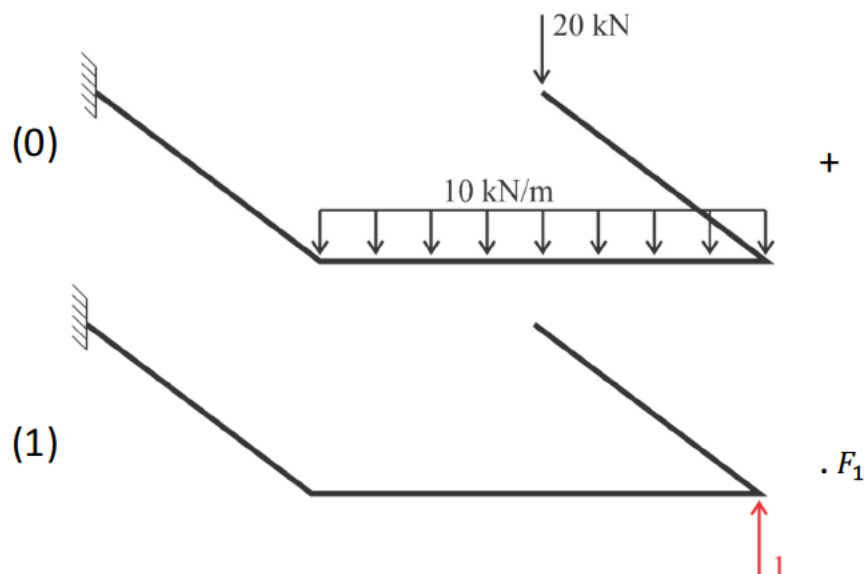


FIGURA 29. GCT: SOBREPOSIÇÃO DOS PROBLEMAS.

Da mesma forma que em pórticos, o problema isostático equivalente será igual ao real caso se obtenha F_1 de tal forma que o deslocamento vertical no ponto C seja igual ao valor naquele ponto no problema real. Como só há um parâmetro incógnito, requer-se apenas uma equação de compatibilidade de deslocamento, dada por:

$$\delta_{1r} = 0 = \delta_{10} + \delta_{11}F_1 \quad (2.8)$$

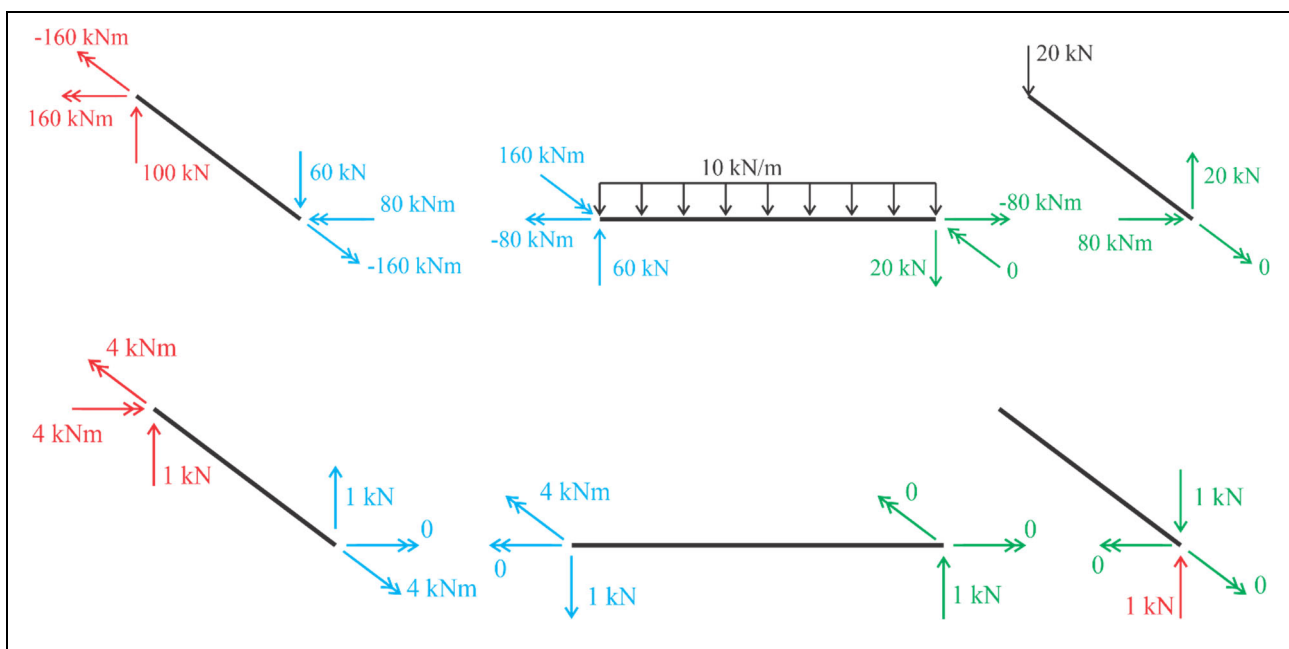
Para determinar os deslocamentos δ_{10} e δ_{11} , emprega-se o princípio dos trabalhos virtuais, impondo-se o estado de deslocamentos (j) ao estado de forças (i), conforme a equação (2.9).

$$\delta_{ij} = \underbrace{\int V_i dv_j}_{\text{Cortante}} + \underbrace{\int M_i d\phi_j}_{\text{Flexão}} + \underbrace{\int T_i d\varphi_j}_{\text{Torção}} \quad (2.9)$$

em que a primeira parcela se refere ao deslocamento que se deseja calcular δ_{ij} , e as três parcelas seguintes se referem às contribuições advindas do esforço cortante V_i , do momento fletor M_i , e do momento torsor T_i , associadas com os respectivos deslocamentos relativos dv_j , $d\phi_j$ e $d\varphi_j$, estabelecidos conforme a cinemática adotada e as causas físicas à que a estrutura está sujeita.

Dito isso, para o cálculo dos deslocamentos envolvidos na análise, é necessário que se determinem os diagramas de momentos fletores e momentos torsos em todos os trechos, além dos diagramas de esforço cortante quando pertinente.

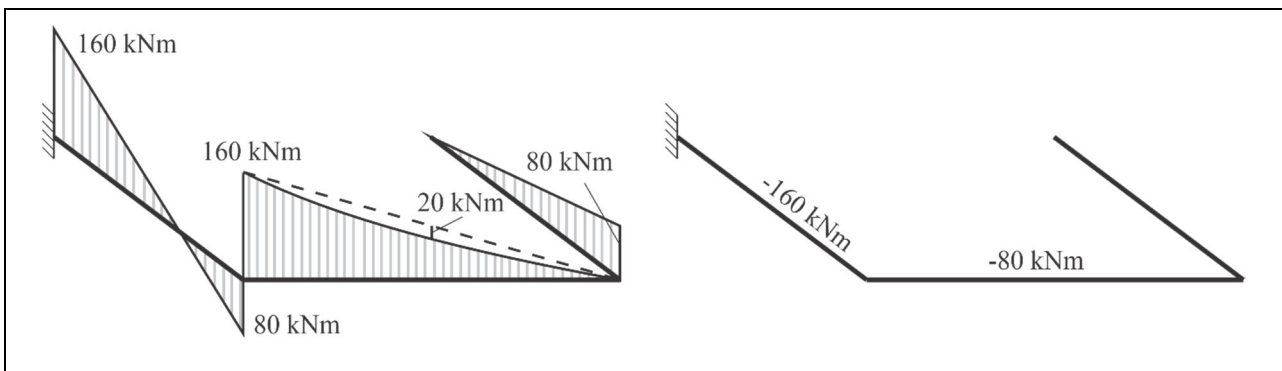
Para facilitar a leitura, a estrutura foi desmembrada em seus respectivos segmentos, e os esforços indicados nas extremidades, em devido equilíbrio, no Quadro 37. Na primeira parte do quadro, os esforços relativos ao problema (0), e na segunda parte, relativos ao problema (1).



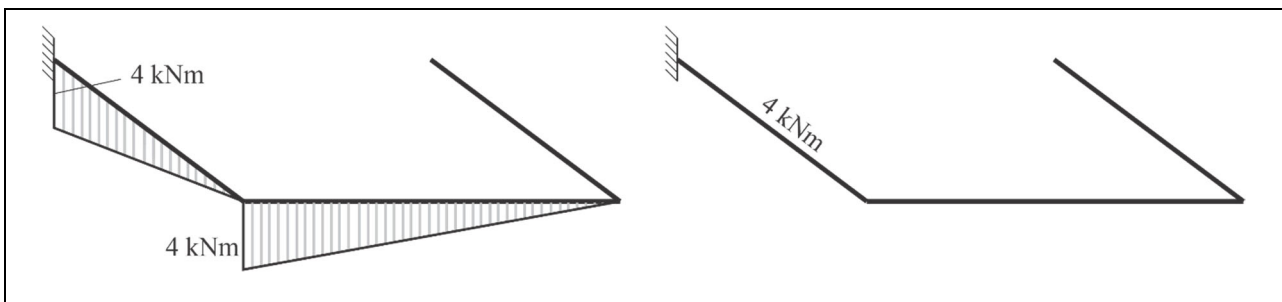
QUADRO 37. GCT: ESFORÇOS INTERNOS NOS ELEMENTOS DE GRELHA.

A cor vermelha foi empregada para destacar as reações e a ação unitária imposta. Em azul, foi destacado o equilíbrio dos esforços no nó B, e em verde no nó C. É interessante notar como um esforço de momento fletor se torna tissor em barras ortogonais, e que cada nó está em perfeito equilíbrio.

A partir da visualização do Quadro 37, o traçado dos diagramas de esforços solicitantes é facilitado, sendo apresentados nos quadros subsequentes. Destaca-se que, estando as barras de grelha solicitadas tanto por momentos fletores quanto por momentos torsores, a contribuição associada ao esforço cortante pode ser desprezada no cálculo dos deslocamentos de interesse.



QUADRO 38. GCT: DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES E TORSORES PARA O PROBLEMA (0).



QUADRO 39. GCT: DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES E TORSORES PARA O PROBLEMA (1).

O termo de carga δ_{10} e o coeficiente de flexibilidade δ_{11} são calculados empregando-se a equação (2.9), considerando apenas as contribuições associadas ao momento fletor e ao momento tissor. O termo de carga é dado por:

$$\delta_{10} = \int M_1 d\phi_0 + \int T_1 d\phi_0 = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \int \frac{T_1 T_0}{GJ_t} dx$$

São adotadas as seguintes propriedades físicas: $EI = \text{constante}$; $GJ_t = 3,2E$. Para facilitar o entendimento, as parcelas foram desmembradas a seguir:

$$\int \frac{M_1 M_0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\underbrace{4 \cdot (2 \cdot (-160) + 80) \frac{4}{6}}_{\text{Barra AB}} + \underbrace{4 \cdot (-160) \frac{4}{3}}_{\text{Barra BC}} + \underbrace{4 \cdot 20 \cdot \frac{4}{3}}_{\text{Barra BC}} \right] = \frac{-1386,667}{EI}$$

$$\int \frac{T_1 T_0}{GJ_t} dx = \frac{1}{GJ_t} \left[\underbrace{4 \cdot (-160) \cdot 4}_{\text{Barra AB}} \right] = \frac{-2560}{3,2EI}$$

Somando-se as contribuições, com os respectivos sinais, o termo de carga δ_{10} é dado por:

$$EI\delta_{10} = -2186,667$$

O coeficiente de flexibilidade, por sua vez, δ_{11} é dado por:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \int \frac{T_1 T_0}{GJ_t} dx$$

$$\delta_{11} = \underbrace{\frac{4^2 \cdot 4}{EI \cdot 3}}_{\text{barra AB}} + \underbrace{\frac{4^2 \cdot 4}{EI \cdot 3}}_{BC} + \underbrace{\frac{4^2}{GJ_t} \cdot 4}_{AB} = \frac{62,667}{EI}$$

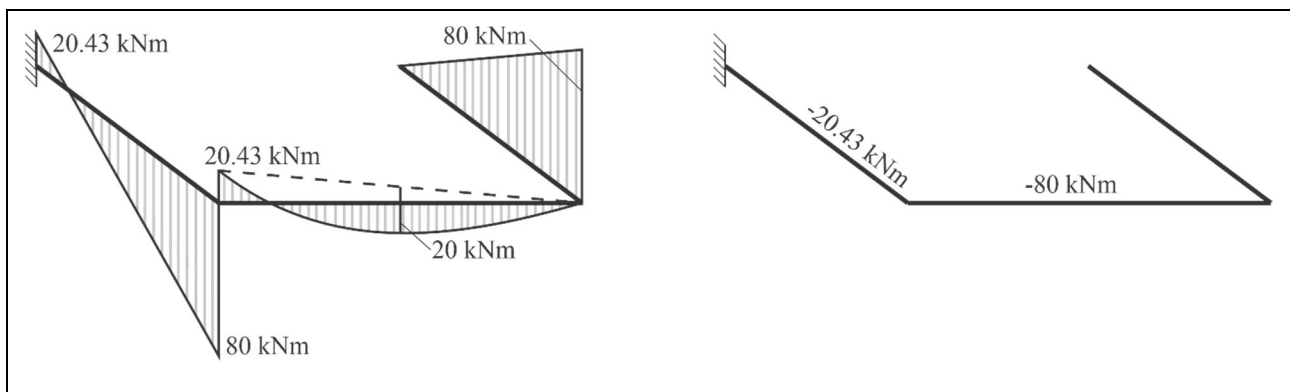
Substituindo o termo de carga e o coeficiente de flexibilidade na equação (2.8), tem-se que:

$$\delta_{1r} = 0 = -2186,667 + 62,667F_1$$

Resolvendo a equação de compatibilidade de deslocamentos, obtém-se o valor da incógnita hiperestática, a reação vertical em C:

$$F_1 = 34,89 \text{ kN}$$

De posse do valor da incógnita hiperestática F_1 , as grandezas de interesse do problema r podem ser obtidas aplicando-se a equação (2.1), apresentados no Quadro 40.



QUADRO 40. GCT: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR E TORSOR.

2.5 Exemplo – Grelha Desconsiderando Torção (GDT)

Enquanto a grelha do exemplo anterior exigia a consideração do momento torsor na sua solução, por ser essencial ao seu equilíbrio, no exemplo corrente será explorada uma grelha em que a torção não é essencial.

Neste caso, para estabelecer a determinação geométrica da estrutura, a representação em barras vinculares dos apoios e ligações é distinta, conforme mostra a Figura 30.

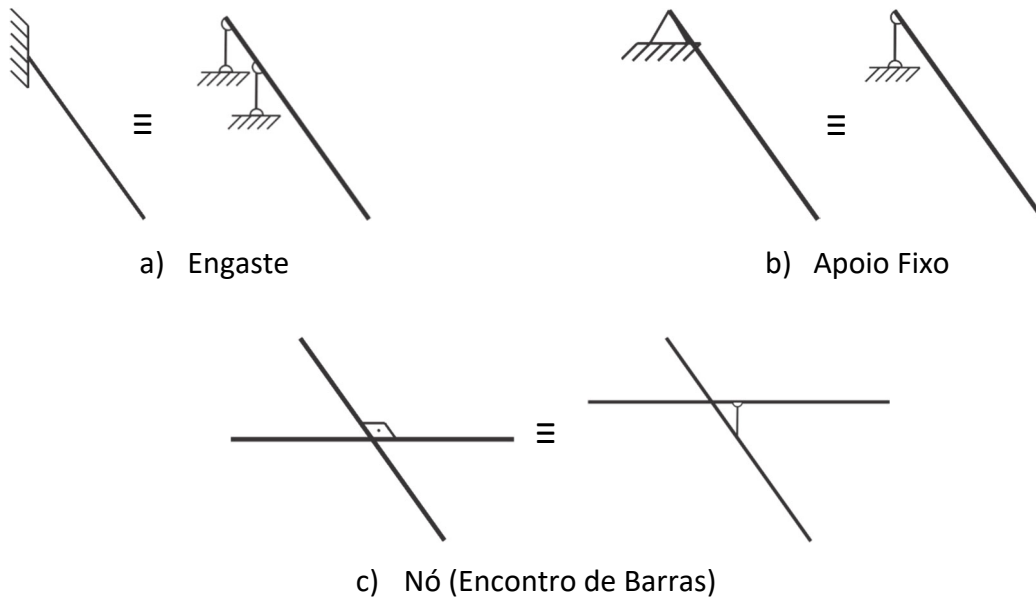


FIGURA 30. DETERMINAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA GRELHA DESCONSIDERANDO TORÇÃO.

Em uma grelha sem torção, um engaste impede o deslocamento vertical (cortante) e o giro ao longo do eixo (flexão). Já um apoio fixo impede apenas o deslocamento vertical. No encontro entre barras, ou seja, um nó, há a transferência de deslocamento vertical apenas.

No caso da grelha deste exemplo, ilustrada na Figura 31, a rigidez à torção não é necessária ao equilíbrio. A maneira mais fácil de observar isso é considerar cada elemento como se fosse uma viga se apoiando sobre outra, ou sobre um vínculo externo. Caso seja possível este desmembramento, pode-se considerar que a rigidez à torção não é necessária ao equilíbrio.

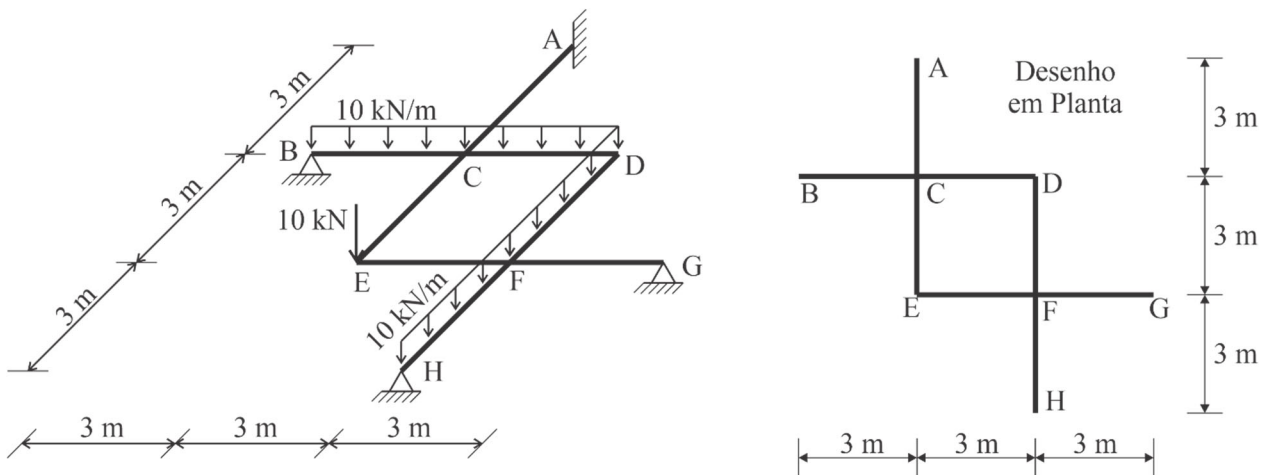


FIGURA 31. PROCESSO DOS ESFORÇOS: GRELHA DESCONSIDERANDO TORÇÃO.

De forma comparativa, a determinação geométrica será estabelecida tanto considerando-se a torção, quanto desconsiderando. Considera-se que cada barra é uma chapa, então são observadas quatro chapas. Desta forma, o número de barras necessárias ao equilíbrio considerando-se a torção é dado por $b_n = 3c = 12$.

O número de barras é contabilizado pelas três barras vinculares do engaste em A, uma barra vincular em cada apoio (em B, G e H), além de três barras vinculares em cada nó (C, D, E e F), totalizando $b = 18$. Ou seja, o grau de hiperstaticidade nesta análise é 6.

Já para o caso em que a torção é desconsiderada, o número de barras necessárias ao equilíbrio é dado por $b_n = 2c = 8$. Percebe-se imediatamente que o número de chapas se mantém. Quanto ao número de barras existentes, são contabilizadas duas barras vinculares do engaste em A, uma barra vincular em cada apoio (em B, G e H), além de uma barra vincular em cada nó (C, D, E e F), totalizando $b = 9$. Desta forma, o grau de hiperstaticidade é apenas 1.

Para criação do problema estático equivalente, será rompido um vínculo interno, no nó D, estando apresentado na Figura 32. Como só há um parâmetro incógnito, a resposta do problema real é dividida em 1 + 1 problemas, levando à situação esquematizada na Figura 33.

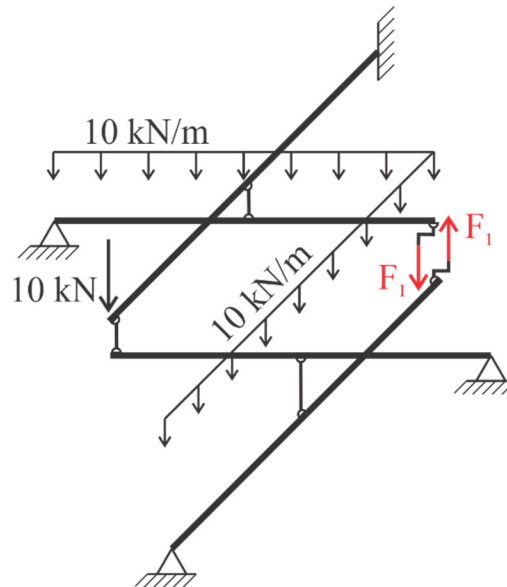


FIGURA 32. GDT: PROBLEMA ISOSTÁTICO EQUIVALENTE.

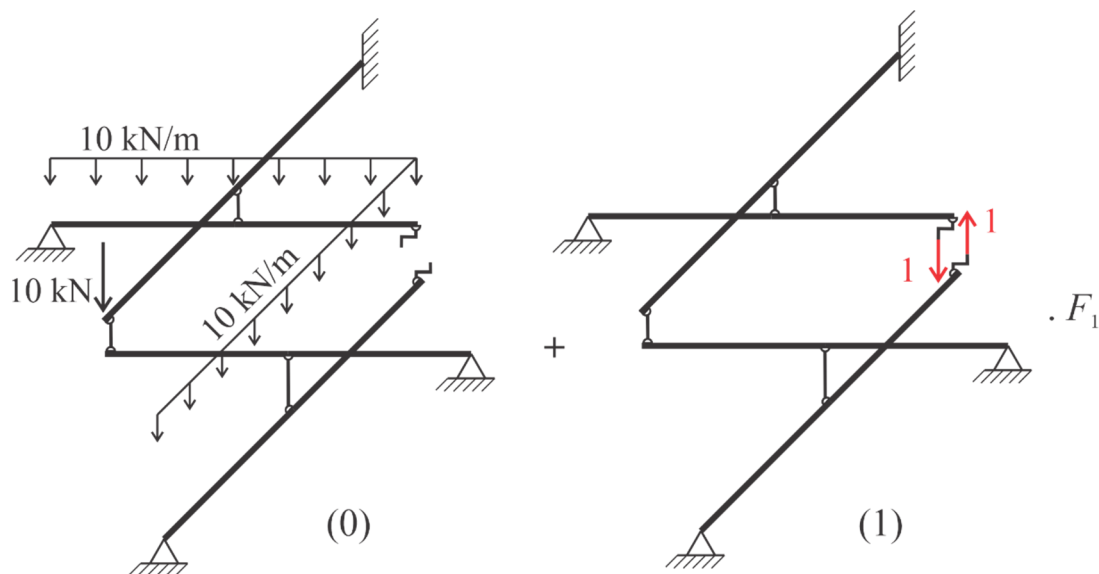
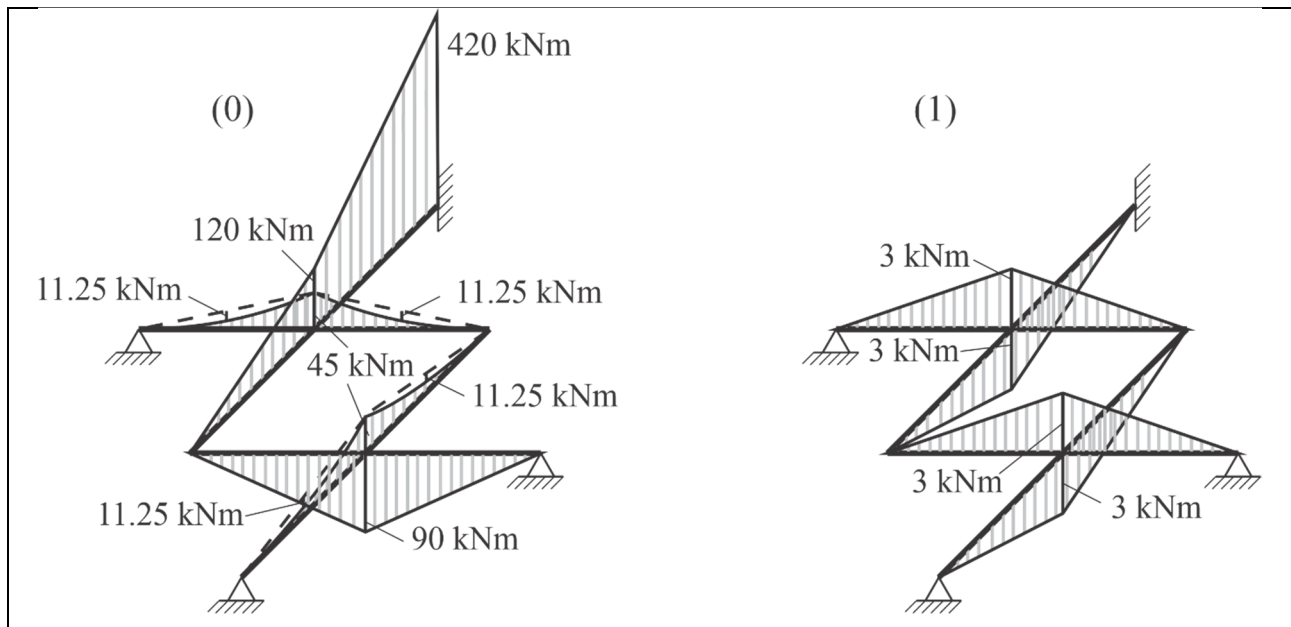


FIGURA 33. GDT: SOBREPOSIÇÃO DOS PROBLEMAS.

A cor vermelha foi empregada para destacar as reações e a ação unitária imposta. Em verde, foi destacado o equilíbrio dos esforços no nó C, em laranja no nó E, e em azul no nó F. Percebe-se que só há momento no engaste em A.

A partir da visualização do Quadro 41, o traçado dos diagramas de esforços solicitantes é facilitado, sendo apresentados nos quadros subsequentes. Destaca-se que, estando as barras de grelha solicitadas por momentos fletores, a contribuição do esforço cortante pode ser desprezada.



QUADRO 42. GDT: DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES PARA O PROBLEMA (0) E (1).

O termo de carga δ_{10} e o coeficiente de flexibilidade δ_{11} são calculados empregando-se a equação (2.11), considerando apenas as contribuições associadas ao momento fletor. O termo de carga é dado por:

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx$$

$$EI\delta_{10} = (-45) \cdot (-3) \cdot \frac{6}{3} + 11,25 \cdot (-3) \cdot \frac{3}{3} \cdot 2 + 90 \cdot (-3) \cdot \frac{6}{3} + (-120) \cdot 3 \cdot \frac{3}{3}$$

$$+ (2 \cdot (-120) - 420) \cdot 3 \cdot \frac{3}{6} + (-45) \cdot 3 \cdot \frac{6}{3} + 11,25 \cdot 3 \cdot \frac{3}{3} \cdot 2$$

$$EI\delta_{10} = -1890$$

O coeficiente de flexibilidade δ_{11} é obtido de maneira análoga:

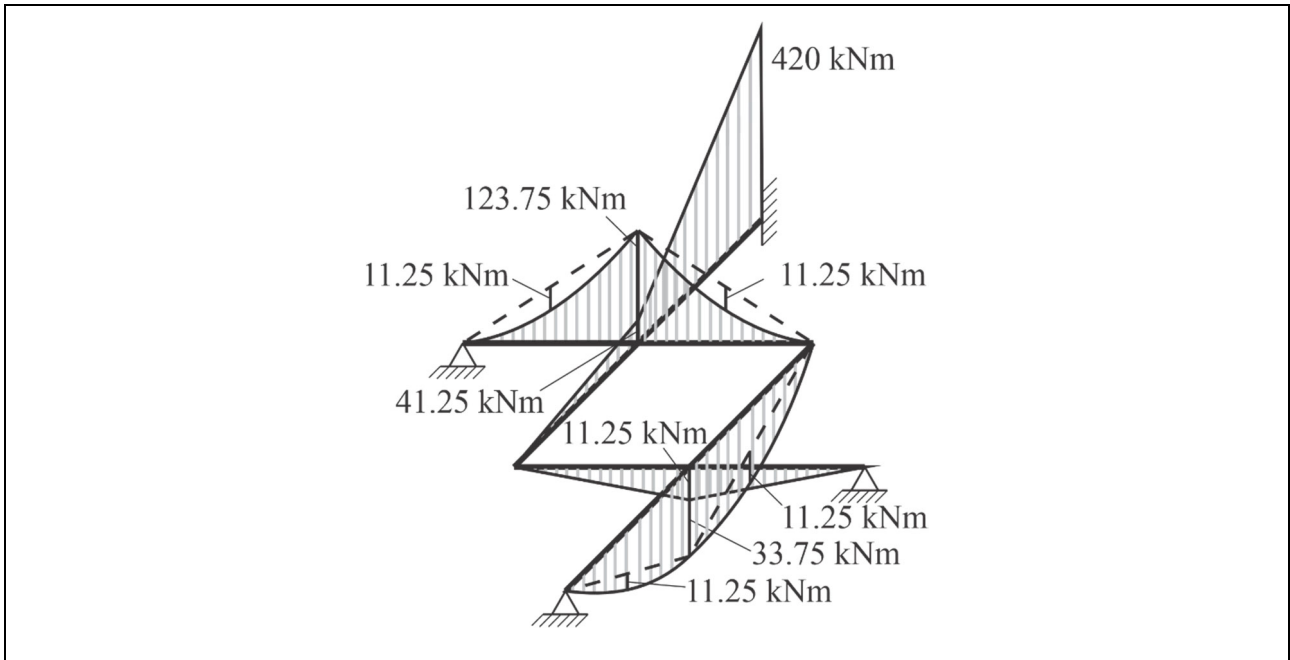
$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx$$

$$EI\delta_{11} = (-3)^2 \cdot \frac{6}{3} + (-3)^2 \cdot \frac{6}{3} + 3^2 \cdot \frac{6}{3} + 3^2 \cdot \frac{6}{3} = 72$$

Substituindo o termo de carga e o coeficiente de flexibilidade na equação (2.10), e resolvendo a equação de compatibilidade de deslocamentos, tem-se que:

$$\delta_{1r} = 0 = -1890 + 72F_1 \rightarrow F_1 = 26,25kN$$

De posse do valor da incógnita hiperestática F_1 , as grandezas de interesse do problema (r) podem ser obtidas aplicando-se a equação (2.1) ou diretamente do problema isostático equivalente, já com os valores conhecidos das incógnitas hiperestáticas. Qualquer dos caminhos adotados vai levar aos diagramas esforços solicitantes para a estrutura hiperestática real apresentados no Quadro 43.



QUADRO 43. GDT: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR.

2.6 Exemplo – Grelha com elementos não ortogonais (GNO)

No caso de grelhas com elementos não ortogonais, a consideração da torção leva a decomposição de momentos fletores e torsões no ponto de encontro entre os elementos não ortogonais. Ao desconsiderar a torção, quando não é necessária ao equilíbrio, a transferência de esforços se dá apenas na direção vertical, sem transferência de momentos, simplificando o cálculo.

Na grelha deste exemplo, em que a torção não é essencial ao equilíbrio, existe um elemento não ortogonal, conforme mostra a Figura 34. São adotadas propriedades físicas constantes e iguais para todas as barras.

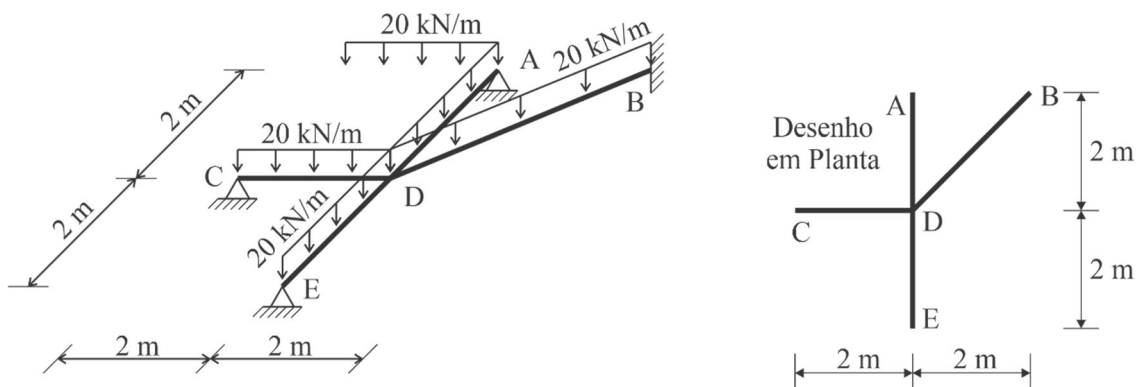


FIGURA 34. GRELHA DESCONSIDERANDO TORÇÃO COM ELEMENTO NÃO ORTOGONAL.

O número de barras necessárias ao equilíbrio considerando-se a torção é $b_n = 3c = 9$. O número de barras existentes é dado pelas três barras vinculadas em B, uma barra vincular em cada apoio (em A, C e E), além de seis barras vinculadas no nó D, totalizando $b = 12$. Neste caso, o grau de hiperestaticidade é 3.

Desconsiderando-se a torção, o número de barras necessárias ao equilíbrio é reduzido para $b_n = 2c = 6$. Quanto ao número de barras existentes, são contabilizadas duas barras vinculadas do engaste em B, uma barra vincular em cada apoio (em A, C e E), além de duas barras vinculadas no nó D, totalizando $b = 7$. Desta forma, o grau de hiperestaticidade é 1.

Como o nó D gera questionamento sobre o número de barras vinculadas, por causa da não ortogonalidade das barras, a Figura 35 apresenta as duas barras vinculadas no nó ao se desconsiderar a torção. No caso de ser considerada, haveriam três barras vinculadas para conexão da chapa AE com a CD, e mais três para conexão da chapa AE com BD.

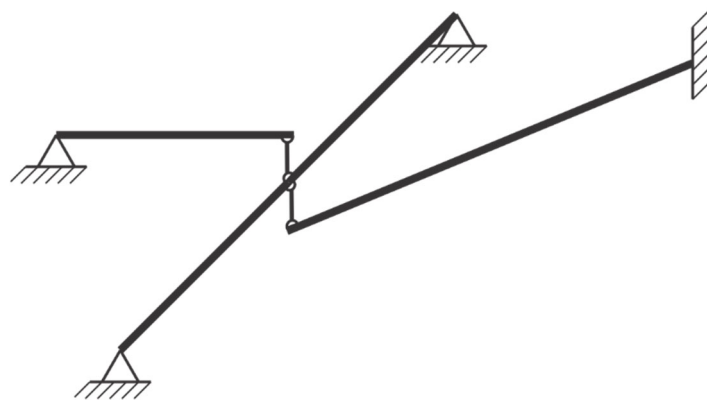


FIGURA 35. DETERMINAÇÃO GEOMÉTRICA PARA GRELHA NÃO ORTOGONAL.

Para criação do problema estático equivalente, será rompido o vínculo interno no nó D entre as chapas AE e BD, sendo apresentado na Figura 36. Como só há um parâmetro incógnito, a resposta do problema real é dividida em 1 + 1 problemas, levando à situação esquematizada na Figura 37.

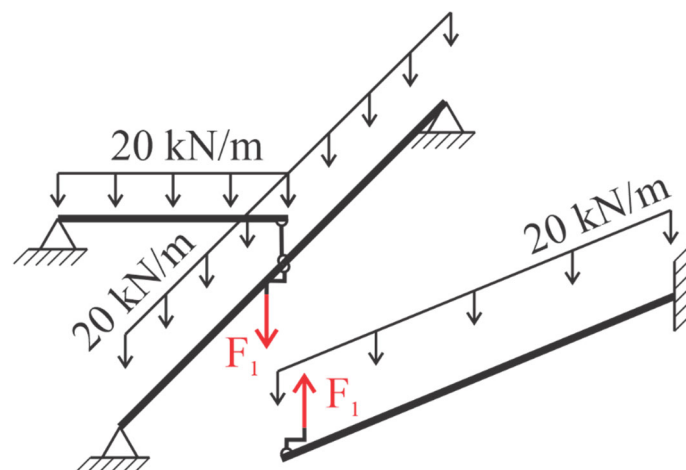


FIGURA 36. GNO: PROBLEMA ISOSTÁTICO EQUIVALENTE.

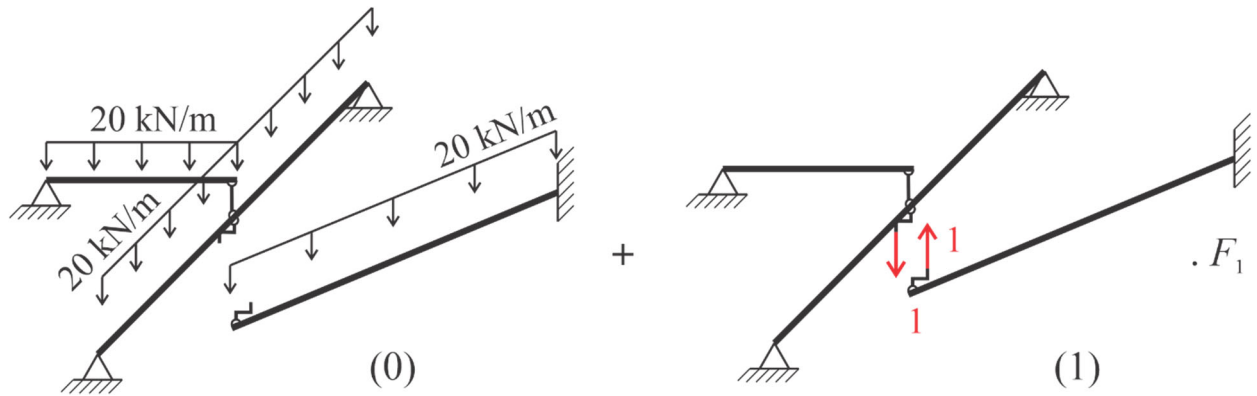


FIGURA 37. GNO: SOBREPOSIÇÃO DOS PROBLEMAS.

O problema isostático equivalente será igual ao real caso se obtenha F_1 de tal forma que o deslocamento relativo entre as referidas barras seja nulo, como no problema real. Como só há um parâmetro incógnito, requer apenas uma equação de compatibilidade de deslocamento, dada por:

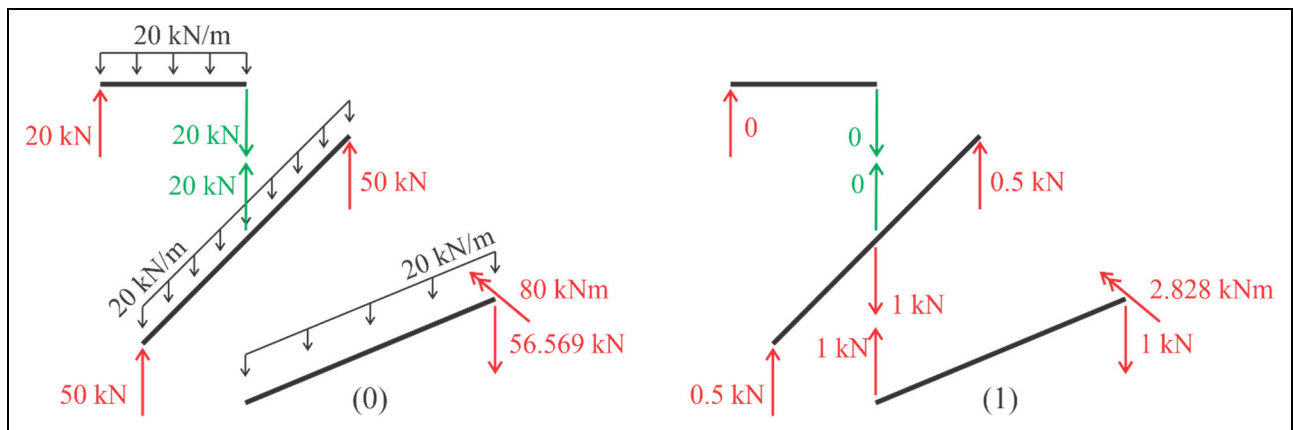
$$\delta_{1r} = 0 = \delta_{10} + \delta_{11}F_1 \tag{2.12}$$

Para determinar os deslocamentos δ_{10} e δ_{11} , emprega-se o princípio dos trabalhos virtuais, impondo-se o estado de deslocamentos (j) ao estado de forças (i), conforme a equação (2.13).

$$\delta_{ij} = \int \underbrace{M_i d\phi_j}_{Flexão} \tag{2.13}$$

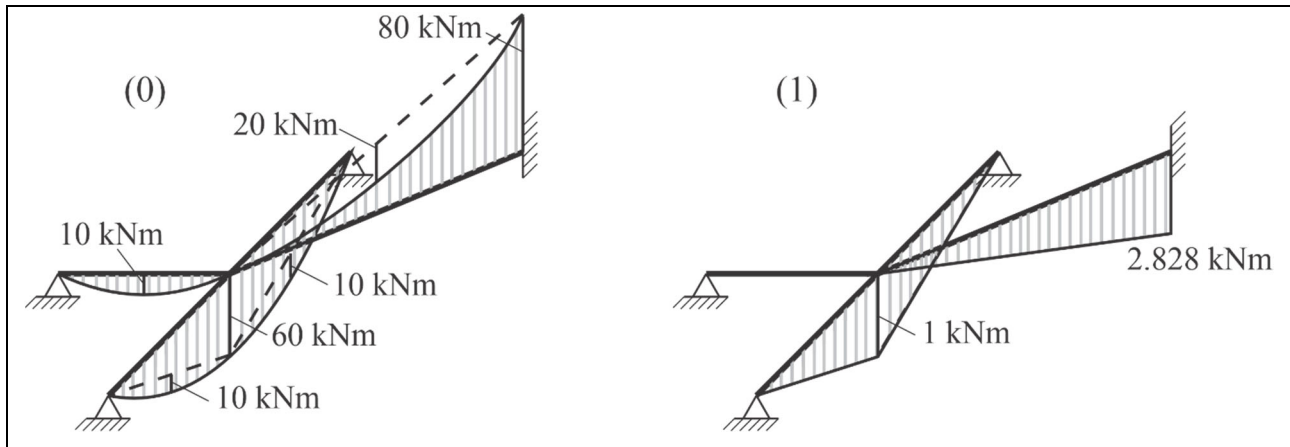
em que δ_{ij} é o deslocamento que se deseja calcular, M_i é o momento fletor associado ao deslocamento relativo $d\phi_j$, estabelecido conforme a cinemática adotada e as causas físicas à que a estrutura está sujeita. O esforço cortante foi desprezado pois sua contribuição é, usualmente, bem menor que a de momento fletor (vide Livro 1 para maiores esclarecimentos).

Dito isso, para o cálculo dos deslocamentos envolvidos na análise, é necessário que se determinem os diagramas de momentos fletores em todos os trechos. Como nos exemplos de grelha anteriores, a estrutura foi desmembrada em seus respectivos segmentos, e os esforços indicados nas extremidades, em devido equilíbrio, no Quadro 44. Na parte esquerda do quadro, são indicados os esforços relativos ao problema (0), e na parte direita, relativos ao problema (1).



QUADRO 44. GNO: ESFORÇOS INTERNOS NA EXTREMIDADE DOS ELEMENTOS.

A cor vermelha foi empregada para destacar as reações e a ação unitária imposta. Em verde, foi destacado o equilíbrio dos esforços no nó D. A partir da visualização do Quadro 44, o traçado dos diagramas de esforços solicitantes é facilitado, sendo apresentados nos quadros subsequentes.



QUADRO 45. GNO: DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES PARA O PROBLEMA (0) E (1).

O termo de carga δ_{10} e o coeficiente de flexibilidade δ_{11} são calculados empregando-se a equação (2.13), considerando apenas as contribuições associadas ao momento fletor. Estes são dados por:

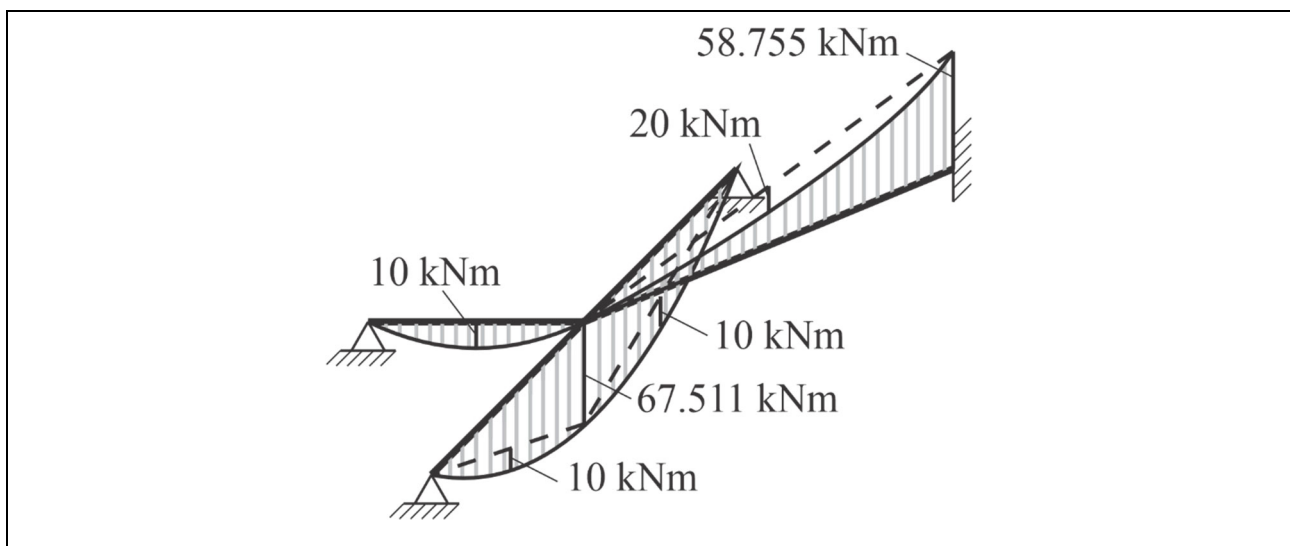
$$EI\delta_{10} = 60 \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} + 10 \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} + (-80) \cdot 2,828 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + 20 \cdot 2,828 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = -66,667$$

$$EI\delta_{11} = 1^2 \cdot \frac{4}{3} + 2,828^2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 8,876$$

Substituindo o termo de carga e o coeficiente de flexibilidade na equação (2.12), e resolvendo a equação de compatibilidade de deslocamentos, obtém-se o valor da incógnita hiperestática:

$$F_1 = 7,511 \text{ kN}$$

De posse do valor da incógnita hiperestática F_1 , as grandezas de interesse do problema r podem ser obtidas aplicando-se a equação (2.1), sendo apresentadas no Quadro 46.



QUADRO 46. GNO: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR.

Capítulo 3 - Processo dos Deslocamentos

Neste capítulo você vai ver:

- Obtenção do Sistema Hipergeométrico;
- Definição das Deslocabilidades;
- Obtenção das reações nos apoios fictícios (Termos de Carga e Coeficientes de Rigidez);
- Superposição de efeitos para restaurar equilíbrio;
- Superposição de efeitos para determinação de diagramas.

O Processo dos deslocamentos é um processo clássico para solução de problemas hiperestáticos, em que as condições de equilíbrio não são suficientes para determinar a distribuição dos esforços internos e/ou reações da estrutura. Exige-se, portanto, gerar equações adicionais, obtidas a partir das restrições impostas pelas condições de compatibilidade (relações entre deslocamentos e deformações) e das relações constitutivas (entre tensão e deformação).

O Processo dos deslocamentos propõe tornar a estrutura geometricamente determinada ao impor vínculos que restringem graus de deslocabilidade, associando deslocamentos na direção vinculada que recebem o nome de Deslocabilidades (ou Incógnitas Hiperestáticas), enumerados como D_1 a D_n , em que n é o número de deslocabilidades. Em algumas bibliografias, a estrutura geometricamente determinada também é chamada de Sistema Hipergeométrico.

Na Figura 38, um pórtico simples é vinculado em todos deslocamentos possíveis e no giro entre barras, obtendo-se uma estrutura de cinemática conhecida e elementar. Mas por que não foi necessário restringir o giro na extremidade? Voltaremos a isso mais à frente.

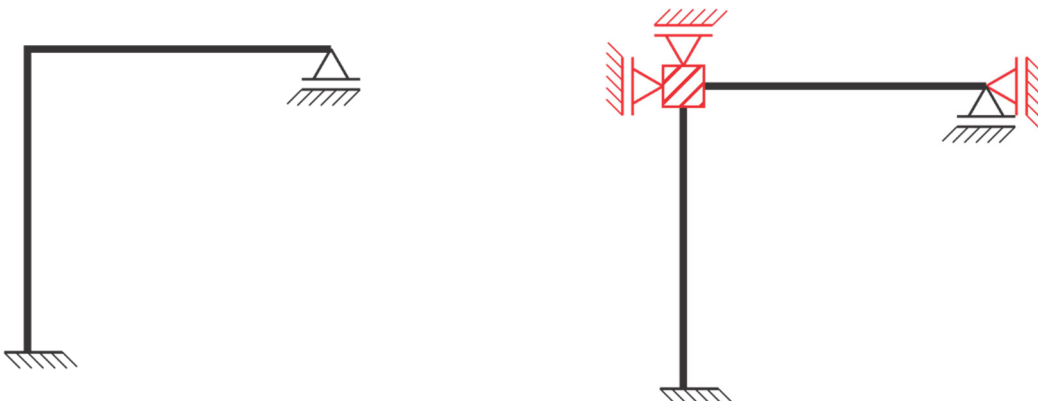


FIGURA 38. OBTENÇÃO DE ESTRUTURA GEOMETRICAMENTE DETERMINADA.

A imposição de vínculos, impedindo deslocamentos indeterminados, torna a estrutura mais vezes hiperestática, porém cinematicamente determinada. É possível, então, subdividi-la em trechos com configurações deformadas conhecidas.

Utiliza-se, para resolver cada trecho, a solução analítica da equação diferencial associada aos elementos estruturais, refletindo as condições de contorno, sendo que o comportamento de cada trecho não interfere nos demais trechos que compõem a estrutura.

Tais soluções são tabeladas, convenientemente, sendo estas chamadas de Tabelas de Momentos de Engastamento Perfeito ou Tabelas de Reações de Engastamento Perfeito. Algumas destas soluções são providas ao final do livro (vide Capítulo 5 - Tabelas).

3.1 Exemplo Modelo – Viga Hiperestática (VH)

Considere, como exemplo, uma viga duas vezes hiperestática submetida a um recalque rotacional no engaste em A e um carregamento distribuído ao longo de toda a viga, tal como ilustrado na Figura 39. A linha tracejada em azul reflete a deslocada da estrutura real, a ser obtida.

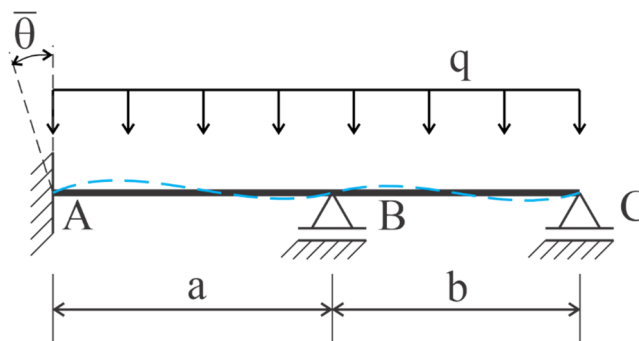


FIGURA 39. PROCESSO DOS DESLOCAMENTOS: VIGA HIPERESTÁTICA.

Observe que o grau de hiperestaticidade da viga não reflete o grau de deslocabilidade da estrutura, e é de pouca serventia na análise do Processo dos Deslocamentos. O grau de deslocabilidade depende dos vínculos existentes e da mobilidade da estrutura. Busca-se impedir tal mobilidade, impondo-se vínculos fictícios.

Neste exemplo, será feita uma simples análise da cinemática para impor os vínculos fictícios, de tal forma que as deslocabilidades de cada trecho não interfiram no seguinte, e vice-versa. Percebe-se que a estrutura é passível de giro no nó B, assim como em C. Quanto ao giro em C, sabe-se que o momento fletor é nulo. Portanto, não é necessário criar um vínculo para determinar seu valor. Em B, tanto giro quanto momento são desconhecidos, além de haver transferência de esforços (de momento fletor) entre os elementos AB e BC. Desta forma, um vínculo é imposto ao giro em B, restringindo sua deslocabilidade, denominada de D_1 , gerando uma estrutura geometricamente determinada, como mostrado na Figura 40. A reação no apoio fictício (f_{1r}) deve, ao final, restabelecer a condição de equilíbrio original da estrutura – no caso, igual a zero.

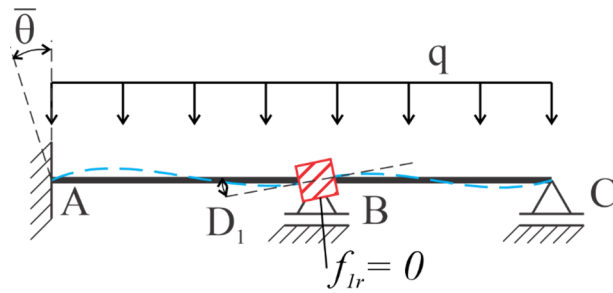


FIGURA 40. VH: ESTRUTURA GEOMETRICAMENTE DETERMINADA.

Dentre todas as soluções possíveis para D_1 , apenas uma irá atender simultaneamente a condição de equilíbrio violada e a condição de compatibilidade da estrutura real. A resposta do problema (r) é dividida em 1 + 1 problemas, um destes associado às ações atuantes e o outro à D_1 , levando à situação esquematizada na Figura 41. A estrutura geometricamente determinada será igual à real caso se obtenha D_1 de tal forma que a reação no apoio fictício no problema equivalente seja igual à ação no problema real – novamente, nula.

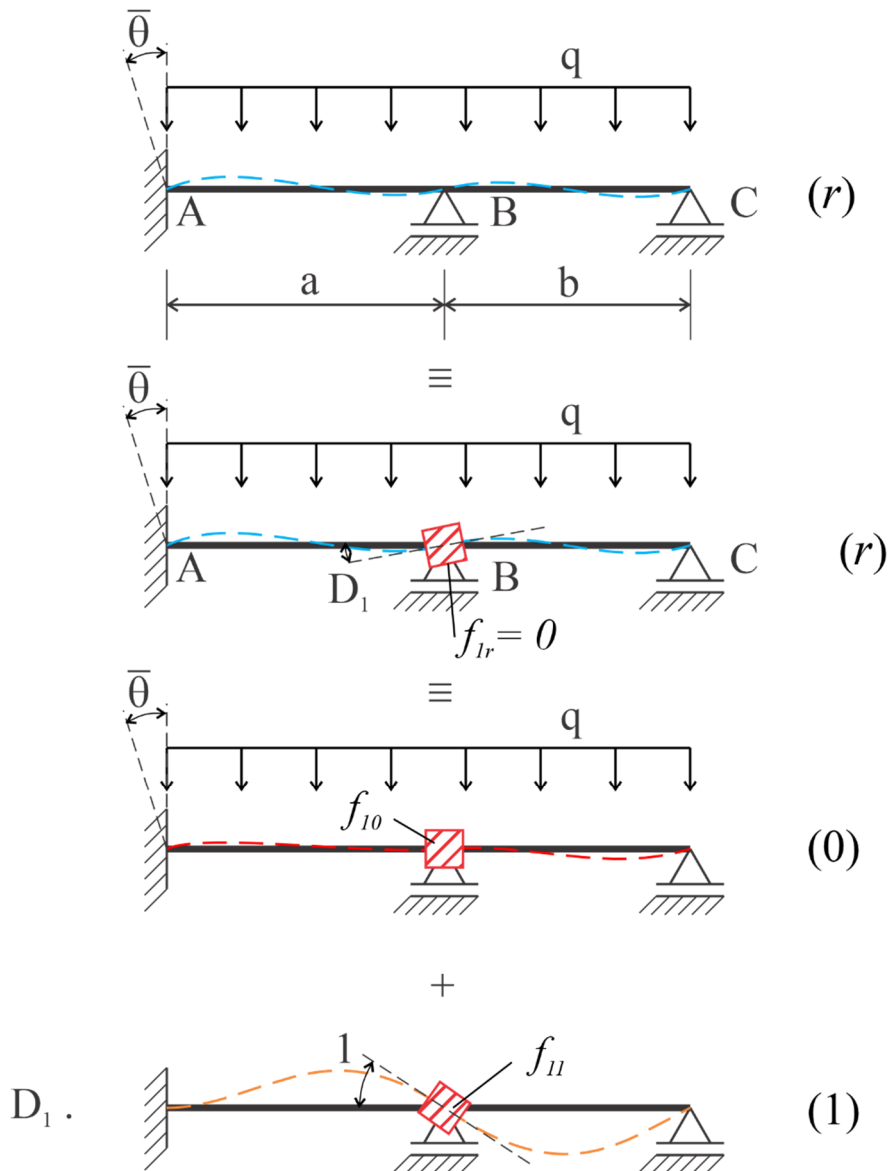


FIGURA 41. VH: SOBREPOSIÇÃO DOS PROBLEMAS.

O problema (0) é definido pelas ações atuantes na estrutura geometricamente determinada, incluindo recalques, variações térmicas, ações concentradas e distribuídas, entre outras. No problema (0), a reação no apoio fictício define o termo de carga (f_{10}).

O problema (1) é definido pela imposição de um deslocamento unitário do mesmo gênero do apoio fictício. No caso, foi agregado um impedimento ao giro, portanto, um giro unitário no ponto será imposto. Nos problemas definidos pela imposição de um deslocamento unitário, a reação no apoio fictício define os coeficientes de rigidez (f_{11}).

Fazendo-se a sobreposição dos problemas apresentados na Figura 41, conforme mostrado na equação (3.1), gera-se um sistema linear de uma equação e uma incógnita, dado por:

$$f_{1r} = 0 = f_{10} + f_{11}D_1 \tag{3.2}$$

A equação (3.2) representa o equilíbrio de esforços no nó B, em que f_{ij} é o valor das reações sobre o apoio fictício em B decorrentes das ações externas – caso (0), e do deslocamento unitário imposto – caso (1).

Como se verá adiante, a estrutura hipergeométrica pode ser desmembrada para facilitar a obtenção dos termos de carga e dos coeficientes de rigidez, pois cada trecho da estrutura tem condições de extremidade conhecidas análogo a problemas básicos tabelados. Alguns problemas básicos são replicados na Figura 42, apenas os necessários para o devido desenvolvimento do exemplo em questão.

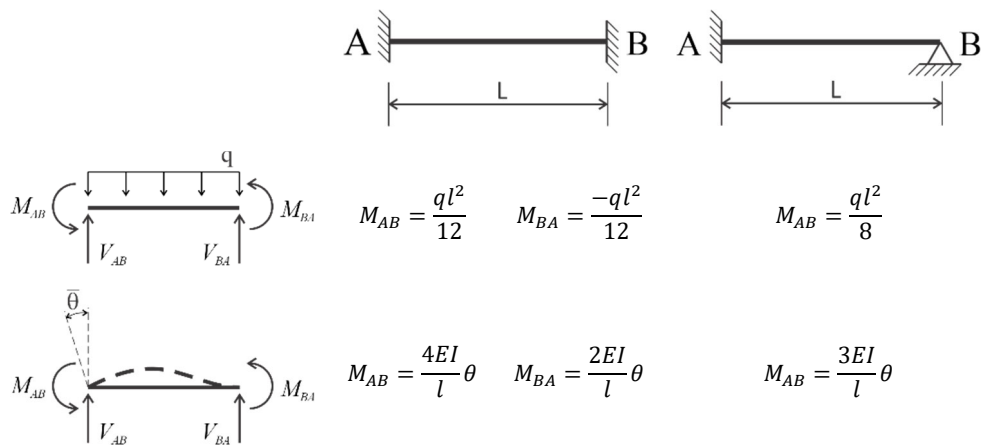


FIGURA 42. TRECHO DA TABELA DE MOMENTOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO.

Um fato importante a se destacar na tabela de momentos de engastamento perfeito da Figura 42 é a convenção de sinais adotada, a convenção de Grinter, mostrada na Figura 43, junto com a convenção usual.

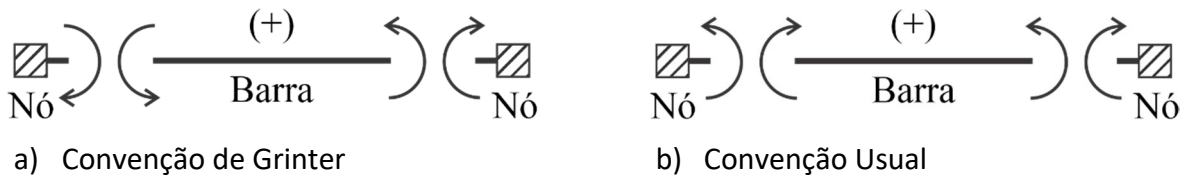


FIGURA 43. CONVENÇÃO DE SINAIS.

Repare que o sentido dos momentos e dos giros nas extremidades na convenção de Grinter é sempre o mesmo, o que facilita a implementação computacional e a análise de equilíbrio. No entanto, para obter os diagramas finais de uma estrutura, é necessário transformar a convenção de Grinter na convenção usual. Esta discussão será retomada mais à frente.

A separação em trechos (tramos) da estrutura é mostrada na Figura 44b e na Figura 45b, para os problemas (0) e (1), respectivamente. Os momentos de engastamento perfeito são obtidos por meio de tabelas (vide, para este exemplo, a Figura 42), respeitando as condições de contorno.

Conhecidos os momentos nas extremidades decorrente das ações atuantes, as demais reações são determinadas por equilíbrio. Adotou-se, para as reações nos tramos, a convenção de cortantes positivas. Os esforços nas extremidades são então transferidos aos nós, onde, por equilíbrio nodal, obtêm-se efetivamente o termo de carga f_{10} e o coeficiente de rigidez f_{11} .

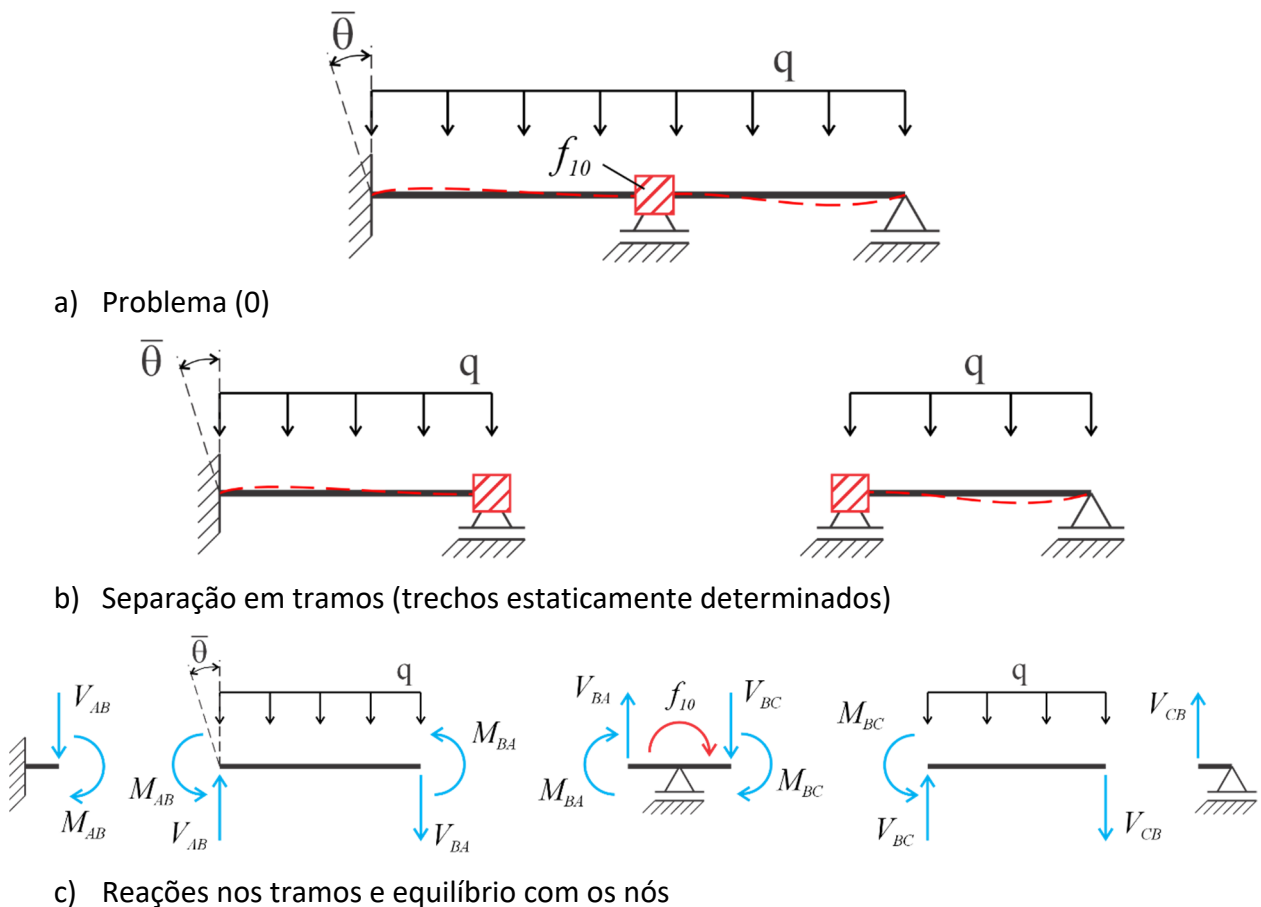


FIGURA 44. VH: PROBLEMA (0).

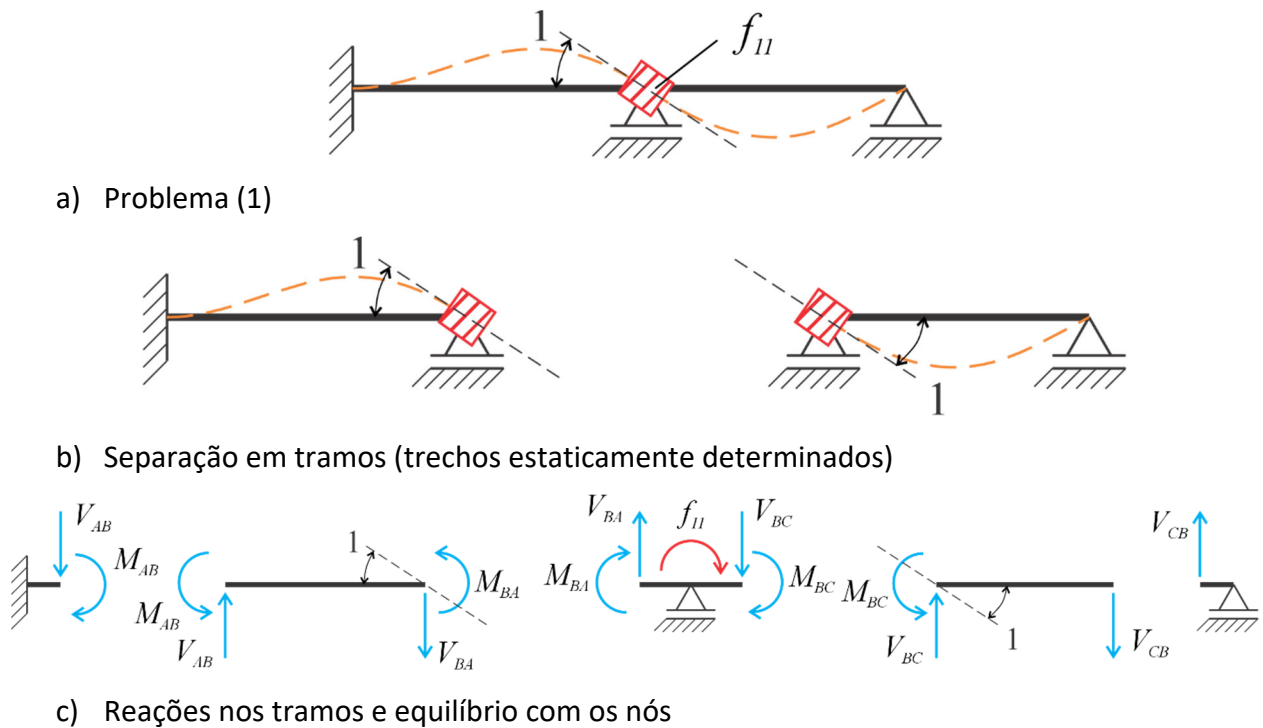


FIGURA 45. VH: PROBLEMA (1).

Obtidas as reações no apoio fictício (f_{10} e f_{11}), a resolução da equação (3.2) determina a incógnita hiperestática D_1 , a partir da qual as grandezas de interesse do problema (r) podem ser obtidas aplicando-se a equação (2.1), de forma análoga ao processo dos esforços.

3.2 Exemplo – Viga Hiperestática de Três Tramos (VTT)

Enquanto o exemplo anterior explorou o processo dos deslocamentos de forma geral, o exemplo atual, uma viga hiperestática de três tramos, apresenta os procedimentos usuais para resolução pelo processo dos deslocamentos. Adota-se $EI = 2.000 \text{ kN.m}^2$.

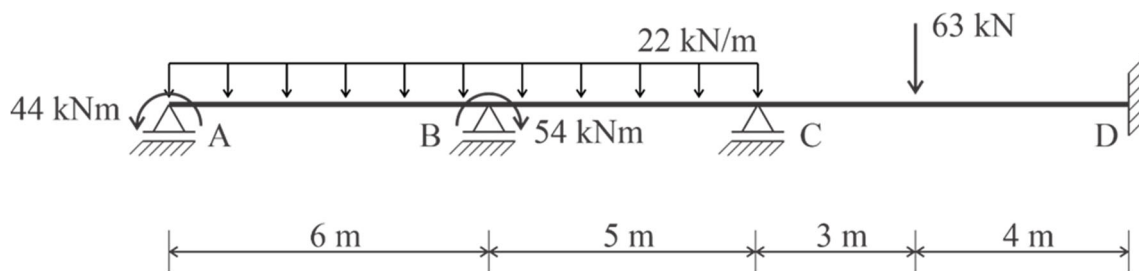


FIGURA 46. PROCESSO DOS DESLOCAMENTOS: VIGA DE TRÊS TRAMOS.

O Sistema Hipergeométrico (ou estrutura geometricamente determinada) é obtido a partir da definição das deslocabilidades da estrutura. Estas serão estabelecidas por meio da análise da cinemática da estrutura, da mesma forma que o exemplo anterior.

São três nós passíveis de giro (ou deslocabilidade interna): A, B e C. No nó A já se conhece o momento fletor, portanto não há necessidade de bloqueio. Nos nós B e C, tanto o momento fletor quanto o deslocamento são desconhecidos, portanto vão receber vínculos fictícios. A adição destes vínculos restringe as deslocabilidades indicadas na Figura 47, denominadas de D_1 e D_2 . Não há deslocabilidades de deslocamento a serem definidas neste exemplo.

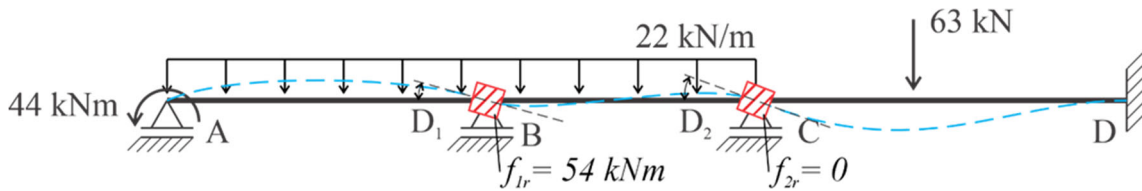


FIGURA 47. VTT: ESTRUTURA GEOMETRICAMENTE DETERMINADA.

A resposta do problema (r) é dividida em 2 + 1 problemas, levando à situação esquematizada na Figura 48. A estrutura geometricamente determinada será igual à real caso se obtenham D_1 e D_2 de tal forma que as reações nos apoios fictícios no problema equivalente sejam iguais à ação naqueles pontos no problema real.

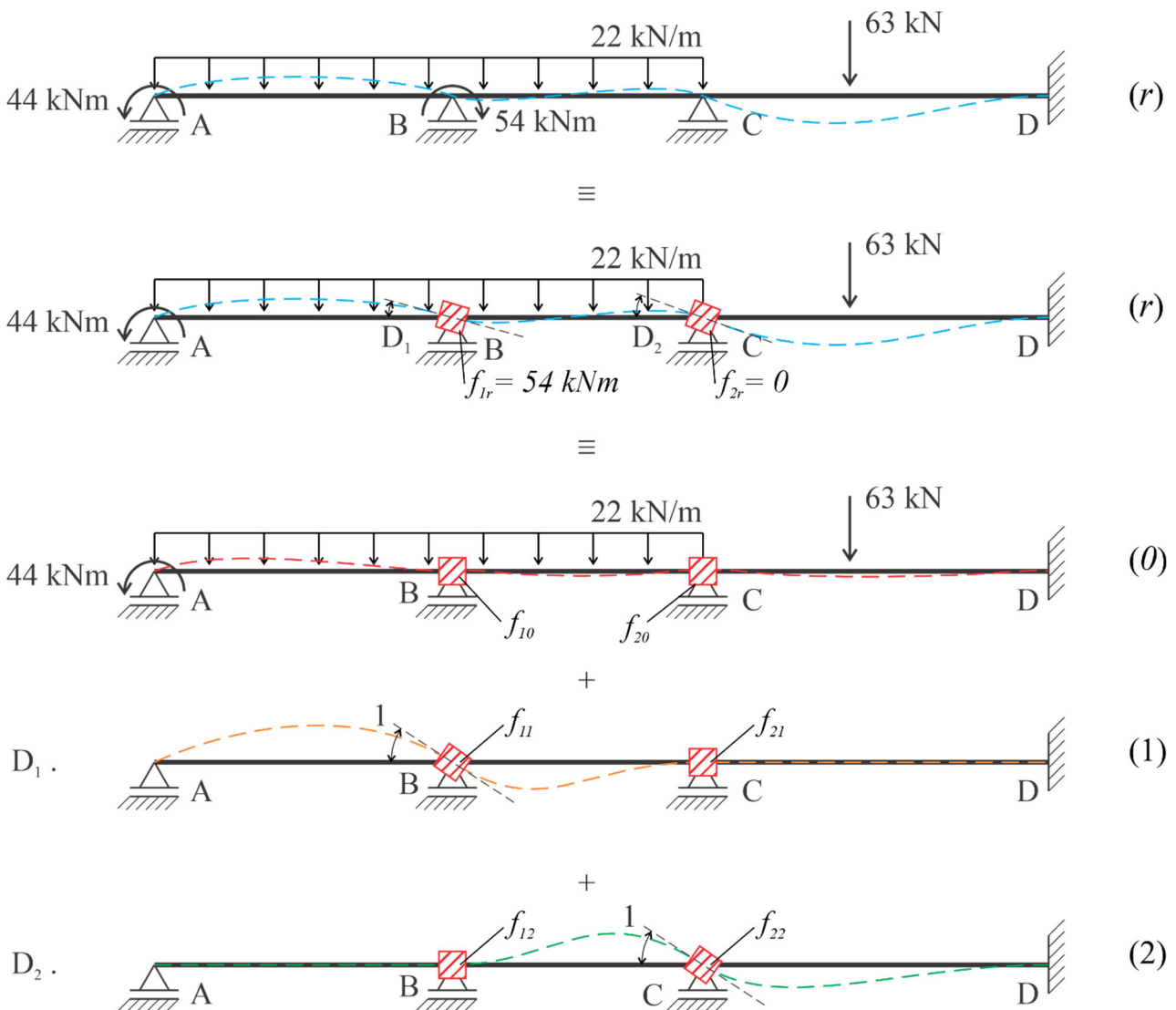


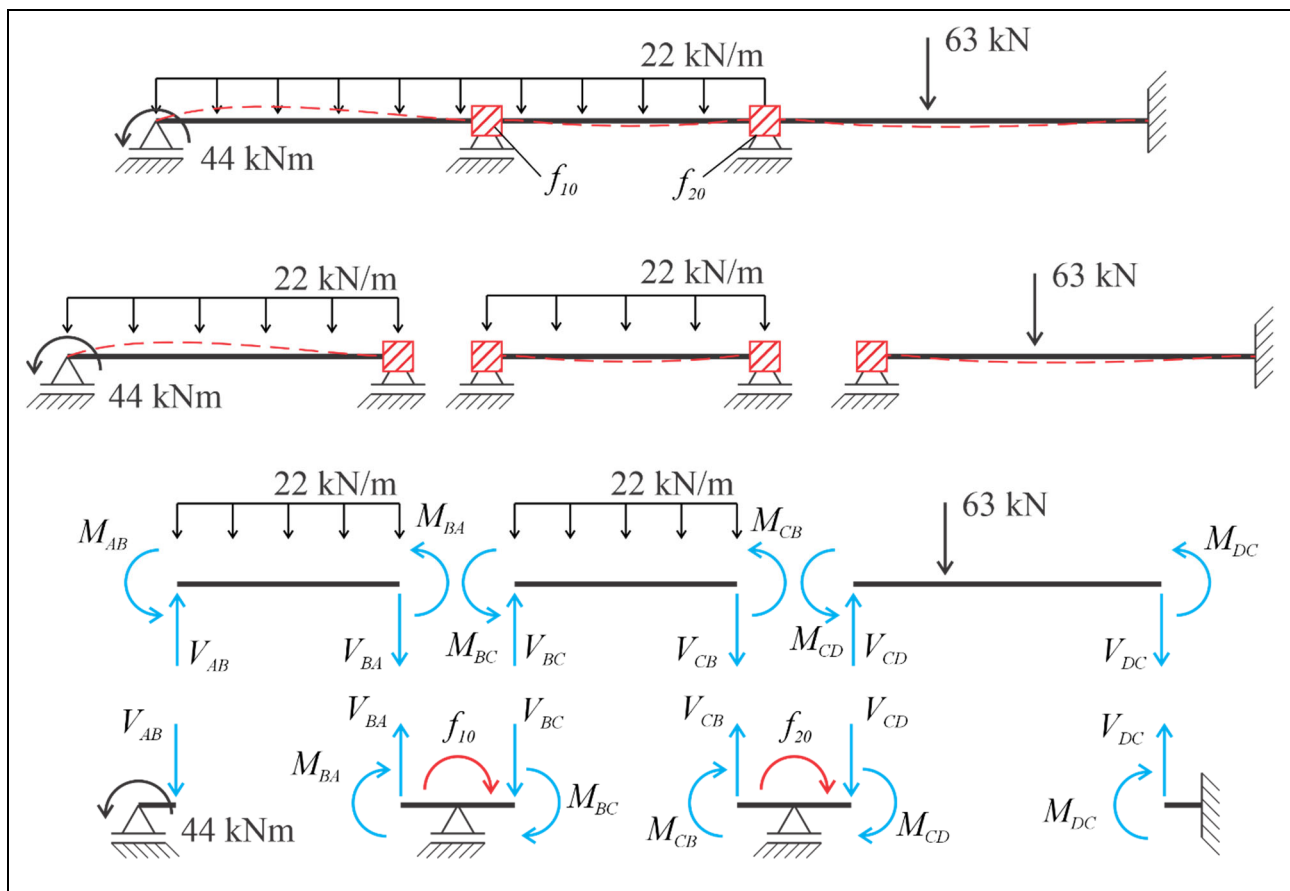
FIGURA 48. VTT: SOBREPOSIÇÃO DOS PROBLEMAS.

Na forma de uma equação:

$$\begin{aligned} f_{1r} = 54 &= f_{10} + f_{11}D_1 + f_{12}D_2 \\ f_{2r} = 0 &= f_{20} + f_{21}D_1 + f_{22}D_2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

É interessante notar que o momento concentrado de 54 kN.m em B foi associado ao f_{1r} . Ou seja, se ele irá participar do problema real, então não pode entrar no problema (0).

Como cada tramo é cinematicamente determinado, não ocorre transmissão de deslocamentos de um tramo a outro. Isto implica que a solução de cada tramo pode ser buscada em separado. Para o problema (0), em que atuam apenas as ações externas sobre a estrutura, implica no seguinte desenvolvimento:



QUADRO 47. VTT: PROBLEMA (0).

O Quadro 47 apresenta inicialmente a divisão em tramos. O primeiro tramo (AB) reflete a condição apoio/engaste, sujeita a uma ação distribuída e um momento concentrado. O segundo tramo (BC) consiste na condição engaste/engaste sob ação distribuída. O terceiro e último tramo (CD) também consiste em um biengaste, porém sujeita a uma ação concentrada. Em cada tramo, observando as condições de contorno, determinam-se as reações de momento por meio da tabela de momentos de engastamento perfeito (Tabela 2, na página 141).

Desta forma, os valores dos momentos de engastamento perfeito, respeitando-se as condições de contorno observadas, são dados por:

$$M_{BA} = -\frac{M}{2} - \frac{ql^2}{8} = -\frac{44}{2} - \frac{22 \cdot 6^2}{8} = -77 \text{ kN.m}$$

$$M_{BC} = \frac{ql^2}{12} = \frac{22 \cdot 5^2}{12} = 45,8 \text{ kN.m}$$

$$M_{CB} = -M_{BC} = -45,8 \text{ kN.m}$$

$$M_{CD} = \frac{Pab^2}{l^2} = \frac{63 \cdot 3 \cdot 4^2}{7^2} = 61,7 \text{ kN.m}$$

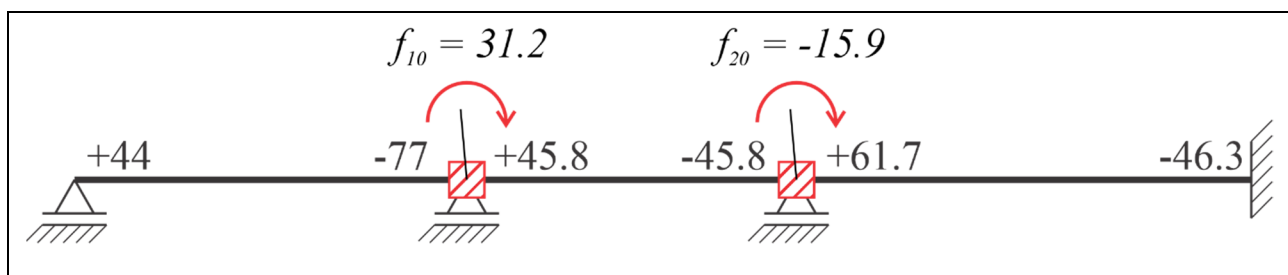
$$M_{DC} = \frac{-Pa^2b}{l^2} = \frac{-63 \cdot 3^2 \cdot 4}{7^2} = -46,3 \text{ kN.m}$$

Ainda sobre os tramos é feito o equilíbrio das ações, considerando-se tanto os momentos de engastamento perfeito quanto as ações atuantes, para determinar as reações transversais (V_{IJ}). Como não são necessárias, neste exemplo, as reações transversais pois são transferidas a apoios reais (não-fictícios), pode-se buscar imediatamente as reações nos apoios fictícios, ou seja, os termos de carga, que são obtidos por equilíbrio nodal:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow f_{10} + M_{BA} + M_{BC} = 0 \rightarrow f_{10} = 31,2 \text{ kN.m}$$

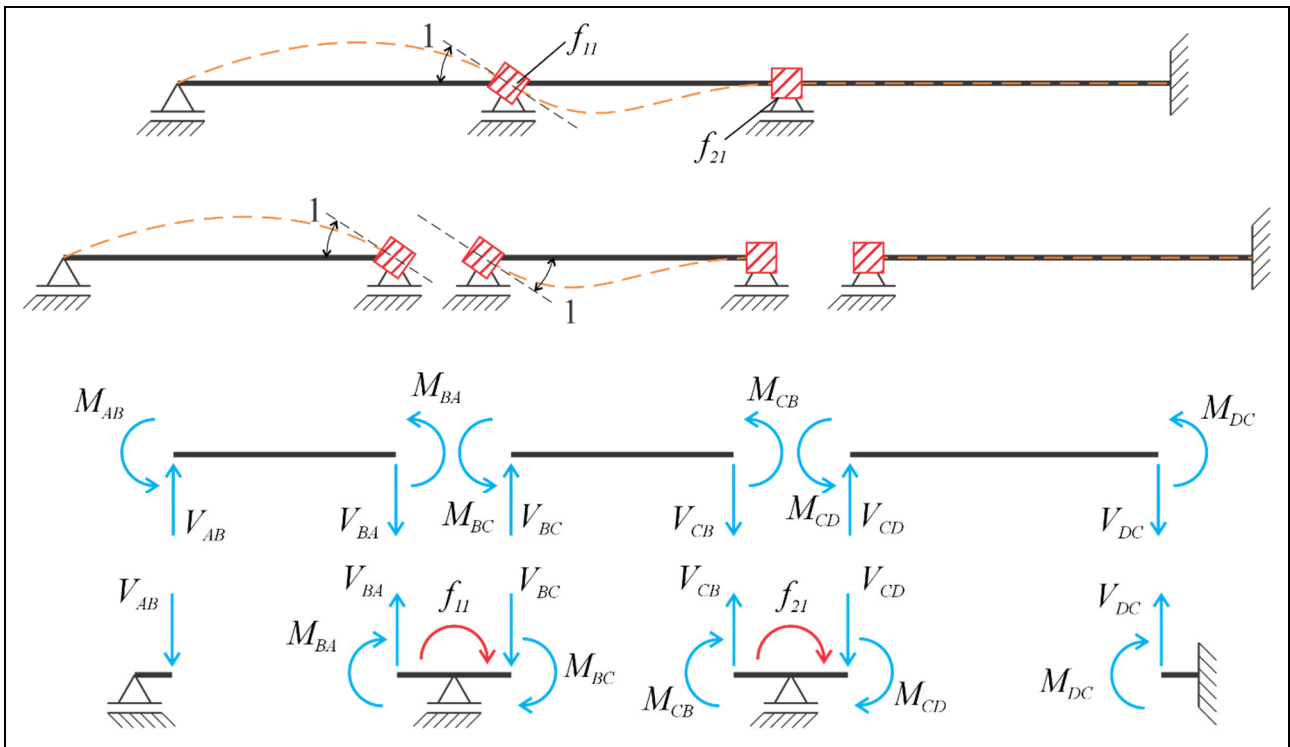
$$\sum M_C = 0 \rightarrow f_{20} + M_{CB} + M_{CD} = 0 \rightarrow f_{20} = -15,9 \text{ kN.m}$$

Para facilitar o desenho do diagrama de momento fletor ao final do processo, anotam-se os valores obtidos em um diagrama simplificado, mantendo-se a convenção de sinais de Grinter:



QUADRO 48. VTT: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR DO PROBLEMA (0).

Para o problema (1), em que atua isoladamente uma deslocabilidade unitária na direção e sentido de D_1 , implica no seguinte desenvolvimento:



QUADRO 49. VTT: PROBLEMA (1).

O Quadro 49 mostra a estrutura novamente dividida em tramos, para facilitar a leitura na tabela de momentos de engastamento perfeito. As condições de contorno nos tramos não se alteram, apenas as ações consideradas no problema. No primeiro tramo há um giro unitário à direita, no segundo tramo há um giro à esquerda, e nenhuma imposição ao último tramo. Assim sendo, os momentos de engastamento perfeito são dados por:

$$M_{BA} = \frac{-3EI}{l} = \frac{-3.2000}{6} = -1000 \text{ kN.m}$$

$$M_{BC} = \frac{-4EI}{l} = \frac{-4.2000}{5} = -1600 \text{ kN.m}$$

$$M_{CB} = \frac{-2EI}{l} = \frac{-2.2000}{5} = -800 \text{ kN.m}$$

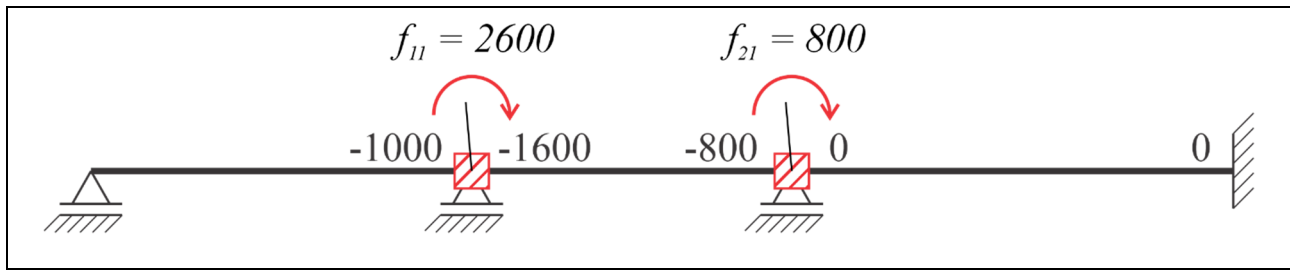
$$M_{CD} = 0 \text{ kN.m}$$

$$M_{DC} = 0 \text{ kN.m}$$

Determinadas as reações de momento de engastamento perfeito, são então transferidas aos nós, e por equilíbrio nodal, calculam-se as reações nos apoios fictícios e reais. As reações nos apoios fictícios, ou seja, os coeficientes de rigidez, são obtidos por equilíbrio nodal, conforme abaixo, e então anotados no diagrama simplificado (Quadro 50).

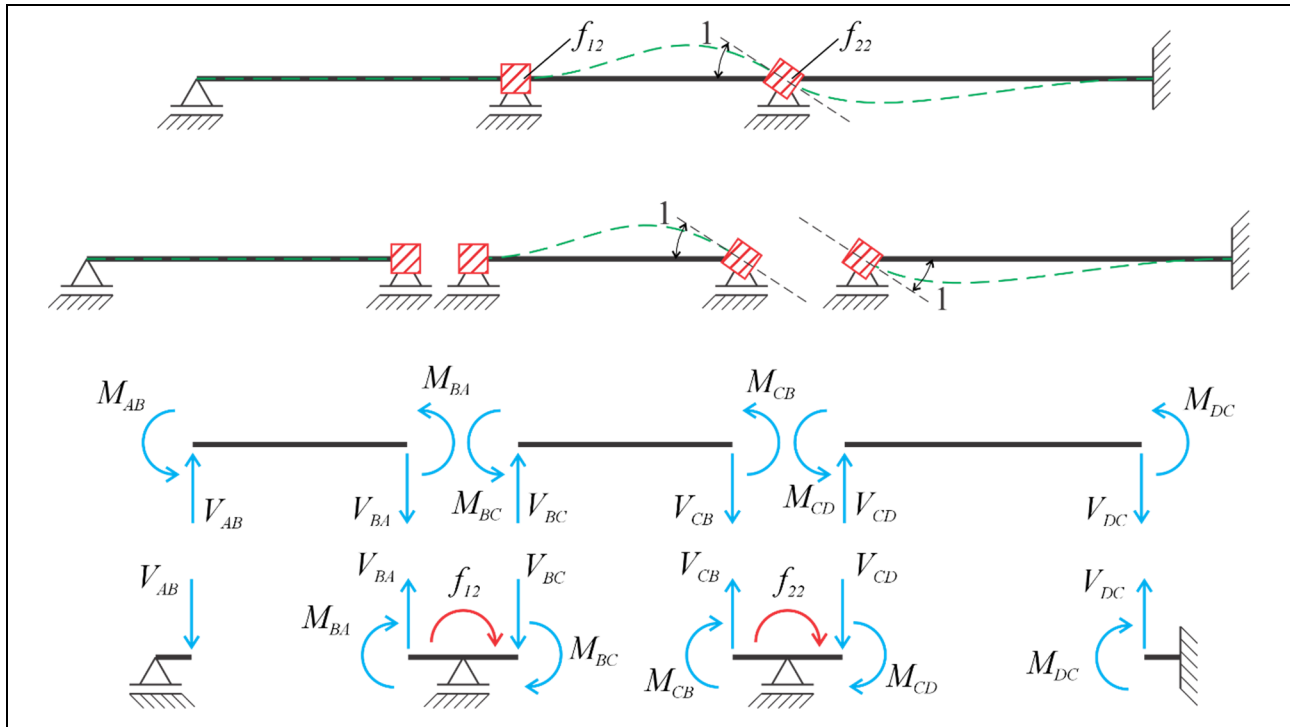
$$\sum M_B = 0 \rightarrow f_{11} + M_{BA} + M_{BC} = 0 \rightarrow f_{11} = 2600 \text{ kN.m}$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow f_{21} + M_{CB} + M_{CD} = 0 \rightarrow f_{21} = 800 \text{ kN.m}$$



QUADRO 50. VTT: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR DO PROBLEMA (1).

O problema (2), com a imposição de um deslocamento unitário na direção e sentido de D_2 , é mostrado no Quadro 51.



QUADRO 51. VTT: PROBLEMA (2).

Não há, sob qualquer hipótese, mudanças nas condições de contorno nos diferentes problemas. Há apenas mudança na ação imposta. Assim, no problema (2), não há deslocamento associado no tramo 1 (AB), no tramo 2 (BC) há um giro unitário à direita, e no tramo 3 (CD) há um giro à esquerda. Os valores dos momentos de engastamento perfeito, obtidos por tabelas e atendendo as condições de contorno, são dados por:

$$M_{BC} = \frac{-2EI}{l} = \frac{-2.2000}{5} = -800 \text{ kN.m}$$

$$M_{CB} = \frac{-4EI}{l} = \frac{-4.2000}{5} = -1600 \text{ kN.m}$$

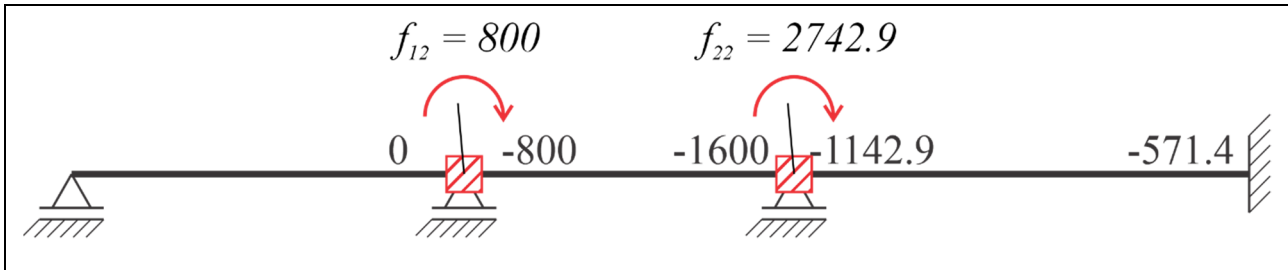
$$M_{CD} = \frac{-4EI}{l} = \frac{-4.2000}{7} = -1142,9 \text{ kN.m}$$

$$M_{DC} = \frac{-2EI}{l} = -571,4 \text{ kN.m}$$

As reações nos apoios fictícios (coeficientes de rigidez) são obtidas por equilíbrio nodal, conforme abaixo, e então anotados no diagrama simplificado (Quadro 52).

$$\sum M_B = 0 \rightarrow f_{12} + M_{BA} + M_{BC} = 0 \rightarrow f_{12} = 800 \text{ kN.m}$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow f_{22} + M_{CB} + M_{CD} = 0 \rightarrow f_{21} = 2742,9 \text{ kN.m}$$



QUADRO 52. VTT: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR DO PROBLEMA (2).

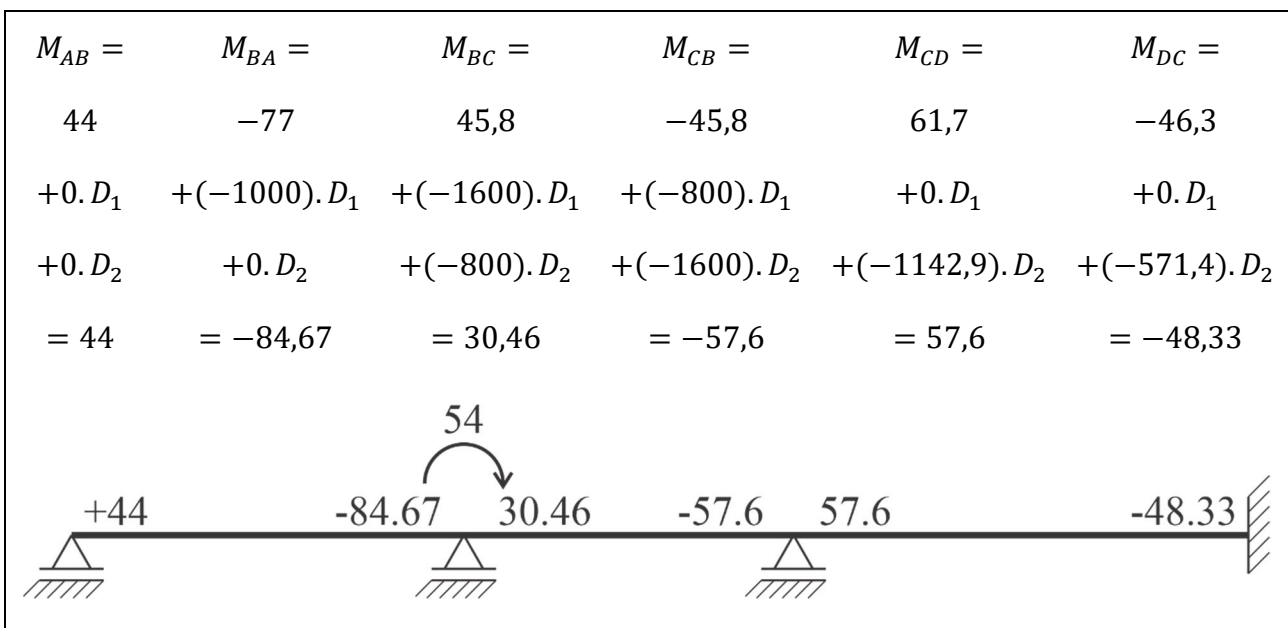
De posse das reações nos apoios fictícios de todos os problemas (f_{ij}), a resolução da equação (3.3) estabelece os valores das deslocabilidades D_1 e D_2 :

$$\begin{aligned} 54 &= 31,2 + 2600D_1 + 800D_2 \\ 0 &= -15,9 + 800D_1 + 2742,9D_2 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} D_1 &= 0,007674 \text{ rad} \\ D_2 &= 0,003558 \text{ rad} \end{aligned}$$

Conhecidas as deslocabilidades, as grandezas de interesse do problema (r) podem ser obtidas por sobreposição dos casos básicos, de forma análoga ao processo dos esforços (aplicando-se equivalente à equação (2.1)). Para o momento fletor, pode-se escrever:

$$M_r = M_0 + M_1D_1 + M_2D_2 = M_0 + 0,007674M_1 + 0,003558M_2$$

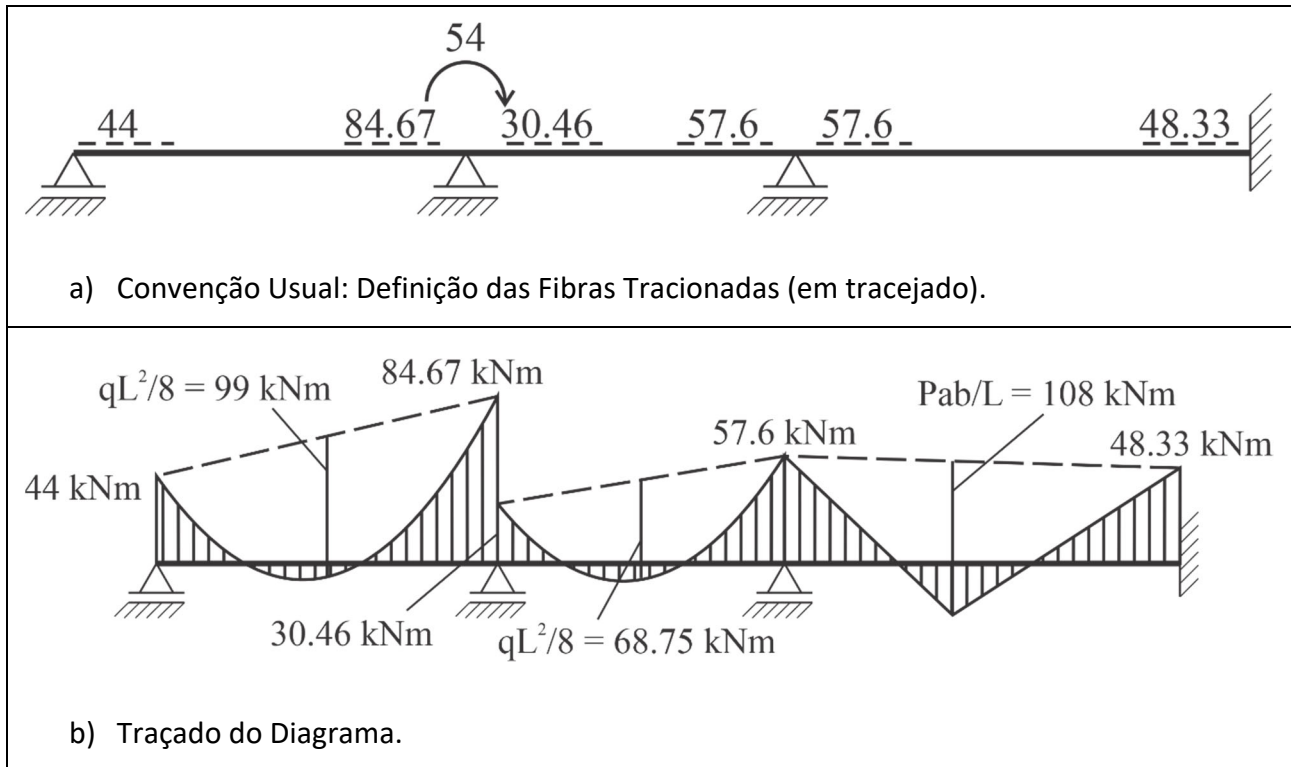
Ou ainda, observando os momentos obtidos na extremidade de cada tramo, em cada um dos problemas, tem-se que:



QUADRO 53. VTT: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR REAL NA CONVENÇÃO DE GRINTER.

O diagrama de momento fletor obtido por meio do processo dos deslocamentos estará, inevitavelmente, na convenção de Grinter. Deve-se convertê-lo para a convenção usual. Para facilitar o procedimento, é interessante estabelecer quais fibras estão sendo tracionadas, observando o sentido dos momentos na convenção de Grinter, como mostra o Quadro 54a.

Definidas as fibras tracionadas, é só questão de incluir a contribuição relativa ao carregamento existente na barra, procedimento chamado de “pendurar” no Livro 1. O resultado de todo o processo é apresentado no Quadro 54b.



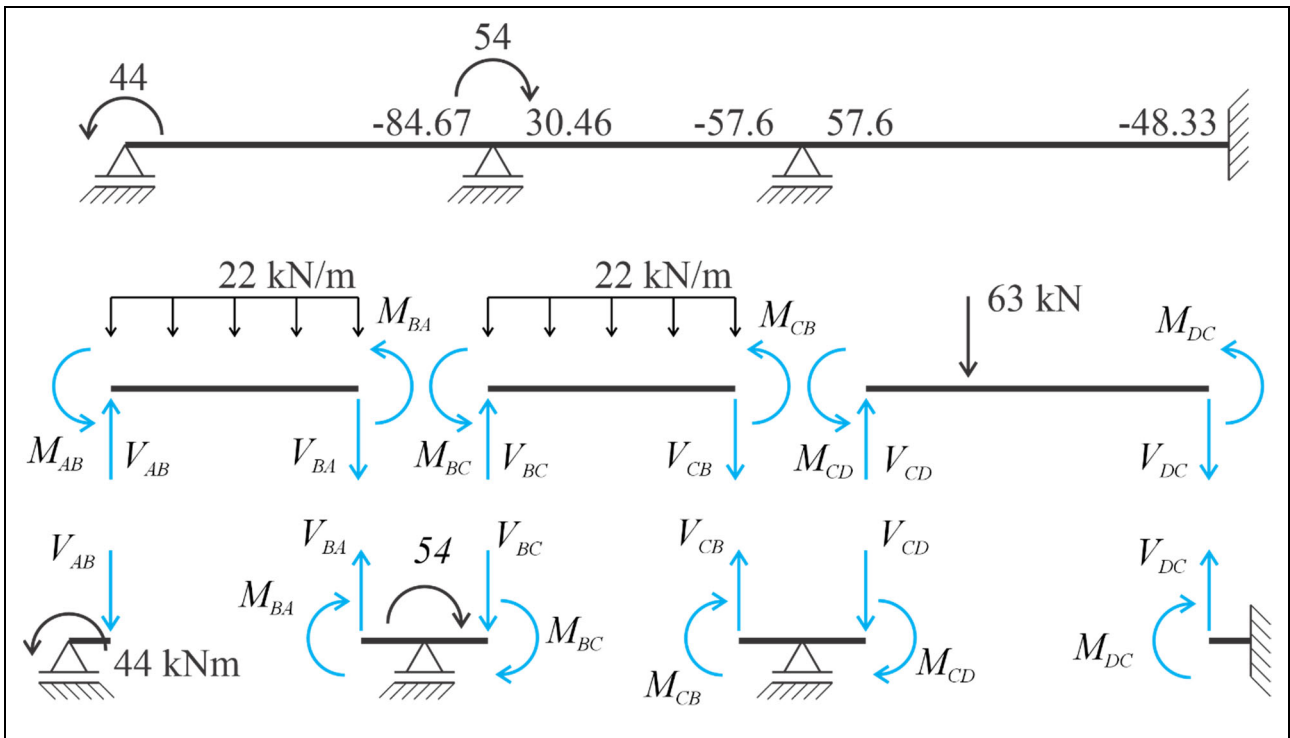
QUADRO 54. VTT: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR REAL NA CONVENÇÃO USUAL.

Esperava-se que o salto de momento em B fosse igual ao momento aplicado, de 54 kN.m. A diferença encontrada decorre de arredondamento, única e exclusivamente.

As reações de apoio e os esforços cortantes podem ser obtidos por simples equilíbrio, uma vez obtido o diagrama de momento fletor. Os esforços solicitantes nas extremidades das barras são dados pelas causas físicas (e.g. carga distribuída) acrescidos do binário resistente ao momento, como mostrado no Quadro 55. Tomando, como exemplo, o tramo AB, fazendo-se a somatória de momentos em A e a somatória de forças verticais:

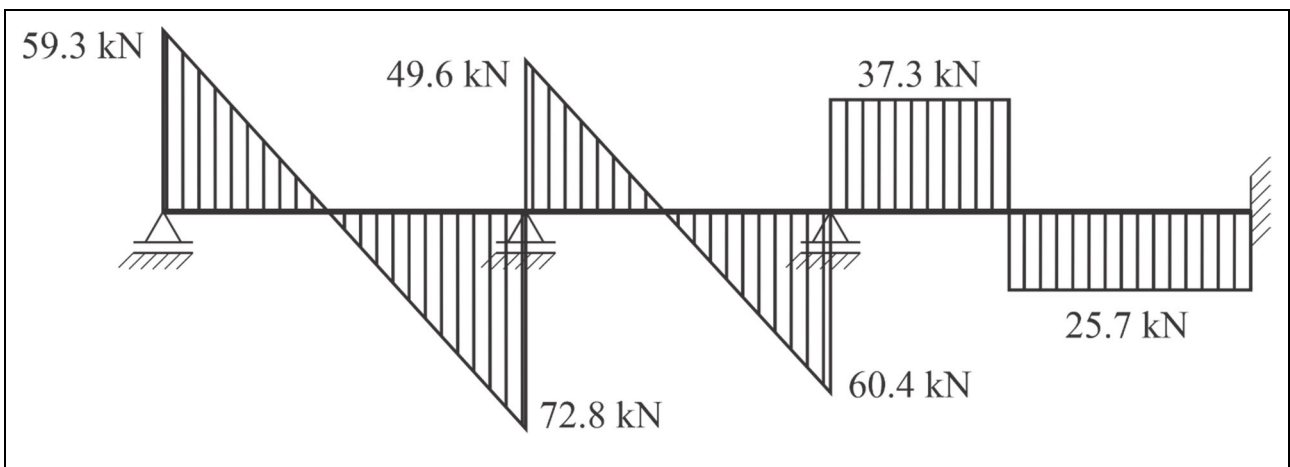
$$\sum M_A = 0 \rightarrow -V_{BA}l + M_{BA} - \frac{ql^2}{2} + M_{AB} = 0 \rightarrow V_{BA} = -72,8 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow V_{AB} + V_{BA} - ql = 0 \rightarrow V_{AB} = 59,3 \text{ kN}$$



QUADRO 55. VTT: EQUILÍBRIO DE ESFORÇOS.

A partir do equilíbrio de esforços, tomando-se as reações nas extremidades, é possível definir o diagrama de esforço cortante, mostrado no Quadro 56.



QUADRO 56. VTT: DIAGRAMA DE ESFORÇO CORTANTE.

3.3 Exemplo – Pórtico Plano com barras deformáveis axialmente (PP)

Neste exemplo explora-se a existência de deslocabilidades de translação, não apenas de giro. Para tanto, será abordado um pórtico plano com barras deformáveis axialmente, apresentado na Figura 49, com as seguintes propriedades físicas: $EI = 2.000 \text{ kN.m}^2$; $EA = 150000 \text{ kN}$.

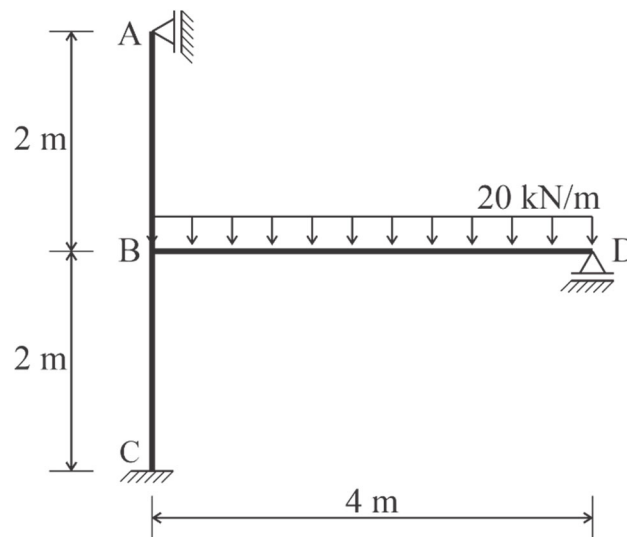


FIGURA 49. PROCESSO DOS DESLOCAMENTOS: BARRAS DEFORMÁVEIS AXIALMENTE.

O Sistema Hipergeométrico (ou estrutura geometricamente determinada) é definido a partir das deslocabilidades da estrutura, que serão novamente definidas por análise da cinemática da estrutura. Em pórticos, isto é feito em duas etapas – a primeira etapa consiste em avaliar quais nós são passíveis de giro (deslocabilidades internas). No caso, nós A, B e D. Como apenas no nó B o deslocamento e o momento fletor são desconhecidos, este irá receber um vínculo fictício, a primeira Deslocabilidade.

A segunda etapa consiste em avaliar quais nós da estrutura estão sujeitos a deslocamentos de translação (deslocabilidades externas). Não apenas isso, mas destes nós, em quais não é possível determinar o esforço solicitante correspondente. Em outras palavras, se você conhece ou o deslocamento ou o esforço solicitante correspondente, não há necessidade de bloqueio.

Iniciando esta segunda etapa de avaliação com o nó A, um apoio móvel, percebe-se que o deslocamento vertical não está impedido, portanto é candidato a receber um vínculo fictício. No entanto, ao seccionar a barra AB, o esforço normal (que ocorre na mesma direção do deslocamento vertical) é conhecido e igual a zero. Desta forma, não é necessário impor o vínculo. A mesma análise pode ser feita para o nó D, em que o deslocamento horizontal não está impedido, mas o esforço normal da barra BD é conhecido.

Já o nó B, após receber o vínculo fictício associado ao giro, permanece livre para se deslocar tanto na horizontal quanto na vertical. Considerando inicialmente a direção horizontal, além de livre para se deslocar, não é possível determinar o esforço cortante junto à B nas barras AB e BC, sendo então considerada uma segunda Deslocabilidade. Na direção vertical, por sua vez, não é possível determinar o esforço cortante junto à B na barra BD tampouco o esforço normal junto à B na barra BC, sendo então considerada a terceira e última Deslocabilidade.

Alternativamente, uma maneira de verificar a necessidade de restrição de deslocamento de translação é desmembrar a estrutura após os bloqueios de giro e se certificar de impor vínculos fictícios sempre que houver a transmissão de deslocamento entre elementos.

Outra maneira efetiva é verificar se os tramos da estrutura refletem alguma das condições de bloqueio apresentadas na tabela de momentos de engastamento perfeito (vide Tabela 2). São apenas três alternativas: apoio / engaste; engaste / engaste; e engaste / apoio.

Enfim, na Figura 50 é apresentada a Estrutura Geometricamente Determinada, em que três Deslocabilidades foram empregadas (D_1 a D_3). A resposta do problema real é dividida em 3 + 1 problemas, sendo três associados com as deslocabilidades e mais um associado com as ações atuantes na estrutura, conforme à situação esquematizada na Figura 51. Os valores das deslocabilidades devem ser tais que as reações nos apoios fictícios no problema equivalente sejam iguais ao problema real.

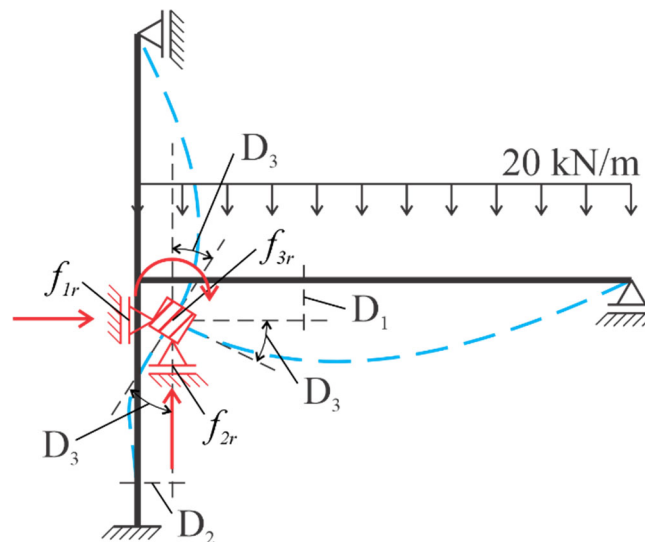


FIGURA 50. PP: ESTRUTURA GEOMETRICAMENTE DETERMINADA.

A sobreposição dos problemas pode ser escrita na forma de uma equação:

$$\begin{aligned}
 f_{1r} = 0 &= f_{10} + f_{11}D_1 + f_{12}D_2 + f_{13}D_3 \\
 f_{2r} = 0 &= f_{20} + f_{21}D_1 + f_{22}D_2 + f_{23}D_3 \\
 f_{3r} = 0 &= f_{30} + f_{31}D_1 + f_{32}D_2 + f_{33}D_3
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

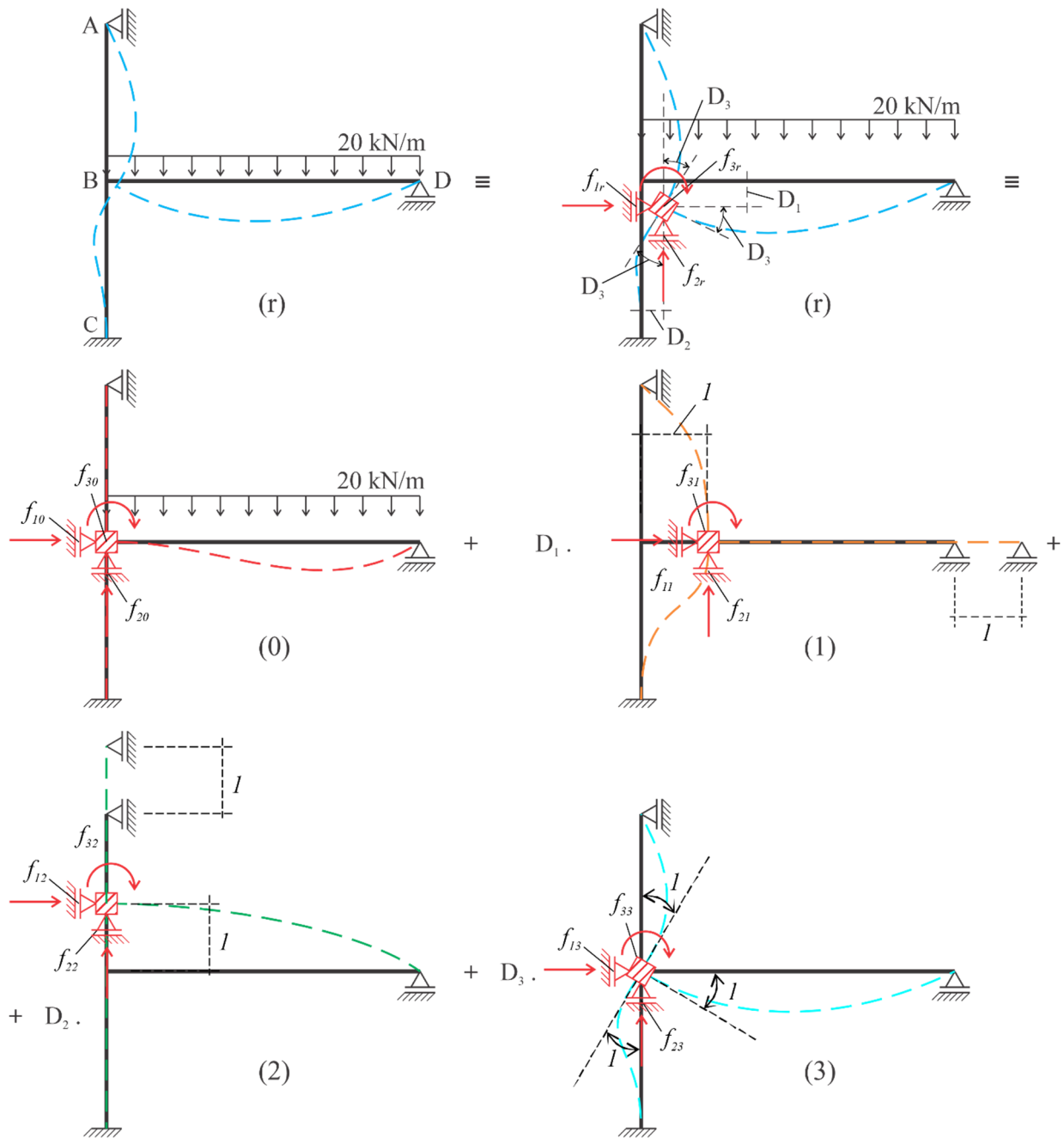
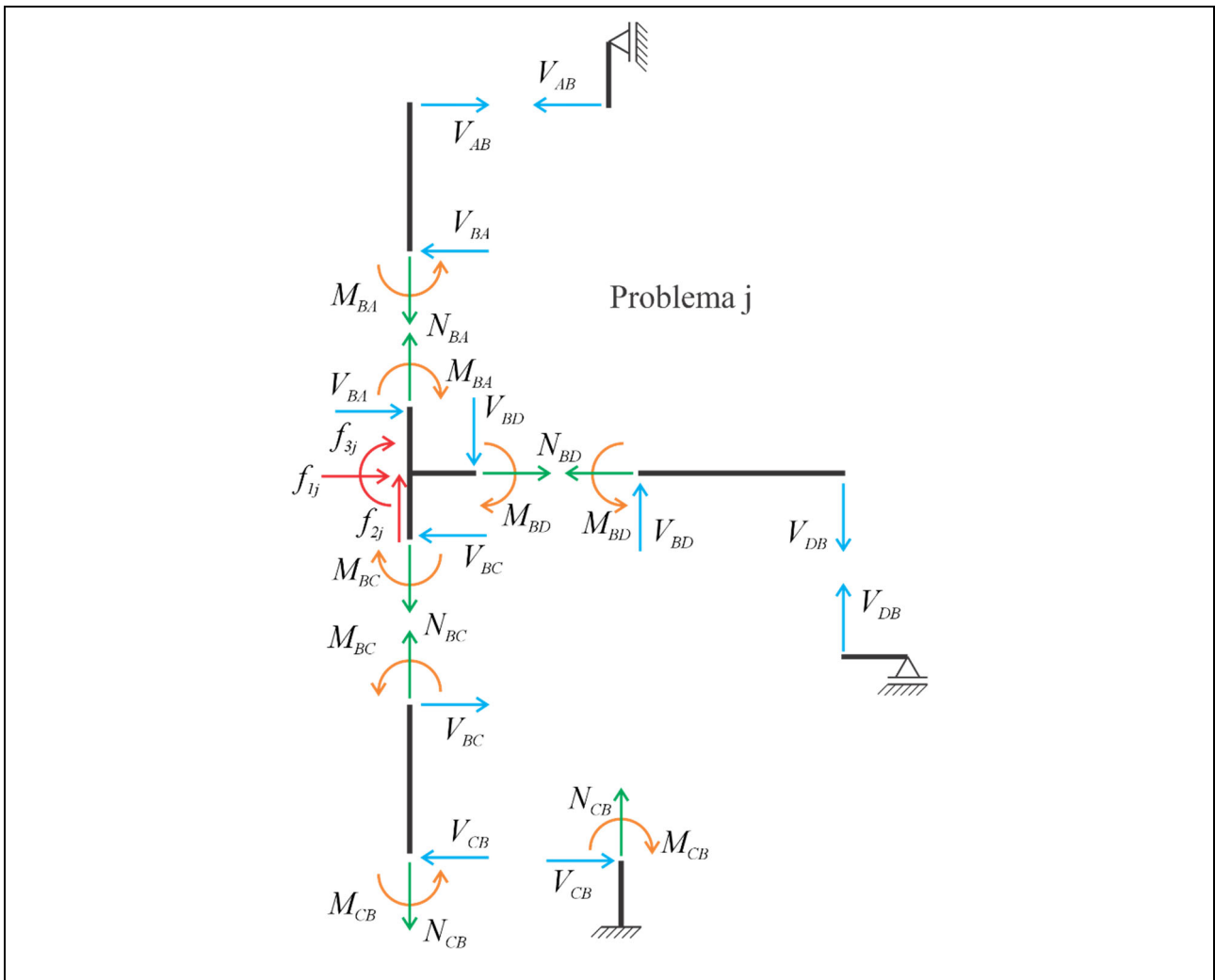


FIGURA 51. PP: SOBREPOSIÇÃO DOS PROBLEMAS.

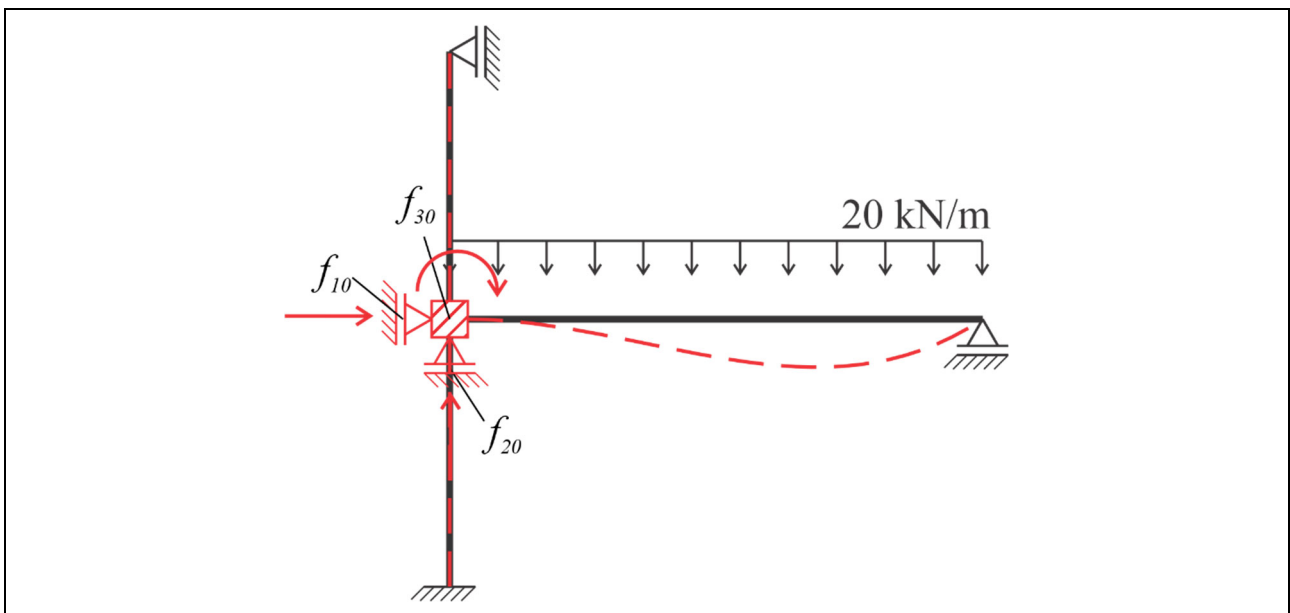
Como visto anteriormente, a restrição das deslocabilidades da estrutura gera tramos cinematicamente determinados, em que não ocorre a transmissão de deslocamentos de um tramo a outro. Desta forma, pode-se estudar cada tramo em separado. No Quadro 57 são mostrados os tramos e os respectivos esforços solicitantes. Em geral, parte será nulo, outra parte não será de interesse (pois não estará relacionada com os vínculos fictícios), e apenas alguns precisam ser investigados.

O tramo AB e o tramo BD estão engastados em uma das extremidades e apoiados na outra. Já o tramo BC encontra-se engastado em ambas extremidades.



QUADRO 57. PP: SEPARAÇÃO EM TRAMOS E ESFORÇOS SOLICITANTES.

No problema (0), em que as ações externas atuam isoladamente sobre a estrutura, apenas o tramo BD está sendo solicitado. Neste caso, surgem apenas os esforços M_{BD} , V_{BD} e V_{DB} , os demais são nulos.



QUADRO 58. PP: PROBLEMA (0).

Os valores dos momentos de engastamento perfeito são obtidos por meio da Tabela 2, respeitando-se as condições de contorno observadas. No caso dos momentos, apenas M_{BD} não será nulo, sendo dados por:

$$M_{BD} = \frac{ql^2}{8} = \frac{20 \cdot 4^2}{8} = 40 \text{ kN.m}$$

Além da reação de momento, é necessário determinar a reação vertical no apoio fictício. Esta pode ser obtida por simples equilíbrio do elemento. Fazendo-se a somatório de momentos em D, obtém-se:

$$\sum M_D = 0 \rightarrow V_{BD} \cdot l - M_{BD} - \frac{ql^2}{2} = 0 \rightarrow V_{BD} = 50 \text{ kN}$$

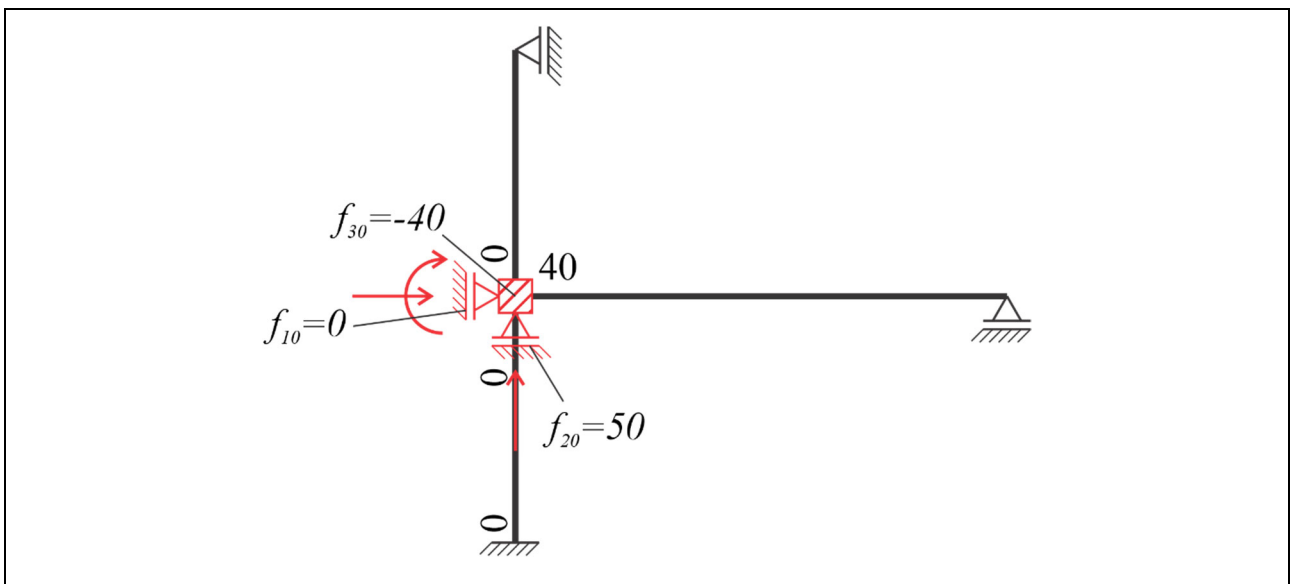
As reações nos apoios fictícios no problema (0), ou seja, os termos de carga f_{i0} , são obtidos por equilíbrio nodal:

$$\sum F_H = 0 \rightarrow f_{10} - H_{BD} = 0 \rightarrow f_{10} = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow f_{20} - V_{BD} = 0 \rightarrow f_{20} = 50 \text{ kN}$$

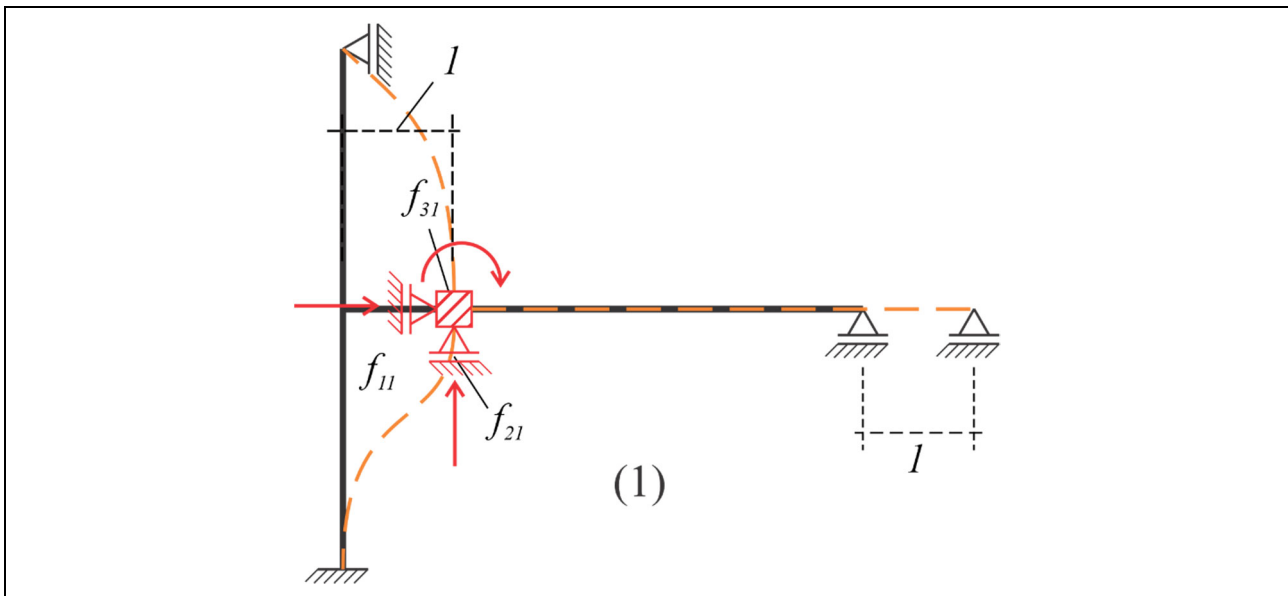
$$\sum M_B = 0 \rightarrow f_{30} + M_{BD} = 0 \rightarrow f_{30} = -40 \text{ kN.m}$$

São anotados os valores obtidos em um diagrama simplificado, para facilitar o desenho do diagrama de momento fletor ao final do processo, mantendo-se a convenção de sinais de Grinter:



QUADRO 59. PP: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR DO PROBLEMA (0).

Para o problema (1), em que atua isoladamente uma deslocabilidade unitária na direção e sentido de D_1 , implica no deslocamento observado no Quadro 60:



QUADRO 60. PP: PROBLEMA (1).

A deslocabilidade D_1 corresponde a um deslocamento de translação horizontal, no seu ponto de aplicação. Portanto, impõem-se um deslocamento horizontal unitário no ponto B e verifica-se como a estrutura irá se acomodar ao movimento imposto. O tramo BD é livre para deslocar horizontalmente, portanto desloca sem gerar esforços. Já os tramos AB e BC se deformam ao acompanhar o movimento, gerando esforços transversais, que devem ser levados ao apoio fictício.

Os valores dos momentos de engastamento perfeito, respeitando-se as condições de contorno observadas, e as reações nos tramos obtidas por equilíbrio, são dados por:

$$M_{BA} = \frac{-3EI}{l^2} = \frac{-3.2000}{2^2} = -1500 \text{ kN.m}$$

$$M_{BC} = M_{CB} = \frac{6EI}{l^2} = \frac{6.2000}{2^2} = 3000 \text{ kN.m}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_{BA} = \frac{3EI}{l^3} = \frac{3.2000}{2^3} = 750 \text{ kN}$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow V_{BC} = \frac{12EI}{l^3} = \frac{12.2000}{2^3} = 3000 \text{ kN}$$

$$H_{BD} = 0 \text{ kN}$$

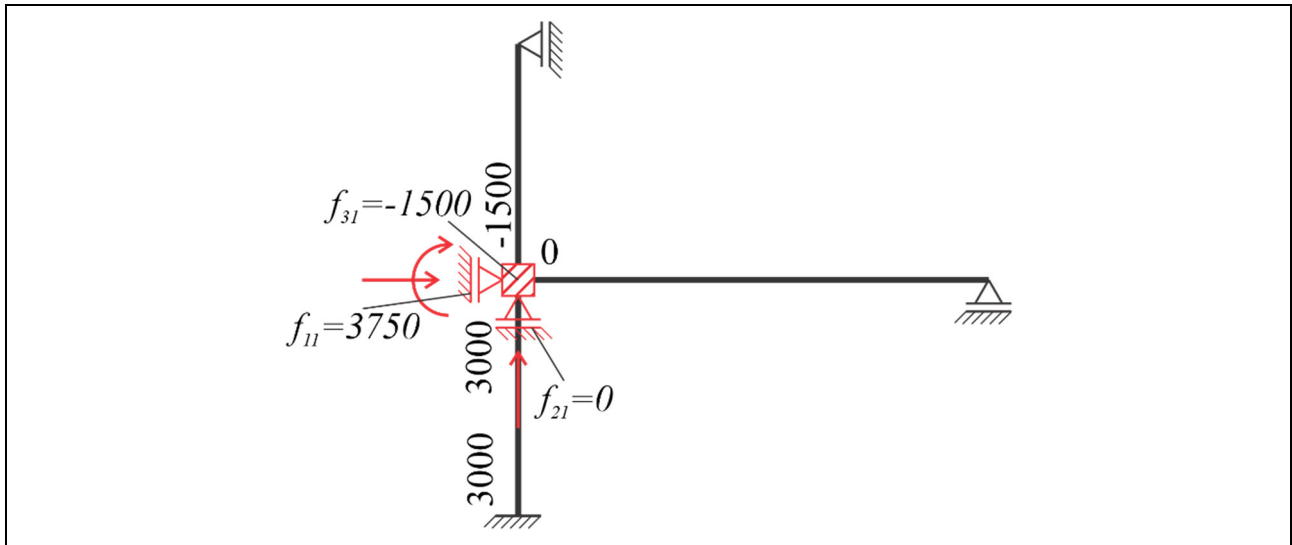
As reações nos apoios fictícios para o problema (1), ou seja, os coeficientes de rigidez f_{i1} , são dados por equilíbrio nodal:

$$\sum F_H = 0 \rightarrow f_{11} - V_{BA} - V_{BC} = 0 \rightarrow f_{11} = 3750 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow f_{21} = 0 \text{ kN}$$

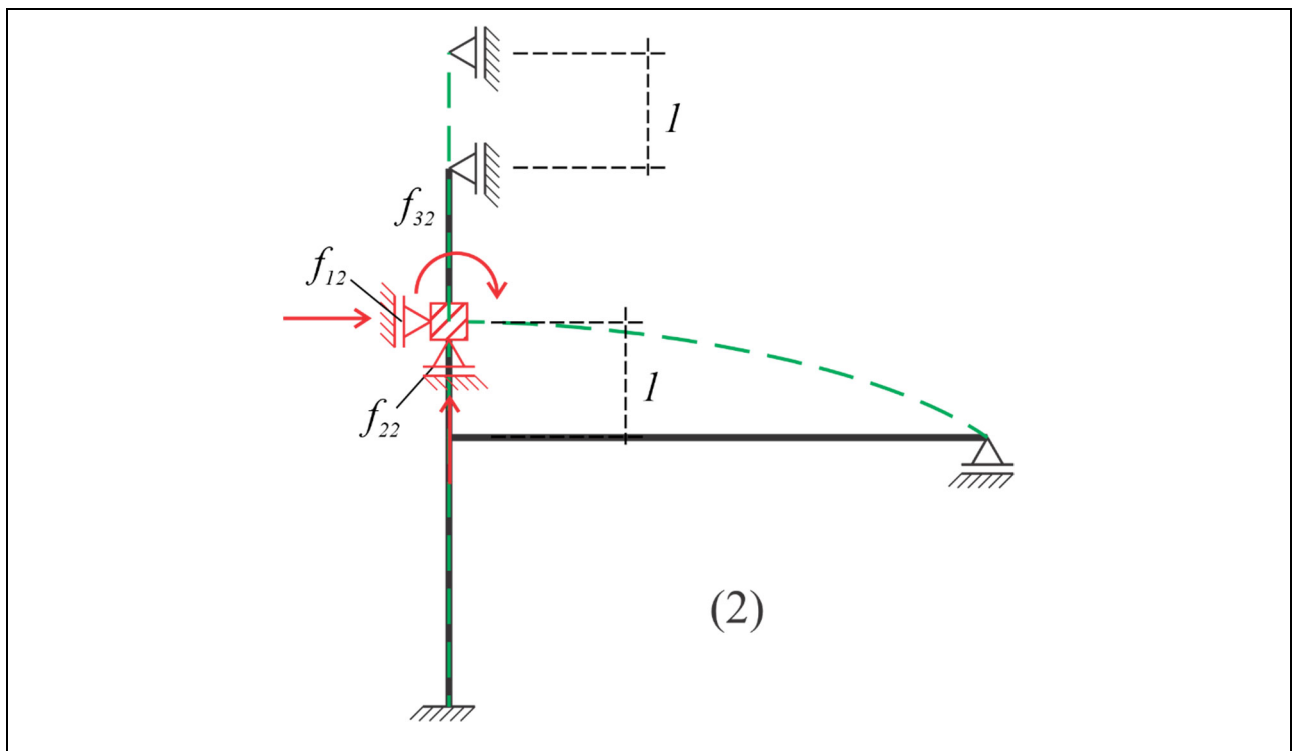
$$\sum M_B = 0 \rightarrow f_{31} + M_{BA} + M_{BC} = 0 \rightarrow f_{31} = -1500 \text{ kN.m}$$

Os momentos de engastamento perfeito e os coeficientes de rigidez para o problema (1) são transcritos a um diagrama simplificado, como mostrado no Quadro 61.



QUADRO 61. PP: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR DO PROBLEMA (1).

Repete-se o procedimento para o problema (2), em que atua isoladamente uma deslocabilidade unitária na direção e sentido de D_2 , o que implica no deslocamento observado no Quadro 62:



QUADRO 62. PP: PROBLEMA (2).

A deslocabilidade D_2 corresponde a um deslocamento de translação vertical em B. Portanto, impõem-se um deslocamento vertical unitário no ponto B e verifica-se como a estrutura irá se acomodar ao movimento imposto.

O tramo AB é livre para deslocar verticalmente, portanto desloca sem gerar esforços. Já os tramos BC e BD se deformam ao acompanhar o movimento, gerando esforços que devem ser levados ao apoio fictício. No tramo BC, a deformação é axial, e no tramo BD a deformação é transversal. Os valores nas extremidades dos tramos são dados por (vide Tabela 2 e Tabela 3):

$$H_{BA} = 0 \text{ kN}$$

$$H_{BC} = \frac{EA}{2} = \frac{150000}{2} = 75000 \text{ kN}$$

$$M_{BD} = \frac{3EI}{l^2} = 375 \text{ kN.m}$$

$$V_{BD} = \frac{3EI}{l^3} = 93,75 \text{ kN}$$

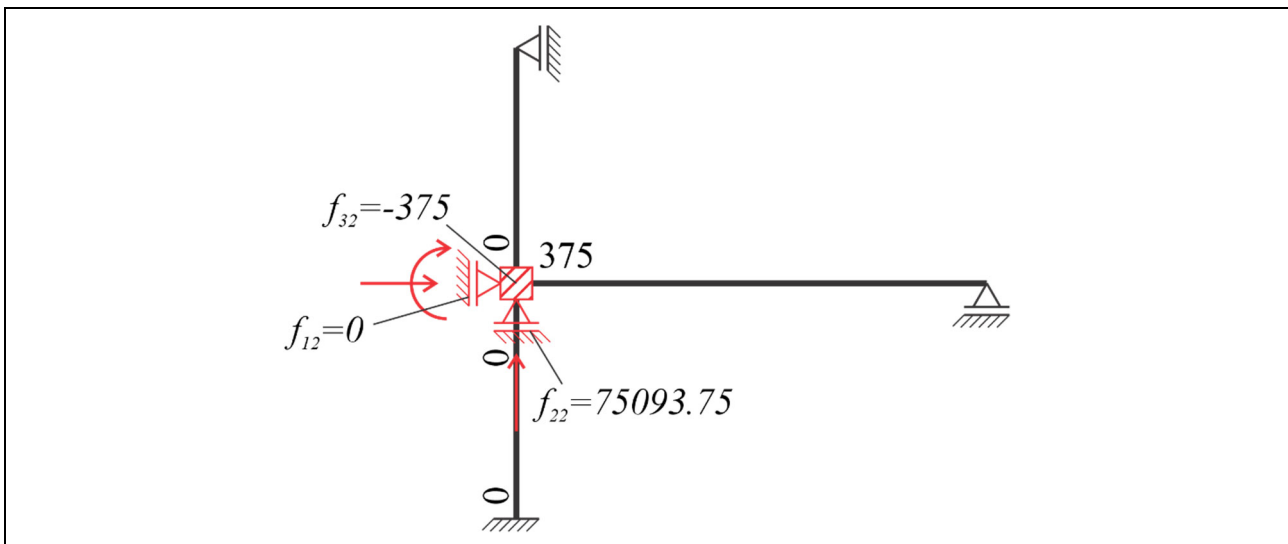
As reações nos apoios fictícios para o problema (2), ou seja, os coeficientes de rigidez f_{i2} , são dados por equilíbrio nodal:

$$\sum F_H = 0 \rightarrow f_{12} = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow f_{22} - H_{BA} - H_{BC} - V_{BD} = 0 \rightarrow f_{22} = 75093,75 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow f_{32} + M_{BD} = 0 \rightarrow f_{32} = -375 \text{ kN.m}$$

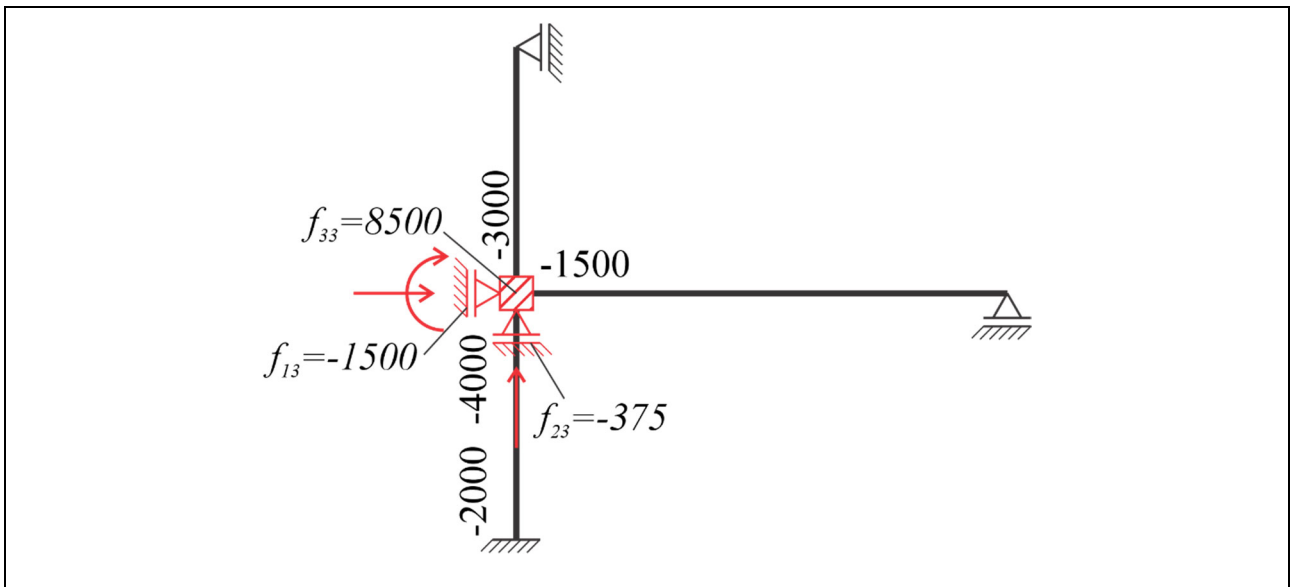
Transcreve-se os valores dos momentos de engastamento perfeito e dos coeficientes de rigidez para o problema (2) a um diagrama simplificado, como mostrado no Quadro 63:



QUADRO 63. PP: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR DO PROBLEMA (2).

Todo o procedimento é repetido para o problema (3), em que atua isoladamente uma deslocabilidade unitária na direção e sentido de D_3 , conforme apresentado no Quadro 64. A deslocabilidade D_3 corresponde a um deslocamento rotacional em B. Portanto, impõem-se um giro unitário no ponto B e verifica-se como a estrutura irá se acomodar ao movimento imposto. Os três elementos fletem, portanto, há esforços transversais em todos os elementos.

Os valores obtidos dos momentos de engastamento perfeito e dos coeficientes de rigidez para o problema (3) são registrados no Quadro 65, mantendo-se a convenção de sinais de Grinter:



QUADRO 65. PP: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR DO PROBLEMA (3).

Obtidas as reações nos apoios fictícios (f_{ij}), a resolução da equação (3.4) estabelece os valores das deslocabilidades D_1 a D_3 :

$$\begin{aligned} f_{1r} = 0 &= 0 + 375D_1 + 0D_2 - 1500D_3 \\ f_{2r} = 0 &= 50 + 0D_1 + 75093,75D_2 - 375D_3 \\ f_{3r} = 0 &= -40 - 1500D_1 - 375D_2 + 8500D_3 \end{aligned}$$

$$D_1 = 0,0020132 \text{ m} = \frac{4,0263}{EI}$$

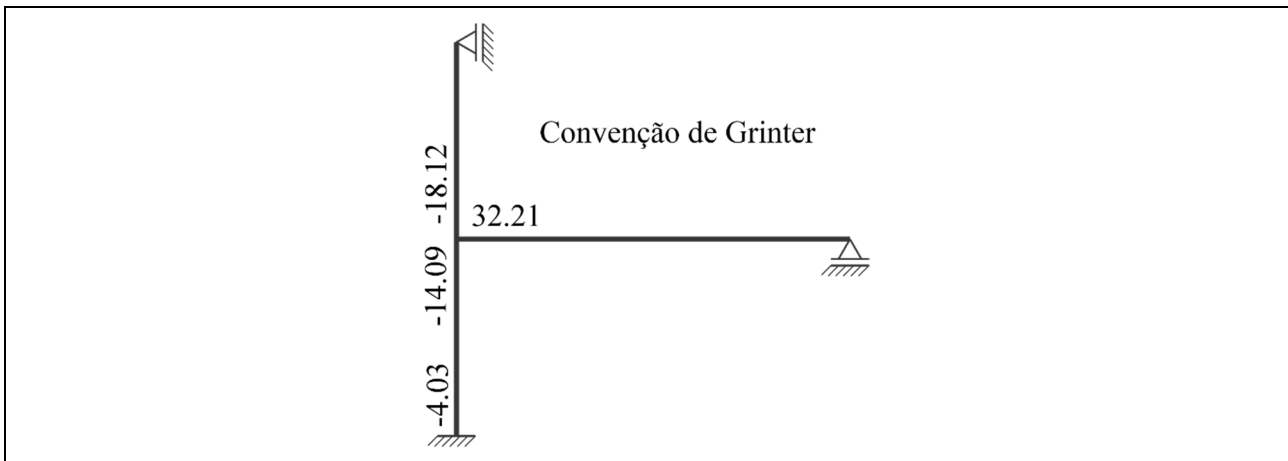
$$D_2 = -0,0006407 \text{ m} = \frac{-1,2814}{EI}$$

$$D_3 = 0,0050329 \text{ rad} = \frac{10,0658}{EI}$$

É importante perceber que as reações nos apoios fictícios são sempre simétricas ($f_{ij} = f_{ji}$), e as reações causadas pelas próprias deslocabilidades recebem apenas contribuições aditivas (f_{ii}^+). Conhecidas as deslocabilidades, as grandezas de interesse do problema (r) podem ser obtidas por sobreposição dos casos básicos. Para o momento fletor, pode-se escrever:

$$M_r = M_0 + M_1D_1 + M_2D_2 + M_3D_3$$

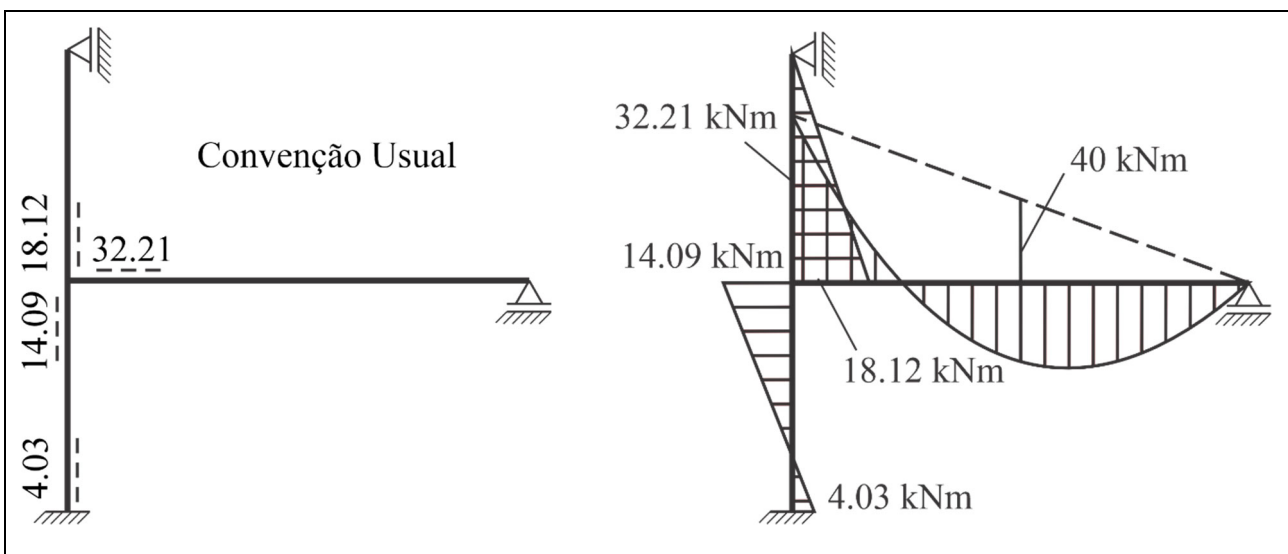
A sobreposição dos diagramas de momento fletor ocorre na convenção de Grinter, provendo o diagrama mostrado no Quadro 66.



QUADRO 66. PP: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR REAL NA CONVENÇÃO DE GRINTER.

Uma vez obtido o diagrama de momento na convenção de Grinter, deve-se converter para a convenção usual. Para facilitar o procedimento, é interessante estabelecer o sentido dos momentos nas extremidades das barras, e então analisar quais fibras estão sendo tracionadas.

Definidas as fibras tracionadas, é só questão de incluir a contribuição relativa ao carregamento existente na barra, procedimento chamada de “pendurar” no Livro 1. Todo o processo é resumido no Quadro 67.



QUADRO 67. PP: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR REAL NA CONVENÇÃO USUAL.

3.4 Grau de Hipogeometria ou de Deslocabilidade

O grau de deslocabilidade de uma estrutura é definido pela soma das deslocabilidades internas de cada nó com as deslocabilidades externas dos nós. A deslocabilidade interna é representada pela possibilidade de rotação entre elementos. Já a deslocabilidade externa é dada pelo número de reações que podem ser adicionadas aos nós para inibir deslocamentos indeterminados.

De forma geral, ao considerar uma estrutura com elementos flexíveis axialmente, todo nó não vinculado é passível de deslocamento de translação horizontal, translação vertical e rotação. No entanto, para desenvolver cálculo manual, é usual considerar os tramos rígidos axialmente, pois isto reduz o número de deslocabilidades externas.

Considere o pórtico da Figura 52a. Todo encontro de barras, se já não vinculado / rotulado, deve ser restringido ao giro, seja considerando-se rígida ou flexível axialmente. O grau de deslocabilidade interno (gdi) é igual, para ambas situações, a 2.

No que condiz a deslocabilidade externa, observando a estrutura flexível axialmente, esses mesmo nós poderiam deslocar tanto horizontalmente quanto verticalmente, levando a um grau de deslocabilidade externo (gde) igual a 4.

Ao considerar barras rígidas axialmente, no referido pórtico, os nós são impedidos de se deslocar horizontalmente pelo engaste à esquerda. Os nós também são impedidos de deslocar verticalmente, por motivo análogo. Desta forma, não há deslocabilidade externa.

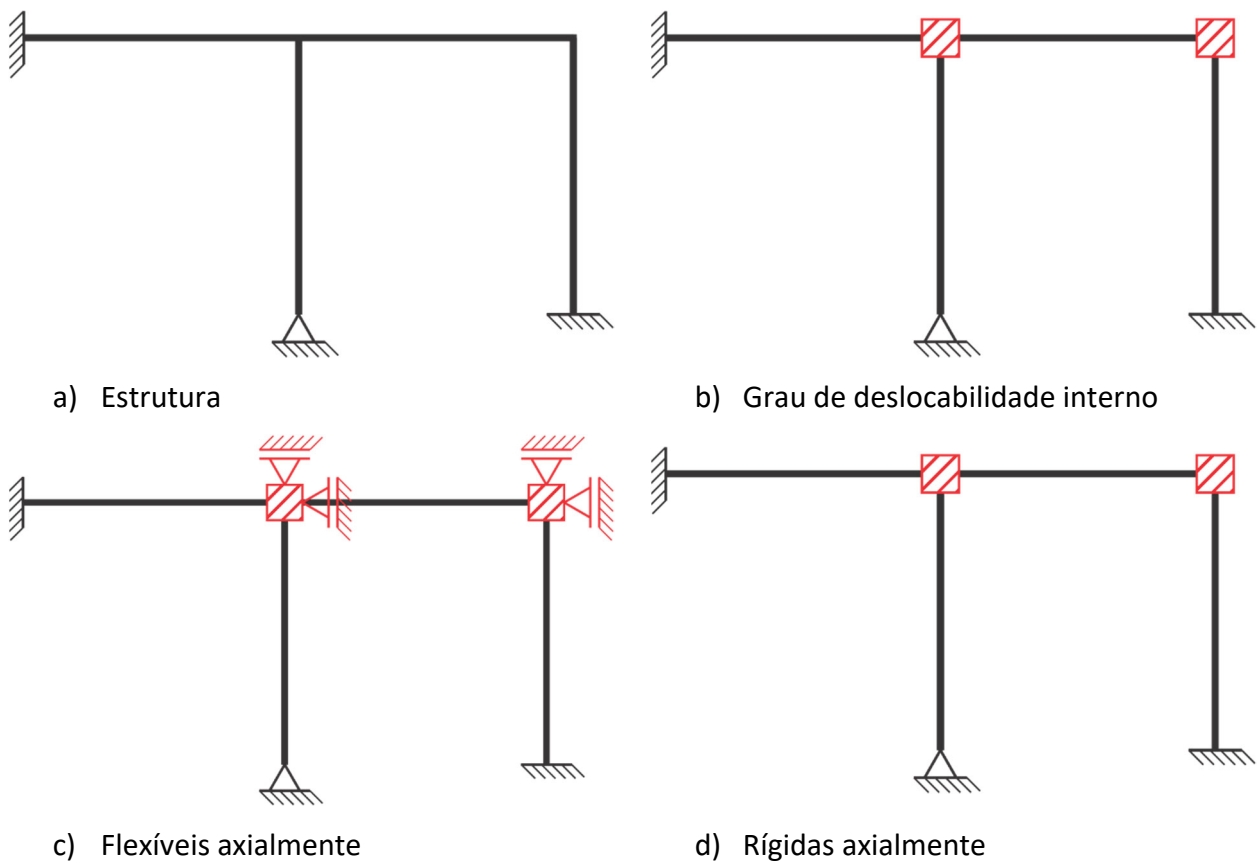
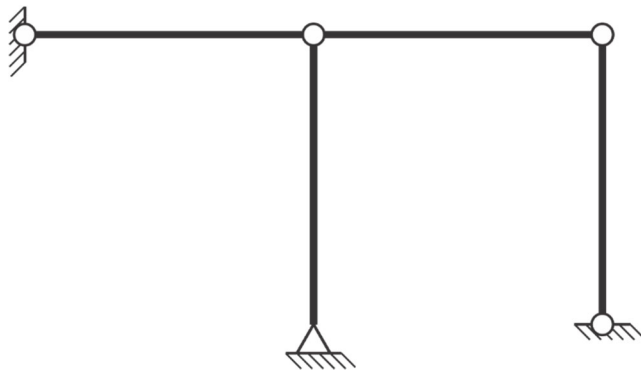


FIGURA 52. EXEMPLO 1 DE GRAU DE HIPOGEOMETRIA.

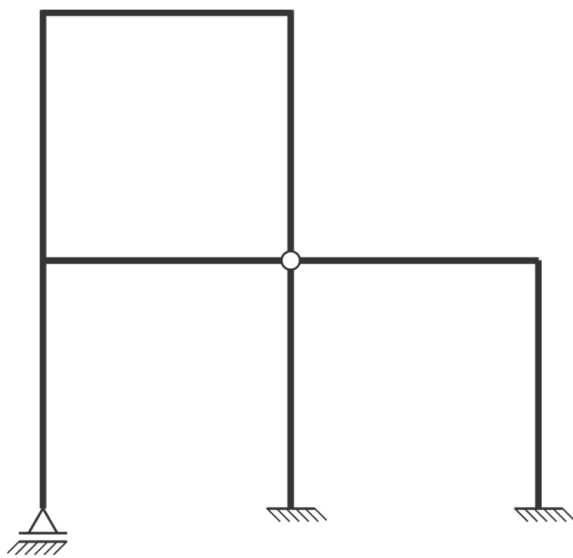
Uma forma mais simples de determinar o gde é articular os nós e transformar em uma treliça equivalente, e então proceder com a contagem do grau de deslocabilidade de uma treliça, ou seja, de barras existentes e necessárias, como mostrado na Figura 53.



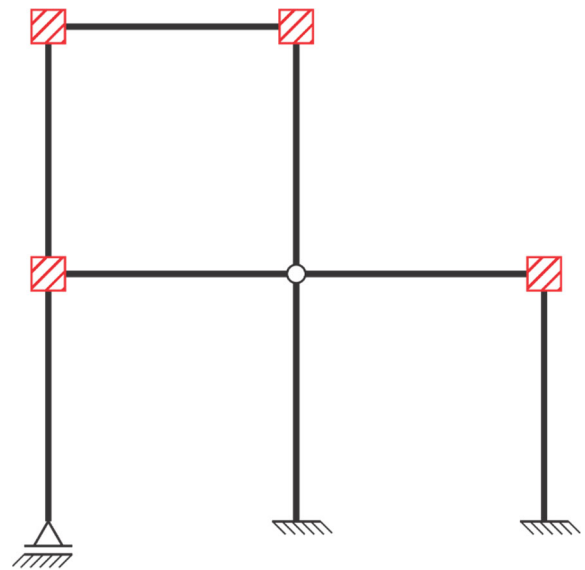
$$\begin{cases} b = 10 \\ n = 5 \\ b_n = 2n = 10 \end{cases} \therefore gde = 0$$

FIGURA 53. CONTABILIZANDO GRAU DE DESLOCABILIDADE EXTERNA.

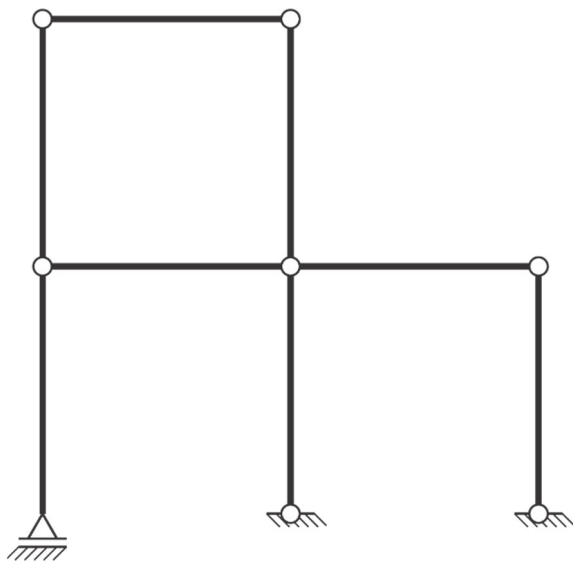
Como segundo exemplo, considere o pórtico da Figura 54, inicialmente com uma rótula. O grau de deslocabilidade interno é 4, nos quatro encontros de barras.



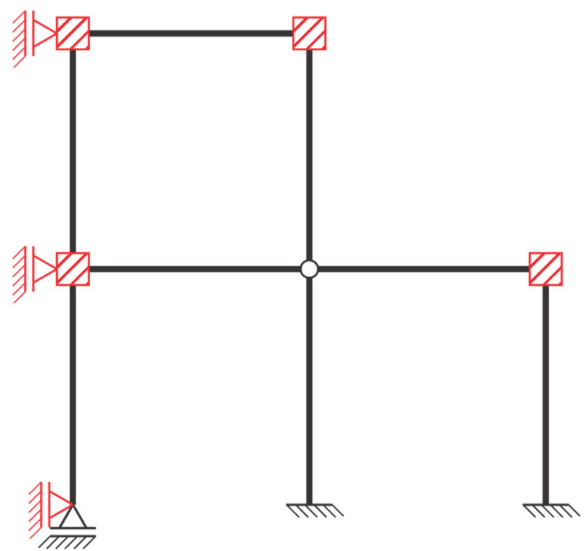
a) Estrutura



b) Grau de deslocabilidade interno



c) Treliça equivalente



d) Estrutura com vínculos

FIGURA 54. EXEMPLO 2 DE GRAU DE HIPOGEOMETRIA.

A treliça equivalente apresenta 13 barras e 8 nós. O número de barras necessárias então é 16, portanto o grau de deslocabilidade externa é 3. Vinculando-se horizontalmente os nós indicados, em virtude da mesma ser rígida axialmente, todos os deslocamentos foram restringidos.

Esse procedimento é válido para o caso de todas as barras serem rígidas axialmente. No caso de existirem trecho deformáveis axialmente, esses não devem ser considerados como barras na contagem, da mesma forma que eventuais molas de translação existentes nos vínculos externos.

3.5 Exemplo – Pórtico Plano com barras rígidas axialmente (PBR)

Voltando-se ao exemplo de pórtico plano, desta vez considerando-se barras indeformáveis axialmente (rígidas), busca-se inicialmente determinar o grau de deslocabilidade e determinar o Sistema Hipergeométrico.

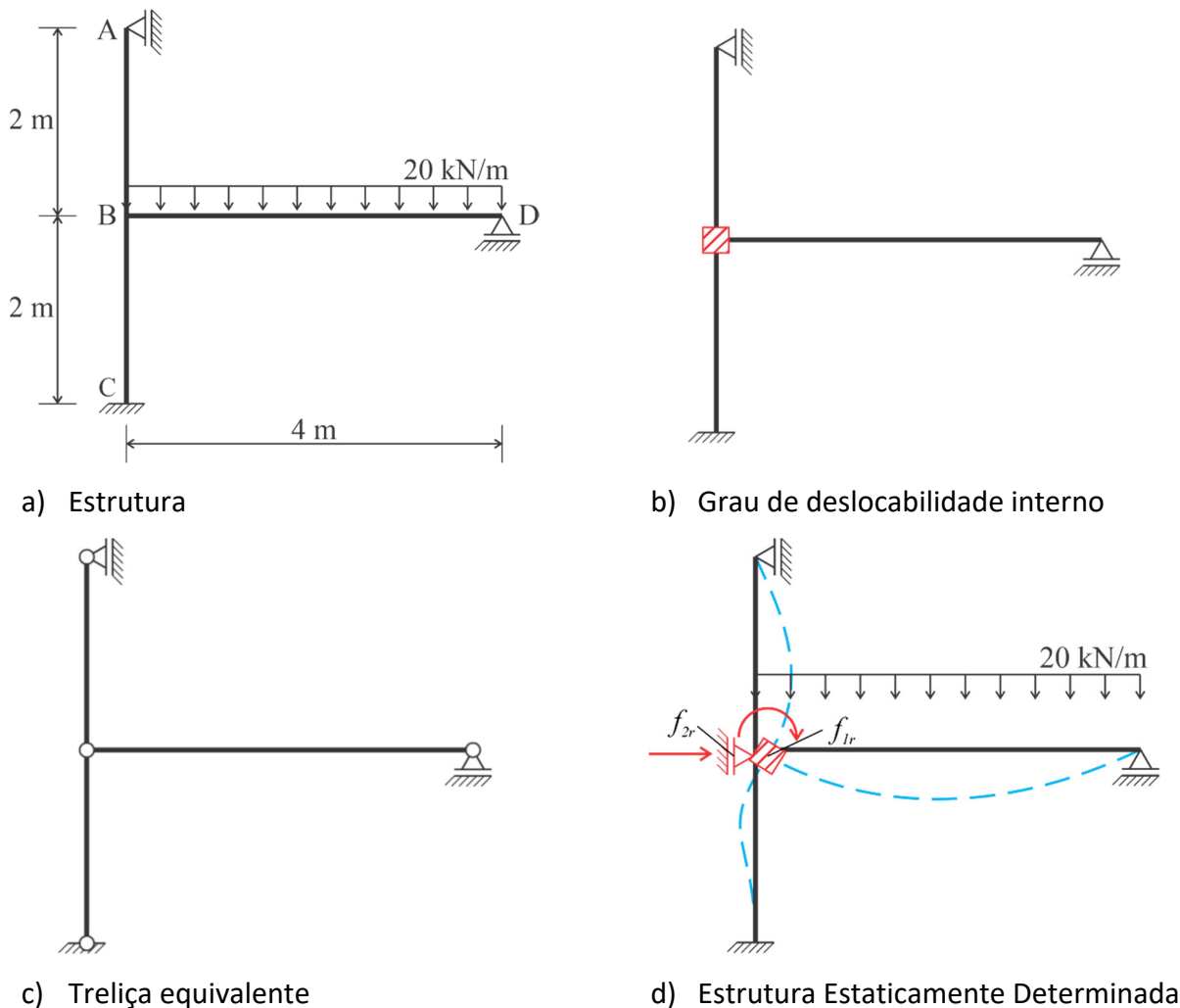


FIGURA 55. PBR: GRAU DE DESLOCABILIDADE.

O grau de deslocabilidade interno é um, em B. Quanto a determinação geométrica na treliça equivalente, são sete barras existentes para oito barras necessárias. Ou seja, o grau de deslocabilidade externo é um, e está associado ao deslocamento horizontal da barra BD. Portanto, será incluído um vínculo horizontal em B.

Desta forma, foram definidas duas deslocabilidades, impondo a solução de 2 + 1 problemas, conforme esquema na Figura 56.

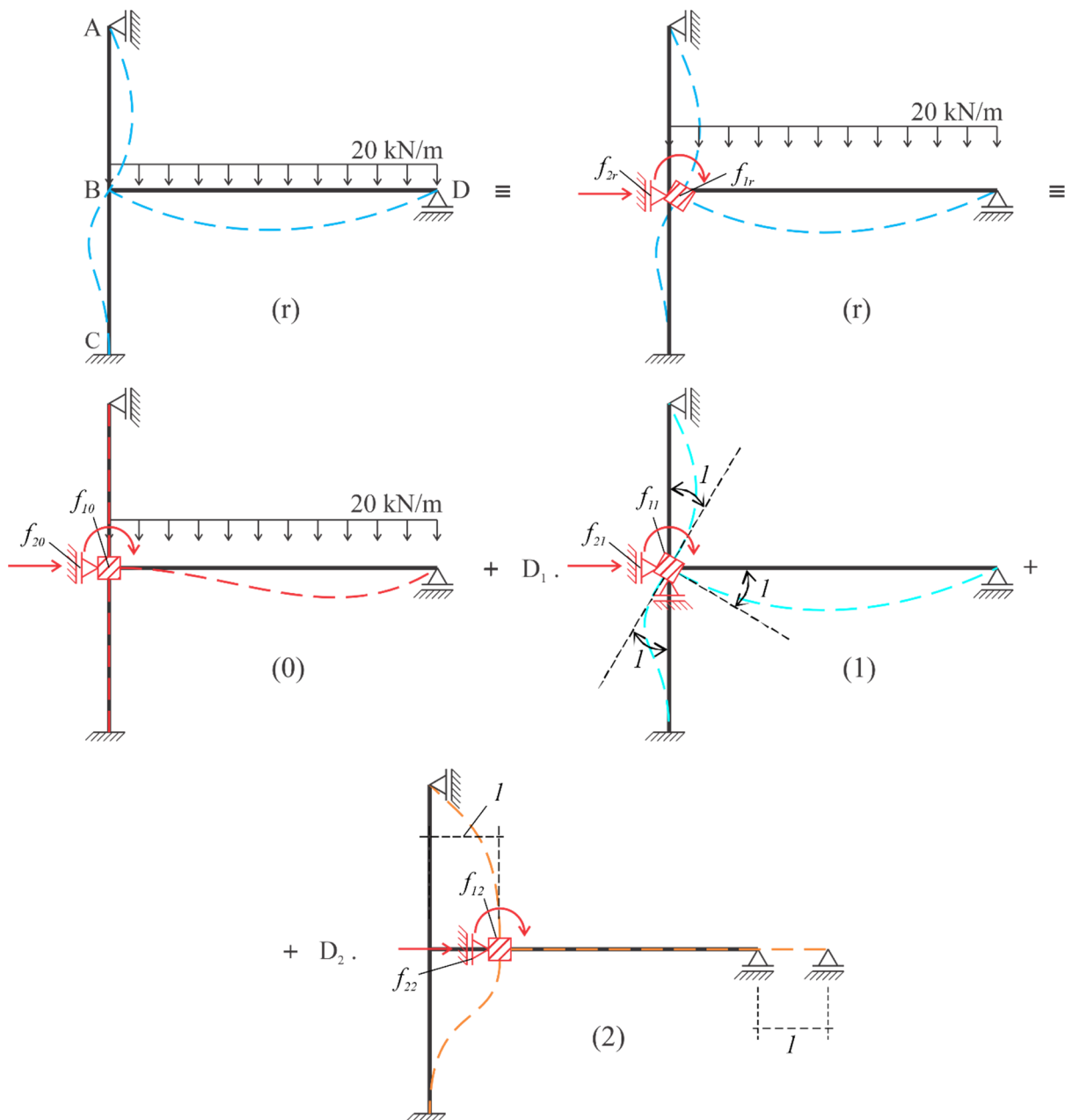
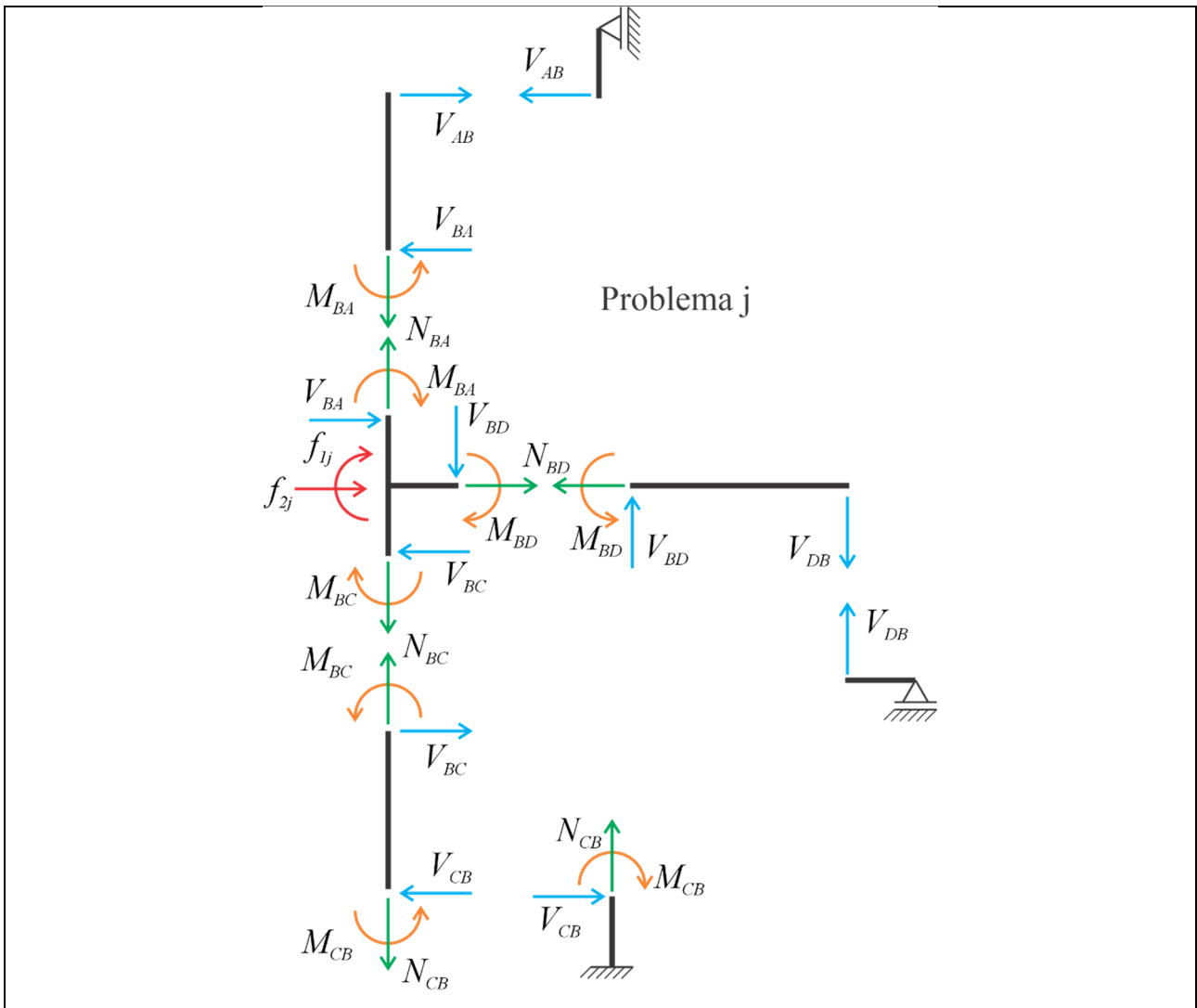


FIGURA 56. PBR: SOBREPOSIÇÃO DOS PROBLEMAS.

Na forma de uma equação:

$$\begin{aligned} f_{1r} = 0 &= f_{10} + f_{11}D_1 + f_{12}D_2 \\ f_{2r} = 0 &= f_{20} + f_{21}D_1 + f_{22}D_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Novamente destaca-se que a restrição das deslocabilidades da estrutura gera tramos cinematicamente determinados, em que não ocorre a transmissão de deslocamentos de um tramo a outro, permitindo avaliar cada tramo em separado. O Quadro 68 mostra os tramos separados e todos os esforços solicitantes existentes, com adoção positiva acompanhando a convenção de Gringer, cortantes positivos na extremidade das barras, e esforço normal de tração.



QUADRO 68. PBR: ESFORÇOS SOLICITANTES.

No problema (0), em que as ações externas atuam isoladamente sobre a estrutura, apenas o tramo BD está sendo solicitado. Sendo assim, o único momento de engastamento perfeito a ser calculado é o M_{BD} :

$$M_{BD} = \frac{ql^2}{8} = \frac{20 \cdot 4^2}{8} = 40 \text{ kN.m}$$

Além do momento, as reações V_{BD} e V_{DB} não são nulas, porém não são de interesse pois não atingem os apoios fictícios. Desta forma, por equilíbrio nodal, tem-se que:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\rightarrow f_{10} + M_{BD} = 0 \rightarrow f_{10} = -40 \text{ kN.m} \\ \sum F_H = 0 &\rightarrow f_{20} = 0 \text{ kN} \end{aligned}$$

Todos os valores obtidos estão anotados no Quadro 69. Para o problema (1), em que atua isoladamente uma deslocabilidade unitária na direção e sentido de D_1 , ou seja, um deslocamento rotacional em B, os três elementos fletem, portanto, há esforços transversais em todos os elementos. Sendo assim, os momentos de engastamento perfeito e as reações são dados por:

$$M_{BA} = \frac{-3EI}{l} = \frac{-3.2000}{2} = -3000 \text{ kN.m}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_{BA} = \frac{-M_{BA}}{l} = \frac{3000}{2} = 1500 \text{ kN}$$

$$M_{BD} = \frac{-3EI}{l} = \frac{-3.2000}{4} = -1500 \text{ kN.m}$$

$$M_{BC} = \frac{-4EI}{l} = \frac{-4.2000}{2} = -4000 \text{ kN.m}$$

$$M_{CB} = \frac{-2EI}{l} = \frac{-2.2000}{2} = -2000 \text{ kN.m}$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow V_{BC} = \frac{M_{BC} + M_{CB}}{l} = \frac{-4000 - 2000}{2} = -3000 \text{ kN}$$

Como o V_{BD} não incide em nenhum apoio fictício, não precisa ser calculado. Novamente os valores de interesse são registrados no Quadro 69, mantendo-se a convenção de sinais de Grinter. As reações nos apoios fictícios são dadas por:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow f_{11} + M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} = 0 \rightarrow f_{11} = 8500 \text{ kN.m}$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow f_{21} - V_{BA} - V_{BC} = 1500 - 3000 \rightarrow f_{21} = -1500 \text{ kN}$$

Repete-se o procedimento para o problema (2), em que atua isoladamente uma deslocabilidade unitária na direção e sentido de D_2 , ou seja, um deslocamento de translação horizontal em B. Como o tramo BD é livre para se deslocar horizontalmente, não há esforços nesta barra. Já os tramos AB e BC se deformam ao acompanhar o movimento, gerando esforços transversais, que devem ser levados ao apoio fictício, como segue:

$$M_{BA} = \frac{-3EI}{l^2} = \frac{-3.2000}{2^2} = -1500 \text{ kN.m}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_{BA} = \frac{3EI}{l^3} = \frac{3.2000}{2^3} = 750 \text{ kN}$$

$$M_{BC} = M_{CB} = \frac{6EI}{l^2} = \frac{6.2000}{2^2} = 3000 \text{ kN.m}$$

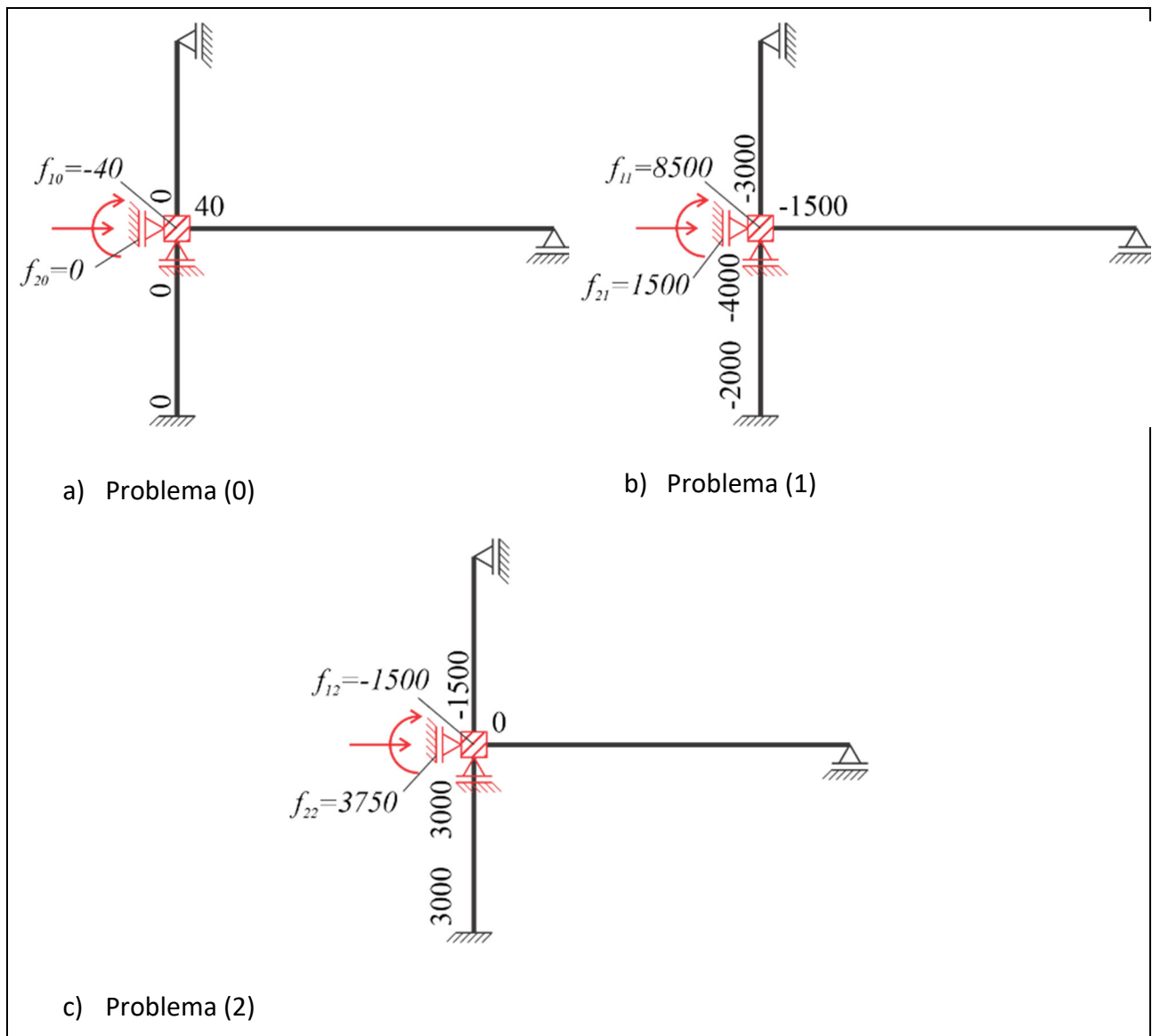
$$\sum M_C = 0 \rightarrow V_{BC} = \frac{12EI}{l^3} = \frac{12.2000}{2^3} = 3000 \text{ kN}$$

$$H_{BD} = 0 \text{ kN}$$

Novamente os valores obtidos foram anotados no Quadro 69. As reações nos apoios fictícios, ou seja, os coeficientes de rigidez, são dadas por:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow f_{12} + M_{BA} + M_{BC} = 0 \rightarrow f_{12} = -1500 \text{ kN.m}$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow f_{22} - V_{BA} - V_{BC} = 0 \rightarrow f_{22} = 3750 \text{ kN}$$



QUADRO 69. PBR: MOMENTOS FLETORES E REAÇÕES NOS APOIOS FICTÍCIOS.

Obtidas as reações nos apoios fictícios (f_{ij}), a resolução da equação (3.4) estabelece os valores das deslocabilidades D_1 a D_2 :

$$\begin{aligned} f_{1r} = 0 &= -40 + 8500D_1 - 1500D_2 \rightarrow D_1 = 0,005063 \text{ rad} \\ f_{2r} = 0 &= 0 - 1500D_1 + 3750D_2 \rightarrow D_2 = 0,002025 \text{ m} \end{aligned}$$

Conhecidas as deslocabilidades, as grandezas de interesse do problema (r) podem ser obtidas por sobreposição dos casos básicos, realizada na convenção de Grinter e então convertida à usual, conforme mostrado no Quadro 70.

Os esforços normais e transversais podem ser obtidos por equilíbrio nos tramos e então transferidos aos nós, permitido observar os esforços solicitantes e as reações de apoio, como mostrado no Quadro 71.

3.6 Exemplo – Pórtico Plano sob causa física de recalque (PBR)

Considere o mesmo pórtico plano, com barras rígidas axialmente ($EI = 2.000 \text{ kN.m}^2$), porém sujeita a um recalque vertical de 4 cm para baixo no apoio D, conforme mostrado na Figura 57.

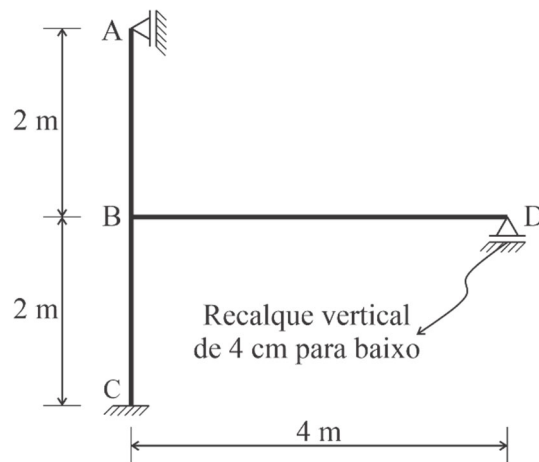


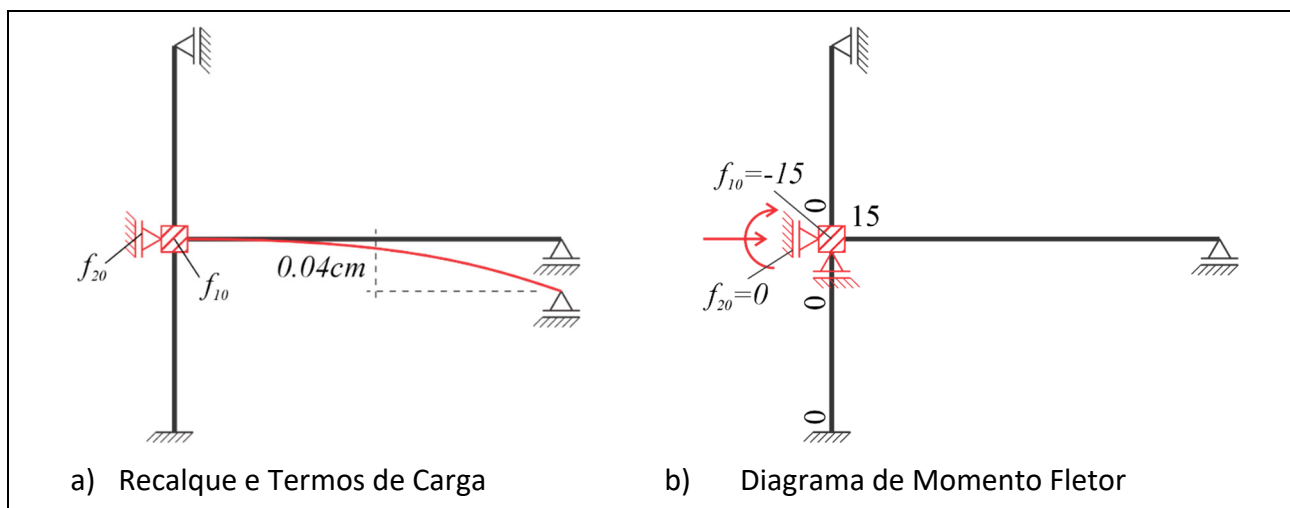
FIGURA 57. PROCESSO DOS DESLOCAMENTOS: PÓRTICO SOB RECALQUE.

A estrutura estaticamente determinada é a mesma do exemplo 3.5. Como o sistema hipergeométrico se manteve, os coeficientes de rigidez não se alteram. Apenas o problema (0) deve ser recalculado, mostrado no Quadro 72a. O recalque mobiliza a barra BD, desenvolvendo momento e reações de engastamento perfeito. Calculando-se apenas os valores de interesse, somente M_{BD} é necessário, sendo dado por:

$$M_{BD} = \frac{3EI}{l^2} \Delta = \frac{3.2000}{4^2} 0,04 = 15 \text{ kN.m}$$

Os termos de carga são obtidos por equilíbrio nodal, conforme abaixo, e então anotados no diagrama simplificado (vide Quadro 72b).

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\rightarrow f_{10} + M_{BD} = 0 \rightarrow f_{10} = -15 \text{ kN.m} \\ \sum F_H = 0 &\rightarrow f_{20} = 0 \text{ kN} \end{aligned}$$

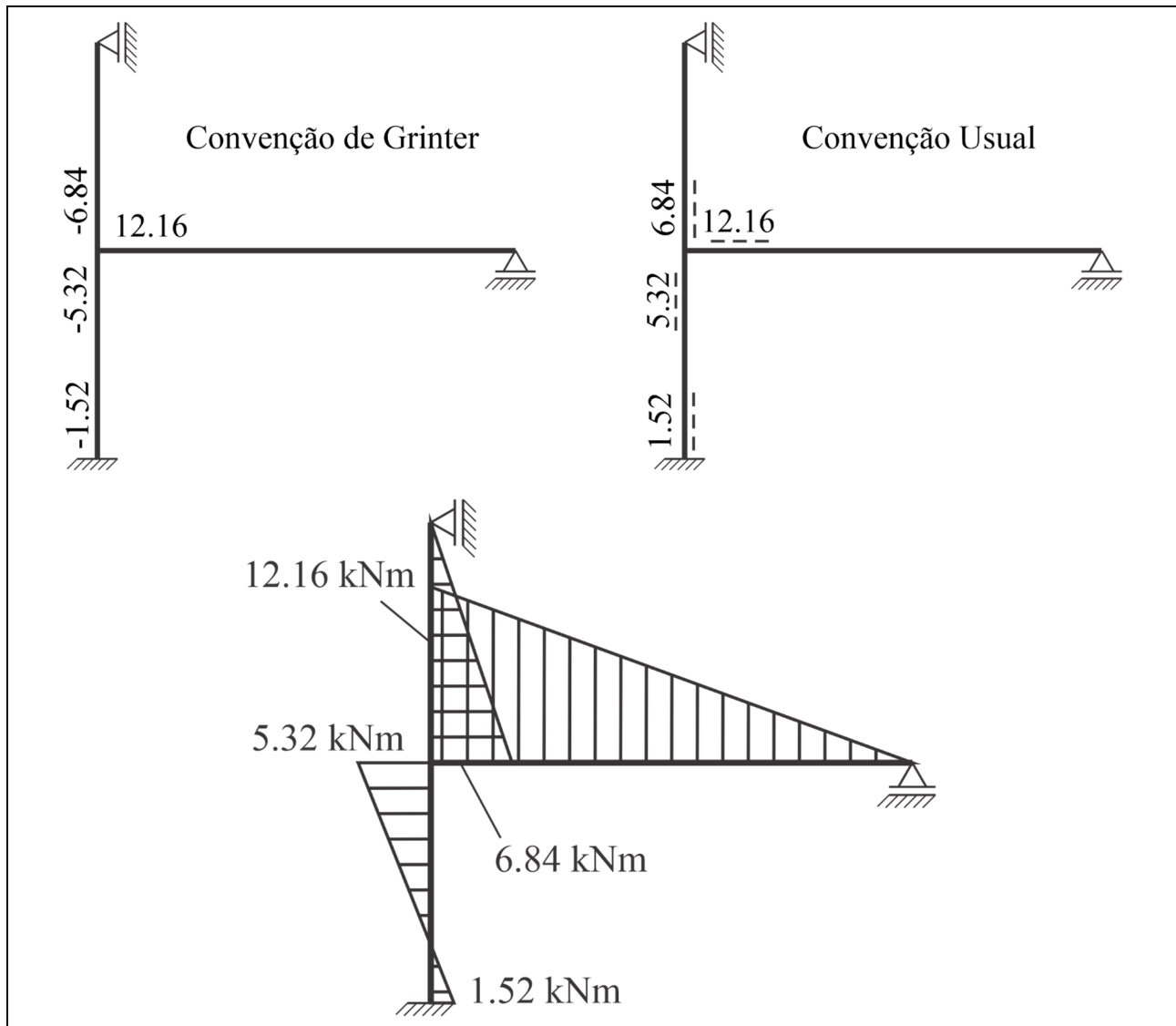


QUADRO 72. PCF: PROBLEMA (0) – RECALQUE.

Como os coeficientes de rigidez já são conhecidos, resta apenas determinar os valores das deslocabilidades:

$$\begin{aligned} f_{1r} = 0 &= -15 + 8500D_1 - 1500D_2 \rightarrow D_1 = 0,001899 \text{ rad} \\ f_{2r} = 0 &= 0 - 1500D_1 + 3750D_2 \rightarrow D_2 = 0,000759 \text{ m} \end{aligned}$$

O diagrama de momento fletor é dado pela sobreposição dos casos básicos, sendo expresso na convenção de Grinter, a ser convertida à usual. Como não há esforço adicional ao longo da barra, o resultado é obtido diretamente da sobreposição:



QUADRO 73. PCR: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR.

3.6.1 Exemplo – Pórtico Plano sob causa física de temperatura (PVT)

De forma complementar, considere que a única causa física é uma variação de temperatura conforme indicado na Figura 58. Consideram-se elementos de seção transversal retangular, com 40 cm de altura, e coeficiente de expansão térmica $\alpha = 10^{-5}$.

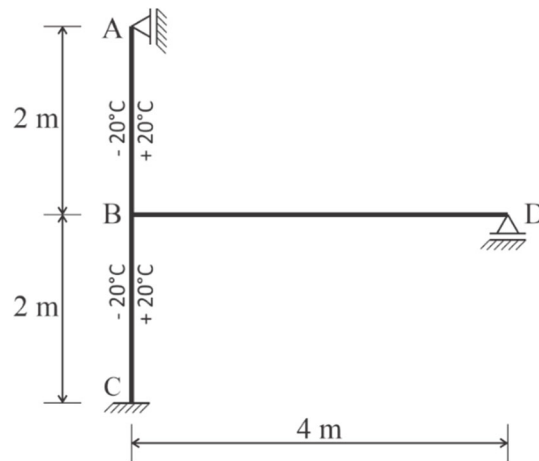


FIGURA 58. PROCESSO DOS DESLOCAMENTOS: PÓRTICO SOB VARIAÇÃO TÉRMICA.

Novamente, apenas o problema (0) se altera. Como a variação de temperatura no centro de gravidade é nula, a consideração de barras rígidas axialmente pode ser mantida, e apenas esforços de flexão são contabilizados.

O problema (0) é mostrado no Quadro 74a, junto com a elástica prevista (em vermelho). A variação térmica mobiliza as barras AB e BC, promovendo tanto momentos quanto reações. Calculando os valores de interesse, tem-se que:

$$M_{BA} = \frac{3EI}{2h} \alpha (\Delta T_i - \Delta T_s) = \frac{3 \cdot 2000}{2 \cdot 0,4} 10^{-5} (20 - (-20)) = 3 \text{ kN.m}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_{BA} = \frac{-M_{BA}}{l} = -1,5 \text{ kN}$$

$$M_{BC} = \frac{-EI}{h} \alpha (\Delta T_i - \Delta T_s) = \frac{-2000}{0,4} 10^{-5} (20 - (-20)) = -2 \text{ kN.m}$$

$$M_{CB} = -M_{BC} = 2 \text{ kN.m}$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow V_{BC} = \frac{M_{BC} + M_{CB}}{l} = 0 \text{ kN}$$

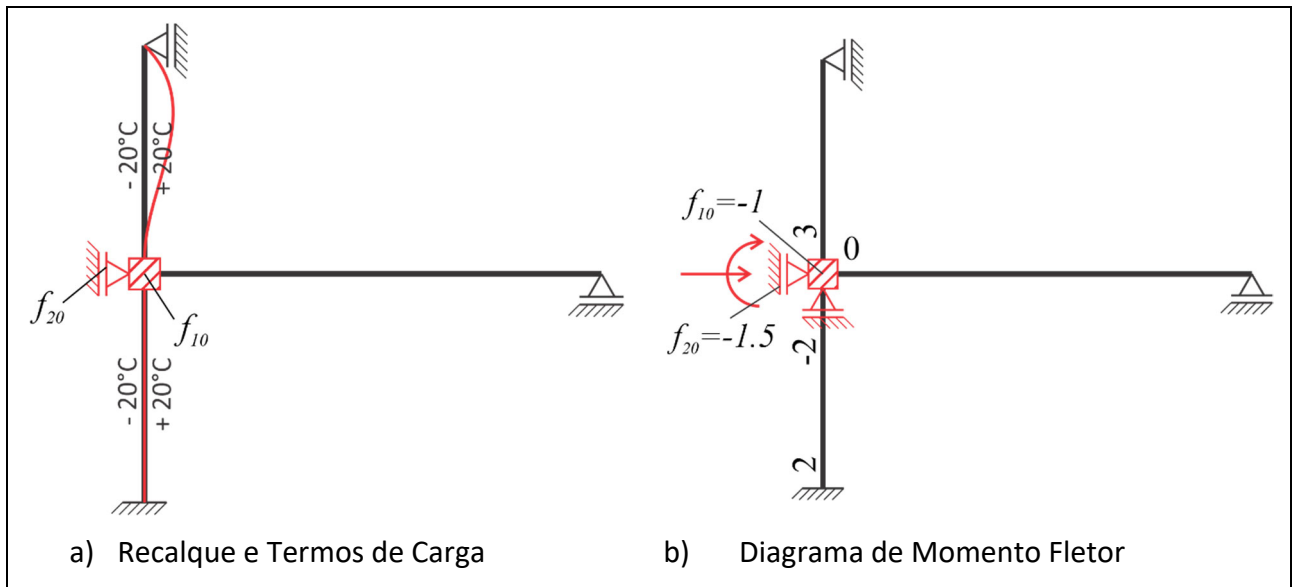
Os termos de carga são obtidos por equilíbrio nodal:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow f_{10} + M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} = 0 \rightarrow f_{10} = -1,0 \text{ kN.m}$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow f_{20} - V_{BA} - V_{BC} = 0 \rightarrow f_{20} = -1,5 \text{ kN}$$

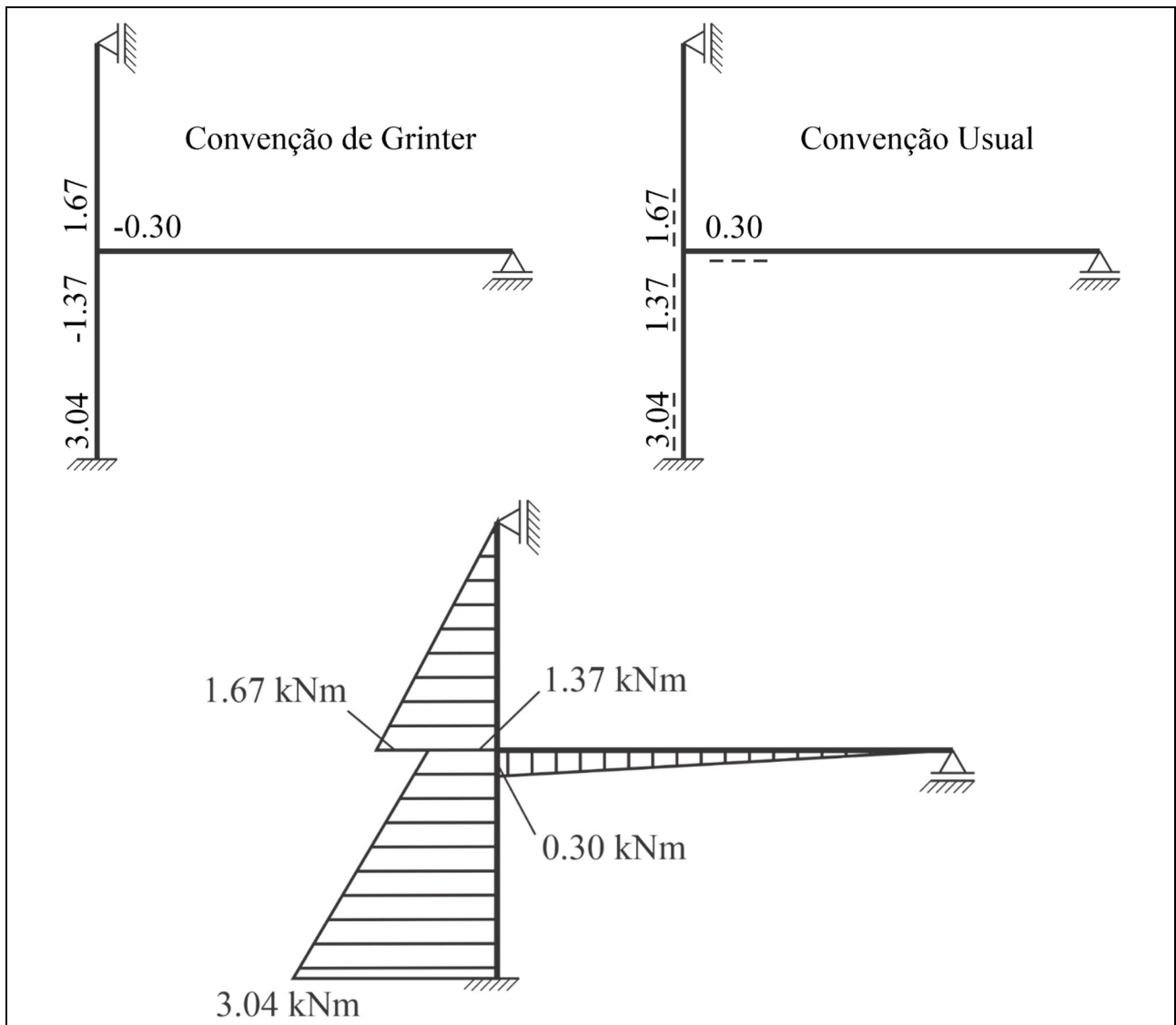
Após registrar os valores em um diagrama simplificado (vide Quadro 74b), as deslocabilidades são calculadas pela sobreposição das reações (termos de carga / coeficientes de rigidez) calculadas anteriormente:

$$\begin{aligned} f_{1r} = 0 &= -1,0 + 8500D_1 - 1500D_2 \rightarrow D_1 = 0,002025 \text{ rad} \\ f_{2r} = 0 &= -1,5 - 1500D_1 + 3750D_2 \rightarrow D_2 = 0,0004810 \text{ m} \end{aligned}$$



QUADRO 74. PVT: PROBLEMA (0) – VARIAÇÃO DE TEMPERATURA.

O diagrama de momento fletor é estabelecido pela simples sobreposição dos casos básicos, pois não há esforço imposto ao longo de nenhum tramo:



QUADRO 75. PVT: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR.

3.7 Exemplo – Pórtico com barras inclinadas e flexíveis axialmente (PIF)

Neste exemplo exploram-se as consequências de haver barras inclinadas, flexíveis axialmente, conforme estrutura indicada na Figura 59, em que se adotam as seguintes propriedades: $EA = 200000 \text{ kN}$ e $EI = 20000 \text{ kN.m}^2$. A barra BC tem o dobro das propriedades da AB, e a barra BD é solicitada apenas axialmente (barra de treliça).

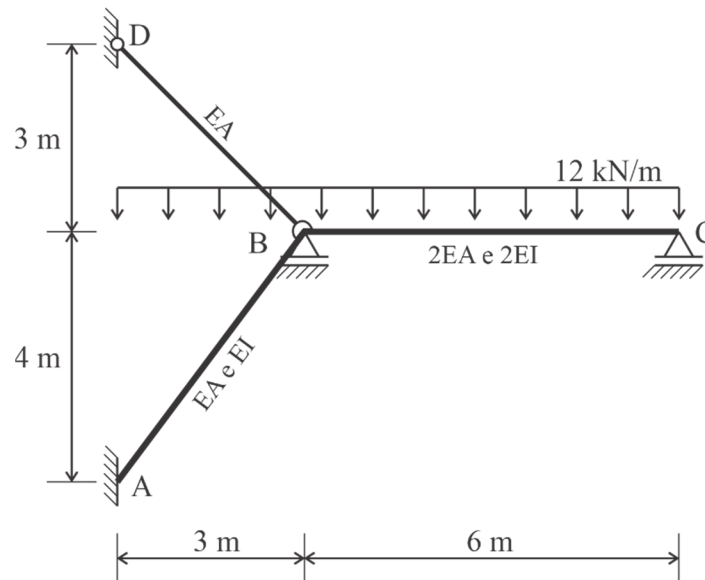


FIGURA 59. PROCESSO DOS DESLOCAMENTOS: PÓRTICO COM BARRAS INCLINADAS.

Há uma rótula parcial em B, o que não impede a continuidade de esforços entre as barras AB e BC. Há, portanto, uma deslocabilidade interna, que deve ser restringida.

O ponto B e C também são livres para se deslocarem horizontalmente. No ponto C, não é necessário incluir um apoio fictício pois já se conhece o valor do esforço normal (na direção em análise). Com relação ao ponto B, há diversos esforços solicitantes indeterminados, assim como o deslocamento horizontal do ponto. Desta forma, deve ser considerado uma deslocabilidade externa.

Desta forma, a estrutura requer dois vínculos para estar geometricamente determinada. O problema geometricamente determinado será equivalente ao real caso respeite a equação de compatibilidade de esforços associada aos dois problemas / deslocabilidades indicadas na Figura 60.

Na forma de uma equação:

$$\begin{aligned} f_{1r} = 0 &= f_{10} + f_{11}D_1 + f_{12}D_2 \\ f_{2r} = 0 &= f_{20} + f_{21}D_1 + f_{22}D_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

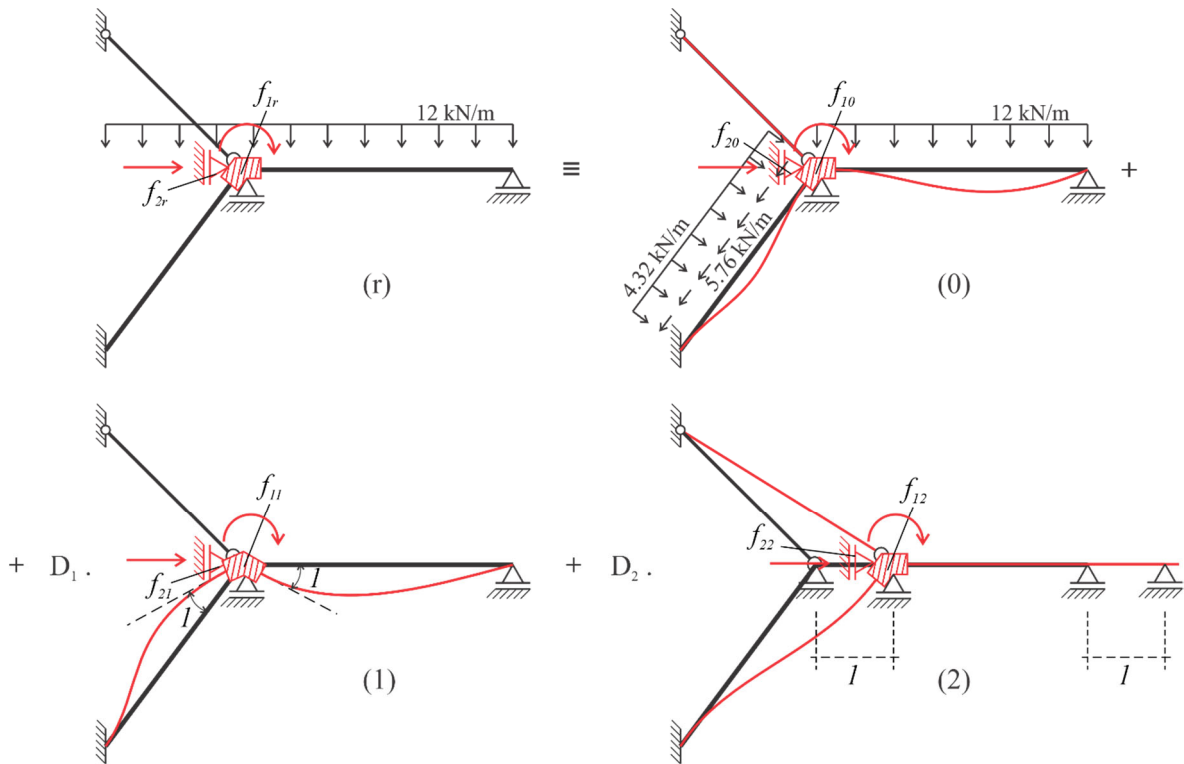
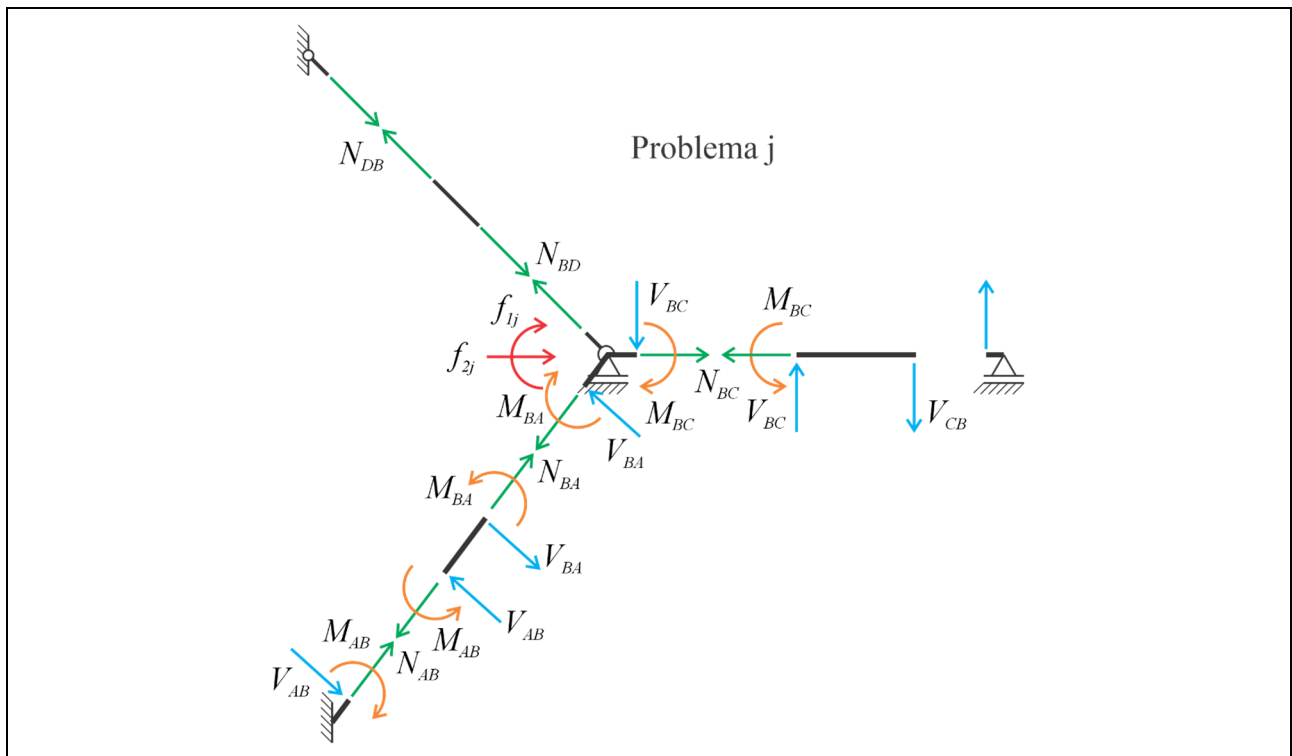


FIGURA 60. PIF: SOBREPOSIÇÃO DOS PROBLEMAS.

A estrutura, dividida em tramos e nós, que será utilizada para determinação dos termos de carga e coeficientes de rigidez, empregando as tabelas de momento de engastamento perfeito e equilíbrio nodal, é mostrada no Quadro 76. Utilizar a mesma figura, do início ao fim do desenvolvimento do exercício, é fundamental para se evitar erros, em especial quanto ao sinal dos esforços.



QUADRO 76. PIF: ESFORÇOS SOLICITANTES NOS TRECHOS E NOS NÓS.

No problema (0), na barra AB, há uma ação distribuída inclinada em relação ao seu eixo, e na barra BC uma ação distribuída ortogonal em relação ao seu eixo. Estas ações vão promover reações de momento, dadas por:

$$M_{AB} = \frac{ql^2}{12} = \frac{4,32 \cdot 5^2}{8} = 9 \text{ kN.m}$$

$$M_{BA} = -\frac{ql^2}{12} = -9 \text{ kN.m}$$

$$M_{BC} = \frac{ql^2}{12} = \frac{12 \cdot 6^2}{12} = 54 \text{ kN.m}$$

Por equilíbrio dos esforços atuantes, as reações transversais, considerando tanto as ações atuantes quanto os momentos de engastamento perfeito, são dadas por:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow V_{AB} = 10,8 \text{ kN}$$

$$\sum F_V^{AB} = 0 \rightarrow V_{AB} = 10,8 \text{ kN}$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow V_{BC} = 45 \text{ kN}$$

$$\sum F_V^{BC} = 0 \rightarrow V_{CB} = 27 \text{ kN}$$

As reações de esforço normal podem ser calculadas por meio da Tabela 3, ao final deste livro (tenha em mente a direção adotada e a definida na tabela para definir o sinal da reação):

$$N_{AB} = \frac{-ql}{2} = \frac{5,76 \cdot 5}{2} = -14,4 \text{ kN}$$

$$N_{BA} = \frac{ql}{2} = 14,4 \text{ kN}$$

Conhecidos os valores de interesse, estes são equilibrados aos apoios fictícios, para definição dos termos de carga:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow f_{10} + M_{BA} + M_{BC} = 0 \rightarrow f_{10} = -45 \text{ kN.m}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow f_{20} + V_{BA} \cdot 0,8 - N_{BA} \cdot 0,6 = 0 \rightarrow f_{20} = 0 \text{ kN}$$

É importante estabelecer as contribuições das componentes de esforço cortante e esforço normal ao termo de carga. Ademais, acredita-se que o leitor já tenha compreendido a importância do registro dos valores em diagrama auxiliar.

Para o problema (1), os valores dos momentos de engastamento perfeito e os demais esforços solicitantes, são obtidos da mesma forma que nos exemplos anteriores, pela simples aplicação do giro unitário. Enquanto nas barras AB e BC surgem momentos de engastamento perfeito e reações correspondentes, na barra BD, devido à rótula existente, nada ocorre. Desta forma:

$$M_{AB} = -\frac{2EI}{l} = -\frac{2.20000}{5} = -8000 \text{ kN.m}$$

$$M_{BA} = -\frac{4EI}{l} = -\frac{4.20000}{5} = -16000 \text{ kN.m}$$

$$M_{BC} = -\frac{3.2EI}{l} = \frac{3.2.20000}{6} = -20000 \text{ kN.m}$$

$$V_{AB} = V_{BA} = -4800 \text{ kN}$$

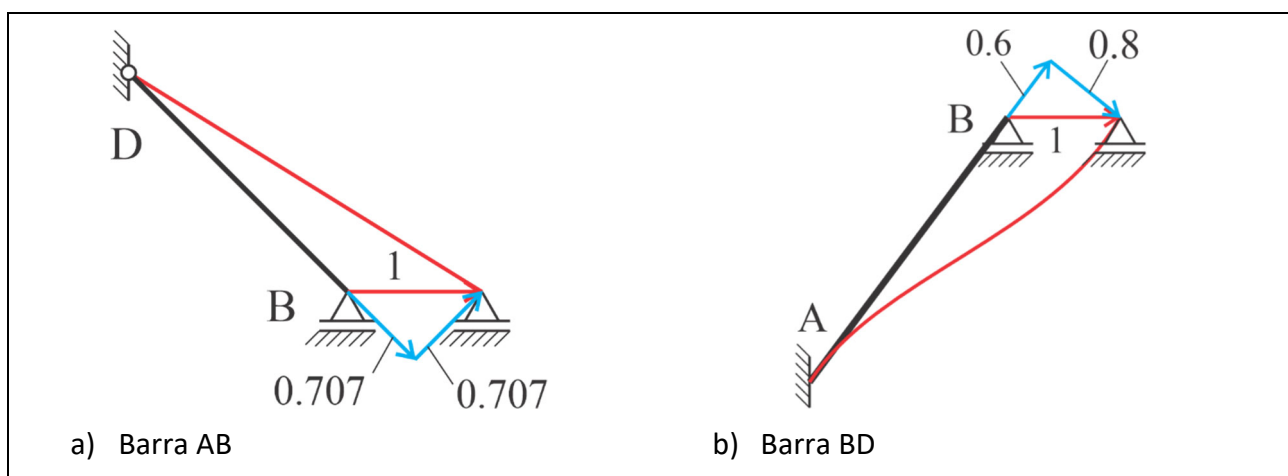
$$V_{BC} = V_{CB} = -3333,33 \text{ kN}$$

As reações nos apoios fictícios, ou seja, os coeficientes de rigidez, são obtidos por equilíbrio nodal, novamente observando as componentes das reações mobilizadas, como segue:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow f_{11} + M_{BA} + M_{BC} = 0 \rightarrow f_{11} = 36000 \text{ kN.m}$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow f_{21} + V_{BA} \cdot 0,8 = 0 \rightarrow f_{21} = -3840 \text{ kN}$$

O problema (2) está associado a um deslocamento horizontal unitário na direção e sentido da deslocabilidade D_2 . Neste caso, é necessário determinar qual a parcela de deslocamento axial e transversal nas barras AB e BD para estabelecer a correta contribuição aos coeficientes de rigidez. Para facilitar o entendimento e visualização, perceba as componentes dos deslocamentos transversal e axial de cada barra, que compõem o deslocamento imposto (Quadro 77).



QUADRO 77. PIF: DESLOCAMENTO ASSOCIADO AO PROBLEMA (2).

A barra BD, em virtude das rótulas existentes nas suas extremidades, se desloca transversalmente sem fletir. Apenas na direção axial surgem esforços associados à componente de deslocamento na direção de seu eixo.

Já a barra AB se deforma tanto transversalmente quanto axialmente. A decomposição do deslocamento unitário provê a quantidade de deslocamento em cada direção, que deve ser utilizado para o cálculo dos coeficientes de rigidez. Por fim, a barra BC se desloca sem deformar, não havendo esforços a serem computados. Sendo assim, os valores dos momentos de engastamento perfeito e os demais esforços solicitantes são dados por:

$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{6EI \cdot 0,8}{l^2} = \frac{6 \cdot 20000 \cdot 0,8}{5^2} = 3840 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$N_{AB} = N_{BA} = \frac{EA}{l} \Delta = \frac{0,6}{5} 200000 = 24000 \text{ kN}$$

$$V_{AB} = -V_{BA} = 1536 \text{ kN}$$

$$N_{BD} = N_{DB} = \frac{EA}{l} \Delta = \frac{0,707}{4,243} 200000 = 33328,62 \text{ kN}$$

Por equilíbrio nodal, são obtidos os coeficientes de rigidez:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow f_{12} + M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} = 0 \rightarrow f_{12} = -3840 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

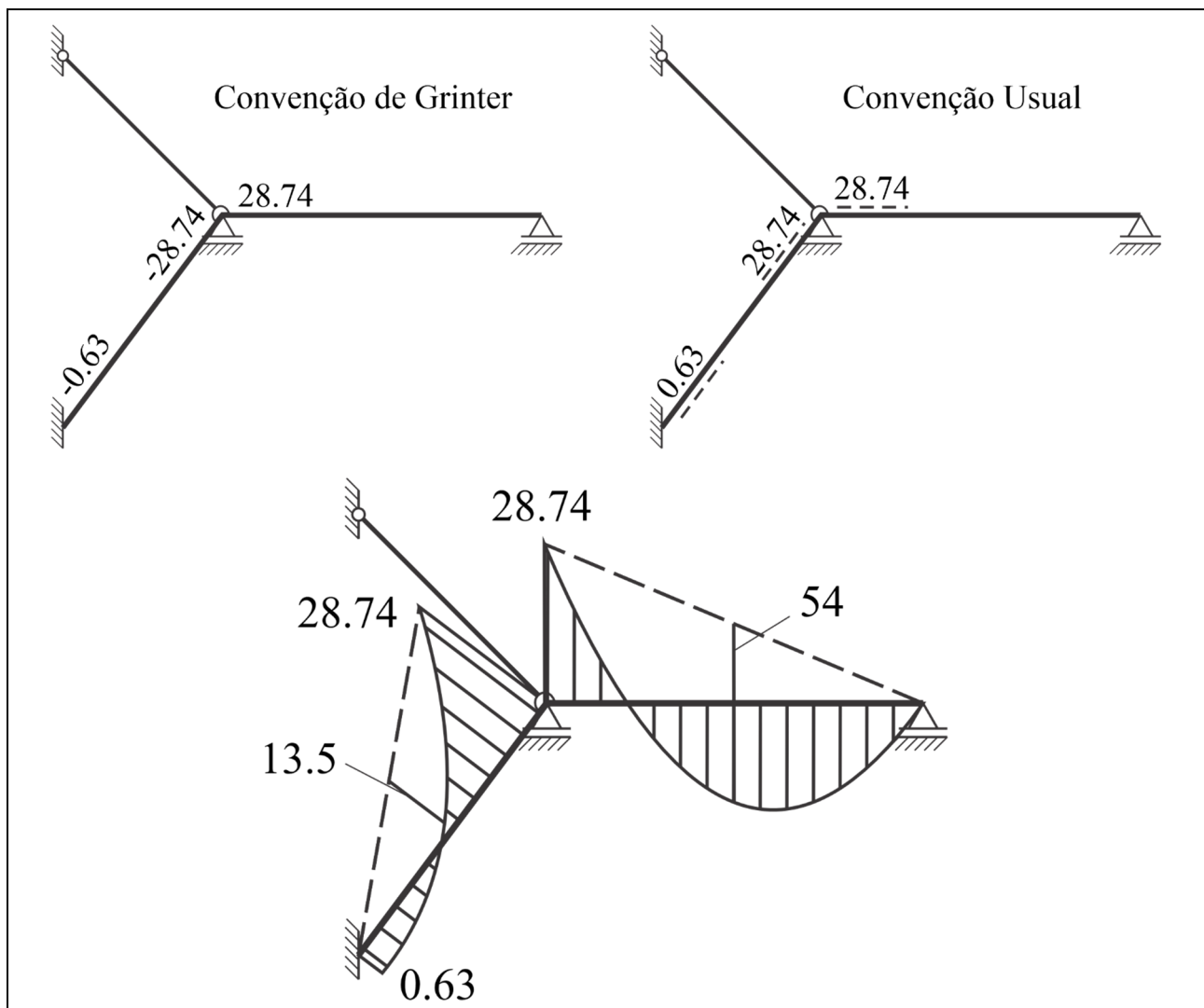
$$\sum F_H = 0 \rightarrow f_{22} - V_{BA} \cdot 0,8 - N_{BA} \cdot 0,6 - N_{BD} \cdot 0,707 = 0 \rightarrow f_{22} = 39192,134 \text{ kN}$$

O equilíbrio da estrutura é reestabelecido por meio da sobreposição dos esforços:

$$\begin{aligned} f_{1r} = 0 &= -45 + 36000D_1 - 3840D_2 \rightarrow D_1 = 0,0012632 \text{ rad} \\ f_{2r} = 0 &= 0 - 3840D_1 + 39192,134D_2 \rightarrow D_2 = 0,00012377 \text{ m} \end{aligned}$$

A sobreposição dos casos básicos resulta no diagrama de momento fletor mostrado no

Quadro 78:



QUADRO 78. PIF: DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR.

3.8 Exemplo – Pórtico com barras inclinadas e rígidas axialmente (PIR)

Neste exemplo exploram-se as consequências de haver barras inclinadas rígidas axialmente, conforme estrutura indicada na Figura 61, em que se adotam $EI = 40000 \text{ kN.m}^2$ e $k = 2000 \text{ kN/m}$. Busca-se, neste exemplo, o diagrama de esforços cortantes tão somente.

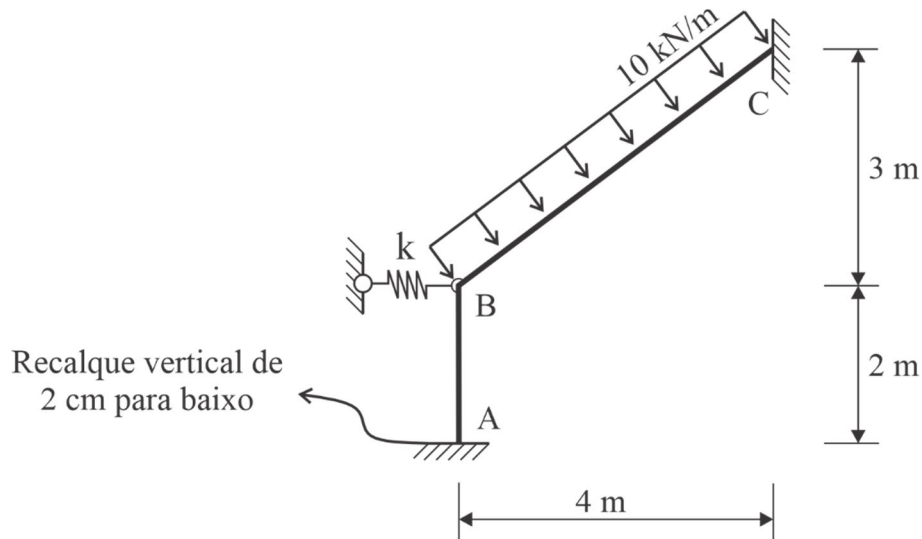


FIGURA 61. PROCESSO DOS DESLOCAMENTOS: PÓRTICO COM BARRAS INCLINADAS RÍGIDAS.

A estrutura apresenta um grau de deslocabilidade interno, no nó B. A treliça equivalente apresenta três nós, o que implica que são necessárias apenas seis barras vinculares para restrição, que é exatamente o número de barras existentes. Desta forma, não há deslocabilidade externa a ser restringida.

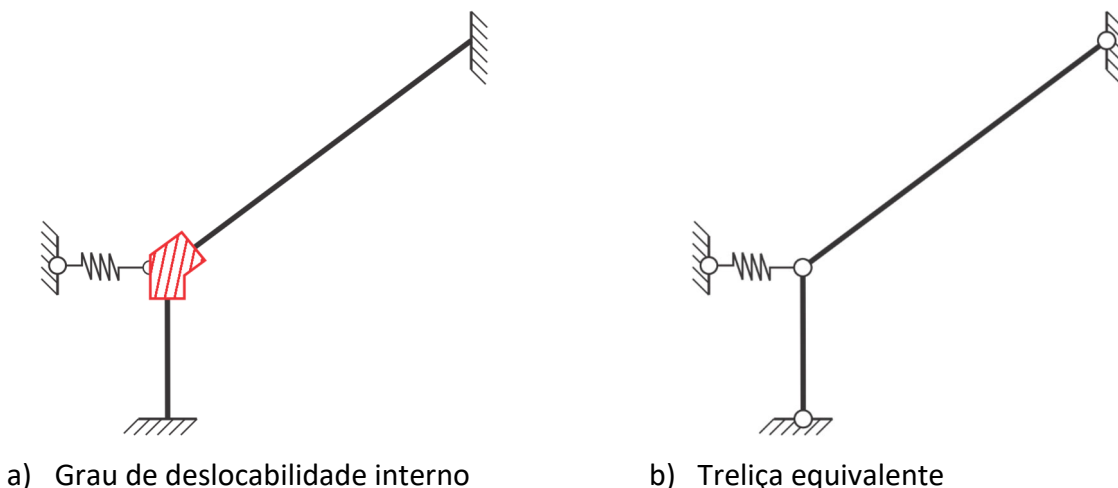


FIGURA 62. PIR: GRAU DE DESLOCABILIDADE.

O problema geometricamente determinado, mostrado na Figura 63, será equivalente ao real caso respeite a compatibilidade de esforços associada à deslocabilidade D_1 , ou simplesmente:

$$f_{1r} = 0 = f_{10} + f_{11}D_1 \quad (3.7)$$

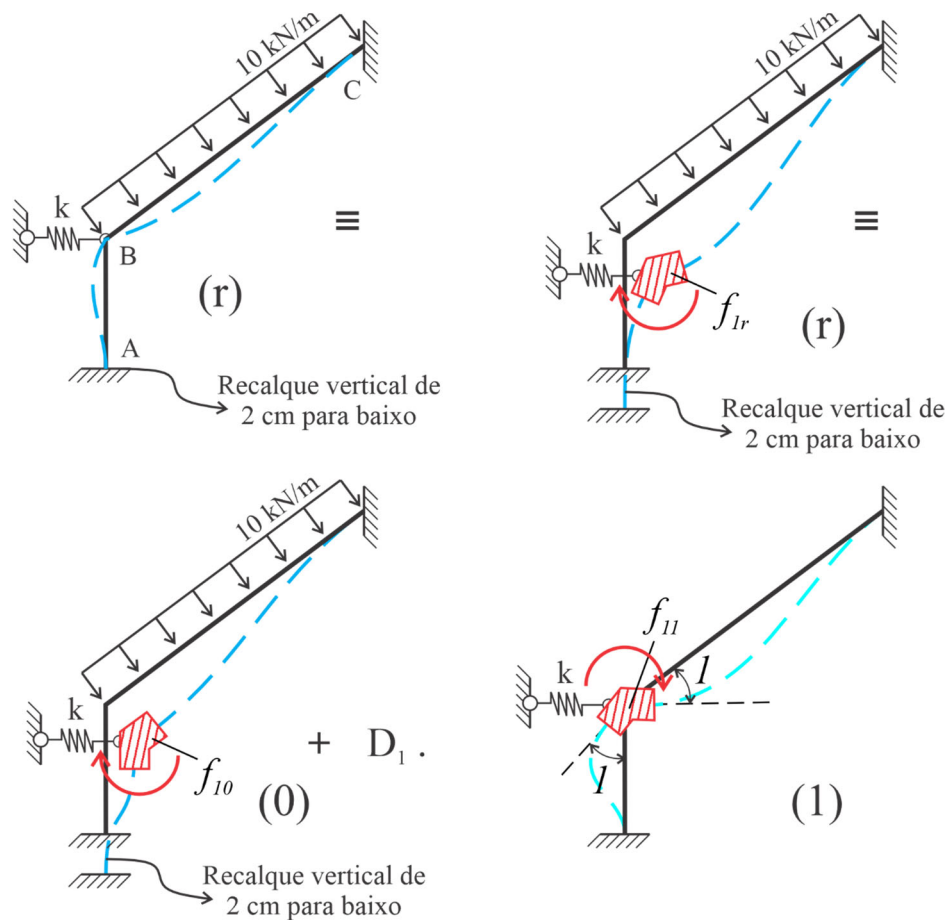


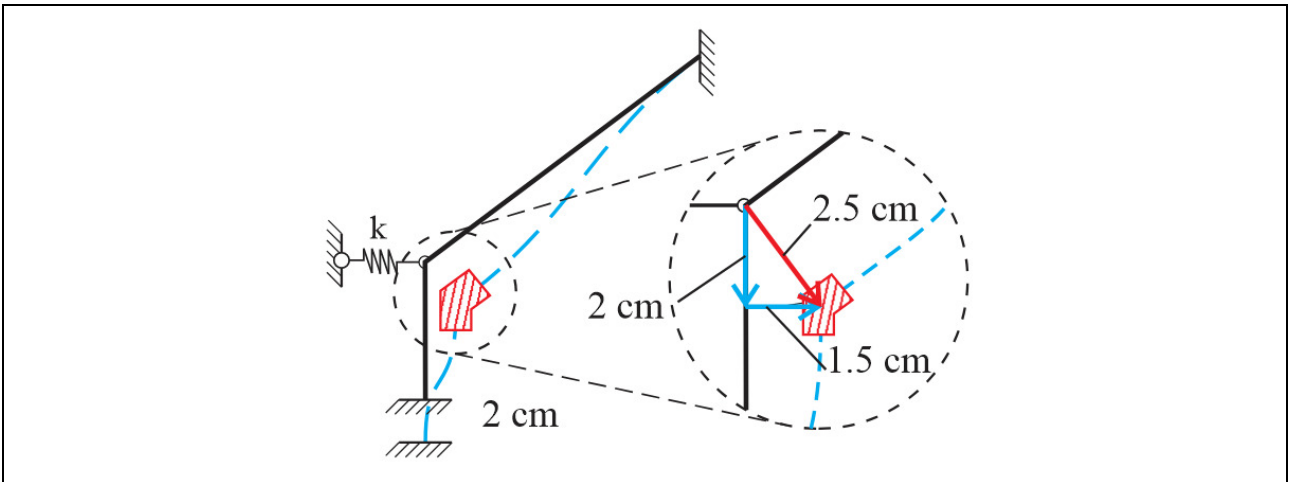
FIGURA 63. PIR: SOBREPOSIÇÃO DOS PROBLEMAS.

O problema (0), que estabelece o termo de carga f_{10} , é definido pela ação distribuída (ortogonal) ao longo de BC e de um recalque vertical de 2 cm em A. Como as barras são rígidas axialmente, devem se deslocar apenas transversalmente ao seu eixo, respeitando sua cinemática.

O recalque em A irá promover um deslocamento vertical em B de mesmo valor, porém a barra BC não pode acompanhar este movimento. Sua cinemática permite apenas o deslocamento transversal ao seu eixo ao se deformar. O mesmo é válido para a barra AB.

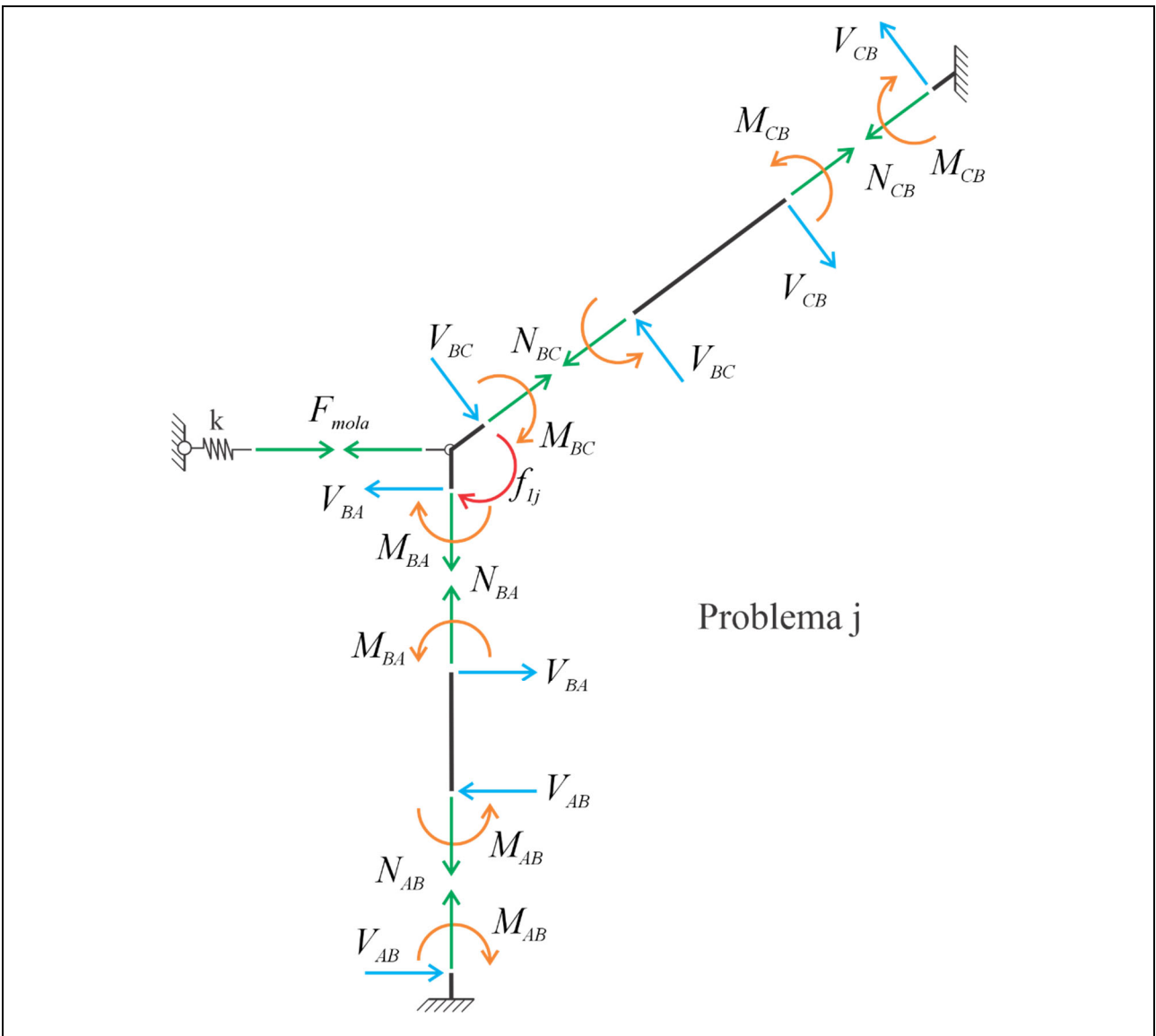
Ao traçar uma linha de deslocamento transversal da barra BC (em B) e uma linha de deslocamento transversal da barra AB (também em B), após ser imposto o recalque, percebe-se que as linhas se cruzam em um único ponto. Desta forma, percebe-se que o recalque irá promover uma deformação transversal em BC e, para compatibilizar o movimento, também ocorrerá uma deformação transversal em AB.

Ou seja, para que o ponto B desloque verticalmente em 2 cm, ambas as barras devem se deformar transversalmente. Tal movimento ainda impõe um deslocamento horizontal, que irá mobilizar a mola existente em B. Vide Quadro 80 para maiores detalhes.



QUADRO 79. PIR: DESLOCAMENTO ASSOCIADO AO RECALQUE.

A estrutura, dividida em tramos e nós, que será utilizada para determinação dos termos de carga e coeficientes de rigidez, empregando as tabelas de momento de engastamento perfeito e equilíbrio nodal, é mostrada no Quadro 80.



QUADRO 80. PIR: ESFORÇOS SOLICITANTES NOS TRECHOS E NOS NÓS.

Dito isto, os valores dos momentos de engastamento perfeito para o problema (0), respeitando-se as condições de contorno e as ações atuantes, são dados por:

$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{6EI}{l^2} \Delta = \frac{6EI}{2^2} (0,015) = 900 \text{ kN.m}$$

$$M_{BC} = \frac{6EI}{l^2} \Delta + \frac{ql^2}{12} = \frac{6EI}{5^2} (-0,025) + \frac{10 \cdot 5^2}{12} = -219,167 \text{ kN.m}$$

$$M_{CB} = \frac{6EI}{l^2} \Delta - \frac{ql^2}{12} = \frac{6EI}{5^2} (-0,025) - \frac{10 \cdot 5^2}{12} = -260,833 \text{ kN.m}$$

O termo de carga, associado ao problema (0), é dado por:

$$f_{10} + M_{BA} + M_{BC} = 0 \rightarrow f_{10} = -680,83 \text{ kN.m}$$

Para o problema (1), os valores dos momentos de engastamento perfeito são obtidos da mesma forma que os exemplos anteriores, pela simples aplicação do giro unitário nas barras, ou seja:

$$M_{AB} = -\frac{2EI}{l} = -\frac{2 \cdot 40000}{2} = -40000 \text{ kN.m}$$

$$M_{BA} = -\frac{4EI}{l} = -\frac{4 \cdot 40000}{2} = -80000 \text{ kN.m}$$

$$M_{BC} = -\frac{4EI}{l} = -\frac{4 \cdot 40000}{5} = -32000 \text{ kN.m}$$

$$M_{CB} = -\frac{2EI}{l} = -\frac{2 \cdot 40000}{5} = -16000 \text{ kN.m}$$

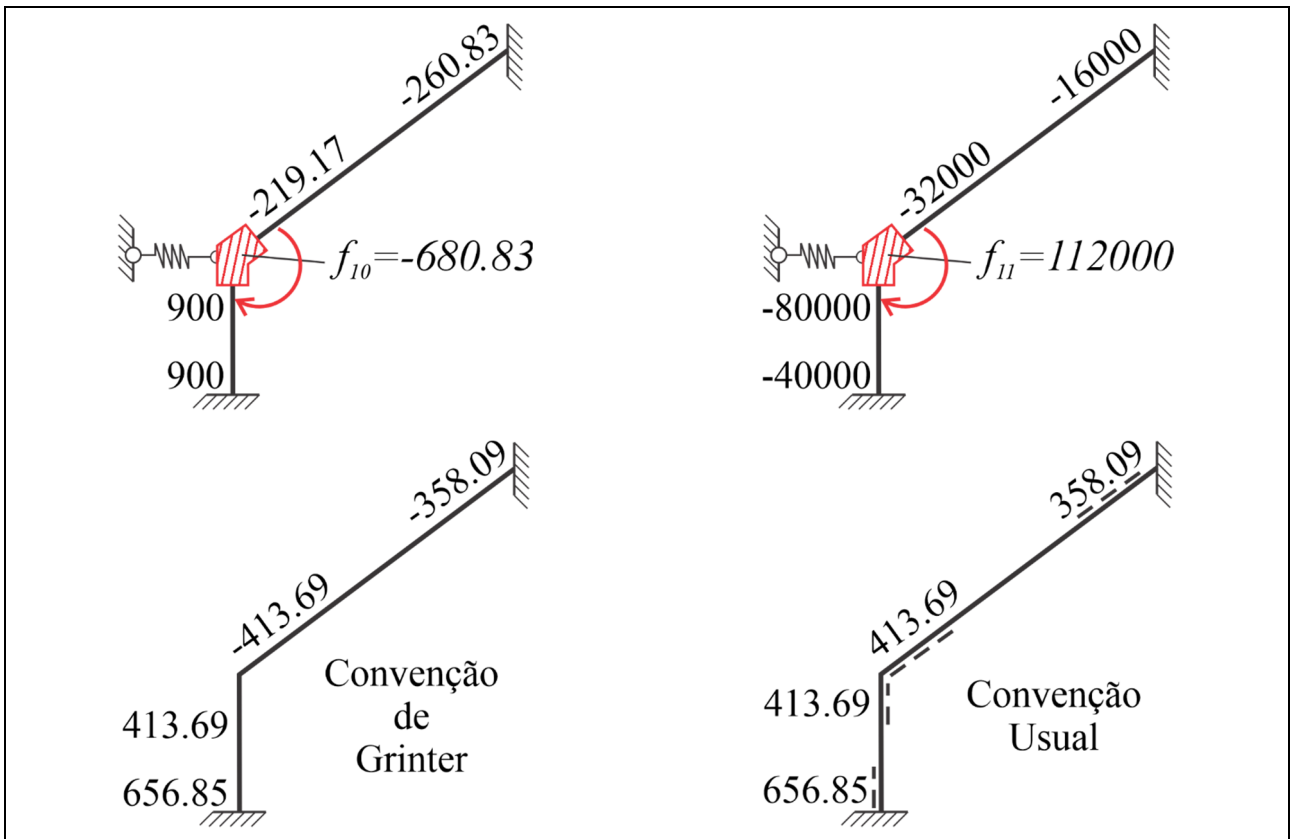
O coeficiente de rigidez associado ao problema (1) é dado por:

$$f_{11} + M_{BA} + M_{BC} = 0 \rightarrow f_{11} = 112000 \text{ kN.m}$$

Reestabelece-se o equilíbrio da estrutura ao resolver a equação de compatibilidade de esforços:

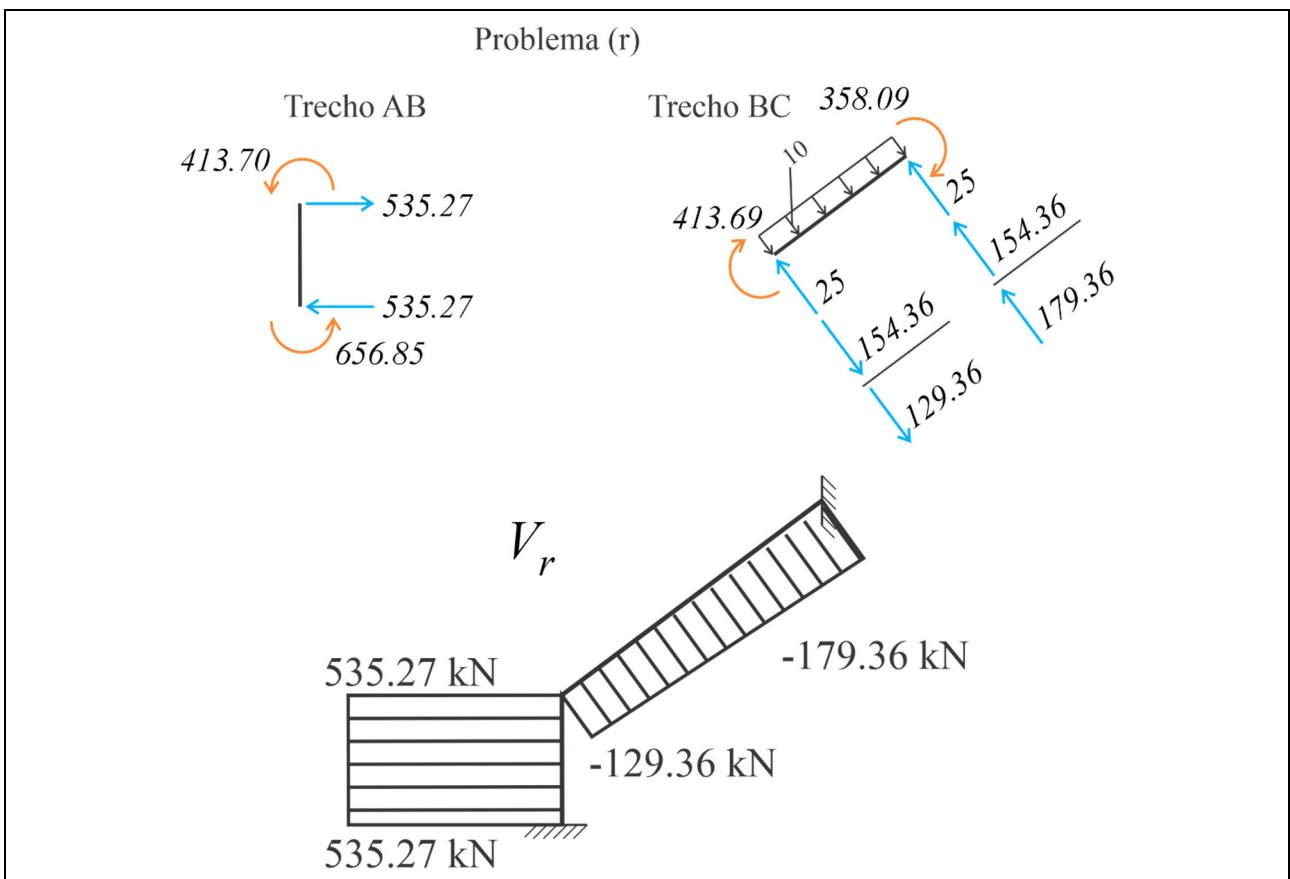
$$D_1 = -\frac{f_{10}}{f_{11}} = \frac{680,83}{112000} = 0,0060788 \text{ rad}$$

A sobreposição dos casos básicos é mostrada no Quadro 81:



QUADRO 81. PIR: DIAGRAMAS DE MOMENTO FLETOR.

Fazendo-se o equilíbrio das forças e esforços nas barras, encontram-se os esforços transversais, permitindo obter o diagrama de esforços cortantes, como mostra o Quadro 82.



QUADRO 82. PIR: DIAGRAMA DE ESFORÇO CORTANTE.

Os problemas abordados neste livro também poderiam ser resolvidos com a aplicação dos conceitos de Problemas de Valor de Contorno de estruturas lineares, ou mesmo pelo Método dos Elementos Finitos, que são de suma importância ao engenheiro contemporâneo. Estes tópicos serão abordados no próximo livro. No entanto, são assuntos avançados, em que a base apresentada neste livro e no livro anterior são partes fundamentais do processo de aprendizagem.

O leitor deve buscar formas de aprofundar os conhecimentos tratados neste livro, para que os assuntos mais avançados explorados a frente sejam facilmente assimilados.

Nos vemos no Livro 3.

Carrazedo & Paccola.

Capítulo 4 - Referências Complementares

Neste capítulo você vai ver:

- Complemente seu estudo – Encontre referências a livros que podem te auxiliar nos estudos, com detalhes das formulações desenvolvidas.

BORESI, A. P.; SCHMIDT, R. J. Estática. São Paulo: Thompson, 2003.

CAMPANARI, F. A. Teoria das estruturas. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1985.

MARTHA, L. F. Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

SAVASSI, W. Método da energia potencial total na análise numérica de estruturas: primeiras noções sobre o método dos elementos finitos. São Carlos, SP: EESC, 2016.

SOUZA, J.C.A.O., ANTUNES, H.M.C.C. Cargas Móveis em Estruturas Lineares. São Carlos, SP: EESC, 1995.

SOUZA, J.C.A.O., ANTUNES, H.M.C.C. Introdução à Análise Matricial de Estruturas. São Carlos, SP: EESC, 1995.

SOUZA, J.C.A.O., ANTUNES, H.M.C.C. Processos Gerais da Hiperestática Clássica. São Carlos, SP: EESC, 1992.

SUSSEKIND, J. C. Curso de Análise Estrutural. 9ª. Edição. São Paulo: Editora Globo, 1991. Vol. 1 a 3.

Capítulo 5 - Tabelas

As tabelas que foram disponibilizadas neste livro foram resumidas, apresentando apenas as relações suficientes para aplicações mais gerais. Outras bibliografias, porém, apresentam tabelas com mais informação.

TABELA 1. INTEGRAIS DE DUAS FUNÇÕES


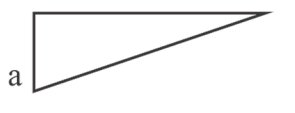

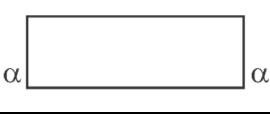

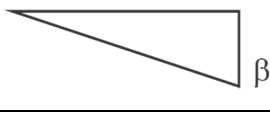
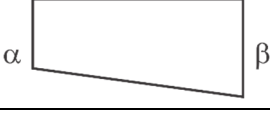
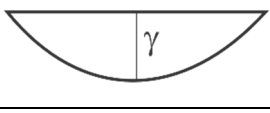
$f_2(x)dx \backslash f_1(x)dx$			
	$a \alpha L$	$\frac{a \alpha}{2} L$	$\frac{\alpha(a+b)}{2} L$
	$\frac{a \alpha}{2} L$	$\frac{a \alpha}{3} L$	$\frac{\alpha(2a+b)}{6} L$
	$\frac{a \beta}{2} L$	$\frac{a \beta}{6} L$	$\frac{\beta(a+2b)}{6} L$
	$\frac{a(\alpha+\beta)}{2} L$	$\frac{a(2\alpha+\beta)}{6} L$	$\left[\frac{a(2\alpha+\beta)}{6} + \frac{b(\alpha+2\beta)}{6} \right] L$
	$\frac{2 a \gamma}{3} L$	$\frac{a \gamma}{3} L$	$\frac{(a+b)\gamma}{3} L$

TABELA 2. MOMENTOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO



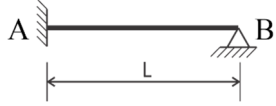
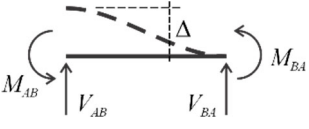

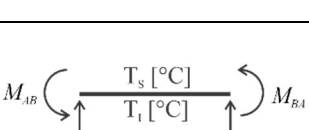
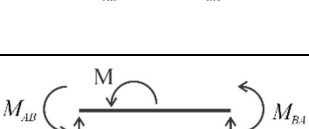
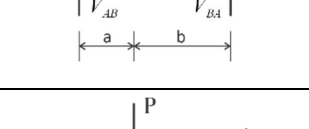
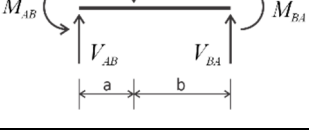
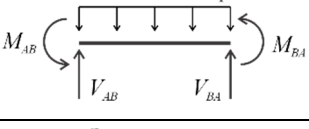
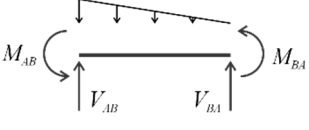
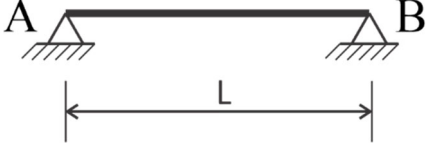
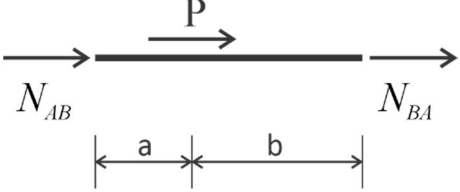

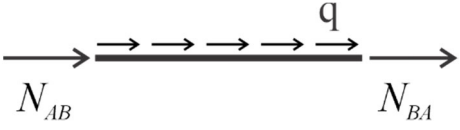
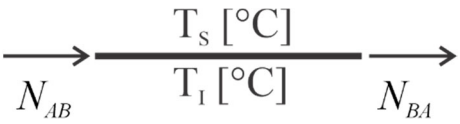
			
	$M_{BA} = \frac{3EI}{L^2} \Delta$	$M_{AB} = \frac{6EI}{L^2} \Delta$ $M_{BA} = \frac{6EI}{L^2} \Delta$	$M_{AB} = \frac{3EI}{L^2} \Delta$
	Giro em rótula ---	$M_{AB} = \frac{4EI}{L} \theta$ $M_{BA} = \frac{2EI}{L} \theta$	$M_{AB} = \frac{3EI}{L} \theta$
	$M_{BA} = -\frac{3EI}{2h} \alpha(T_i - T_s)$	$M_{AB} = \frac{EI}{h} \alpha(T_i - T_s)$ $M_{BA} = -\frac{EI}{h} \alpha(T_i - T_s)$	$M_{AB} = \frac{3EI}{2h} \alpha(T_i - T_s)$
	$M_{BA} = -\frac{M}{2L^2} (L^2 - 3a^2)$	$M_{AB} = \frac{Mb}{L^2} (3b - 2L)$ $M_{BA} = -\frac{Ma}{L^2} (2L - 3a)$	$M_{AB} = \frac{M}{2L^2} (3b^2 - L^2)$
	$M_{BA} = -\frac{Pab}{2} \cdot \frac{L+a}{L^2}$	$M_{AB} = \frac{Pab^2}{L^2}$ $M_{BA} = -\frac{Pa^2b}{L^2}$	$M_{AB} = \frac{Pab}{2} \cdot \frac{L+b}{L^2}$
	$M_{BA} = \frac{-qL^2}{8}$	$M_{AB} = \frac{qL^2}{12}$ $M_{BA} = \frac{-qL^2}{12}$	$M_{AB} = \frac{qL^2}{8}$
	$M_{BA} = -\frac{7qL^2}{120}$	$M_{AB} = \frac{qL^2}{20}$ $M_{BA} = -\frac{qL^2}{30}$	$M_{AB} = \frac{qL^2}{15}$
	$M_{BA} = -\frac{qa^2}{8L^2} (2L^2 - a^2)$	$M_{AB} = \frac{qa^2}{12L^2} (6L^2 - 8La + 3a^2)$ $M_{BA} = -\frac{qa^3}{12L^2} (4L - 3a)$	$M_{AB} = \frac{qa^2}{8L^2} (2L - a)^2$

TABELA 3. REAÇÃO HORIZONTAL DE ENGASTAMENTO PERFEITO

		
	$H_{AB} = -\frac{Pb}{L}$	$H_{BA} = -\frac{Pa}{L}$
	$H_{AB} = \frac{EA}{L} \Delta$	$H_{BA} = \frac{EA}{L} \Delta$
	$H_{AB} = -\frac{qL}{2}$	$H_{BA} = -\frac{qL}{2}$
	$H_{AB} = EA\alpha T_{CG}$	$H_{BA} = EA\alpha T_{CG}$

