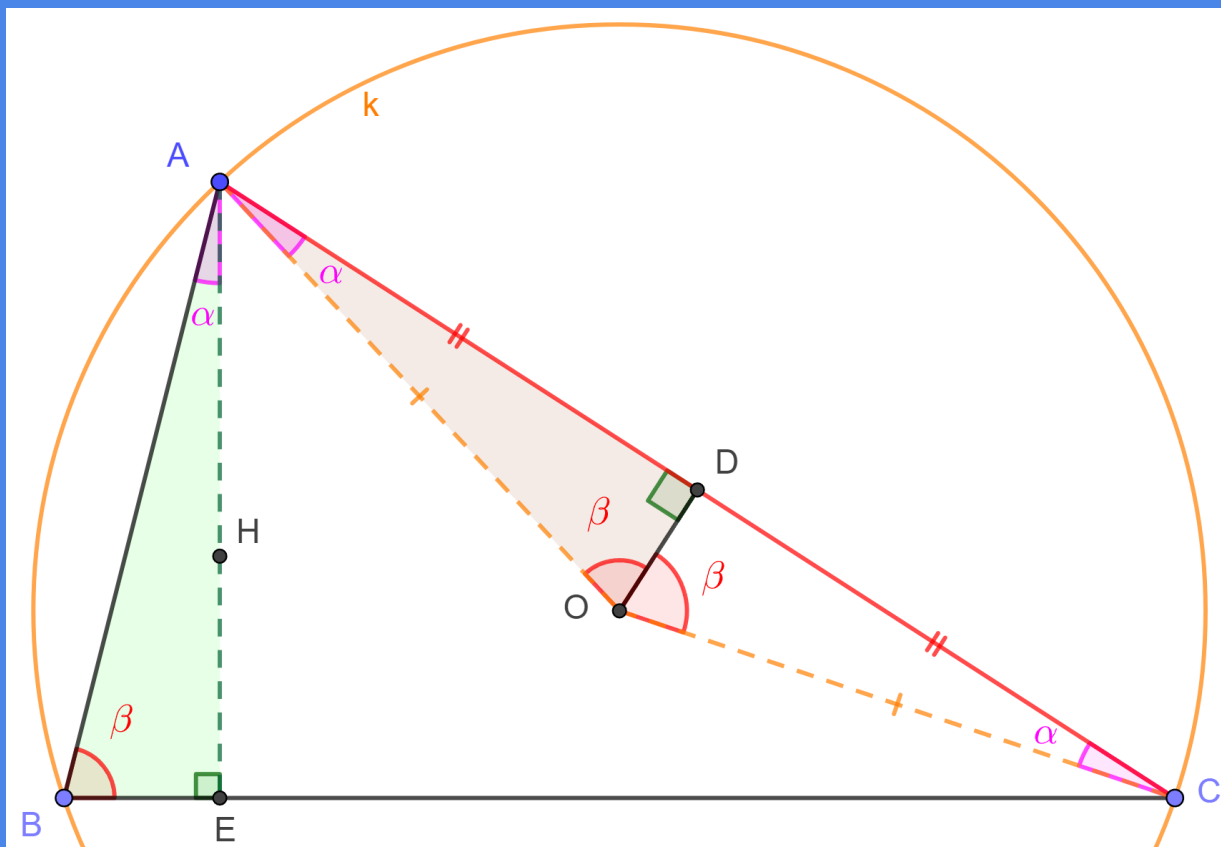


# Circuncentro e Ortocentro: teoria, construções e problemas



Juan López Linares

JUAN LÓPEZ LINARES

**Circuncentro e Ortocentro: teoria, construções e problemas**

DOI: 10.11606/9786587023410

Pirassununga - SP

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)

2024

# UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**Reitor:** Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

**Vice-Reitora:** Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

## FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

<http://www.fzea.usp.br>

**Diretor:** Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

**Vice-Diretor:** Prof. Dr. Carlos Augusto Fernandes de Oliveira

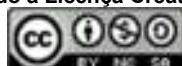
### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da  
Universidade de São Paulo

L864c	López Linares, Juan Circuncentro e ortocentro : teoria, construções e problemas / Juan López Linares. -- Pirassununga : Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2024. 68 p.  ISBN 978-65-87023-41-0 (e-book) DOI: 10.11606/9786587023410  1. Geometria. 2. Olimpíadas. 3. GeoGebra. 4. Ensino fundamental. 5. Ensino médio. 6. Formação de professores. I. Título.
-------	---

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

**Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.**



*Dedico este livro a minha família.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos Professores e Estudantes do curso de Geometria Olímpica com GeoGebra que motivaram a escrita deste livro eletrônico.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

## AUTOR

Prof. Associado JUAN LÓPEZ LINARES: <https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>.

Quando adolescente participava como estudante de um grupo de treinamento para olimpíadas de Física. Embora tivesse sucessos nas competições desta disciplina, nas olimpíadas de Matemática não tinha resultados espetaculares. Sempre sentiu falta de um grupo de treinamento em Matemática. Essa experiência extracurricular determinou seu futuro profissional e motivou sua linha de trabalho hoje.

Professor Associado do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de “Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio” e “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores e estudantes de alto rendimento.

Na área de Ensino de Matemática Olímpica, publicou 21 artigos, 18 livros eletrônicos (e-book), um capítulo de livro, uma dissertação de mestrado e uma tese de livre docência. Textos completos e gratuitos podem ser encontrados [aqui](#). Também disponibilizou mais de 750 vídeo aulas. Adicionalmente, no site do [GeoGebra](#) estão disponíveis mais de 1000 construções geométricas interativas.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respectivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProFMat) pela UFSCar em 2019 e Livre Docente na área de Ensino de Matemática Olímpica na FZEA USP em 2022.

## **Título**

Circuncentro e Ortocentro: teoria, construções e problemas

## **Prefácio**

Circuncentro ( $O$ ) e Ortocentro ( $H$ ) figuram entre os centros de triângulos mais conhecidos, devido a sua grande utilização em diversos campos da Matemática e Física. A discussão neste e-book é organizada em três capítulos: Fundamentos teóricos; Construções, exercícios e desafios; Problemas de olimpíadas internacionais. Este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O texto conta com 39 figuras que facilitam acompanhar a resolução. Todas têm como complemento links para os gráficos interativos no site do GeoGebra e, vários, a resolução em vídeo do YouTube. O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa. O GeoGebra também convida o leitor a interagir, a pôr as mão na massa.

**Palavras-chave:** Geometria, Olimpíadas, GeoGebra, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Formação de Professores.

# Lista de Figuras

2.1	Demonstração da Proposição 1. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . O ponto $P$ pode ser deslocado para verificar as medidas dos segmentos $PB$ e $PC$ . . . . .	14
2.2	Demonstração da Proposição 2. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . Os pontos $A$ , $B$ e $C$ podem ser deslocados para verificar a concorrência das mediatrizes e a posição do ponto $O$ . . . . .	16
2.3	Proposição 3. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . Os pontos $A$ , $B$ e $C$ podem ser deslocados para verificar a concorrência das alturas e a posição do ponto $H$ . . . . .	17
2.4	Demonstração da Proposição 3. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	18
2.5	Construção geométrica para conjugados isogonais. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	19
2.6	Caso da Proposição 5 em que o $\triangle ABC$ é acutângulo. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . Os pontos $A$ , $B$ e $C$ podem ser deslocados. . . . .	20
2.7	Caso da Proposição 5 em que o $\triangle ABC$ é obtusângulo. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . Os pontos $A$ , $B$ e $C$ podem ser deslocados. . . . .	21
2.8	Construção geométrica para provar que circuncentro $O$ e ortocentro $H$ são conjugados isogonais. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	22
2.9	Guia para a demonstração da Proposição 7. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	23
2.10	Guia para a demonstração da Proposição 8. Os pontos $H$ , $G$ e $O$ são colineares e determinam a Reta de Euler. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	24
2.11	Todo trapézio isósceles, que não seja paralelogramo diferente de retângulo, é inscritível. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	25
2.12	A distância entre um vértice do $\triangle ABC$ ao ortocentro $H$ é igual ao dobro da distância entre o circuncentro $O$ e o ponto médio do lado oposto. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	26
2.13	A circunferência $c_9$ passa pelos pontos notáveis: $D$ , $E$ , $F$ , $H_a$ , $H_b$ , $H_c$ , $J$ , $K$ e $L$ . O centro $O_9$ de $c_9$ está localizado no ponto médio do segmento $HO$ e seu raio é metade do raio da circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	27



2.14	Demonstração. A circunferência $c_9$ passa pelos pontos notáveis: $D, E, F, H_a, H_b, H_c, J, K$ e $L$ . O centro $O_9$ de $c_9$ está localizado no ponto médio do segmento $HO$ e seu raio é metade do raio da circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	29
2.15	Homotetia com centro em $H$ e fator $\frac{1}{2}$ transforma $k$ em $k' = c_9$ e $P$ em $P' = M$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	30
2.16	A reflexão do ponto $H$ relativa aos lados $H'_1, H'_2$ e $H'_3$ , e pontos médios dos lados $M'_1, M'_2$ e $M'_3$ está sobre $k$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	31
2.17	Os pontos $A, B, C$ e $H$ formam um sistema ortocêntrico. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	32
2.18	Definição de Triângulo Órtico. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	33
2.19	O incentro do triângulo órtico $DEF$ coincide com o ortocentro do triângulo original $ABC$ . Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	33
2.20	Guia para a demonstração da Proposição 16. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	35
2.21	Guia para a demonstração da Proposição 17. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	36
3.1	Ilustração do Problema 1. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	39
3.2	Problema de Fagnano. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . Podem movimentar-se os pontos $X, Y$ e $Z$ . . . . .	40
3.3	Resolução 1 (após cinco conjuntos de reflexões). Problema de Fagnano. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . Podem movimentar-se os pontos $X, Y$ e $Z$ . . . . .	41
3.4	Resolução 2. Primeira parte. Problema de Fagnano. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . Podem movimentar-se os pontos $D$ e $E$ para verificar o mínimo no comprimento da poligonal $HEDK$ . . . . .	42
3.5	Resolução 2. Segunda parte. Problema de Fagnano. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . Pode movimentar-se o ponto $Z$ para verificar o mínimo do segmento $HK$ . . . . .	43
3.6	Uma construção geométrica inicial do Problema 3. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	44
3.7	Construção geométrica do Problema 3. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	45
4.1	Uma construção geométrica do Problema 4. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	47
4.2	Uma construção geométrica inicial do Problema 5. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	48
4.3	Uma construção geométrica do Problema 5. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	50
4.4	Uma construção geométrica inicial do Problema 6. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	51
4.5	Uma construção geométrica do Problema 6. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	53
4.6	Uma construção geométrica inicial do Problema 7. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	54
4.7	Uma construção geométrica do Problema 7. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	55
4.8	Uma construção geométrica inicial do Problema 8. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	56
4.9	Uma construção geométrica do Problema 8. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	58
4.10	Uma construção geométrica inicial do Problema 9. Versão interativa <a href="#">aqui</a> . . . . .	59

4.11 Uma construção geométrica do Problema 9. Versão interativa [aqui](#). . . . . 60

# Sumário

## Lista de Figuras

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentos teóricos</b>	<b>14</b>
2.1	Mediatriz e Circuncentro . . . . .	14
2.2	Alturas e Ortocentro . . . . .	17
2.3	Circuncentro e Ortocentro são conjugados isogonais . . . . .	19
2.4	O e H são conjugados isogonais, segunda demonstração . . . . .	21
2.5	Distância de um vértice ao Baricentro . . . . .	22
2.6	Reta de Euler . . . . .	23
2.7	Trapézio isósceles é inscritível . . . . .	25
2.8	Distância vértice ortocentro . . . . .	26
2.9	Círculo de nove pontos . . . . .	26
2.10	Lugar geométrico do círculo de nove pontos . . . . .	29
2.11	Reflexão de $H$ relativa aos lados e pontos médios dos lados . . . . .	30
2.12	Sistema ortocêntrico . . . . .	31
2.13	Triângulo Órtico . . . . .	32
2.14	Ponto equidistante de dois vértices, o incentro e o ex-incentro . . . . .	34
2.15	Distância Incentro-Circuncentro ou Fórmula de Euler . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Construções, exercícios e desafios</b>	<b>38</b>
3.1	Linha unindo ortocentro de dois triângulos . . . . .	38
3.1.1	Resolução do Problema 1 . . . . .	38
3.2	Problema de Fagnano . . . . .	39
3.2.1	Resolução 1 do problema de Fagnano . . . . .	40
3.2.2	Resolução 2 do problema de Fagnano . . . . .	42
3.3	Circuncentro e ortocentro, conjugados isogonais e congruência de triângulos. . . . .	43
3.3.1	Resolução do Problema 3 . . . . .	44

<b>4</b>	<b>Problemas de olimpíadas internacionais</b>	<b>46</b>
4.1	Circuncentro. Quadriláteros convexos. Semelhança. P14 SL IMO 1982. . . . .	46
4.1.1	Resolução do Problema 4 . . . . .	46
4.2	Circuncentro. Ortocentro. Lei dos Senos. P32 SL IMO 1989. . . . .	48
4.2.1	Resolução do Problema 5 . . . . .	48
4.3	Ortocentro. Ângulos na circunferência. Paralelogramos. P14 SL IMO 1995. . . .	50
4.3.1	Resolução do Problema 6 . . . . .	50
4.4	Ortocentro. Circuncentro. Baricentro. Paralelogramos. P10 SL IMO 1996. . . .	53
4.4.1	Resolução do Problema 7 . . . . .	53
4.5	Ortocentro. Circuncentro. Potência de ponto relativo a circunferência. P12 SL IMO 1996. . . . .	56
4.5.1	Resolução do Problema 8 . . . . .	56
4.6	Circuncentro. Ortocentro. Circulo de nove pontos. P5 SL IMO 1990. . . . .	58
4.6.1	Resolução do Problema 9 . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>61</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Circuncentro ( $O$ ) e Ortocentro ( $H$ ) figuram entre os centros de triângulos mais conhecidos, devido a sua grande utilização em diversos campos da Matemática e Física. A discussão neste e-book é organizada em três capítulos: Fundamentos teóricos; Construções, exercícios e desafios; Problemas de olimpíadas internacionais.

O livro faz parte de um projeto de longo prazo de treinamento de estudante e professores com problemas de Olimpíadas de Matemáticas. Em particular, este material didático foi utilizado durante algumas das aulas do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O mesmo aconteceu na modalidade de Ensino à Distância (EaD) pela plataforma Moodle de Cultura e Extensão da USP.

O texto conta com 39 figuras que facilitam o acompanhamento das resoluções. Como complemento, links para os gráficos interativos são disponibilizados em páginas do [GeoGebra](#). Vários problemas contam com apresentação em vídeo disponíveis numa [playlist](#) do YouTube.

O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa.

Com uma boa organização e programação adequada discutir problemas na tela do GeoGebra permite ao leitor visualizar simultaneamente gráficos e textos. Em contra partida, na versão impressa tradicional o aprendente precisa ficar alternando entre páginas para acompanhar uma resolução.

O GeoGebra também convida o leitor a interagir e aprender fazendo. Isto é, pode movimentar pontos da construção, colorir, modificar parâmetros de entrada, etc. Aos mais obstinados é permitido copiar e melhorar trabalhos já existentes.

Adicionalmente, a versão online do GeoGebra funciona como uma rede social de aprendi-

zado e colaboração. Os profissionais e alunos podem disponibilizar e buscar construções, baixar e modificar ou alterar e salvar no próprio site. Em resumo, é um local que fornece materiais e meios alternativos para a troca de conhecimento relacionado ao ensino de Matemática.

Foram utilizadas as notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento, curso de Geometria, Nível 2, do Prof. Bruno Holanda [5], do Prof. Rodrigo Pinheiro [50] e do Prof. Cícero Thiago [54]. Também serviram como referência os livros de Geometria [47], Geometria Analítica [4] e Matemática Discreta [45] adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Para o leitor iniciante recomenda-se consultar também os livros de Geometria [3] e [1]. Doze livros eletrônicos gratuitos com as notas de aulas do curso Geometria Olímpica com GeoGebra estão disponíveis em [37], [38], [39], [19], [17], [15], [24], [10], [11], [23], [31] e [9]. Também foram publicados quatro livros eletrônicos dedicados a resolução de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática para o Ensino Médio: [22], [8], [12] e [13]. Outros trabalhos da área de Matemática são [16], [32], [34], [35], [21], [40], [41], [6], [42], [25], [26], [36], [44], [51], [43], [52], [18], [20], [14], [53], [30], [29], [33], [27] e [28].

# Capítulo 2

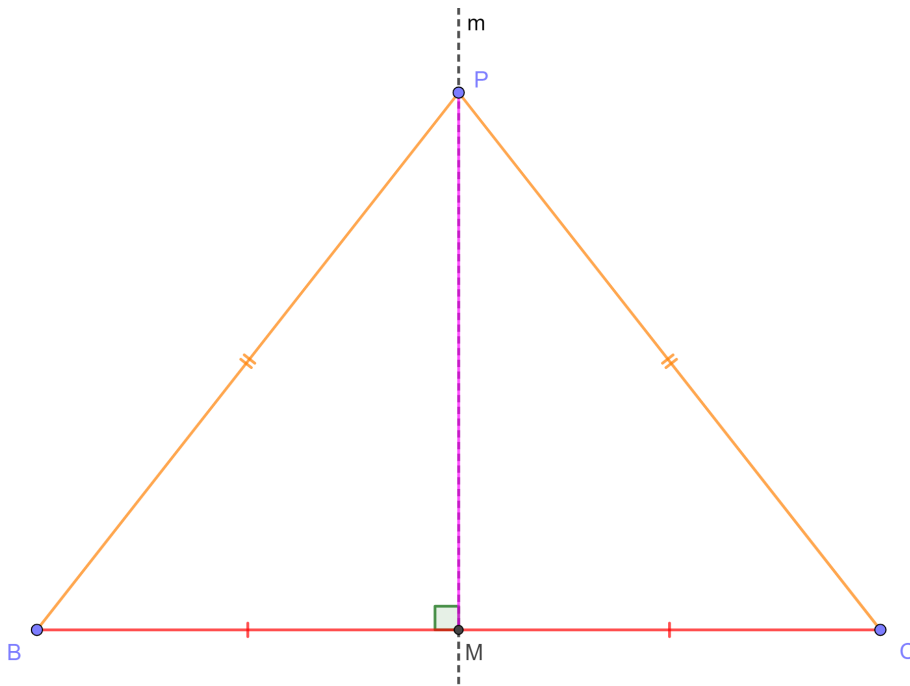
## Fundamentos teóricos

Parte do conteúdo deste e-book está disponível em vídeo de [2023](#).

### 2.1 Mediatriz e Circuncentro

**Proposição 1.** *Sejam  $B$ ,  $C$  e  $P$  três pontos distintos e não colineares num plano. Vale que  $PB = PC$  se, e somente se, o ponto  $P$  pertence à mediatriz  $m$  do segmento  $BC$  (Figura 2.1).*

Figura 2.1: Demonstração da Proposição 1. Versão interativa [aqui](#). O ponto  $P$  pode ser deslocado para verificar as medidas dos segmentos  $PB$  e  $PC$ .



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Suponha-se que o ponto  $P$  pertence à mediatriz  $m$  do segmento  $BC$ . Seja  $M$  o ponto médio de  $BC$ . Como  $m$  é mediatriz vale que:

$$\angle PMB = \angle PMC = 90^\circ.$$

Ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} BM = MC \\ \angle PMB = \angle PMC = 90^\circ . \\ PM(\text{comum}) \end{array} \right.$$

Pelo critério de congruência LAL tem-se:  $\triangle PMB \equiv \triangle PMC$ . Logo,  $PB = PC$ .

Reciprocamente, parte-se da igualdade  $PB = PC$ . Portanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} BM = MC \\ PB = PC . \\ PM(\text{comum}). \end{array} \right.$$

Neste caso utiliza-se o critério de congruência LLL para afirmar que:

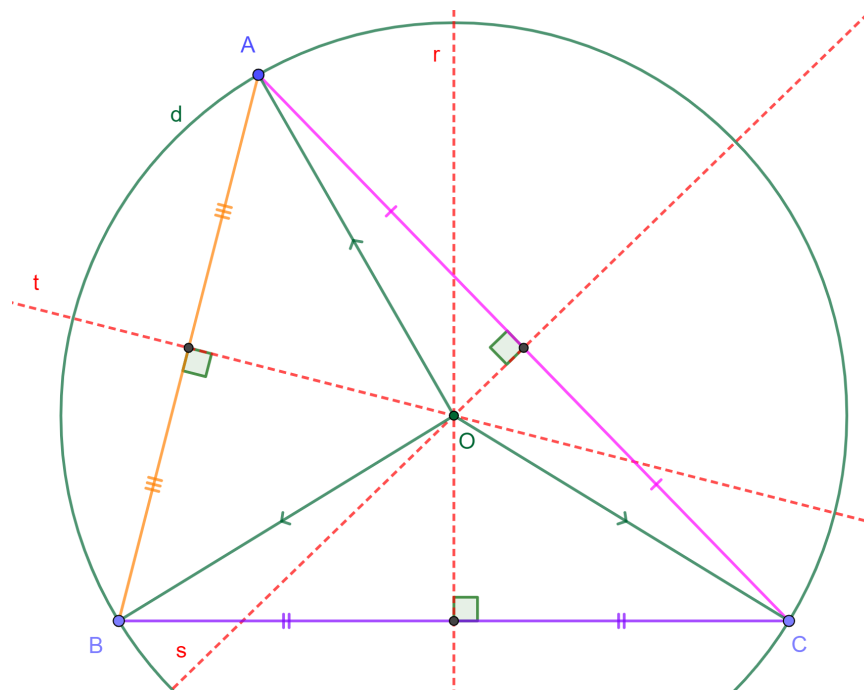
$$\triangle PMB \equiv \triangle PMC.$$

Com isso,  $\angle PMB = \angle PMC = 90^\circ$ . Conclui-se que o ponto  $P$  pertence à mediatriz  $m$  do segmento  $BC$ .  $\square$

**Proposição 2.** *As três mediatrizes de um triângulo  $ABC$  intersectam-se num ponto  $O$ , chamado circuncentro, que é o centro da circunferência circunscrita  $d$  (Figura 2.2).*



Figura 2.2: Demonstração da Proposição 2. Versão interativa [aqui](#). Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  podem ser deslocados para verificar a concorrência das mediatrizes e a posição do ponto  $O$ .



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Sejam  $r$ ,  $s$  e  $t$  as mediatrizes dos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Defina-se  $O = r \cap s$ . Devido a Proposição 1 vale que  $BO = CO$  ( $O \in r$ ) e  $CO = AO$  ( $O \in s$ ), logo  $BO = AO$ . Segue, ainda da Proposição 1, que o ponto  $O$  deve estar também sobre a mediatriz  $t$ . Da igualdade  $BO = CO = AO$  o circuncentro  $O$  é o centro da circunferência circunscrita  $d$ .  $\square$

Para um triângulo acutângulo o circuncentro encontra-se no interior do mesmo; num retângulo é localizado no ponto médio da hipotenusa e em um obtusângulo no exterior do triângulo.

O circuncentro é o ponto  $X(3)$  na lista de centros de triângulos de Clark Kimberling [7]. Para a construção rápida no GeoGebra, relativa ao  $\triangle ABC$ , do circuncentro, pode ser utilizado o comando:

$$O = \text{CentroDoTriângulo}(A, B, C, 3).$$

Como pode ser visto em [46] as [coordenadas trilineares](#) do circuncentro são:

$$\left( \cos(\hat{A}) : \cos(\hat{B}) : \cos(\hat{C}) \right).$$

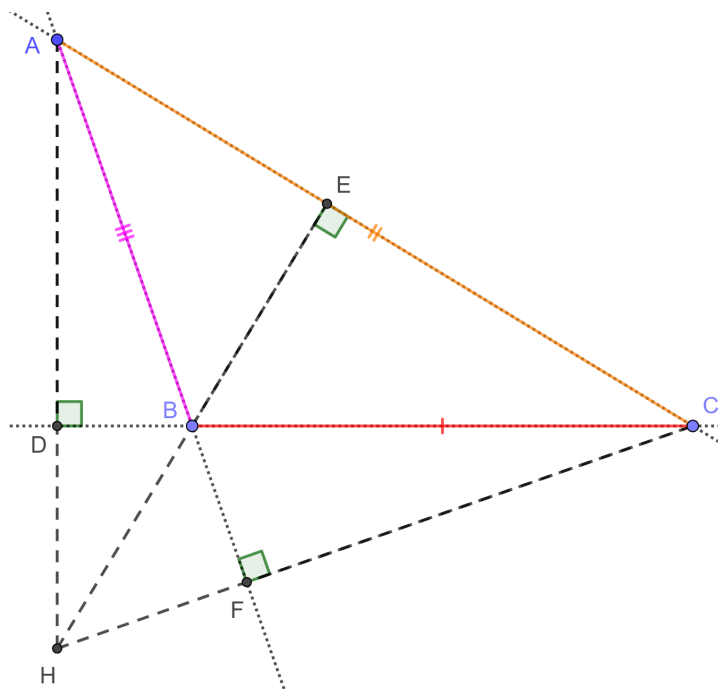
As coordenadas baricêntricas do circuncentro são:

$$\left( \operatorname{sen}(2\hat{A}) : \operatorname{sen}(2\hat{B}) : \operatorname{sen}(2\hat{C}) \right).$$

## 2.2 Alturas e Ortocentro

**Proposição 3.** *As três alturas  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  de um triângulo  $ABC$  intersectam-se num ponto  $H$ , chamado ortocentro (Figura 2.3).*

Figura 2.3: Proposição 3. Versão interativa [aqui](#). Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  podem ser deslocados para verificar a concorrência das alturas e a posição do ponto  $H$ .

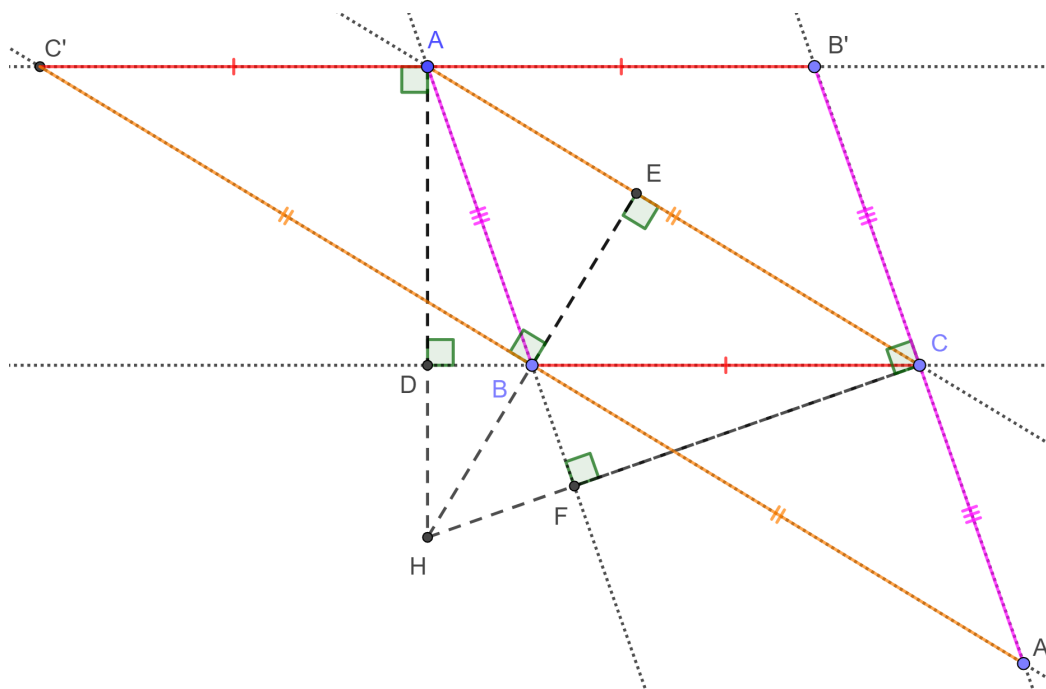


Fonte: O autor.

*Demonstração.* Por  $A$ ,  $B$  e  $C$  são construídas retas paralelas aos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Marcam-se os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  na interseção duas a duas destas conforme a Figura 2.4.

Por construção, os quadriláteros  $AB'CB$ ,  $AC'BC$  e  $ABA'C$  são paralelogramos. Logo,  $A$ ,  $B$  e  $C$  são pontos médios de  $B'C'$ ,  $C'A'$  e  $A'B'$ , respectivamente. Como as retas  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  são mediatrizes do  $\triangle A'B'C'$ , sabe-se, pela Proposição 2, que concorrem num ponto. Mas  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  também são alturas do  $\triangle ABC$ . Ou seja, as alturas são concorrentes.

Figura 2.4: Demonstração da Proposição 3. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

□

Na Figura 2.4 o  $\triangle ABC$  é chamado medial do  $\triangle A'B'C'$  e pode ser enunciado o Corolário que segue.

**Corolário 4.** *O circuncentro de um triângulo coincide com o ortocentro do seu triângulo medial.*

Para um triângulo acutângulo o ortocentro encontra-se no interior do mesmo; num retângulo é localizado no vértice do ângulo reto e em um obtusângulo no exterior do triângulo.

O ortocentro é o ponto  $X(4)$  na lista de centros de triângulos de Clark Kimberling [7]. Para a construção rápida no GeoGebra, relativa ao  $\triangle ABC$ , do ortocentro, pode ser utilizado o comando:

$$H = \text{CentroDoTriângulo}(A, B, C, 4).$$

Como pode ser visto em [46] as coordenadas trilineares do ortocentro são:

$$\left( \sec(\hat{A}) : \sec(\hat{B}) : \sec(\hat{C}) \right).$$

As coordenadas baricêntricas do ortocentro são:

$$\left( \text{tg}(\hat{A}) : \text{tg}(\hat{B}) : \text{tg}(\hat{C}) \right).$$

### 2.3 Circuncentro e Ortocentro são conjugados isogonais

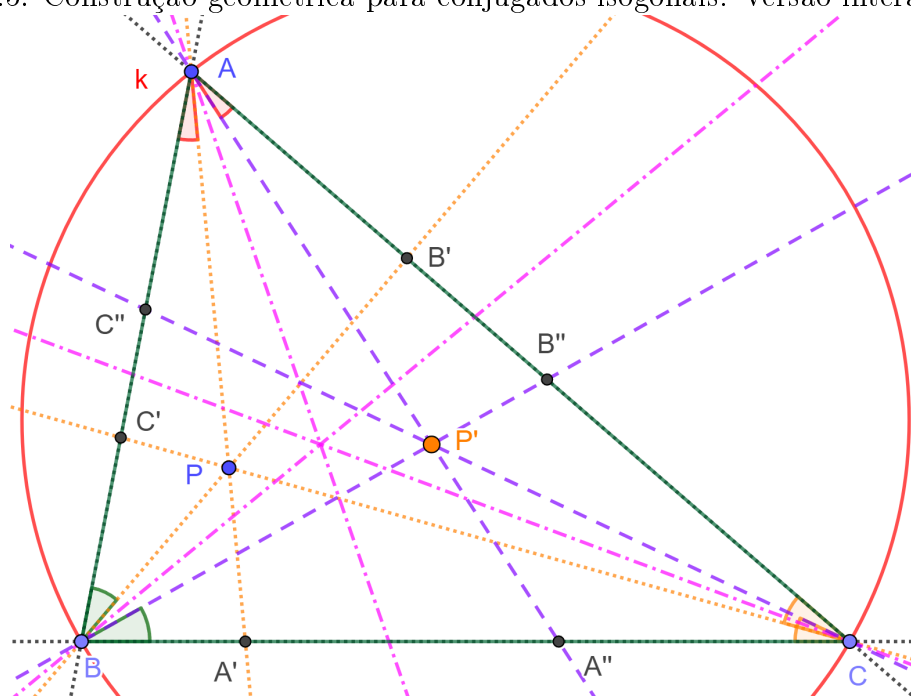
**Definição 1.** *Sejam um triângulo  $ABC$  e  $k$  seu circuncírculo. O conjugado isogonal  $P'$  do ponto  $P \notin k$  é obtido refletindo as retas  $PA$ ,  $PB$  e  $PC$  em relação às bissetrizes internas de  $ABC$ , que passam por  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente. Isto é,  $P'$  é tal que valem as igualdades de ângulos a seguir (Figura 2.5):*

$$\angle BAP = \angle CAP',$$

$$\angle ABP = \angle CBP',$$

$$\angle ACP = \angle BCP'.$$

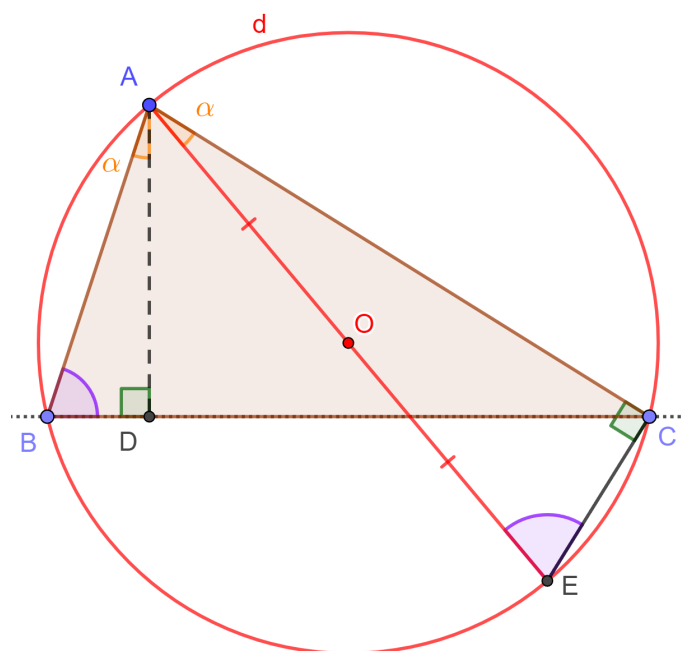
Figura 2.5: Construção geométrica para conjugados isogonais. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

**Proposição 5.** *Seja  $O$  o centro da circunferência circunscrita  $d$  ao triângulo  $ABC$  e seja  $D$  a projeção de  $A$  sobre a reta  $BC$ , então  $\angle DAB = \angle OAC$  (Figura 2.7).*

Figura 2.6: Caso da Proposição 5 em que o  $\triangle ABC$  é acutângulo. Versão interativa [aqui](#). Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  podem ser deslocados.



Fonte: O autor.

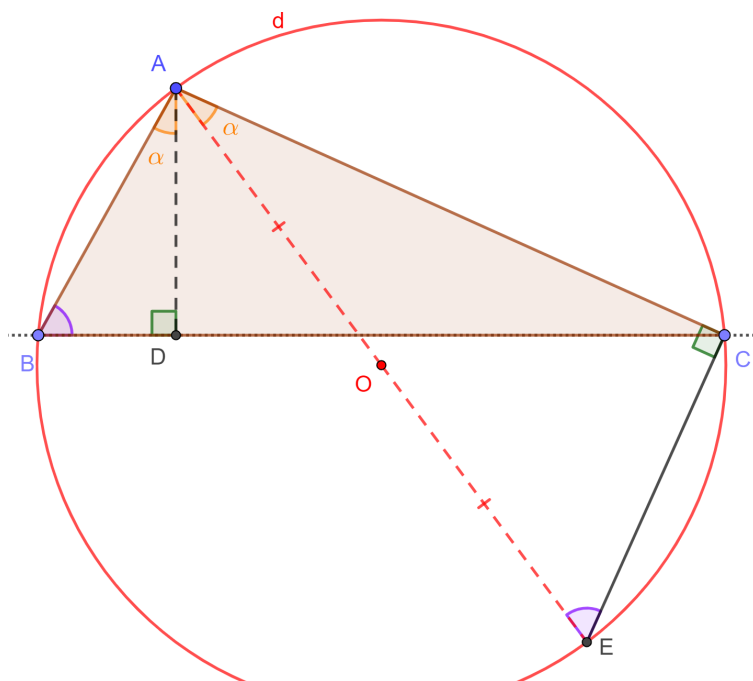
*Demonstração.* Seja  $AE$  um diâmetro de  $d$ . No  $\triangle ABC$  vale que:

$$\angle AEC = \angle ABC = \angle ABD,$$

pois enxergam a mesma corda  $AC$  (Figura 2.6 e Figura 2.7).

Como  $AE$  é diâmetro segue que  $\angle ACE = 90^\circ = \angle ADB$ . Pelo critério de semelhança AA vale que  $\triangle ACE \sim \triangle ADB$ . Portanto,  $\angle BAD = \angle EAC = \angle OAC = \alpha$ .  $\square$

Figura 2.7: Caso da Proposição 5 em que o  $\triangle ABC$  é obtusângulo. Versão interativa [aqui](#). Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  podem ser deslocados.



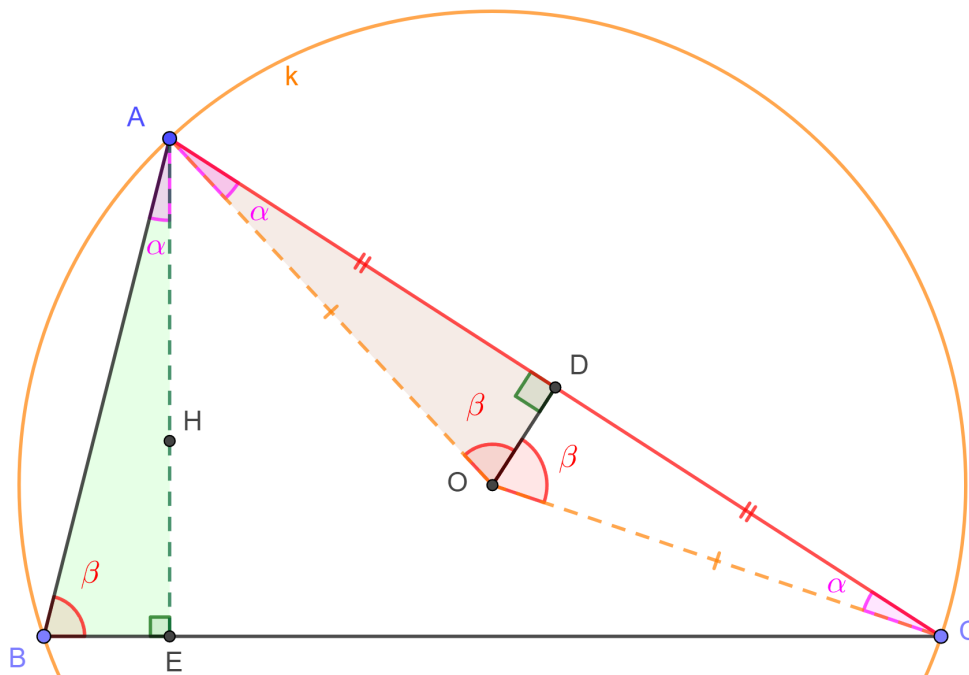
Fonte: O autor.

Um resultado análogo pode ser provado para os outros vértices. O ortocentro  $H$  e o circuncentro  $O$  formam um par de pontos chamados **conjugados isogonais**.

## 2.4 O e H são conjugados isogonais, segunda demonstração

**Proposição 6.** *O circuncentro  $O$  e ortocentro  $H$  do  $\triangle ABC$  são conjugados isogonais (Figura 2.8).*

Figura 2.8: Construção geométrica para provar que circuncentro  $O$  e ortocentro  $H$  são conjugados isogonais. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Como  $O$  é o centro da circunferência  $k$ , circunscrita ao  $\triangle ABC$ , então:

$$\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta.$$

Isto é, o ângulo central é duas vezes o inscrito (Figura 2.8). Seja  $D$  o ponto médio do segmento  $AC$ . Segue que  $AD = DC$  e  $AO = OC$ . Como o  $\triangle AOC$  é isósceles, de base  $AC$ , o segmento  $OD$  é mediana, bissetriz e altura ( $OD \perp AC$ ). Logo, pelo critério de congruência LLL vale que:

$$\triangle ADO \equiv \triangle CDO$$

e  $\angle DOA = \angle DOC = \beta$ . Tem-se que  $H \in AE$  e  $AE \perp BC$ . Segue pelo critério de semelhança AA que:

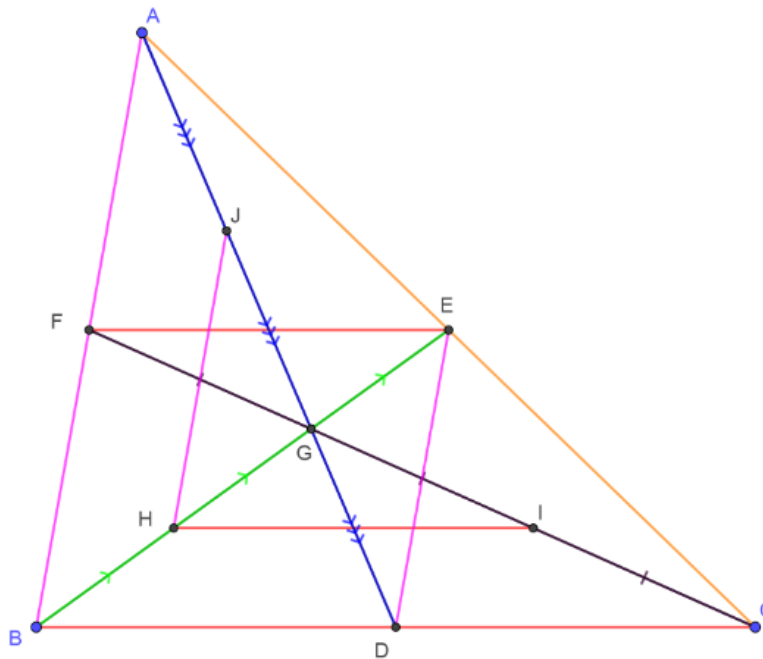
$$\triangle ADO \sim \triangle AEB$$

e  $\angle DAO = \angle EAB = \alpha$ . Em outras palavras, as retas  $AO$  e  $AE$  são simétricas em relação a bissetriz ao  $\angle BAC$ . Uma construção análoga pode ser feita partindo dos outros dois vértices.  $\square$

## 2.5 Distância de um vértice ao Baricentro

**Proposição 7.** *A distância de um vértice ao Baricentro é duas vezes a distância do Baricentro ao pé da mediana correspondente (Figura 2.9).*

Figura 2.9: Guia para a demonstração da Proposição 7. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.*  $EF$  é Base Média do  $\triangle ABC$  logo  $EF \parallel BC$  e  $EF = BD = DC = \frac{BC}{2}$ . Sejam  $H$  e  $I$  pontos médios dos lados  $BG$  e  $CG$ , respectivamente. Tem-se que o segmento  $HI$  é Base Média do  $\triangle GBC$ . Segue que  $HI \parallel BC$  e  $HI = \frac{BC}{2}$ .

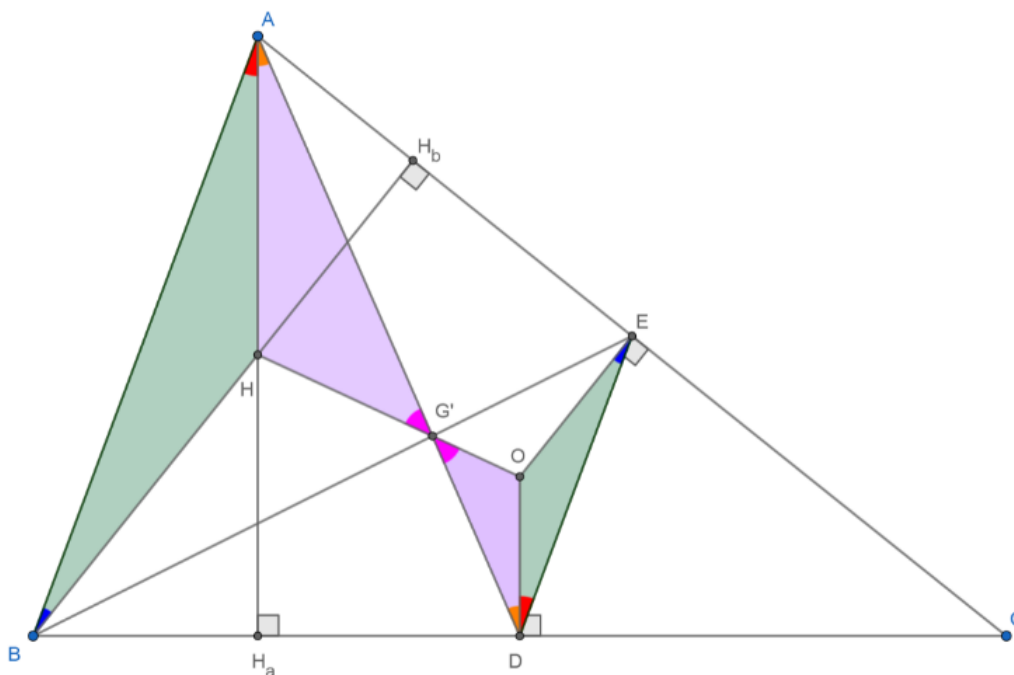
Como  $EF \parallel HI$  e  $EF = HI$  o quadrilátero  $EFHI$  é um paralelogramo e suas diagonais  $HE$  e  $FI$  encontram-se nos seus pontos médios:  $HG = GE$  e  $FG = GI$ . Conclui-se que  $BG = 2GE$  e  $CG = 2GF$ . Analogamente demonstra-se que  $AG = 2GD$ .  $\square$

## 2.6 Reta de Euler

**Proposição 8** (Reta de Euler). *Para todo triângulo  $ABC$ , o Circuncentro  $O$ , o Baricentro  $G$  e o Ortocentro  $H$  são colineares e  $HG = 2GO$ . Adicionalmente, sendo  $D$  o pé da mediana relativa ao vértice  $A$ , vale que  $AH = 2OD$  (Figura 2.10).*



Figura 2.10: Guia para a demonstração da Proposição 8. Os pontos  $H$ ,  $G$  e  $O$  são colineares e determinam a Reta de Euler. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* A Figura 2.10 ilustra um triângulo  $ABC$ . Sejam  $D$  e  $E$  pontos médios dos lados  $BC$  e  $CA$ , respectivamente. Sejam  $H_a$  e  $H_b$  os pés das alturas relativas aos vértices  $A$  e  $B$ . Constroem-se o Circuncentro  $O$  e o Ortocentro  $H$  do triângulo  $ABC$ . Denota-se por  $G'$  a interseção das retas  $AD$  e  $HO$ .

Mostrar-se-á que o ponto  $G' = G$  é o Baricentro. Isto é,  $H$ ,  $G$  e  $O$  são colineares. Tem-se que  $DE$  é Base Média relativa ao lado  $AB$ . Logo,  $DE \parallel AB$  e

$$\frac{AB}{DE} = 2.$$

Como  $AH_a \parallel OD$  e  $BH_b \parallel OE$  segue que  $\angle BAH = \angle EDO$  e  $\angle ABH = \angle DEO$ . Por AA tem-se  $\triangle ABH \sim \triangle DEO$ . Portanto,

$$\frac{BH}{EO} = \frac{AH}{DO} = \frac{AB}{DE} = 2.$$

Adicionalmente, por ângulos alternos entre paralelas,  $\angle HAG' = \angle ODG'$  e, por opostos pelo vértice,  $\angle AG'H = \angle DG'O$ . Consequentemente, pelo critério de semelhança AA, tem-se  $\triangle AHG' \sim \triangle DOG'$ . Logo,

$$\frac{AH}{DO} = \frac{HG'}{OG'} = \frac{AG'}{DG'} = 2.$$

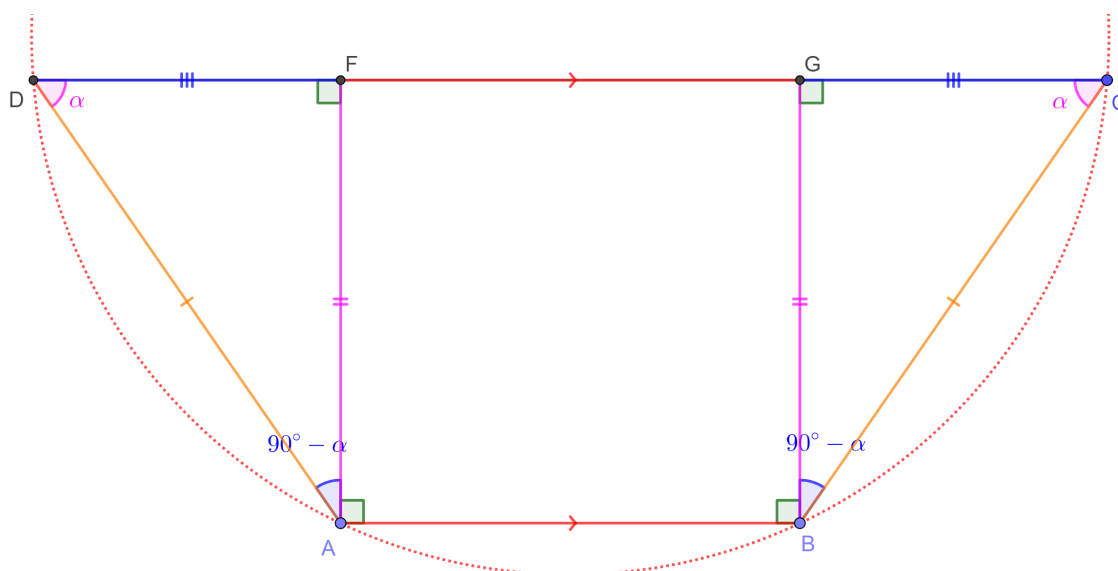
Como  $AG' = 2DG'$  e  $AG = 2DG$  conclui-se que  $G' = G$  e os pontos  $H$ ,  $G$  e  $O$  são colineares (pertencem à Reta de Euler).  $\square$

## 2.7 Trapézio isósceles é inscritível

Antes de enunciar o Teorema do Círculo de nove pontos estudam-se dos lemas.

**Lema 9.** *Todo trapézio isósceles, que não seja paralelogramo diferente de retângulo, é inscritível (Figura 2.11).*

Figura 2.11: Todo trapézio isósceles, que não seja paralelogramo diferente de retângulo, é inscritível. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Considera-se o trapézio  $ABCD$  com  $AB \parallel CD$  e  $BC = DA$ . Sem perda de generalidade, assume-se que  $AB < CD$ .

Por  $A$  e  $B$  traçam-se retas perpendiculares a reta  $CD$  e marcam-se os pontos  $F$  e  $G$  na interseção, respectivamente. Segue que  $ABGF$  é um retângulo e

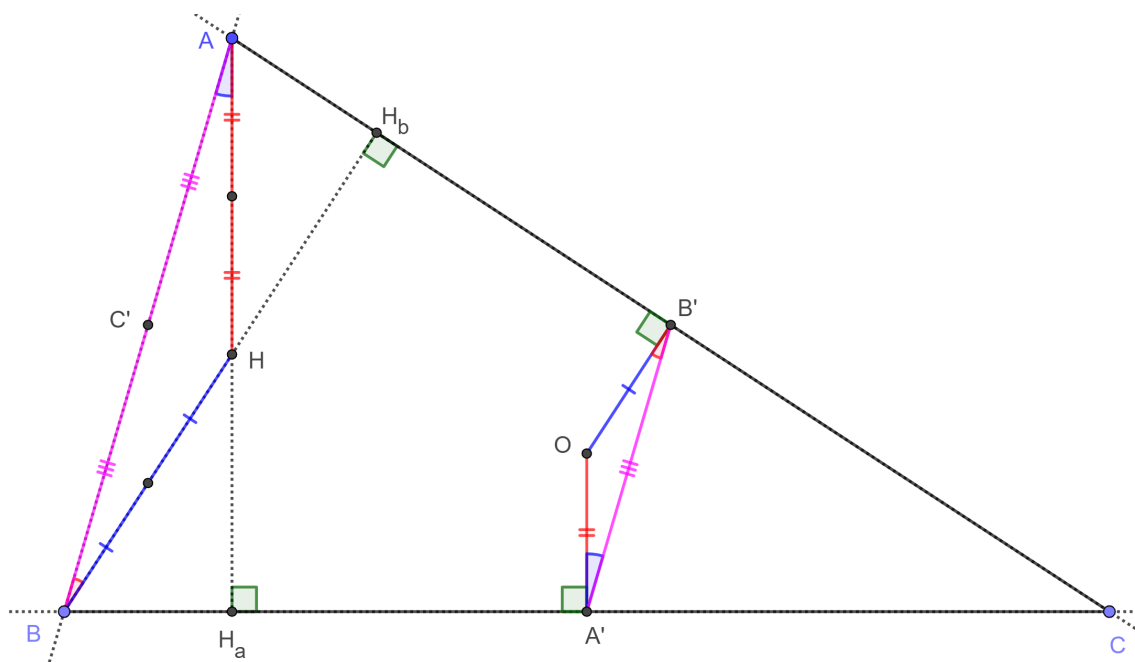
$$\begin{cases} DA = CB \\ AF = BG \\ \angle AFD = \angle BGC = 90^\circ \end{cases} .$$

Pelo critério de congruência especial CH tem-se:  $\triangle AFD \equiv \triangle BGC$ . Logo,  $DF = GC$ ,  $\angle ADF = \angle BCG = \alpha$  e  $\angle DAF = \angle CBG = 90^\circ - \alpha$ . Como a soma dos ângulos opostos de  $ABCD$  é  $180^\circ$  o quadrilátero é inscritível.  $\square$

## 2.8 Distância vértice ortocentro

**Lema 10** (Distância vértice ortocentro). *A distância entre um vértice do  $\triangle ABC$  ao ortocentro  $H$  é igual ao dobro da distância entre o circuncentro  $O$  e o ponto médio do lado oposto.*

Figura 2.12: A distância entre um vértice do  $\triangle ABC$  ao ortocentro  $H$  é igual ao dobro da distância entre o circuncentro  $O$  e o ponto médio do lado oposto. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Sejam  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  os pontos médios dos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Sejam ainda  $H_a$  e  $H_b$  os pés das alturas dos vértices  $A$  e  $B$ . O segmento  $A'B'$  é base média relativa ao lado  $AB$ , com isso  $AB \parallel A'B'$  e  $AB = 2A'B'$ .

Como  $AH \parallel OA'$ , por terem dois pares de lados mutuamente paralelos, então  $\angle HAB = \angle OA'B'$ . Analogamente, de  $BH \parallel OB'$ , segue que  $\angle HBA = \angle OB'A'$ .

Pelo critério de semelhança AA tem-se que  $\triangle AHB \sim \triangle A'OB'$ . Com isso os lados seguem a mesma proporcionalidade:

$$\frac{AH}{A'O} = \frac{BH}{B'O} = \frac{AB}{A'B'} = 2.$$

□

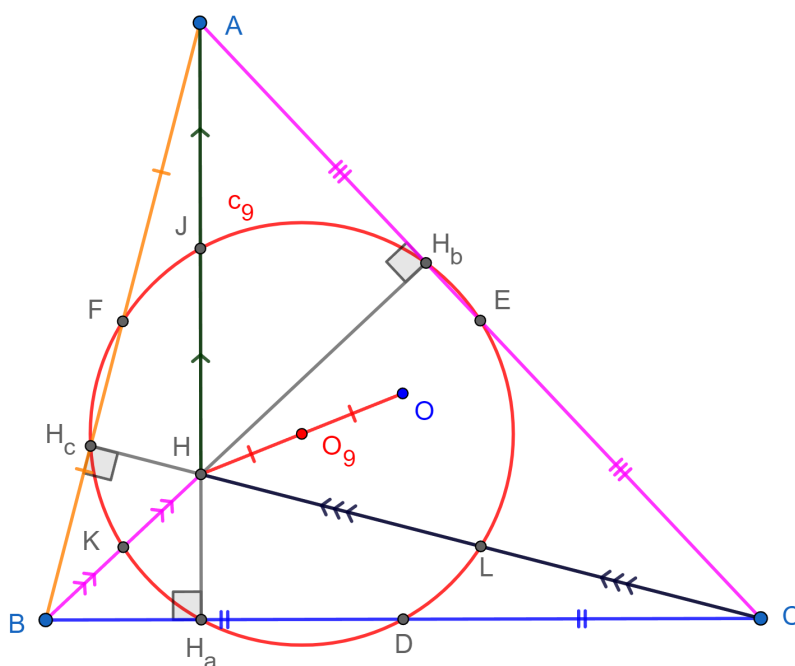
## 2.9 Círculo de nove pontos

**Teorema 11** (Círculo de nove pontos). *Seja um  $\triangle ABC$ ,  $O$  e  $H$  seu circuncentro e ortocentro e  $c_9$  a circunferência que passa pelos pontos médios  $D$ ,  $E$  e  $F$ , dos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ ,*

respectivamente. Então  $c_9$  passa também pelos pés  $H_a$ ,  $H_b$  e  $H_c$  das alturas, bem como pelos pontos médios  $J$ ,  $K$  e  $L$  dos segmentos que unem os vértices a  $H$  (Figura 2.13). Adicionalmente, o centro  $O_9$  de  $c_9$  está localizado no ponto médio do segmento  $HO$  e seu raio é metade do raio da circunferência circunscrita ao  $\triangle ABC$ .

Este Teorema foi enunciado e demonstrado por Brianchon e Poncelet em um trabalho publicado em 1821 [49].

Figura 2.13: A circunferência  $c_9$  passa pelos pontos notáveis:  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $H_a$ ,  $H_b$ ,  $H_c$ ,  $J$ ,  $K$  e  $L$ . O centro  $O_9$  de  $c_9$  está localizado no ponto médio do segmento  $HO$  e seu raio é metade do raio da circunferência circunscrita ao  $\triangle ABC$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* É construída a circunferência  $c_9$  passando pelos pontos médios  $D$ ,  $E$  e  $F$  dos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Primeiro será provado que  $H_a \in c_9$ .

Os segmentos  $DE$  e  $FE$  são bases médias, logo  $BFED$  é um paralelogramo (Figura 2.14). Isto é,  $FE \parallel BD$ ,  $ED \parallel FB$ ,  $FE = BD$  e

$$ED = FB. \tag{2.9.1}$$

No  $\triangle AH_aB$ , retângulo em  $H_a$ , a mediana  $H_aF$ , relativa à hipotenusa  $AB$ , é metade desta. Logo,

$$H_aF = FB. \tag{2.9.2}$$

De (2.9.1) e (2.9.2) segue que  $H_aF = ED$ . Consequentemente o quadrilátero  $H_aDEF$  é um trapézio isósceles. Pelo Lema 9 o quadrilátero  $H_aDEF$  é inscritível. Com isto mostra-se que  $H_a \in c_9$ . Analogamente demonstra-se que  $H_b, H_c \in c_9$ .

Seja  $J$  o ponto médio do segmento  $HA$ . Quer-se provar que  $J \in c_9$ . No  $\triangle AHB$  o segmento  $JF$  é base média. Com isto,  $JF \parallel HB$ . Analogamente, no  $\triangle ABC$  o segmento  $FD$  é base média. Logo,  $FD \parallel CA$ . Por terem lados respectivamente paralelos tem-se:

$$\angle DFJ = \angle AH_bB = 90^\circ.$$

Como  $\angle DFJ = \angle DH_aJ = 90^\circ$  o quadrilátero  $DH_aFJ$  é cíclico e  $JD$  é um diâmetro de  $c_9$ . Portanto,  $J \in c_9$ . Analogamente mostra-se que os pontos  $K$  e  $L$ , médios entre  $B$  e  $H$  e  $C$  e  $H$  estão em  $c_9$ .

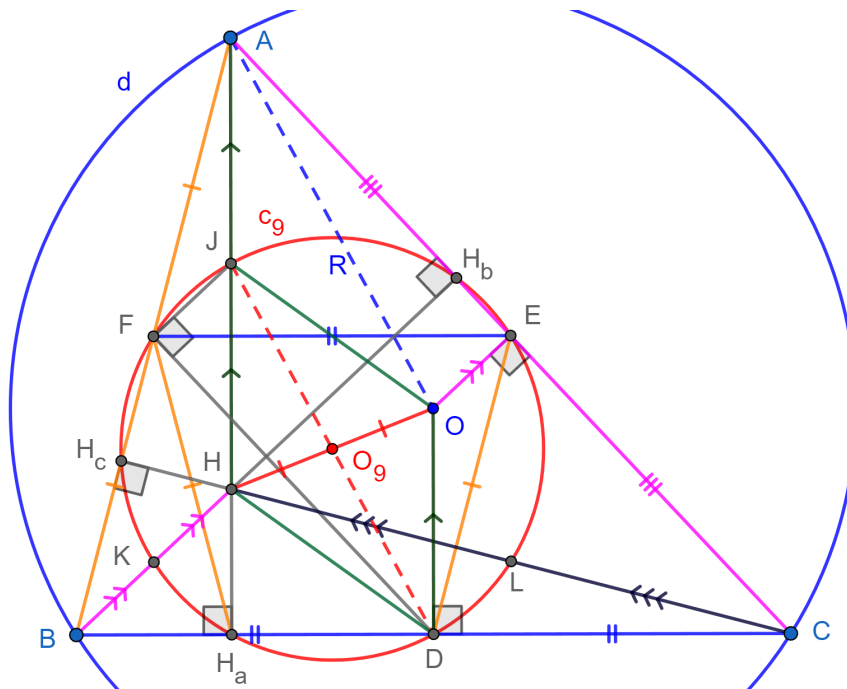
Localiza-se o circuncentro  $O$  do  $\triangle ABC$  e marca-se a interseção  $O_9$  dos segmentos  $OH$  e  $DJ$ . Foi provado no Lema 10 que  $AH = 2OD$ . Logo,  $AJ = JH = OD$  e os quadriláteros  $AODJ$  e  $JODH$  são paralelogramos.

Sendo  $R$  o raio da circunferência  $d$  circunscrita ao  $\triangle ABC$  tem-se:  $AO = JD = R$ . Como as diagonais de um paralelogramo intersectam-se no seu ponto médio encontra-se que  $HO_9 = O_9O$  e

$$JO_9 = O_9D = \frac{R}{2}.$$

Isto é, o centro  $O_9$  do círculo de nove pontos  $c_9$  está localizado no ponto médio do segmento  $HO$  e seu raio é metade do raio da circunferência circunscrita ao  $\triangle ABC$ .

Figura 2.14: Demonstração. A circunferência  $c_9$  passa pelos pontos notáveis:  $D, E, F, H_a, H_b, H_c, J, K$  e  $L$ . O centro  $O_9$  de  $c_9$  está localizado no ponto médio do segmento  $HO$  e seu raio é metade do raio da circunferência circunscrita ao  $\triangle ABC$ . Versão interativa [aqui](#).



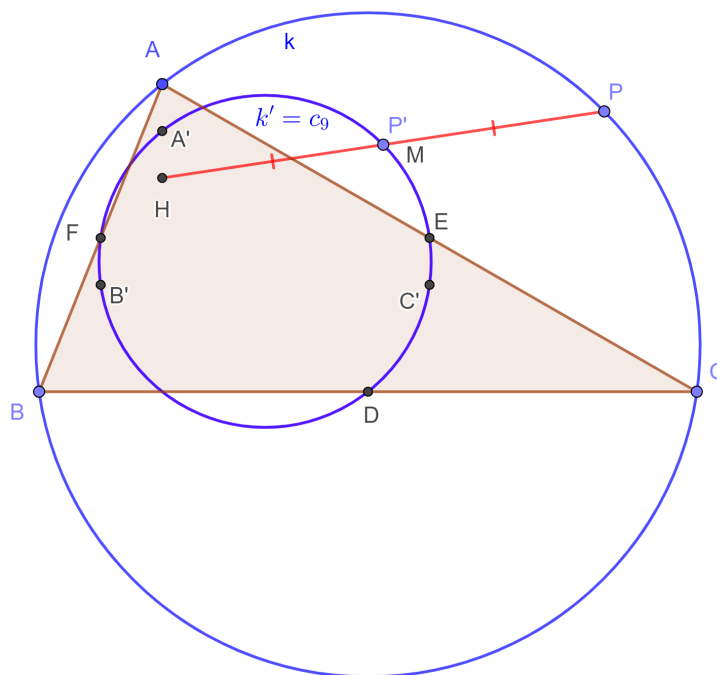
Fonte: O autor.

□

## 2.10 Lugar geométrico do círculo de nove pontos

**Proposição 12.** *Seja  $P$  um ponto da circunferência circunscrita ao  $\triangle ABC$  e  $H$  o ortocentro também do  $\triangle ABC$ . O lugar geométrico do ponto médio  $M$  do segmento  $HP$  é o círculo de nove pontos  $c_9$  (Figura 2.15).*

Figura 2.15: Homotetia com centro em  $H$  e fator  $\frac{1}{2}$  transforma  $k$  em  $k' = c_9$  e  $P$  em  $P' = M$ . Versão interativa [aqui](#).



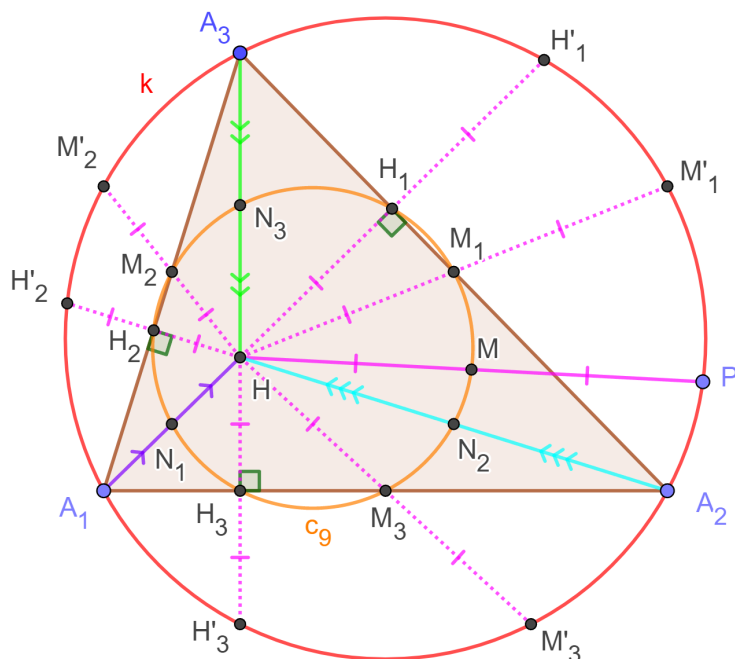
Fonte: O autor.

*Demonstração.* Sabe-se que os pontos médios  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  entre  $H$  e os vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertencem a  $c_9$ . Logo, uma homotetia com centro em  $H$  e fator  $\frac{1}{2}$  transforma  $k$  em  $k' = c_9$  e  $P$  em  $P' = M$ .  $\square$

## 2.11 Reflexão de $H$ relativa aos lados e pontos médios dos lados

**Corolário 13.** *Seja o  $\triangle A_1A_2A_3$  de ortocentro  $H$ , pés das alturas  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$ , pontos médios dos lados  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  e pontos médios entre  $H$  e os vértices  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$ , respectivamente. Seja ainda  $k$  a circunferência circunscrita ao  $\triangle A_1A_2A_3$ . A reflexão do ponto  $H$  relativa aos lados  $H'_1$ ,  $H'_2$  e  $H'_3$ , e pontos médios dos lados  $M'_1$ ,  $M'_2$  e  $M'_3$  está sobre  $k$  (Figura 2.16).*

Figura 2.16: A reflexão do ponto  $H$  relativa aos lados  $H'_1$ ,  $H'_2$  e  $H'_3$ , e pontos médios dos lados  $M'_1$ ,  $M'_2$  e  $M'_3$  está sobre  $k$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Todas as reflexões são casos particulares da Proposição 12. □

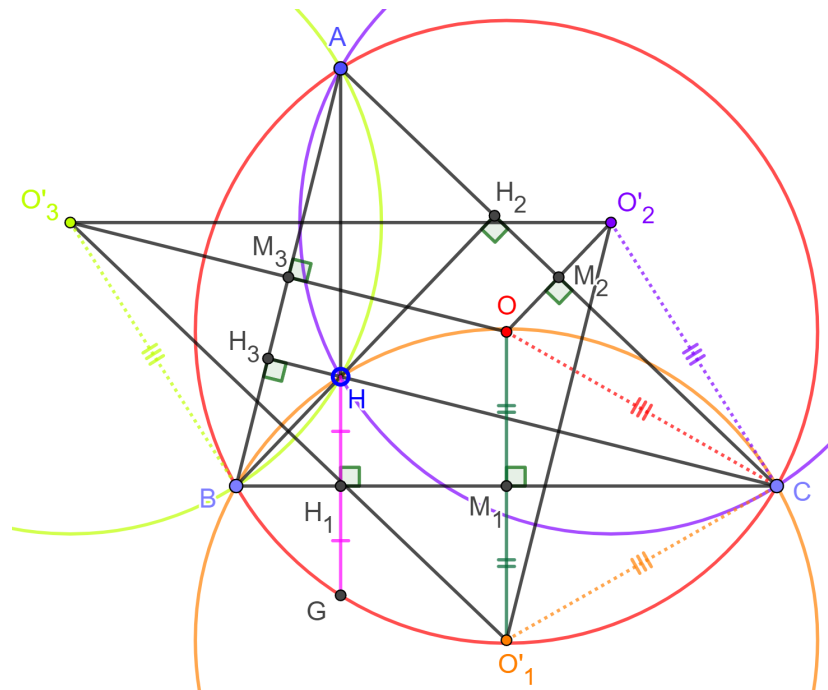
## 2.12 Sistema ortocêntrico

**Definição 2.** *Quatro pontos formam um sistema ortocêntrico quando cada ponto é ortocentro do triângulo formado pelos outros três pontos.*

**Proposição 14.** *Os pontos  $A, B, C$  e  $H$  formam um sistema ortocêntrico. Por exemplo, o ponto  $A$  é ortocentro do  $\triangle BCH$ . Os raios das circunferências circunscritas a qualquer um dos quatro triângulos possíveis são iguais. O conjunto de circuncentros  $O, O'_1, O'_2$  e  $O'_3$  forma outro sistema ortocêntrico (Figura 2.17).*



Figura 2.17: Os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $H$  formam um sistema ortocêntrico. Versão interativa [aqui](#).



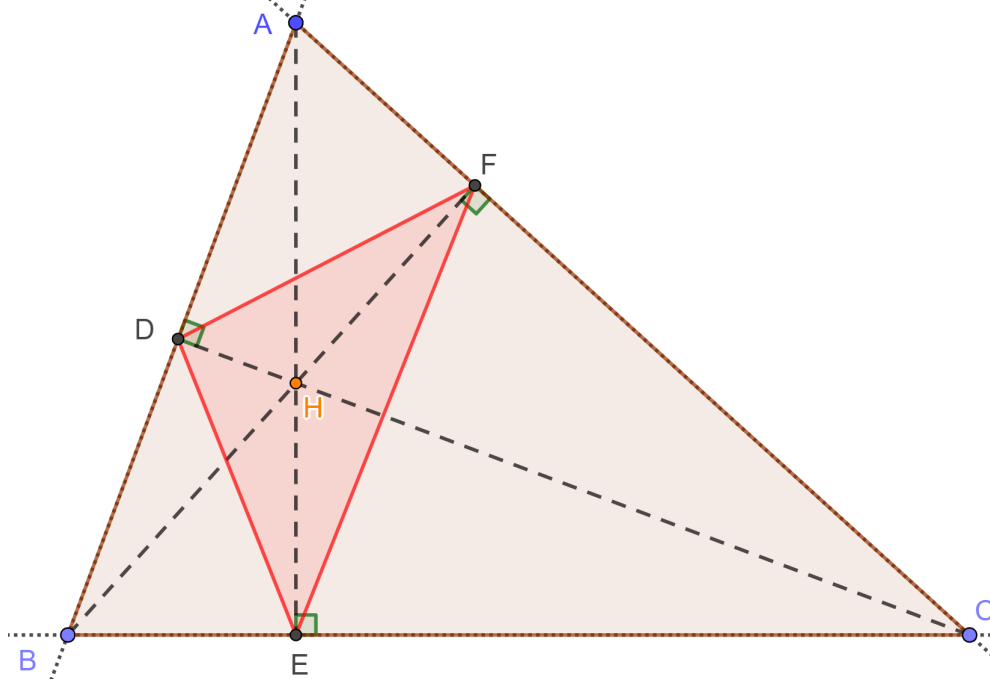
Fonte: O autor.

## 2.13 Triângulo Órtico

**Definição 3** (Triângulo Órtico). *Sejam os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$  as projeções ortogonais dos vértices  $C$ ,  $A$  e  $B$  sobre os lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ , respectivamente. O  $\triangle DEF$  é o triângulo órtico do  $\triangle ABC$  (Figura 2.19).*

O triângulo órtico também pode ser definido como o triângulo pedal do ortocentro  $H$  de um  $\triangle ABC$ .

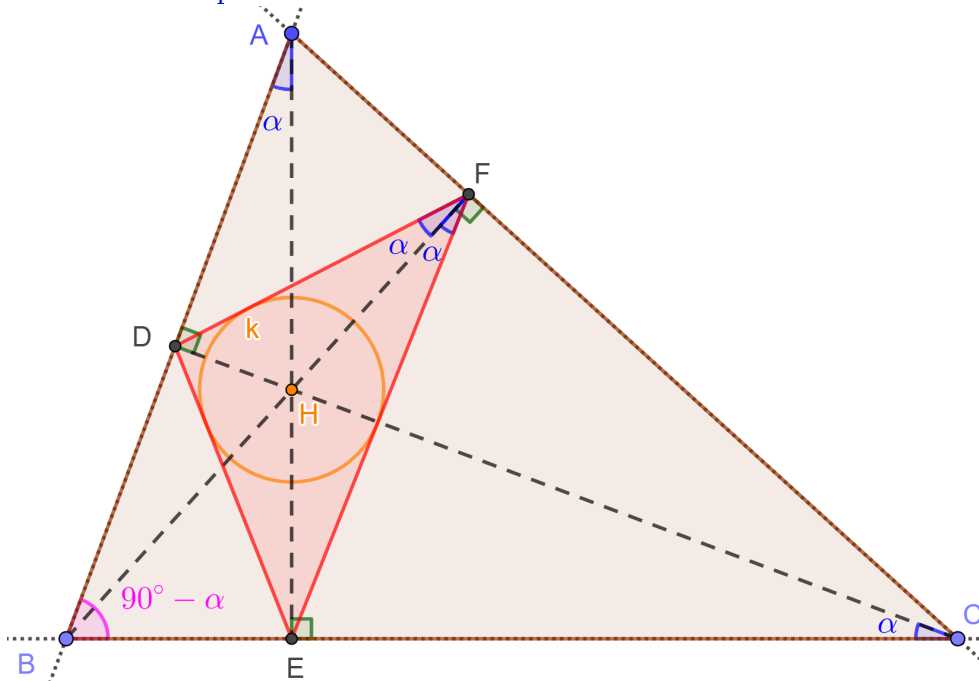
Figura 2.18: Definição de Triângulo Órtico. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

**Proposição 15.** *O incentro do triângulo órtico  $DEF$  coincide com o ortocentro do triângulo original  $ABC$  (Figura 2.19).*

Figura 2.19: O incentro do triângulo órtico  $DEF$  coincide com o ortocentro do triângulo original  $ABC$ . Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Seja  $\angle BAE = \alpha$ . Como  $\angle AEB = 90^\circ$ , então  $\angle EBA = 90^\circ - \alpha$ . Do  $\triangle BDC$ , retângulo em  $D$ , segue que  $\angle BCD = \alpha$ .

Como  $\angle HFA = \angle HDA = 90^\circ$  o quadrilátero  $AFHD$  é inscrito. Logo,  $\angle DFH = \angle DAH = \alpha$ . Do mesmo modo, como  $\angle HEC = \angle HFC = 90^\circ$  o quadrilátero  $CFHE$  é inscrito. Logo,  $\angle EFH = \angle ECH = \alpha$ .

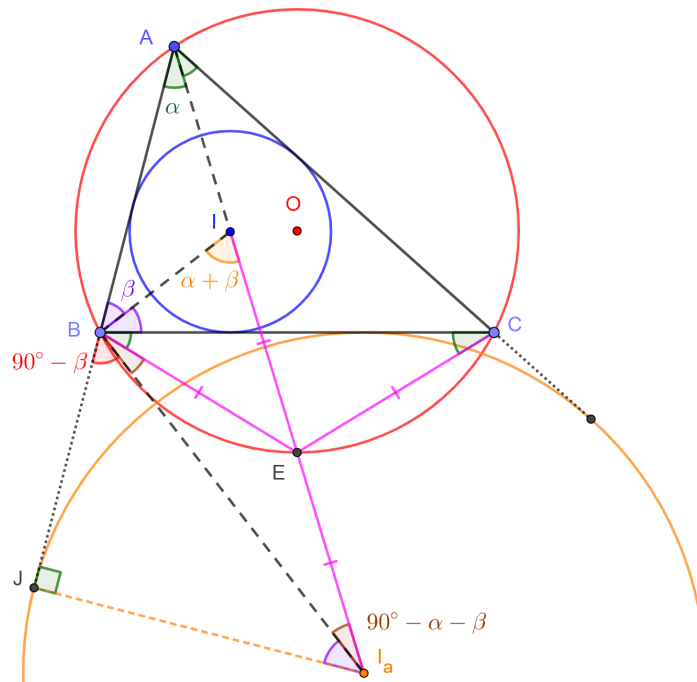
Segue que a reta  $HF$  é bissetriz do  $\angle DFE$ . Analogamente, mostra-se que as retas  $HD$  e  $HE$  são bissetrizes do  $\angle FDE$  e  $\angle DEF$ , respectivamente. Ou seja, o ponto  $H$  é o incentro do  $\triangle DEF$  e com centro nele pode ser esboçado o incírculo  $k$ .  $\square$

## 2.14 Ponto equidistante de dois vértices, o incentro e o ex-incentro

**Proposição 16.** *A Figura 2.20 mostra um triângulo  $ABC$ . Seja  $I$  seu Incentro e  $I_a$  o centro da ex-circunferência correspondente ao lado  $BC$ . Seja  $E$  o ponto de interseção de  $AI$  com a circunferência circunscrita ao  $\triangle ABC$ . Então,*

$$EB = EC = EI = EI_a.$$

Figura 2.20: Guia para a demonstração da Proposição 16. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Pela bissetriz em  $A$  e o quadrilátero inscrito  $ACEB$  tem-se:

$$\angle BAE = \angle CAE = \angle CBE = \angle BCE = \alpha.$$

Portanto, o  $\triangle EBC$  é isósceles de base  $BC$  e  $EB = EC$ . Além disso, da bissetriz em  $B$ , sejam  $\angle IBA = \angle IBC = \beta$ . Pela propriedade do ângulo externo,

$$\angle BIE = \alpha + \beta.$$

Segue que,  $\angle BIE = \angle IBE$ , o  $\triangle EBI$  é isósceles de base  $BI$  e  $EB = EI$ . Pela bissetriz externa em  $B$ , sejam

$$\angle JBI_a = \angle CBI_a = \gamma.$$

Como o  $\angle JBA = 180^\circ$  tem-se que  $\gamma = 90^\circ - \beta$ . Do  $\triangle BJI_a$ , retângulo em  $J$ , tem-se  $\angle JI_aB = \beta$ . Pela soma dos ângulos internos no  $\triangle AJI_a$  e o ângulo raso em  $B$  encontra-se:

$$\angle EBI_a = \angle EI_aB = 90^\circ - \alpha - \beta.$$

Isto é, o  $\triangle EBI_a$  é isósceles, de base  $BI_a$ , e  $EB = EI_a$ . Conclui-se que:

$$EB = EC = EI = EI_a.$$

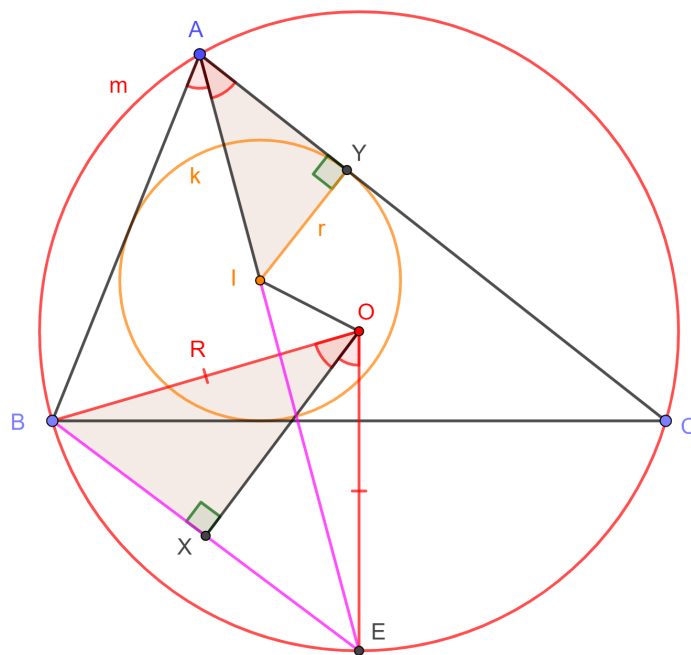
□

## 2.15 Distância Incentro-Circuncentro ou Fórmula de Euler

**Proposição 17** (Distância Incentro-Circuncentro ou Fórmula de Euler). *A Figura 2.21 mostra um triângulo  $ABC$ . Seja  $I$  seu Incentro,  $k$  sua circunferência inscrita de raio  $r$ . Adicionalmente, seja  $m$  a circunferência circunscrita ao  $\triangle ABC$ , de centro  $O$  e raio  $R$ . Então:*

$$OI^2 = R(R - 2r).$$

Figura 2.21: Guia para a demonstração da Proposição 17. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

*Demonstração.* Seja  $E$  o ponto de interseção da bissetriz  $AI$  com  $m$ . Pela Potência do ponto  $I$  em relação a  $m$  tem-se:

$$R^2 - OI^2 = AI \cdot EI. \tag{2.15.1}$$

Sejam  $X$  e  $Y$  os pés das perpendiculares de  $O$  e  $I$  até  $BE$  e  $AC$ , respectivamente. Como o  $\triangle OBE$  é isósceles de base  $BE$ , e devido a relação entre ângulo central e inscrito, relativo a corda  $BE$ , segue que  $\angle YAI = \angle XOB$ . Logo, pelo caso de semelhança AA, tem-se  $\triangle AIY \sim \triangle OBX$ . Portanto,

$$\frac{BX}{IY} = \frac{OB}{AI} \quad \text{ou} \quad AI = \frac{OB \cdot IY}{BX} = \frac{Rr}{\frac{EB}{2}} = \frac{2Rr}{EB}.$$

Viu-se na Proposição 16 que  $EB = EI$ , segue que:

$$AI = \frac{2Rr}{EI}. \tag{2.15.2}$$

Substituindo (2.15.2) em (2.15.1) encontra-se  $R^2 - OI^2 = 2Rr$ . Logo,

$$OI^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r).$$

□

## Capítulo 3

### Construções, exercícios e desafios

#### 3.1 Linha unindo ortocentro de dois triângulos

**Problema 1.** *Seja um  $\triangle ABC$ ,  $k$  a circunferência circunscrita ao  $\triangle ABC$  e o ponto  $D \in k$ . Sejam ainda  $H_A$  o ortocentro do  $\triangle ABC$  e  $H_D$  o ortocentro do  $\triangle DBC$ . Provar que  $AH_AH_DD$  é um paralelogramo.*

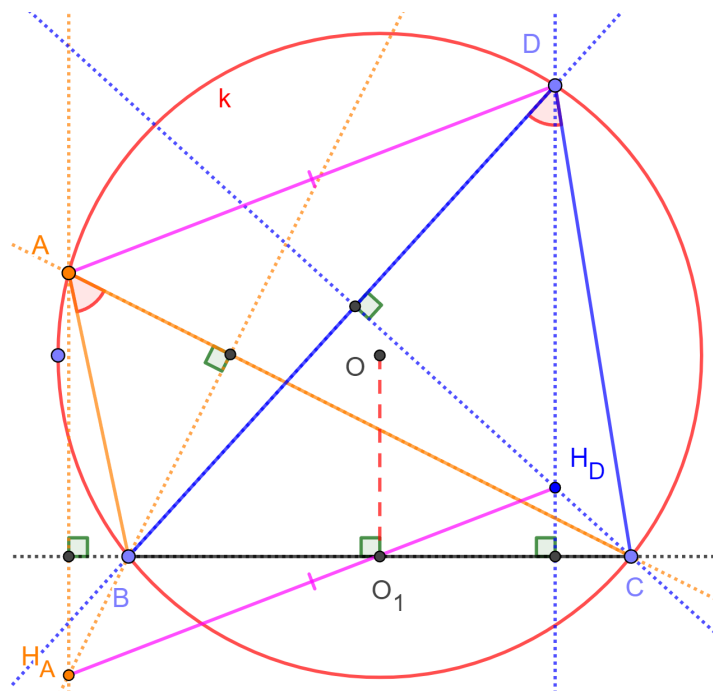
##### 3.1.1 Resolução do Problema 1

Seja o ponto  $O$  centro de  $k$  e  $O_1$  sua projeção ortogonal sobre  $AB$ . Como o segmento  $AB$  é comum aos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DBC$ , então:

$$AH_A \parallel DH_D,$$

$$AH_A = 2 \cdot OO_1 = DH_D.$$

Ou seja, os segmentos  $AH_A$  e  $DH_D$  são paralelos e de igual medida. Logo,  $AH_AH_DD$  é um paralelogramo (Figura 3.1).

Figura 3.1: Ilustração do Problema 1. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

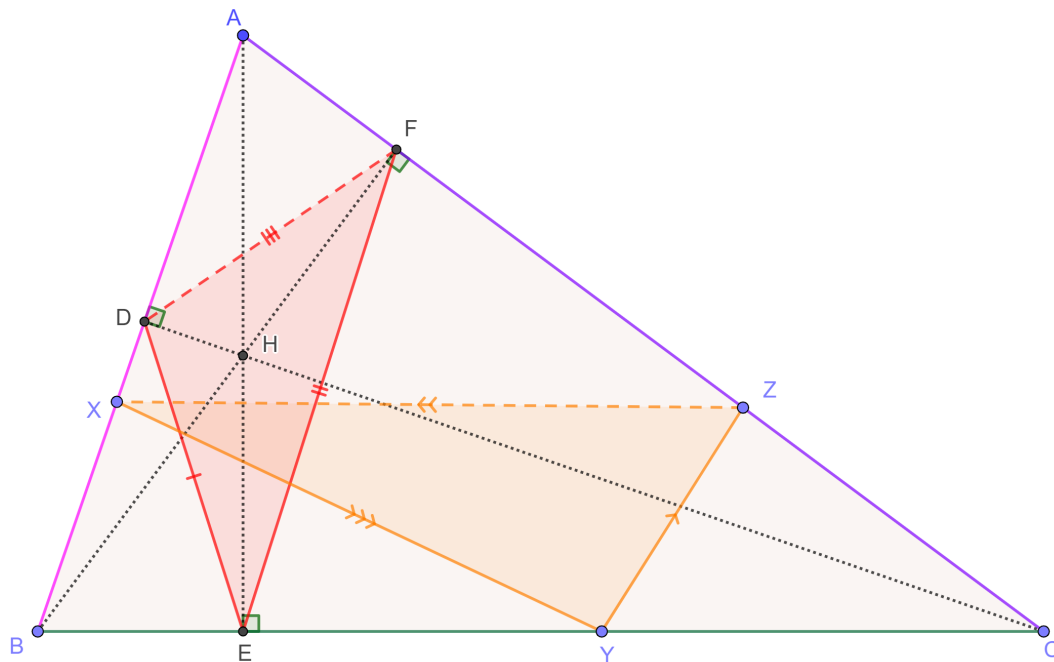
## 3.2 Problema de Fagnano

Giovanni Francesco Fagnano dei Toschi foi um matemático e clérigo italiano. Nasceu em 1715 e morreu em 1797 [48].

**Problema 2** (Fagnano). *Entre todos os  $\triangle XYZ$  inscritos num triângulo acutângulo  $ABC$  o de perímetro mínimo é o órtico  $DEF$  (Figura 3.2).*



Figura 3.2: Problema de Fagnano. Versão interativa [aqui](#). Podem movimentar-se os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ .



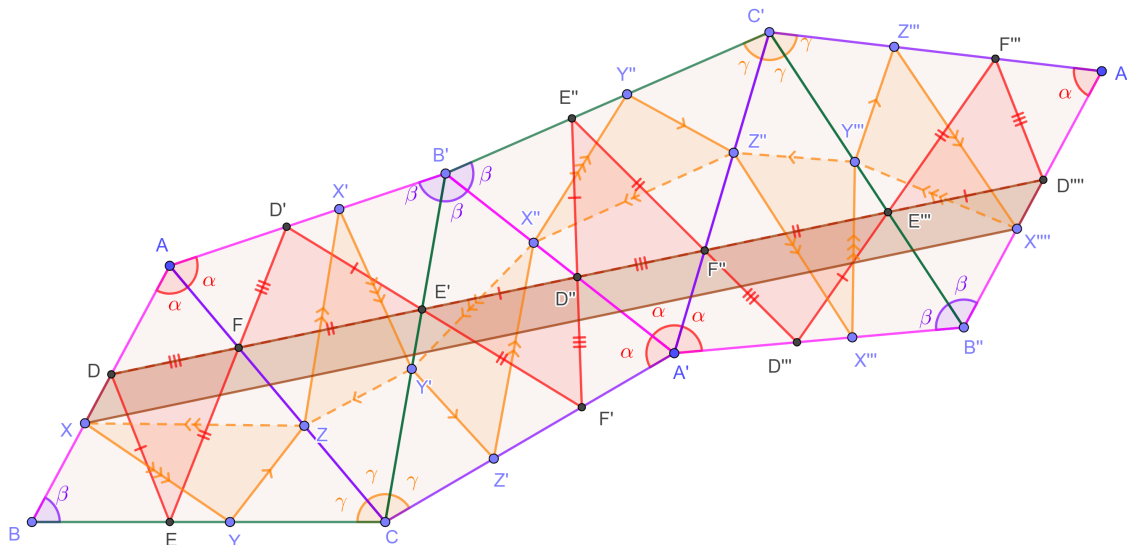
Fonte: O autor.

Serão apresentadas duas resoluções.

### 3.2.1 Resolução 1 do problema de Fagnano

Como o  $\triangle DEF$  é órtico do  $\triangle ABC$ , viu-se na Proposição 15 que  $\angle DFB = \angle BFE$  (Figura 3.3). A mesma igualdade não acontece quando traçada uma normal a  $AC$  passando por  $Z \neq F$ . A reflexão de um ponto arbitrário  $P$  será denotada por  $P'$ .

Figura 3.3: Resolução 1 (após cinco conjuntos de reflexões). Problema de Fagnano. Versão interativa [aqui](#). Podem movimentar-se os pontos  $X, Y$  e  $Z$ .



Fonte: O autor.

É feita uma primeira reflexão em relação a reta  $AC$  dos triângulos  $ABC$ ,  $XYZ$  e  $DEF$ . Vale que  $DX = D'X'$  e o lado  $AB$  girou um ângulo  $2\alpha$ . Nota-se ainda que  $\angle DFB = \angle E'FB'$  e com isso os pontos  $D, F$  e  $E'$  são colineares. O mesmo não acontece com os pontos  $X, Z$  e  $Y'$ .

A seguir é realizada uma segunda reflexão, desta vez em relação a reta  $B'C$ , dos triângulos  $AB'C$ ,  $X'Y'Z$  e  $D'E'F$ . Vale que  $DX = D'X' = D''X''$  e o lado  $AB$  girou um ângulo  $2\alpha + 2\beta$ . Os lados dos  $\triangle DEF$  e  $\triangle XYZ$  foram “esticados” nas poligonais  $DFE'D''$  e  $XZY'X''$ . Porém, neste estágio, ainda não fica evidente a comparação entre os comprimentos dessas duas poligonais. Os pontos iniciais e finais são diferentes.

Prossegue-se com uma terceira reflexão em relação a reta  $A'B'$  dos triângulos  $A'B'C$ ,  $X''Y'Z'$  e  $D''E'F'$ . Os pontos  $D''$  e  $X''$  e o lado  $A'B'$  são invariantes. Continua valendo que  $DX = D'X' = D''X''$  e o lado  $AB$  girou um ângulo  $2\alpha + 2\beta$ .

Continua-se com uma quarta reflexão em relação a reta  $A'C'$  dos triângulos  $A'B'C'$ ,  $X''Y''Z''$  e  $D''E''F''$ . Vale que  $DZ = D'Z' = D''Z'' = D'''Z'''$  e o lado  $AB$  girou um ângulo  $2\alpha + 2\beta - 2\alpha$ .

Finaliza-se a construção com uma quinta reflexão em relação a reta  $B''C'$  dos triângulos  $A'B''C'$ ,  $X'''Y'''Z''$  e  $D'''E'''F''$ . Vale que:

$$DZ = D'Z' = D''Z'' = D'''Z''' = D''''Z''''$$

e o lado  $AB$  girou um ângulo

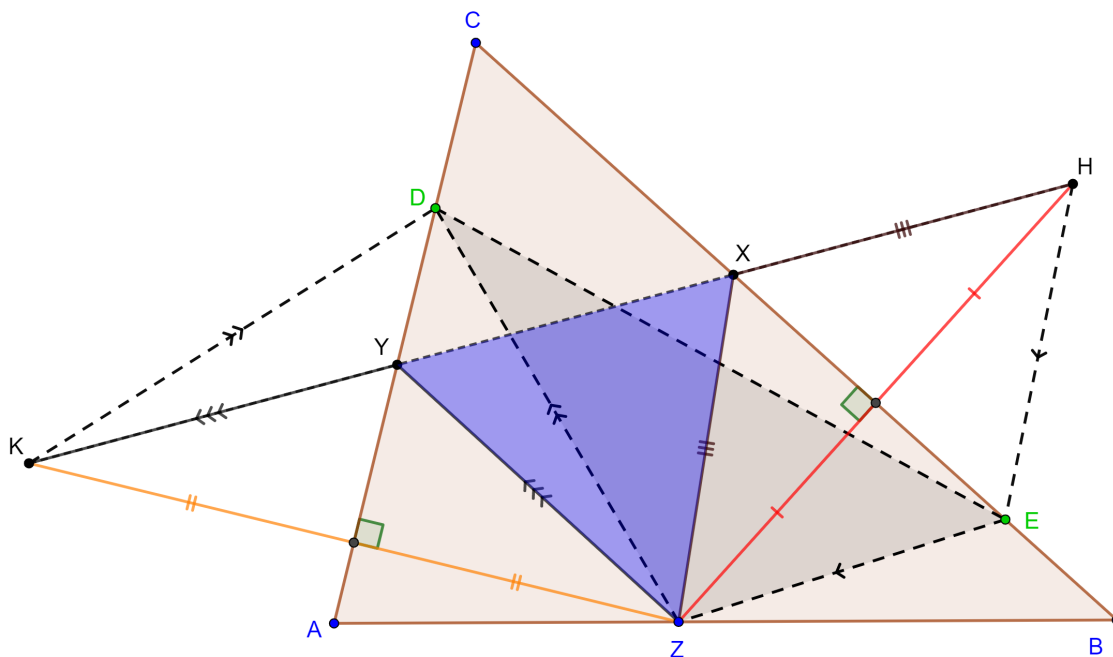
$$2\alpha + 2\beta - 2\alpha - 2\beta = 0.$$

Como  $AB \parallel A''B''$  e  $XD = X''''D''''$ , então o quadrilátero  $XDD''''X''''$  é um paralelogramo. Segue que  $DD'''' = XX''''$ . O anterior permite comparar o comprimento do segmento  $DD''''$ , equivalente ao dobro do perímetro do  $\triangle DEF$ , com a poligonal  $XZY'X''Z''Y'''X''''$ , equivalente a duas vezes o perímetro do  $\triangle XYZ$ . Pela aplicação da desigualdade triangular o perímetro do triângulo órtico é o mínimo possível.

### 3.2.2 Resolução 2 do problema de Fagnano

Um ponto  $Z$  é escolhido de forma arbitrária sobre o lado  $AB$ . O ponto  $H$  é obtido pela reflexão de  $Z$  sobre o lado  $BC$ . Analogamente, o ponto  $K$  é obtido pela reflexão de  $Z$  sobre o lado  $AC$ . Como  $\angle ACB < 90^\circ$  o segmento  $HK$  intersecta os lados do  $\triangle ABC$  em  $X$  e  $Y$  (Figura 3.4). Será mostrado que o  $\triangle XYZ$  é aquele que tem o menor perímetro para um  $Z$  fixo.

Figura 3.4: Resolução 2. Primeira parte. Problema de Fagnano. Versão interativa [aqui](#). Podem movimentar-se os pontos  $D$  e  $E$  para verificar o mínimo no comprimento da poligonal  $HEDK$ .



Fonte: O autor.

Sejam  $D \in AC$  e  $E \in BC$  outros dois pontos. Desta forma, obtêm-se o  $\triangle ZDE$  inscrito no  $\triangle ABC$ . Nota-se que  $ZX = XH$  e  $ZY = YK$ , pois  $H$  e  $K$  são reflexões de  $Z$  em relação a  $BC$  e  $AC$ . Analogamente, traçando os segmentos  $ZE, EH, ZD, DE$  e  $DK$  obtêm-se que  $ZE = EH$  e  $ZD = DK$ .

Comparando os perímetros dos  $\triangle XYZ$  e  $\triangle ZDE$  nota-se que:

$$2p_{XYZ} = ZX + XY + YZ = HX + XY + YK = HK,$$

$$2p_{ZDE} = ZE + ED + DZ = HE + ED + DK \geq HK.$$

Este último resultado é devido a Desigualdade Triangular. Portanto, o  $\triangle XYZ$  possui o menor perímetro dado um ponto  $Z$  fixo.

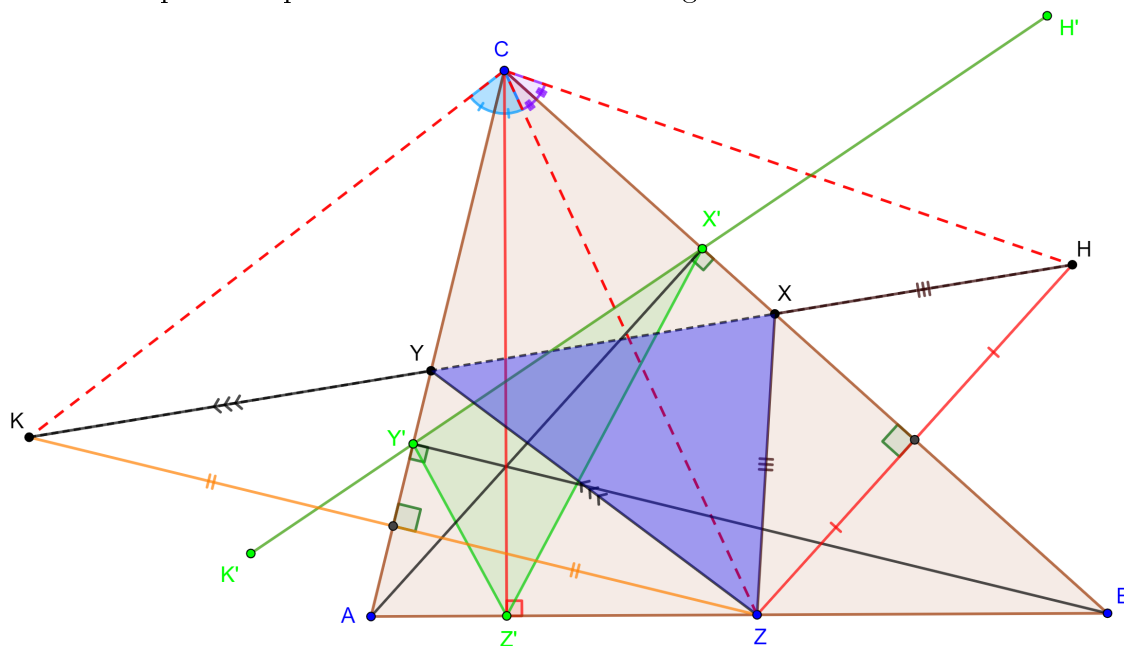
Agora quer-se encontrar o ponto  $Z \in AB$  de tal modo que  $HK$  seja o menor possível (Figura 3.5). Devido as duas reflexões  $CK = CZ = CH$ . Adicionalmente, o

$$\angle KCH = 2\angle ACB < 180^\circ$$

e o  $\angle KCH$  não depende da posição do ponto  $Z$  em  $AB$ . Como o ponto  $C$  também é fixo o segmento  $HK$  é mínimo quando  $CH = CK$  for mínimo. Ou seja, quando  $CZ$  for mínimo. O valor mínimo de  $CZ$  é  $CZ'$  (projeção ortogonal de  $C$  sobre  $AB$ ).

Quando  $Z'$  é o pé da altura relativa ao vértice  $C$ , então  $Y'$  e  $X'$  são os pés das alturas relativas aos vértices  $B$  e  $A$ , respectivamente.

Figura 3.5: Resolução 2. Segunda parte. Problema de Fagnano. Versão interativa [aqui](#). Pode movimentar-se o ponto  $Z$  para verificar o mínimo do segmento  $HK$ .



Fonte: O autor.

### 3.3 Circuncentro e ortocentro, conjugados isogonais e congruência de triângulos.

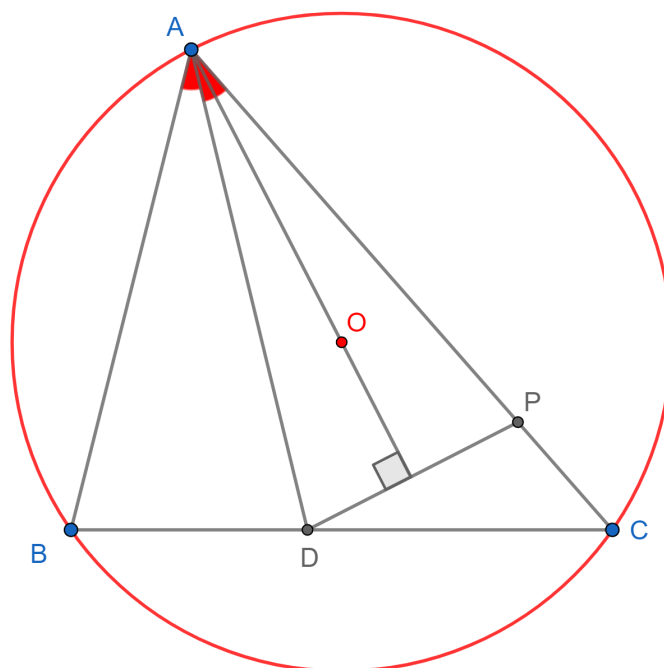
**Problema 3.** Um triângulo  $ABC$  acutângulo está inscrito em um círculo de centro  $O$ . Seja  $D$  a interseção da bissetriz de  $A$  com  $BC$  e suponha-se que a perpendicular a  $AO$  por  $D$ , corta a

reta  $AC$  em um ponto  $P$ , interior a  $AC$ . Mostrar que  $AB = AP$ .

### 3.3.1 Resolução do Problema 3

A Figura 3.6 ilustra uma construção geométrica inicial.

Figura 3.6: Uma construção geométrica inicial do Problema 3. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seja o ponto  $E = AO \cap DP$ . Traça-se a altura  $AF$  (Figura 3.7). Sabe-se que circuncentro e ortocentro  $H \in AF$  são conjugados isogonais. Logo,

$$\angle BAF = \angle CAE.$$

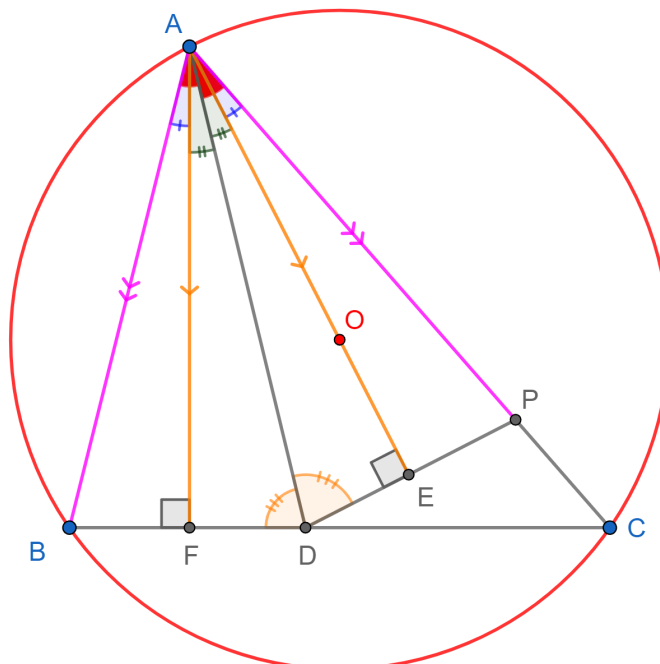
Como  $AD$  é bissetriz, tem-se que  $\angle FAD = \angle EAD$ . Segue que  $\angle ADF = \angle ADE$ . Pelo critério de congruência ALA encontra-se:

$$\triangle FAD \equiv \triangle EAD.$$

Segue que  $AF = AE$ . Também pelo critério de congruência ALA chega-se em:

$$\triangle AFB \equiv \triangle AEP.$$

Concluí-se que  $AB = AP$ .

Figura 3.7: Construção geométrica do Problema 3. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

## Capítulo 4

### Problemas de olimpíadas internacionais

#### 4.1 Circuncentro. Quadriláteros convexos. Semelhança. P14 SL IMO 1982.

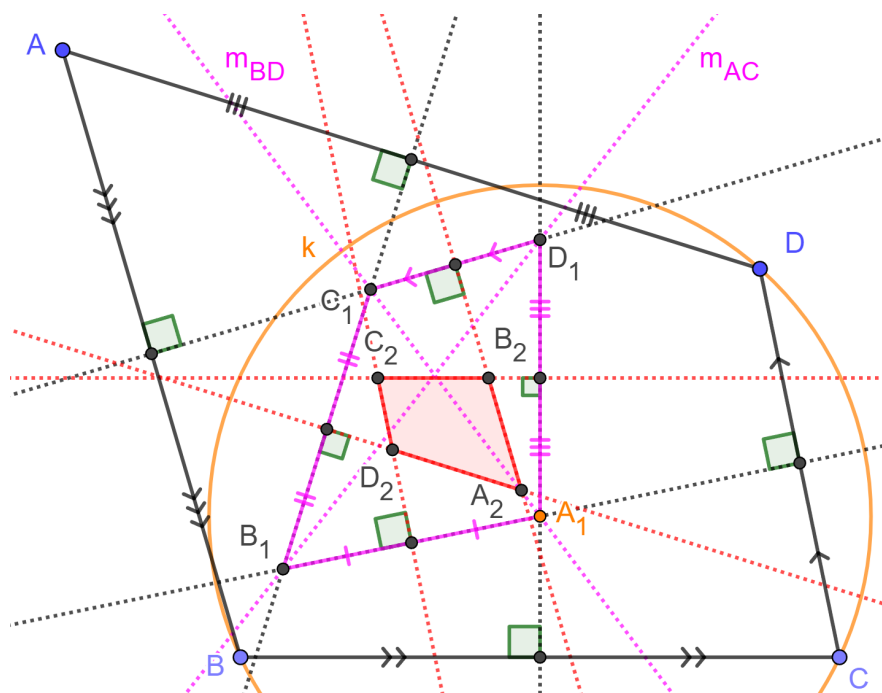
**Problema 4.** *Seja  $ABCD$  um quadrilátero plano convexo e seja  $A_1$  o circuncentro do  $\triangle BCD$ . Definem-se  $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$  de maneira correspondente. (a) Provar que todos os pontos  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$  coincidem ou são todos distintos. Assumindo o último caso, mostrar que  $A_1$  e  $C_1$  estão em lados opostos da reta  $B_1D_1$  e, da mesma forma,  $B_1$  e  $D_1$  estão em lados opostos da reta  $A_1C_1$ . Isso estabelece a convexidade do quadrilátero  $A_1B_1C_1D_1$ . (b) Denotar por  $A_2$  o circuncentro de  $B_1C_1D_1$  e definir  $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$  de maneira análoga. Mostrar que os quadriláteros  $A_2B_2C_2D_2$  e  $ABCD$  são semelhantes.*

A IMO 1982 foi realizada na cidade de Budapeste, capital da Hungria. Este é o P14 da SL, proposto pela delegação da Austrália [2].

##### 4.1.1 Resolução do Problema 4

A Figura 4.1 ilustra uma construção geométrica.

Figura 4.1: Uma construção geométrica do Problema 4. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

(a) Seja  $k$  a circunferência circunscrita ao  $\triangle BCD$ , de centro  $A_1$ . Suponha-se inicialmente que o quadrilátero  $ABCD$  seja inscritível. Neste caso  $A \in k$  e será válido que:

$$A_1 = B_1 = C_1 = D_1.$$

Considera-se agora o caso em que  $A$  é externo a  $k$ . Segue que  $A_1A > A_1C$  e  $C_1C > C_1A$ . Com isto a mediatriz dos pontos  $A$  e  $C$  ( $m_{AC}$ ) separa aos pontos  $A_1$  e  $C_1$ . Nota-se que, pelas propriedades do circuncentro,  $B_1, D_1 \in m_{AC}$ .

(b) Pela construção de mediatrizes  $A_2B_2 \perp C_1D_1 \perp AB$ . Logo,  $A_2B_2 \parallel AB$ . Analogamente,  $B_2C_2 \parallel BC$ ,  $C_2D_2 \parallel CD$  e  $D_2A_2 \parallel DA$ . Pelo critério de semelhança AA será válido:

$$\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle ABC,$$

$$\triangle A_2D_2C_2 \sim \triangle ADC.$$

Segue que os quadriláteros  $A_2B_2C_2D_2$  e  $ABCD$  são semelhantes.



## 4.2 Circuncentro. Ortocentro. Lei dos Senos. P32 SL IMO 1989.

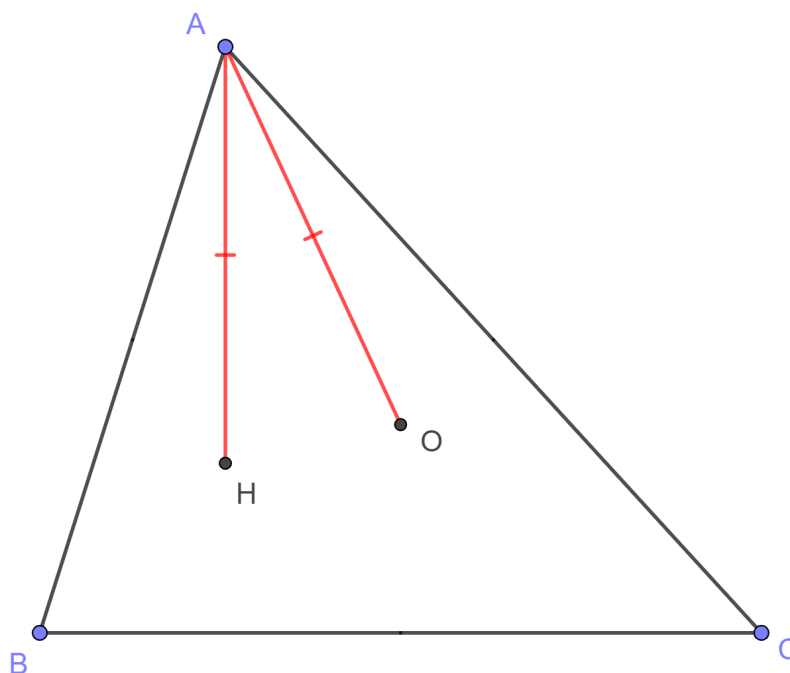
**Problema 5.** *O vértice  $A$  do triângulo acutângulo  $ABC$  é equidistante do circuncentro  $O$  e do ortocentro  $H$ . Determinar todos os valores possíveis para a medida do ângulo  $\hat{A}$ .*

A IMO 1989 foi realizada na cidade de Brunsvique, cidade na Alemanha. Este é o P32 da SL, proposto pela delegação dos Estados Unidos de América [2].

### 4.2.1 Resolução do Problema 5

A Figura 4.2 ilustra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.2: Uma construção geométrica inicial do Problema 5. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam  $A'$  e  $C'$  os pés das alturas correspondentes aos vértices  $A$  e  $C$ , respectivamente, e  $R$  o circunraio do  $\triangle ABC$  (Figura 4.3). Pela análise dos ângulos internos nos triângulos  $AA'B$  e  $AC'H$  encontra-se que:

$$\angle AHC' = \angle A'BA = \hat{B}.$$

Como  $AH = AO = R$ , no  $\triangle AC'H$  tem-se:

$$AC' = R \operatorname{sen}(\hat{B}).$$

Do  $\triangle AC'C$  e o resultado anterior pode ser escrito:

$$\operatorname{tg}(\hat{A}) = \frac{CC'}{AC'},$$

$$CC' = R \operatorname{sen}(\hat{B}) \operatorname{tg}(\hat{A}). \quad (4.2.1)$$

Por outro lado, pela Lei dos Senos aplicada no  $\triangle ABC$  tem-se:

$$2R = \frac{BC}{\operatorname{sen}(\hat{A})},$$

$$BC = 2R \operatorname{sen}(\hat{A}).$$

Do  $\triangle BC'C$  vale que:

$$CC' = BC \operatorname{sen}(\hat{B}).$$

Juntando os dois últimos resultados encontra-se:

$$CC' = 2R \operatorname{sen}(\hat{A}) \operatorname{sen}(\hat{B}). \quad (4.2.2)$$

De (4.2.1) e (4.2.2) segue:

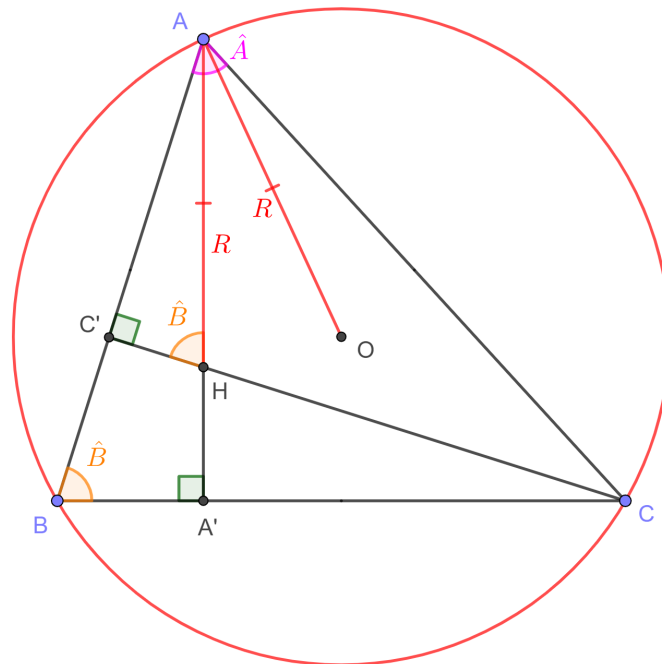
$$R \operatorname{sen}(\hat{B}) \operatorname{tg}(\hat{A}) = 2R \operatorname{sen}(\hat{A}) \operatorname{sen}(\hat{B}),$$

$$\operatorname{tg}(\hat{A}) = 2 \operatorname{sen}(\hat{A}),$$

$$\cos(\hat{A}) = \frac{1}{2}.$$

Como o  $\triangle ABC$  é acutângulo a única solução possível é  $\hat{A} = 60^\circ$ .

Figura 4.3: Uma construção geométrica do Problema 5. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

### 4.3 Ortocentro. Ângulos na circunferência. Paralelogramos. P14 SL IMO 1995.

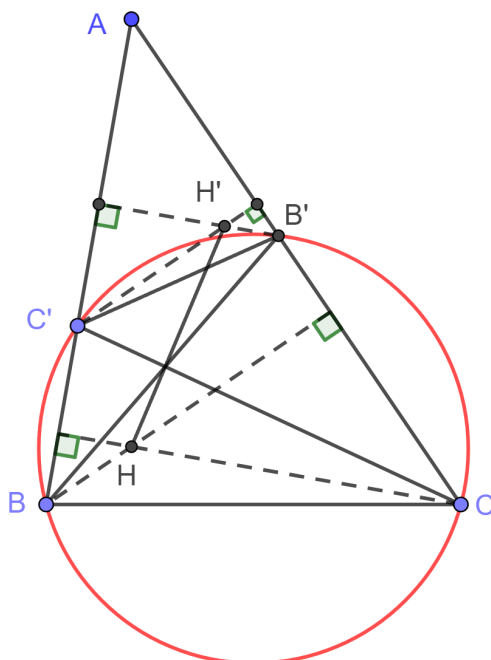
**Problema 6.** *Seja  $ABC$  um triângulo. Uma circunferência que passa por  $B$  e  $C$  intercepta os lados  $AB$  e  $AC$  novamente em  $C'$  e  $B'$ , respectivamente. Provar que  $BB'$ ,  $CC'$  e  $HH'$  são concorrentes, onde  $H$  e  $H'$  são os ortocentros dos triângulos  $ABC$  e  $AB'C'$ , respectivamente.*

A IMO 1995 foi realizada na cidade de Toronto, Canadá. Este é o P14 da SL, proposto pela delegação da Colômbia [2].

#### 4.3.1 Resolução do Problema 6

A Figura 4.4 ilustra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.4: Uma construção geométrica inicial do Problema 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Seja o ponto  $P = BB' \cap CC'$  (Figura 4.5). Quer-se provar que  $\angle BPH = \angle B'PH'$ . Pois nesse caso, pela recíproca de ângulos opostos pelo vértice,  $H, P$  e  $H'$  são colineares. Por serem ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência vale que:

$$\angle B'BC' = \angle B'CC',$$

$$\angle B'C'C = \angle B'B'C.$$

Sejam  $D$  e  $E$  as projeções ortogonais dos vértices  $B$  e  $C$  relativos aos lados  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Pelo critério de semelhança AA tem-se que:

$$\triangle BDB' \sim \triangle CEC'.$$

Logo,

$$\angle DBB' = \angle C'CE,$$

$$\angle HBP = \angle PCH.$$

Sejam  $X$  e  $Y$  pontos tais que os quadriláteros  $BPCX$  e  $HPCY$  são paralelogramos (consequentemente, o quadrilátero  $BHYX$  também o será). Como  $BC'B'C$  é inscritível segue

que  $\angle CBC' = \angle AB'C'$ . Pelo critério de semelhança AA tem-se:

$$\triangle ABC \sim \triangle AB'C'.$$

Isto é, existe uma operação de roto-homotetia, centrada em  $A$ , que transforma  $B$  em  $B'$  e  $C$  em  $C'$ . Sendo  $H$  e  $H'$  os ortocentros dos triângulos  $ABC$  e  $AB'C'$ , respetivamente, a mesma operação transforma  $H$  em  $H'$ . Portanto, também será válida a semelhança:

$$\triangle HBC \sim \triangle H'B'C'.$$

Consequentemente,

$$\angle CBH = \angle H'B'C',$$

$$\angle HCB = \angle B'C'H'.$$

Pelas propriedades de paralelogramos e ângulos opostos pelo vértice segue:

$$\angle CXB = \angle BPC = \angle B'PC'.$$

Adicionalmente, pelo paralelogramo  $BPCX$  e o quadrilátero inscrito  $BC'B'C$  encontra-se:

$$\angle XBC = \angle PCB = \angle C'CB = \angle C'B'B.$$

Logo, pelo critério de semelhança AA, vale:

$$\triangle BXC \sim \triangle B'PC'.$$

Das duas últimas semelhanças de triângulos conclui-se a semelhança dos quadriláteros  $BHCX$  e  $B'H'C'P$ . Portanto,

$$\angle HXB = \angle H'PB'.$$

Por outro lado, de ângulos com lados mutuamente paralelos e alternos entre paralelas:

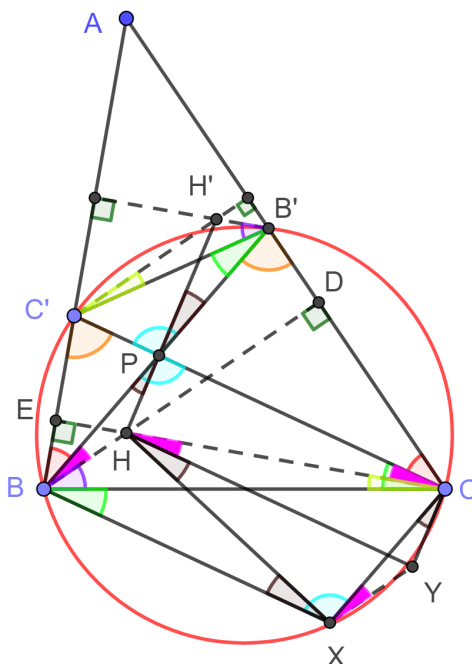
$$\angle CXY = \angle PBH = \angle PCH = \angle CHY.$$

O anterior significa que o quadrilátero  $HCYX$  é inscrito. Finalmente,

$$\angle BPH = \angle XCY = \angle XHY = \angle HXB = \angle H'PB'.$$

Ou seja, pela recíproca de ângulos opostos pelo vértice,  $H$ ,  $P$  e  $H'$  são colineares e  $BB'$ ,  $CC'$  e  $HH'$  são concorrentes.

Figura 4.5: Uma construção geométrica do Problema 6. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

#### 4.4 Ortocentro. Circuncentro. Baricentro. Paralelogramos. P10 SL IMO 1996.

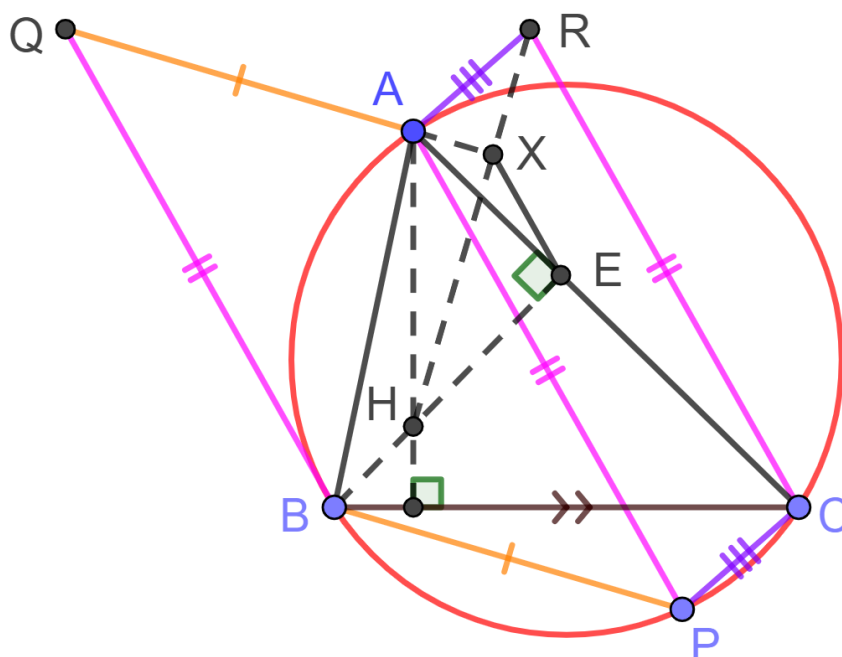
**Problema 7.** *Seja o triângulo  $ABC$  de ortocentro  $H$  e  $P$  um ponto em seu círculo circunscrito, distinto de  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Sejam  $E$  o pé da altura  $BH$  e  $PAQB$  e  $PARC$  paralelogramos. Adicionalmente, as retas  $AQ$  e  $HR$  encontram-se em  $X$ . Provar que os segmentos  $XE$  e  $AP$  são paralelos.*

A IMO 1996 foi realizada na cidade de Bombaim, Índia. Este é o P10 da SL, proposto pela delegação do Reino Unido [2].

##### 4.4.1 Resolução do Problema 7

A Figura 4.6 ilustra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.6: Uma construção geométrica inicial do Problema 7. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Pela hipótese de  $PAQB$  e  $PARC$  serem paralelogramos segue que  $QB \parallel AP \parallel RC$  e  $QB = AP = RC$ . Logo, o quadrilátero  $QBCR$  também é um paralelogramo com  $QR \parallel BC$  e  $QR = BC$ . Portanto, a reta  $AH$  é perpendicular com  $QR$  (Figura 4.7). Pelo critério de congruência LLL vale que  $\triangle BCP \equiv \triangle QRA$ . O  $\triangle QRA$  pode ser construído trasladando o  $\triangle BCP$  pelo vetor  $\overrightarrow{PA}$ .

Sejam  $G, G'$  e  $H'$  os baricentros do  $\triangle ABC$ , do  $\triangle PBC$  e o ortocentro do  $\triangle PBC$ , respectivamente. Como os triângulos  $ABC$  e  $PBC$  têm circuncentro comum  $O$ , a partir das propriedades da reta de Euler e a recíproca do Teorema de Tales vale:

$$\overrightarrow{HH'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

Seja  $M$  o ponto médio do lado  $BC$ , comum aos  $\triangle ABC$  e  $\triangle PBC$ . Pelas propriedades do baricentro e a recíproca do Teorema de Tales vale:

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AP}.$$

Segue que:

$$\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{RC}.$$

Logo, o quadrilátero  $HH'CR$  também é um paralelogramo com  $HR \parallel H'C$ . Com isto,

$RH \perp QX$  da mesma forma que  $CH' \perp BP$ . Ou seja, o ponto  $H$  é ortocentro comum dos  $\triangle ABC$  e  $\triangle AQR$ . Como  $\angle AXH = \angle AEH = 90^\circ$  o quadrilátero  $AHEX$  é cíclico. Portanto,

$$\angle QXE = \angle AXE = 180^\circ - \angle EHA.$$

Estudando os triângulos retângulos associados com  $H$  encontra-se que  $\angle EHA = \angle ACB$ . Segue:

$$\angle QXE = 180^\circ - \angle ACB.$$

Por construção  $ABPC$  é cíclico. Portanto,  $\angle ACB = \angle APB$  e

$$\angle QXE = 180^\circ - \angle APB.$$

Também por hipótese, o quadrilátero  $QBPA$  é um paralelogramo, disto:

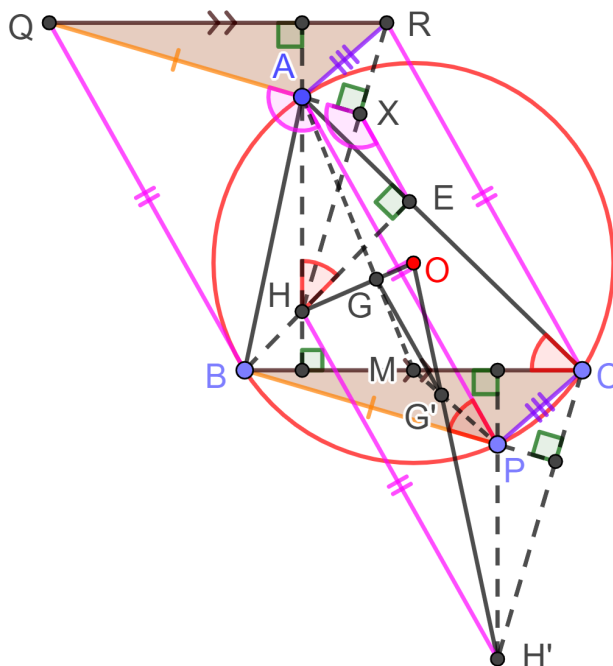
$$\angle APB = 180^\circ - \angle QAP.$$

Ou seja,

$$\angle QXE = \angle QAP.$$

Pela recíproca de correspondentes entre paralelas demonstra-se que  $XE \parallel AP$ .

Figura 4.7: Uma construção geométrica do Problema 7. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.



## 4.5 Ortocentro. Circuncentro. Potência de ponto relativo a circunferência. P12 SL IMO 1996.

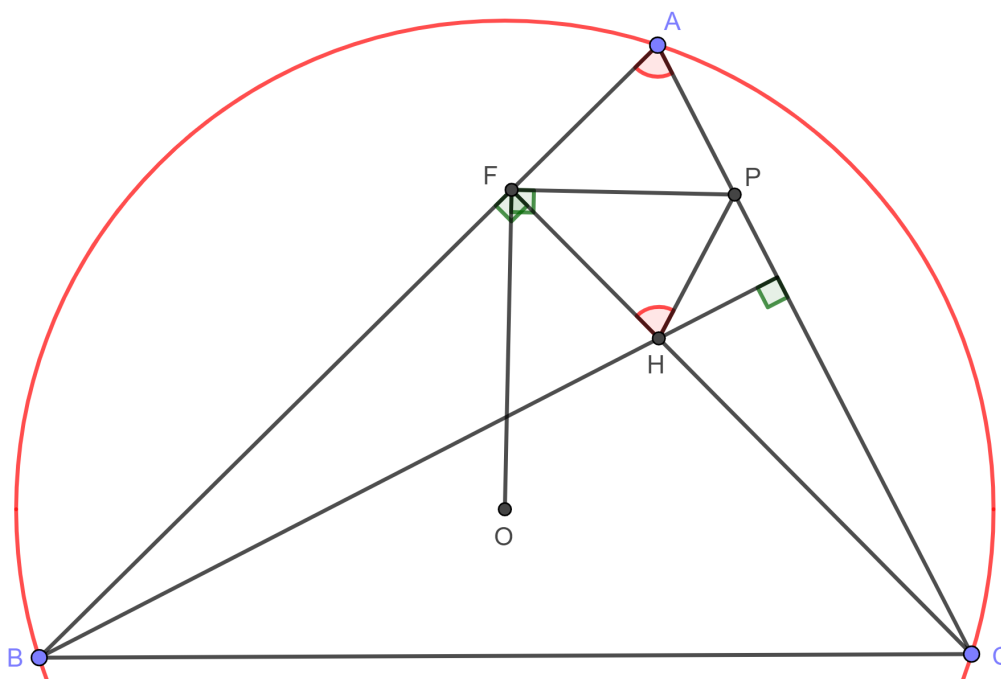
**Problema 8.** *Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo com  $BC > CA$ . Seja  $O$  o circuncentro,  $H$  seu ortocentro e  $F$  o pé da altura  $CH$ . Deixe a perpendicular a  $OF$  em  $F$  encontrar o lado  $CA$  em  $P$ . Provar que  $\angle PHF = \angle BAC$ .*

A IMO 1996 foi realizada na cidade de Bombaim, Índia. Este é o P12 da SL, proposto pela delegação do Reino Unido [2].

### 4.5.1 Resolução do Problema 8

A Figura 4.8 ilustra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.8: Uma construção geométrica inicial do Problema 8. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam  $E$  o pé da altura  $BH$  e  $Y$  e  $Z$  os pontos médios de  $AC$  e  $AB$ , respectivamente (Figura 4.9). Como  $Y$  é o circuncentro do  $\triangle FCA$  ( $AY = YF$  e  $\angle FAY = \angle YFA = \hat{A}$ ) tem-se  $\angle AYF = 180^\circ - 2\hat{A}$ . Como  $\angle OFP = \angle PYO = 90^\circ$  o quadrilátero  $OFPY$  é inscrito e

$$\angle FPO = \angle FYO = 2\hat{A} - 90^\circ.$$

Desenha-se a perpendicular  $HR$  a  $FP$  com  $R \in FP$ . De  $\angle OZF = \angle OFP = 90^\circ$  segue que  $\angle ZFO = \angle HFR$ . Pelo critério de semelhança AA vale:

$$\triangle OZF \sim \triangle HRF.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{OZ}{OF} &= \frac{HR}{HF}, \\ HR \cdot OF &= HF \cdot OZ. \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Pelas propriedades do ortocentro tem-se:

$$\frac{HC}{OZ} = \frac{HB}{OY} = 2. \quad (4.5.2)$$

Devido a  $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$ , o quadrilátero  $BCEF$  é inscrito em uma circunferência  $k$ . A potência do ponto  $H$  relativa a  $k$  pode ser escrita como:

$$Pot_k(H) = HF \cdot HC = HE \cdot HB. \quad (4.5.3)$$

Combinando (4.5.1), (4.5.2) e (4.5.3) escreve-se:

$$HR \cdot OF = HF \cdot OZ = \frac{1}{2} HF \cdot HC = \frac{1}{2} HE \cdot HB = HE \cdot OY.$$

Portanto,

$$\frac{HR}{HE} = \frac{OY}{OF}.$$

Adicionalmente, de  $OF \parallel HR$  e  $OY \parallel HE$  segue que:

$$\angle EHR = \angle YOF.$$

Pelo critério de semelhança LAL vale:

$$\triangle EHR \sim \triangle FOY.$$

Logo,  $\angle HRE = \angle FYO = 2\hat{A} - 90^\circ$ . Do quadrilátero inscrito  $HRPE$  tem-se:

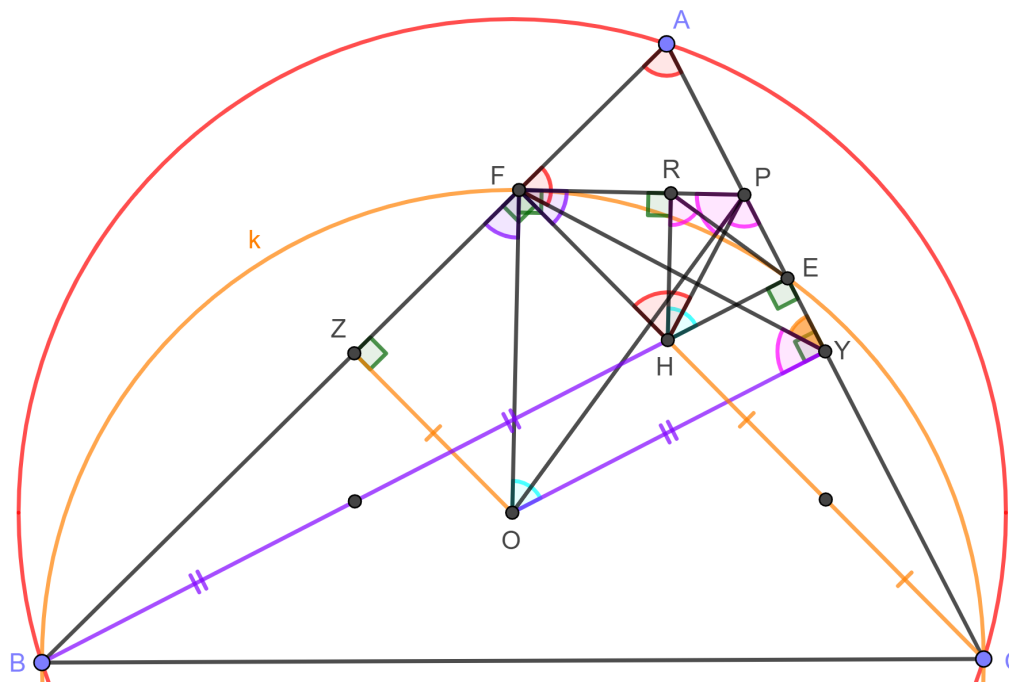
$$\angle HPC = \angle HPE = \angle HRE = \angle FYO.$$

Do  $\triangle CFA$  encontra-se que  $\angle ACF = 90^\circ - \hat{A} = \angle PCH$ . Como o  $\angle PHF$  é externo no vértice  $H$  do  $\triangle PHC$  segue:

$$\angle PHF = \angle HPC + \angle PCH,$$

$$\begin{aligned}\angle PHF &= 2\hat{A} - 90^\circ + 90^\circ - \hat{A}, \\ \angle PHF &= \hat{A} = \angle BAC.\end{aligned}$$

Figura 4.9: Uma construção geométrica do Problema 8. Versão interativa [aquí](#).



Fonte: O autor.

## 4.6 Circuncentro. Ortocentro. Circulo de nove pontos. P5 SL IMO 1990.

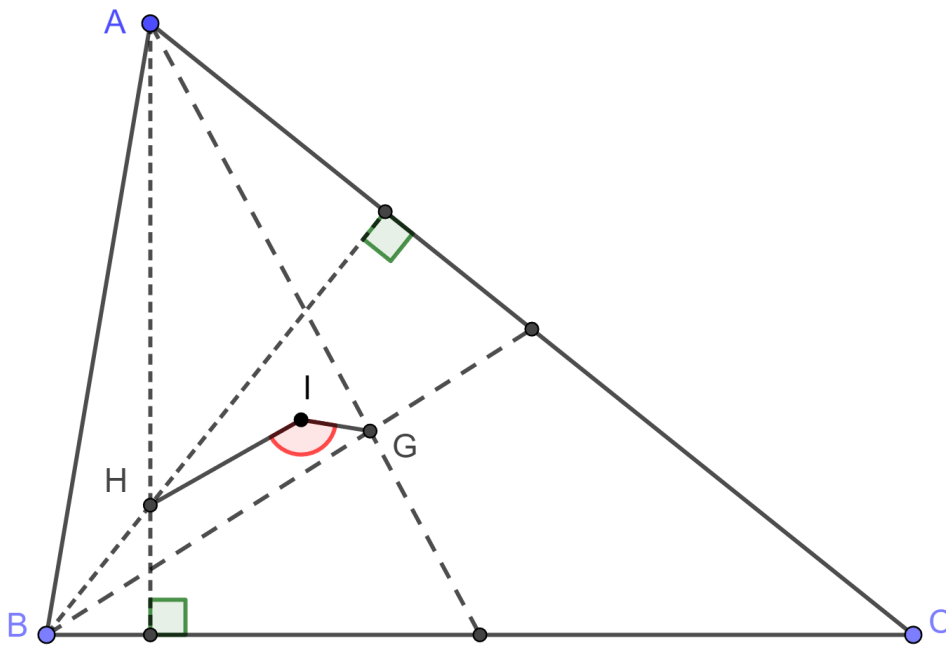
**Problema 9.** Dado o  $\triangle ABC$  sem nenhum lado igual ao outro lado, sejam  $G$ ,  $I$  e  $H$  seus centroide, incentro e ortocentro, respectivamente. Provar que  $\angle GIH > 90^\circ$ .

A IMO 1990 foi realizada na cidade de Pequim, capital da China. Este é o P5 da SL, proposto pela delegação da França [2].

### 4.6.1 Resolução do Problema 9

A Figura 4.10 ilustra uma construção geométrica inicial.

Figura 4.10: Uma construção geométrica inicial do Problema 9. Versão interativa [aqui](#).



Fonte: O autor.

Sejam  $O$  o circuncentro do  $\triangle ABC$ ,  $E$  o ponto médio de  $OH$  e  $R$  e  $r$  os raios das circunferências circunscrita e inscrita, respectivamente (Figura 4.11). No estudo da reta de Euler demonstra-se que os pontos  $H$ ,  $G$  e  $O$  são colineares e que:

$$OH = 3OG. \quad (4.6.1)$$

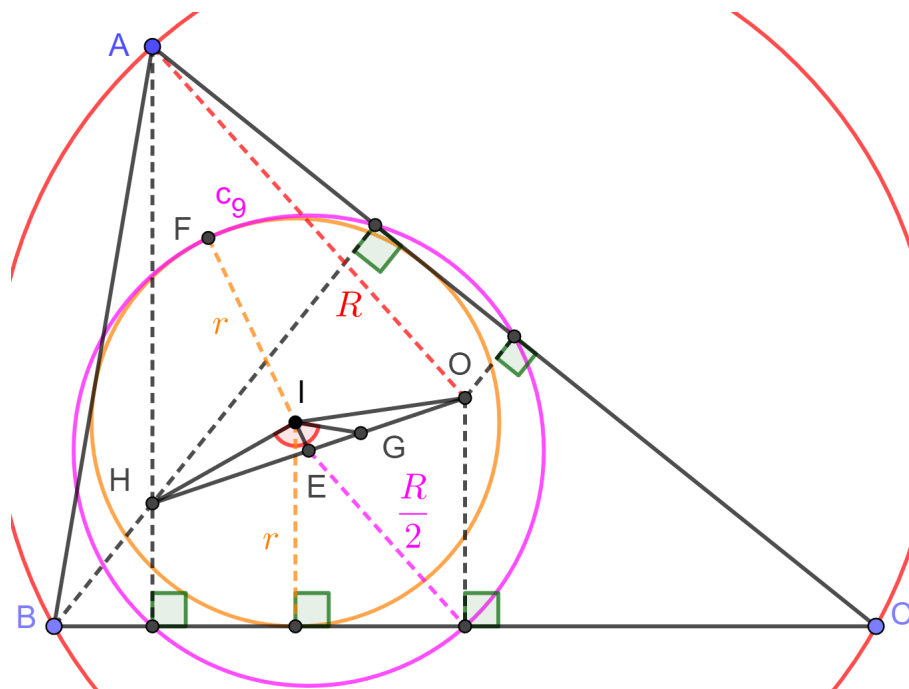
A distância incentro circuncentro foi encontrada anteriormente (Fórmula de Euler) como:

$$OI^2 = R(R - 2r). \quad (4.6.2)$$

O ponto  $E$  é o centro do círculo de nove pontos  $c_9$ , de raio  $\frac{R}{2}$ . Adicionalmente, pelo Teorema de Feuerbach o incírculo e  $c_9$  são tangentes internamente num ponto  $F$ . Isto significa que  $F$ ,  $I$  e  $E$  são colineares e:

$$IE = \frac{R}{2} - r. \quad (4.6.3)$$

O resto da solução é deixada para o leitor.

Figura 4.11: Uma construção geométrica do Problema 9. Versão interativa [aqui](#).

Fonte: O autor.

# Capítulo 5

## Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**, 11 edição, Coleção Professor de Matemática, SBM, Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. (Página 13)
- [2] DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium: a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2009**. New York: Springer, 2011. (Página 46, 48, 50, 53, 56, 58)
- [3] DOLCE, O. **Fundamentos de Matemática Elementar Geometria Plana - Vol.9, ATUAL (DIDÁTICO) - GRUPO SARAIVA**, 2013. (Página 13)
- [4] FRENSEL, J. D. K.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, ISBN: 9788583371212, 2017. (Página 13)
- [5] HOLANDA, B. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2011. (Página 13)
- [6] JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas**. Livro: Conhecimentos pedagógicos e conteúdos disciplinares das ciências exatas e da terra, DOI do Livro: 10.22533/at.ed.242213108, ISBN: 978-65-5983-424-2, 2021. Páginas: 161-175. Disponível em DOI do Capítulo: [10.22533/at.ed.24221310814](https://doi.org/10.22533/at.ed.24221310814). Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [7] KIMBERLING, C. **Encyclopedia of Triangle Centers**, 1998. Disponível em: <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 16, 18)
- [8] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN

- 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023106>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [9] LÓPEZ LINARES, J. **Áreas: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Publicado: março 6, 2024. 93 p. ISBN 978-65-87023-40-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023403>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [10] LÓPEZ LINARES, J. **Baricentro: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 71 p. ISBN 978-65-87023-31-1 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023311>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [11] LÓPEZ LINARES, J. **Ex-incentros: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 80 p. ISBN 978-65-87023-32-8 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023328>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [12] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023113>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [13] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática v.3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023144>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [14] LÓPEZ LINARES, J. Jogos com a desigualdade triangular. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 3, p. 73-94, dez. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n32022073094. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [15] LÓPEZ LINARES, J. **Jogos e problemas olímpicos envolvendo caminhos mínimos e desigualdades**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 85 p. ISBN 978-65-87023-28-1 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023281>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)

---

LÓPEZ LINARES, J. **Circuncentro e Ortocentro: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2024. 68 p. ISBN 978-65-87023-41-0 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023410>.

- [16] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática.** 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>. DOI:10.13140/RG.2.2.30312.70406. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [17] LÓPEZ LINARES, J. **Teorema de Pitágoras: Demonstrações Interativas no GeoGebra.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 57 p. ISBN 978-65-87023-26-7 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023267>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [18] LÓPEZ LINARES, J. Transformação de Inversão: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 1, p. 27-47, jul. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n12022027047. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [19] LÓPEZ LINARES, J. **Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 105 p. ISBN 978-65-87023-25-0 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023250>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [20] LÓPEZ LINARES, J. **Treinamento de Professores e Estudantes do Ensino Fundamental e Médio com Problemas de Olimpíadas de Matemática.** 155 f. Tese (Livre-docência) Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Universidade de São Paulo, 2022. DOI: 10.11606/t.74.2022.tde-28112022-091705. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/livredocencia/74/tde-28112022-091705/pt-br.php>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [21] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdv19202023169664jll118127. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [22] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga:



- Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023045>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [23] LÓPEZ LINARES, J. **Quadriláteros inscritíveis, circunscritíveis e bicêntricos: problemas olímpicos**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 72 p. ISBN 978-65-87023-34-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023342>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [24] LÓPEZ LINARES, J. **Potência de ponto relativo a uma circunferência: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 64 p. ISBN 978-65-87023-30-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023304>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [25] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023175>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [26] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023205>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [27] LÓPEZ LINARES, J. Cálculo de áreas: cinco problemas resolvidos das listas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. **Revista de Matemática da UFOP - RMAT**, v. 1, n.1, pp: 01-21, 27 fev. 2024. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://doi.org/10.5281/zenodo.10806293>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [28] LÓPEZ LINARES, J. Circuncentro e Ortocentro: cinco problemas resolvidos das listas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. **Revista de Matemática da UFOP - RMAT**, v. 1, n.1, pp: 01-18, 3 mai. 2024. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://doi.org/10.5281/zenodo.11111106>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [29] LÓPEZ LINARES, J. Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis: cinco problemas resolvidos propostos para olimpíadas internacionais de matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 23, n. 1, p. 317-334, jul. 2023. DOI: 10.21167/cqdv23n12023317334. ISSN 2316-9664. Disponível em:

- <https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/373/382>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [30] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A. Trigonometria: cinco problemas resolvidos das listas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:14-36, jun. 2023. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/6799/5334>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [31] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A. **Trigonometria: dos conceitos básicos até problemas olímpicos**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 83 p. ISBN 978-65-87023-35-9 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023359>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [32] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. ISSN: 2319-023X. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [33] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Congruências numéricas: cinco problemas resolvidos propostos para olimpíadas internacionais de matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 23, n. 2, p. 01-15, 20 dez. 2023. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://doi.org/10.21167/cqdv23n22023001015>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [34] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdv17ermac202023169664jllabagfb127138. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [35] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdv18202023169664jllabagfb7888. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)

- [36] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três Problemas sobre Recorrências na Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA EM FOCO**, v. 8 n. 1 (2020), p. 1-11. Publicado em 2021-12-21, ISSN: 2318-0552. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/matematiceestatisticaemfoco/article/view/58967>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [37] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.1**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 86 p. ISBN 978-65-87023-21-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023212>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [38] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra. v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 115 p. ISBN 978-65-87023-23-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [39] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra - v. 3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 91 p. ISBN 978-65-87023-24-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [40] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 20, p. 22–40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdv20202123169664jlljpm safj2240. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [41] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [42] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática.

---

LÓPEZ LINARES, J. **Circuncentro e Ortocentro: teoria, construções e problemas**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2024. 68 p. ISBN 978-65-87023-41-0 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023410>.

- Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:117-139, nov. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [43] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; BRUNO-ALFONSO, A. Desigualdade de Ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:15-37, abr. 2022. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5396/4012>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [44] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 21, p. 36–51, dez. 2021. ISSN 2316-9664. DOI: 10.21167/cqdvoll21202123169664jlljpmsafj3651. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [45] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção ProfMat). (Página 13)
- [46] MORGADO, A.C. Coordenadas para os centros do triângulo **Revista do Professor de Matemática**, RPM 43, p. 26-30, 2000. Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/43/5.htm>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 16, 18)
- [47] NETO, A. C. M. **Geometria**, Coleção ProfMat, SBM, Primeira Edição, ISBN: 9788585818937, 2013. (Página 13)
- [48] O’CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Giovanni Francesco Fagnano dei Toschi**, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland MacTutor History of Mathematics archive, 2000. Disponível em: [https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fagnano\\_Giovanni/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fagnano_Giovanni/). Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 39)
- [49] PINHEIRO, P. R. O Círculo dos Nove Pontos. **Revista do Professor de Matemática (RPM)** 14, p. 12, 1989. Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/14/12.htm>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 27)
- [50] PINHEIRO, R. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2006. (Página 13)

- [51] SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A.; LÓPEZ LINARES, J. Retas de Euler e o esquema aditivo RGB: construções dinâmicas no GeoGebra, **Revista do Instituto GeoGebra internacional de São Paulo**, v. 10 n. 2 (2021), p. 026–039. Publicado em 2021-12-27, ISSN: 2237-9657, DOI: 10.23925/2237-9657.2021.v10i2p026-039. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/52286/38626>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [52] SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J.; RAMALHO DE FREITAS, M.P.O. Diferentes perspectivas de um problema de otimização: Matemática Dinâmica com GeoGebra, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol.3, N.1, Jan-Jun 2022, pp. 70-87. Disponível em: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i1.10227>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [53] SANTOS, J. P. M.; Marcus Vinícius de Araújo Lima; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J. Minimização da soma de quadrados de distâncias aos vértices em polígonos convexos, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol. 3, N. 2, Jul - Dez 2022, pp. 66 – 82. Disponível em: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i2.11309>. Acesso em: 05 mai. 2024. (Página 13)
- [54] THIAGO, C. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria-Nível 2, 2006. (Página 13)

