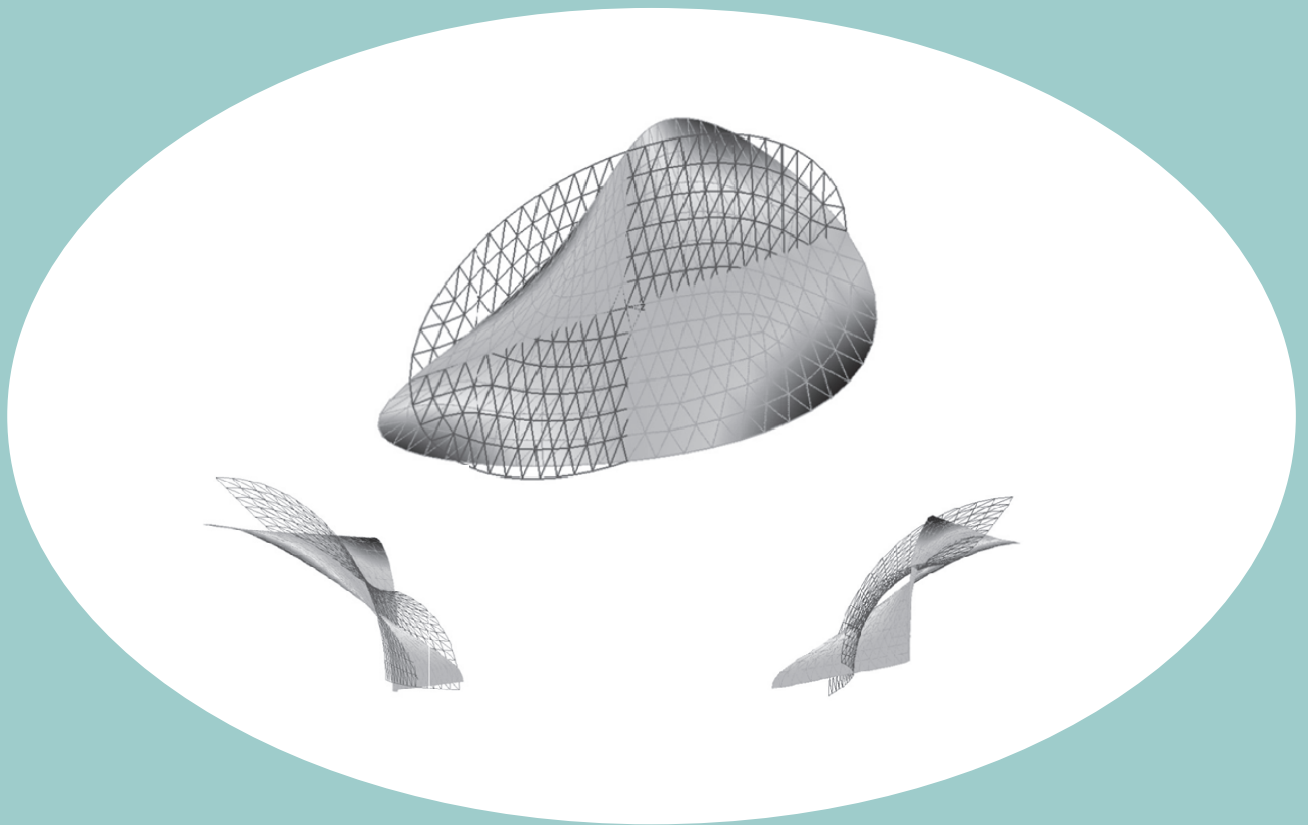


O Método dos Elementos Finitos Posicional

Sólidos e Estruturas - Não Linearidade Geométrica e Dinâmica



Humberto Breves Coda

São Carlos
EESC/USP
2018

O Método dos Elementos Finitos Posicional

Sólidos e Estruturas - Não Linearidade Geométrica e Dinâmica

HUMBERTO BREVES CODA

São Carlos
EESC/USP
2018

DOI: 10.11606/9788580230680

Universidade de São Paulo

Reitor: Prof. Dr. Vahan Agopyan

Vice-Reitor: Prof. Dr. Antonio Carlos Hernandez

Escola de Engenharia de São Carlos

Diretor: Prof. Dr. Paulo Sergio Varoto

Vice-diretor: Prof. Dr. Sergio Persival Baroncini Proença

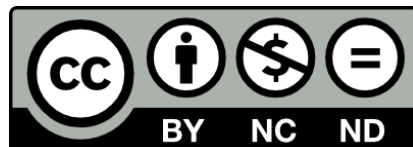
Ficha catalográfica elaborada pela Seção de Atendimento ao Usuário do
Serviço de Biblioteca "Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes"

C669m Coda, Humberto Breves
O método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas - não linearidade geométrica e dinâmica / Humberto Breves Coda. -- São Carlos: EESC-USP, 2018. [284] p.
ISBN 978-85-8023-068-0
DOI 10.11606/9788580230680

1. Elementos finitos. 2. Estruturas. 3. Não linearidade geométrica. 4. Dinâmica. I. Título.

Elaborado por Eduardo Graziosi Silva - CRB-8/8907

Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.



Prefácio

Este livro é dedicado a alunos de pós-graduação em engenharia de estruturas, visando proporcionar subsídios ao desenvolvimento de códigos computacionais para a análise não linear geométrica (estática ou dinâmica) de estruturas e sólidos através do método dos elementos finitos baseado em posições.

Para esta finalidade é necessário cobrir um conjunto muito amplo de conhecimentos, incluindo a definição de análise não linear geométrica exata de estruturas, sua relação com princípios energéticos, a cinemática dos corpos deformáveis, o conceito de medidas de deformação objetivas, as relações constitutivas hiperelásticas e os diversos tipos de elementos finitos e suas aproximações cinemáticas.

Conhecimentos relacionados à mecânica do contínuo serão necessários e, em alguns pontos, revisitados. O texto foi elaborado com grau de complexidade crescente, onde problemas que não necessitam de conhecimentos matemáticos mais densos serão utilizados para se apresentar conceitos fundamentais como, por exemplo, o princípio da estacionariedade da energia mecânica. Este princípio afirma que a posição de equilíbrio mecânico de uma estrutura ou sólido é aquela para a qual a energia mecânica total é estacionária, ou seja, não varia.

A partir desses conceitos fundamentais, em capítulos mais avançados, grandezas matemáticas mais elaboradas serão apresentadas de forma a permitir a inclusão de modelos constitutivos mais avançados e a solução de problemas mais complexos, como sólidos, barras gerais, placas e cascas. Além dessas grandezas matemáticas, conceitos de aproximação numérica para o método dos elementos finitos serão abordados, transformando-se problemas contínuos em aproximações algébricas, passíveis de solução numérica.

Algoritmos de solução serão fornecidos para facilitar a elaboração dos códigos computacionais do estudante. A extensão do assunto abordado é imensa e não se pretende esgotar os conteúdos relacionados, nem mesmo é possível se aprofundar demasiadamente em cada um dos temas. Acredita-se que ao final dos estudos os alunos estarão livres das amarras da linearidade, pois a apresentação do conteúdo pretende mudar a história de sua formação, libertando-o o máximo possível dos condicionamentos dos cursos de graduação de nosso tempo. No final de cada capítulo sugere-se para completar eventuais lacunas de conhecimento ou incrementar futuros desenvolvimentos pretendidos pelos alunos.

Humberto Breves Coda, junho de 2018.

Sumário:

1 – Conceitos Fundamentais: Energia, equilíbrio e não linearidade geométrica	1
1.1 – Energia potencial de forças conservativas	1
1.2 – Energia e equilíbrio	4
1.3 – Energia de deformação – problemas unidimensionais	6
1.4 – Estudo de casos estáticos simples – equilíbrio e natureza do equilíbrio	10
1.5 – Fechamento	31
1.6 – Bibliografia Recomendada	31
2 – Treliça não linear geométrica – Conceitos e Solução pelo MEF Posicional	32
2.1 – Medidas de deformação - Uniaxiais	32
2.2 – Energia específica de deformação para materiais elásticos - conceituação uniaxial - leis constitutivas - conjugado energético	35
2.3 – Formulação estática do MEF posicional para treliças	41
2.4 – Formulação dinâmica do MEF posicional para treliças	72
2.5 – Bibliografia Recomendada	92
3 – Cinemática dos corpos deformáveis	93
3.1 – Conceituação uniaxial	93
3.2 – Deformação de engenharia multiaxial	95
3.3 – Deformação de Green-Lagrange e deformação de Almansi	101
3.4 – Deformação linear - uma análise crítica	103
3.5 – Mudança de volume na mudança de configuração	106
3.6 – Mudança de área na mudança de configuração - Fórmula de Nanson	109
3.7 – Direções principais e valores principais do tensor de alongamento de Cauchy-Green à direita	110
3.8 – Bibliografia Recomendada	113
4 – Tensões - Equilíbrio e Energia	114
4.1 – Forças de superfície	114

4.2 – Tensão de Cauchy	116
4.3 – Equações de Equilíbrio em tensões - Equilíbrio Local Euleriano	126
4.4 – Equações Eulerianas globais de equilíbrio	130
4.5 – Equação Local de equilíbrio (Lagrangiana) - Tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie	135
4.6 – Variação da energia - versão euleriana - configuração atual	136
4.7 – Variação da energia - versão Lagrangiana - configuração inicial	139
4.8 – Tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie	140
4.9 – Energia específica de deformação e leis constitutivas para sólidos	141
4.10 – Bibliografia recomendada	161
5 – Método dos Elementos Finitos Posicional - Sólidos	162
5.1 – Polinômios aproximadores	162
5.2 – O MEF Posicional - a ideia e a técnica de solução	176
5.3 – Detalhamento do cálculo das grandezas envolvidas	182
5.4 – O MEF Posicional Dinâmico	190
5.5 – Cálculo de tensões	196
5.6 – Técnica de solução por comprimento de arco	199
5.7 – Bibliografia Recomendada - Validações	205
6 – Cinemáticas especiais	208
6.1 – Elemento finito de pórtico plano usando giros como graus de liberdade	209
6.2 – Elemento finito de pórtico plano usando vetores generalizados como graus de liberdade	236
6.3 – Elemento de casca	253
6.4 – Elemento de barra geral 3D com cinemática em vetores generalizados	267
6.5 – Bibliografia Recomendada - Validações	282

1- Conceitos Fundamentais: Energia, equilíbrio e não linearidade geométrica

Neste capítulo serão abordados os conceitos de não linearidade geométrica e energia mecânica total. A exposição será feita por exemplos, imitando o método científico, ou seja, a partir de fatos observáveis e hipóteses estabelecidas, procura-se explicar o fato de forma racional e plausível. A apresentação de cada ponto será feita da forma mais simples possível, pois sua extensão será tratada em capítulos posteriores. Um exemplo dessa simplicidade é a definição da energia de deformação que será feita nesse capítulo para corpos unidimensionais, como molas ou barras de treliça e será estendida para sólidos nos capítulos subsequentes.

1.1 – Energia potencial de forças conservativas

A energia mecânica é a parte de interesse da energia total para a análise estrutural, objeto desse material. Adianta-se que as três parcelas da energia mecânica são: energia potencial das forças externas, energia de deformação e energia cinética, conforme explicitado na seguinte expressão:

$$\Pi = \mathbb{P} + U + K \quad (1.1)$$

onde Π é a energia mecânica, \mathbb{P} é o potencial das forças externas, U é a energia de deformação e K é a energia cinética.

Observa-se que, por enquanto, nenhum tipo de dissipação mecânica, ação térmica ou contato são mencionados, ficando sua discussão para momento oportuno e de forma direcionada. Neste item, a parcela da energia mecânica que será abordada é a energia potencial das forças externas. Na grande maior parte desse material as forças aplicadas serão consideradas conservativas, ou seja, não dependentes da posição ocupada no espaço ou da trajetória de equilíbrio estudada

Uma força concentrada conservativa possui intensidade, direção e sentido e é aplicada em um único ponto, sua energia potencial é definida como sendo a capacidade de trabalhar em relação a um referencial pré-definido. Na figura 1.1 se ilustra uma única força \vec{F} no espaço bidimensional dividida em componentes.

Analisando-se cada componente da força conservativa \vec{F} e impondo-se que a nulidade de seu potencial de trabalho ocorre na origem do sistema de referência, escreve-se:

$$\mathbb{P} = -F_1 Y_1 - F_2 Y_2 \quad (a)$$

onde, usando notação indicial, Y_i é a posição atual da força F_i . Na equação (a), o sinal negativo indica que uma força ocupando posições positivas já perdeu potencial de trabalho em relação à referência adotada.

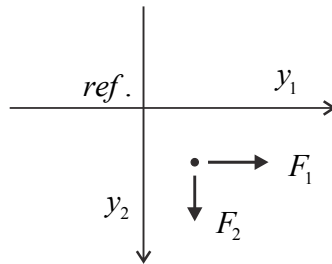


Figura 1.1 – Força concentrada e referencial pré-definido, representação bidimensional

No caso de um sistema mecânico para o qual estejam presentes n forças conservativas, usando-se notação indicial, a energia potencial das forças concentradas aplicadas fica escrita como:

$$\mathbb{P} = -F_i^\alpha Y_i^\alpha \quad (1.2)$$

onde $i = 1, 2, 3$ representa cada componente de força e $\alpha = 1, 2, \dots, n$ representa cada força conservativa aplicada no sistema mecânico. Lembra-se que, na notação indicial ou de Einstein, a repetição de índices indica soma.

É bastante útil se definir o diferencial ou a variação do potencial das forças aplicadas expresso na equação (1.2), como:

$$\delta \mathbb{P} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_j^\beta} \delta Y_j^\beta = -F_i^\alpha \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \delta Y_j^\beta = -F_i^\alpha \delta Y_i^\alpha \quad (b)$$

ou, de forma resumida

$$\delta \mathbb{P} = -F_i^\alpha \delta Y_i^\alpha \quad \text{ou} \quad \delta \mathbb{P} = -\vec{F}^\alpha \cdot \delta \vec{Y}^\alpha \quad (1.3)$$

onde se utilizou uma notação mista, para a qual se indica produto escalar (ou contração simples) para as direções e soma para todas as forças aplicadas. Observa-se que se utilizou a letra δ para distinguir variação de um infinitésimo onde a variação não está envolvida, como será apresentado nas equações (c), (d) e (1.4).

Para forças não conservativas, é válida a expressão diferencial (1.3), ou seja, a variação do potencial de uma força não conservativa é o produto interno entre valor da força atual pela variação da posição. Muitas vezes a omissão dessa definição leva alguns autores a afirmar que o PTV é mais geral que o princípio da estacionariedade da energia total. Não é de interesse, portanto, se escrever o potencial para forças não conservativas,

mas apenas a sua variação. Esta afirmação é utilizada na definição de forças dissipativas em problemas gerais.

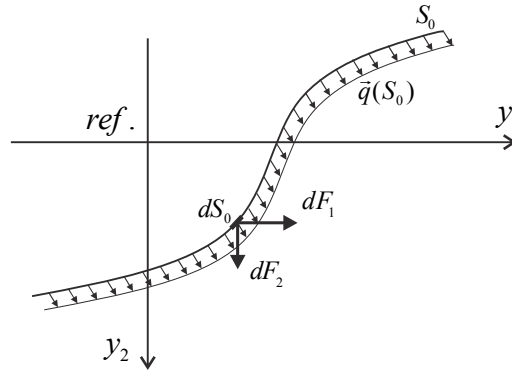


Figura 1.2 - Força distribuída aplicada sobre uma superfície, representação 2D

Forças conservativas distribuídas $\vec{q}(S_0)$ aplicadas sobre superfícies S_0 de estruturas ou sólidos, ou mesmo em superfícies internas, podem ser ilustradas conforme a figura 1.2. Um infinitésimo de força pode ser escrito como:

$$d\vec{F} = \vec{q}(S_0)dS_0 \quad (c)$$

onde dS_0 é um infinitésimo de área da superfície em questão. Assim, um infinitésimo de potencial de forças externas pode ser escrito como:

$$d\mathbb{P} = -dF_i y_i(S_0) = -q_i(S_0) y_i(S_0) dS_0 \quad (d)$$

e, portanto:

$$\mathbb{P} = -\int_{S_0} q_i(S_0) y_i(S_0) dS_0 \quad (1.4)$$

onde se utilizou letra minúscula para a posição \vec{y} , para diferenciar pontos de um contínuo de pontos isolados onde forças concentradas são aplicadas. Para que essa força distribuída realmente seja conservativa, S_0 não deve depender da posição atual e portanto representa uma superfície inicial.

Para um problema geral podem-se aplicar forças concentradas, distribuídas em partes da superfície e distribuídas em partes do domínio (\vec{b}), assim uma expressão geral para o potencial das forças conservativas aplicadas pode ser escrita como:

$$\mathbb{P} = -F_i^\alpha Y_i^\alpha - \int_{S^\beta} q_i^\beta(S_0) y_i^{(\beta)}(S_0) dS_0 - \int_{\Omega^\gamma} b_i^\gamma(\Omega_0) y_i^{(\gamma)}(\Omega_0) d\Omega_0 \quad (1.5)$$

onde, Ω_0 indica domínio e, em notação indicial, um índice entre parêntesis acompanha a soma de seus iguais.

A variação do potencial completo fica expressa como:

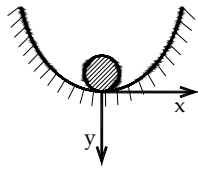
$$\delta P = -F_i^\alpha \delta Y_i^\alpha - \int_{S_0} q_i^\beta (S_0) \delta y_i^{(\beta)} dS_0 - \int_{\Omega_0} b_i^\gamma (\Omega_0) \delta y_i^{(\gamma)} d\Omega_0 \quad (1.6)$$

Deve-se observar que a descrição do potencial de forças externas foi um pouco além do necessário para esse capítulo inicial, porém, por sua simplicidade, permitiu-se esse excesso.

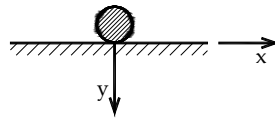
1.2 – Energia e equilíbrio

Neste item, aproveitando-se de um exemplo simples, mostra-se o princípio da estacionariedade que diz que o equilíbrio mecânico de um sólido, ou estrutura, ocorre quando a variação do potencial de energia mecânica é nula. Além disso, mostra-se que a natureza deste equilíbrio pode ser determinada pelo sinal da segunda variação da energia mecânica.

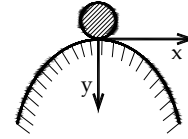
Uma ilustração simples dos tipos de equilíbrio é mostrada na figura 1.3, onde o equilíbrio estático de um corpo rígido, sujeito ao seu peso próprio, sobre uma superfície perfeitamente lisa, é ilustrado.



(a) Equilíbrio estável



(b) Equilíbrio indiferente



(c) Equilíbrio instável

Figura 1.3 – Ilustração das naturezas do equilíbrio mecânico

Para o problema descrito na figura 1.3 a energia do sistema se limita à energia potencial do peso da esfera, que pode ser expressa para cada sistema em função de x como:

$$\Pi_a = P_a = -Fy = Fx^2 \quad (a)$$

$$\Pi_b = P_b = 0 \quad (b)$$

$$\Pi_c = P_c = -Fy = -Fx^2 \quad (c)$$

Observando-se a figura 1.3, é óbvio que os equilíbrios estáticos dos casos (a) e (c) só podem ocorrer em $x=0$, enquanto o equilíbrio do caso (b) pode ocorrer em qualquer posição x . Além disso, por simples inspeção, o equilíbrio do caso (a) é estável, o equilíbrio do caso (b) é indiferente e o equilíbrio do caso (c) é instável.

Analisando-se a variação de Π_a , Π_b e Π_c , escreve-se:

$$\delta\Pi = \frac{d\Pi_a}{dx} \delta x = 2Fx \delta x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (d)$$

$$\delta\Pi = \frac{d\Pi_b}{dx} \delta x = 0 \quad \forall x \quad (e)$$

$$\delta\Pi = \frac{d\Pi_c}{dx} \delta x = -2Fx \delta x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (f)$$

onde se considera a variação δx arbitrária. As equações (d), (e) e (f) nos comprovam que o equilíbrio dos casos (a) e (c) ocorrem no ponto $x = 0$ e que o equilíbrio do caso (b) pode ocorrer em $x = 0$, porém não nos informa a natureza de cada equilíbrio. O fato da variação δx ser arbitrária indica que não só a variação é nula, mas também a derivada da energia mecânica em relação à variável independente, no caso x . Analisando-se a segunda variação, ou segunda derivada, tem-se:

$$\frac{d^2\Pi_a}{dx^2} = 2F > 0 \quad (g)$$

$$\frac{d^2\Pi_b}{dx^2} = 0 \quad (h)$$

$$\frac{d^2\Pi_c}{dx^2} = -2F < 0 \quad (i)$$

ou seja, $x = 0$ é ponto de mínimo para Π_a , de máximo para Π_c e de inflexão para Π_b .

Assim, comparando-se o experimento com os resultados matemáticos, conclui-se que o equilíbrio de um sistema mecânico é estável quando a posição de equilíbrio representa um mínimo ‘local’ para a função de energia mecânica total, indiferente se a posição está em trecho constante do mesmo ou se o potencial apresenta inflexão e instável se a posição representa um máximo ‘local’ para a energia mecânica.

De forma genérica, se a energia mecânica é função de várias variáveis, expressas, por exemplo, por um vetor \vec{Y} , a variação da energia mecânica no equilíbrio e, conseqüentemente, o princípio da estacionariedade, ficam escritos como:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\vec{Y}} \cdot \delta\vec{Y} = \text{Grad}(\Pi) \cdot \delta\vec{Y} = 0 \quad (1.7)$$

ou, como $\delta\vec{Y}$ é arbitrário, o gradiente é nulo

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\vec{Y}} = \vec{0} \quad \text{ou em notação indicial} \quad \frac{\partial\Pi}{\partial Y_i} = 0_i \quad (1.8)$$

é interessante se observar, recordando algumas propriedades de tensores, que a derivada de um escalar em relação a um vetor é um vetor.

A segunda derivada da energia mecânica em relação à variável vetorial \vec{Y} fica:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} = \mathbf{H} \quad \text{ou indicialmente} \quad H_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y_i \partial Y_j} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y_j \partial Y_i} \quad (1.9)$$

onde \mathbf{H} , simétrica, é chamada matriz Hessiana. Como se pode observar, o equilíbrio é estável se, no ponto de equilíbrio, a matriz Hessiana for positiva definida. Essa afirmação é patente quando se escreve a segunda variação de Π na forma:

$$\delta^2 \Pi = \delta Y_i \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y_i \partial Y_j} \delta Y_j > 0 \quad \text{ou} \quad \delta^2 \Pi = \delta \vec{Y}^t \cdot \mathbf{H} \cdot \delta \vec{Y} > 0 \quad (1.10)$$

que é a definição de uma matriz positiva definida para $\delta \vec{Y}$ arbitrário.

1.3 – Energia de deformação – problemas unidimensionais

Conforme comentado na introdução deste capítulo, a definição da energia de deformação para sólidos gerais será objeto de capítulos mais avançados. Neste item apresenta-se a energia de deformação para problemas unidimensionais, como molas, barras de treliça e molas de flexão. O intuito dessa discussão é introduzir, na energia mecânica total, a parcela de energia de deformação, veja equação (1.1), possibilitando a solução de alguns exemplos simples que ilustrem questões como a não linearidade geométrica, equilíbrio pela estacionariedade e instabilidade.

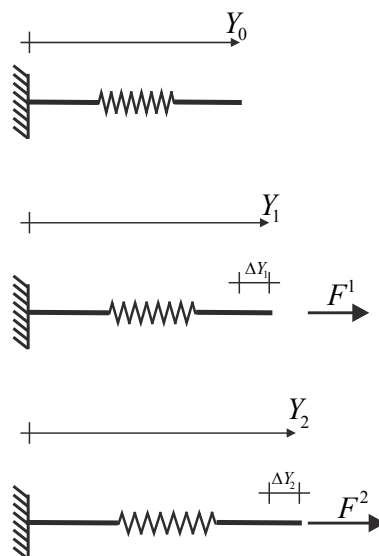


Figura 1.4 – Força reativa (interna) crescente em função da posição atual da extremidade da mola

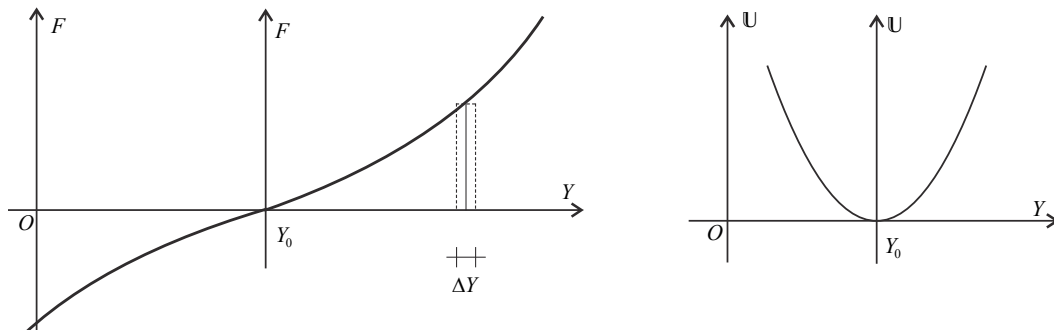
A figura 1.4 deve ser entendida como a aplicação de uma posição Y , crescente, com a medida da força reativa F^{int} (chamada interna) necessária para manter a mola na configuração desejada. Assim, ao invés de conservativa, a força mensurada depende da posição, ou seja $F^{int}(Y)$.

Como não há dissipação, o trabalho realizado por essa força é a integral (área) do gráfico da figura 1.5a, e deve ficar armazenado na mola na forma de energia de deformação, o que é expresso por:

$$\mathbb{U} = \int_{Y_0}^Y F^{int}(Y) dY \quad (1.11)$$

Deve-se comentar que todos os desenvolvimentos deste texto são direcionados para se escrever uma formulação baseada em posições. Como a maior parte da bibliografia usa deslocamento como variável básica, deve-se lembrar que:

$$u = Y - Y_0 \quad (a)$$



(a) Força em função da posição

(b) Energia de deformação

Figura 1.5 - Força e energia de deformação em função da posição

Assim, para estágios quaisquer a e b de aplicação de força da figura 1.4 calcula-se:

$$\Delta u = u(a) - u(b) = (Y(a) - Y_0) - (Y(b) - Y_0) = Y(a) - Y(b) = \Delta Y \quad (b)$$

ou ainda $du = dY$. Dessa forma a energia de deformação também poderia ser escrita como:

$$\mathbb{U} = \int_0^u F^{int}(u) du \quad (c)$$

com a origem da medida de deslocamentos no ponto Y_0 dos gráficos da figura 1.5 e no ponto de aplicação da carga na figura 1.4.

Derivando-se a equação (1.1) em relação à Y , ou a equação (c) em relação à u , define-se o conjugado energético força/posição ou força/deslocamento, como:

$$F^{int} = \frac{d\mathbb{U}}{dY} = \frac{d\mathbb{U}}{du} \quad (d)$$

ou seja, a força interna é conjugada energética da posição ou do deslocamento.

De forma genérica, a energia de deformação pode ser função de várias variáveis (posições no caso) na forma de um vetor \vec{Y} e, portanto, o vetor de forças internas, conjugado energético dessas posições, fica dado por:

$$\vec{F}^{int} = \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \vec{Y}} \quad \text{ou indicialmente,} \quad F_i^{int} = \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_i} \quad (1.12)$$

A título de exemplo, seja uma mola com comportamento elástico linear, para a qual a seguinte expressão é bastante conhecida:

$$F^{int} = ku = k(Y - Y_0) \quad (e)$$

que, a partir da expressão (1.11) resulta na seguinte expressão para a energia de deformação:

$$\mathbb{U} = k \frac{(Y - Y_0)^2}{2} \quad (f)$$

Imaginando-se que não se conhecesse a expressão (e), mas se tivesse estabelecido a expressão (f) como a energia de deformação da mola, aplicando-se a definição de conjugado energético tem-se:

$$F^{int} = \frac{d\mathbb{U}}{dY} = k(Y - Y_0) \quad (g)$$

que confirma a definição de conjugado energético. Da mesma forma, para uma mola elástica não linear, poder-se-ia definir a seguinte expressão de energia de deformação:

$$\mathbb{U} = k \frac{(Y - Y_0)^4}{4} \quad (h)$$

Assim, pelo conjugado energético tem-se:

$$F^{int} = \frac{d\mathbb{U}}{dY} = k(Y - Y_0)^3 \quad (i)$$

ou seja, o comportamento da força é não linear com a posição. Uma relação diferencial (variação) entre força interna e posição pode ser estabelecida como:

$$\delta F^{int} = \frac{dF^{int}}{dY} \delta Y = \frac{d^2\mathbb{U}}{dY^2} \delta Y = k_i(Y) \delta Y \quad (j)$$

que nesse exemplo fica:

$$\delta F^{int} = 3k(Y - Y_0)^2 \delta Y = k_t(Y) \delta Y \quad (k)$$

onde $k_t(Y) = 3k(Y - Y_0)^2$ é a Hessiana da energia de deformação ou rigidez tangente da mola, que nesse caso, depende do nível de alongamento já aplicado na mola, veja a figura 1.6. Esse tipo de comportamento é muito comum em elastômeros.

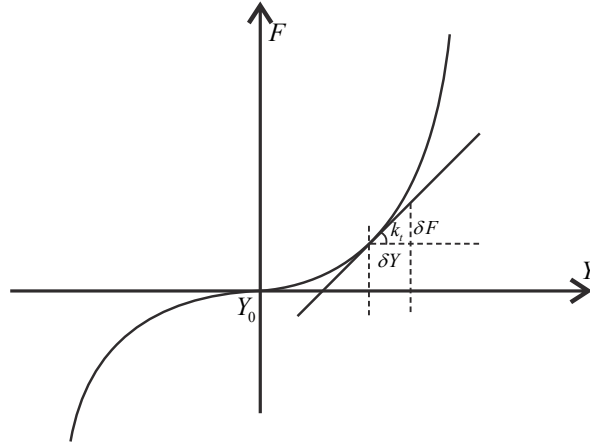


Figura 1.6 - Conceito de rigidez tangente ou Hessiana da energia de deformação

Caso a energia de deformação seja função de várias variáveis (posições no caso) na forma de um vetor \vec{Y} a relação diferencial genérica fica dada, a partir de (1.12), como:

$$\delta \vec{F}^{int} = \frac{\partial \vec{F}^{int}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} = \mathbf{H} \cdot \delta \vec{Y} \quad (1.13)$$

ou indicialmente:

$$\delta F_j^{int} = \frac{\partial F_j^{int}}{\partial Y_i} \delta Y_i = \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y_j \partial Y_i} \cdot \delta Y_i = F_{j,i}^{int} \delta Y_i = \mathbb{U}_{,ji} \delta Y_i = H_{ji} \delta Y_i \quad (1.14)$$

onde a vírgula indica derivada parcial.

Os mesmos conceitos aplicados à mola de extensão valem, por exemplo, para molas de giro, veja a figura 1.7. Pode se escrever para uma mola de giro um potencial de energia de deformação dado por:

$$\mathbb{U} = \frac{k(\theta - \theta_0)^4}{4} \quad (\ell)$$

$$M^{int} = \frac{d\mathbb{U}}{d\theta} = k(\theta - \theta_0)^3 \quad (m)$$

ou seja, momento interno é conjugado energético de giro. Além disso, vale a definição de rigidez tangente como:

$$\delta M^{int} = 3k(\theta - \theta_0)^2 \delta\theta = k_t(\theta) \delta\theta \quad (n)$$

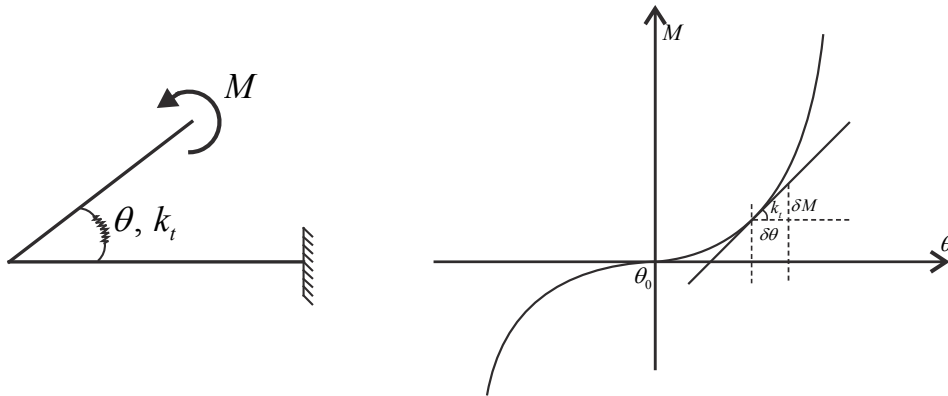


Figura 1.7 - Mola de giro de comportamento não linear

É interessante mencionar que a unidade da energia de deformação é a mesma de trabalho, ou seja, $W = FL = ML^2 / T^2$.

Sem entrar em muitos detalhes, uma barra de treliça elástica linear se comporta de forma semelhante à mola da figura 1.4, porém costuma-se escrever a expressão correspondente à equação (f) utilizando-se o comprimento da barra ao invés de diretamente as posições, pois $Y - Y_0 = l - l_0 = \Delta l$, assim,

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 \quad (o)$$

ou

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2} \frac{EA}{l_0} (l - l_0)^2 = \frac{1}{2} EA l_0 \frac{(l - l_0)^2}{l_0^2} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 A l_0 \quad (p)$$

sendo ε a conhecida medida de deformação de engenharia. Essa equação será usada no exemplo 1.4e e será melhor deduzida quando da definição de medidas de deformações objetivas.

1.4 – Estudo de casos estáticos simples – equilíbrio e natureza do equilíbrio

Nas disciplinas clássicas, relacionadas à mecânica das estruturas, dos cursos de graduação e em algumas disciplinas de pós-graduação, ensina-se a determinar o equilíbrio de estrutura sujeita a ações externas na configuração geométrica indeslocada da estrutura.

Somente em alguns tópicos especiais, associados ao estudo da estabilidade das estruturas, é que se apresentam técnicas de solução que consideram o equilíbrio na

configuração deslocada da estrutura. Ainda assim, a configuração deslocada adotada é uma aproximação válida para deslocamentos considerados pequenos.

Neste item, os conceitos referentes ao equilíbrio na configuração deslocada serão apresentados, mostrando que sua elaboração energética é mais simples e proporciona maior número de informações do que o cálculo direto do equilíbrio. Sua apresentação se fará por meio da resolução de alguns casos simples, que podem ser resolvidos com os conceitos apresentados até aqui. Serão consideradas estruturas sujeitas a ações e configurações geométricas que conduzem ou não aos problemas chamados usualmente de instabilidade.

1.4.a – Viga rígida em engaste elástico

Na figura a1 apresenta-se uma viga, supostamente rígida, de comprimento “ l ”, vinculada em sua extremidade esquerda por um apoio fixo e uma mola de rotação. A mola de rotação possui comportamento perfeitamente elástico-linear, isto é, fornece momento resistente proporcional e em sentido contrário ao giro em radianos a que é submetida. O sistema de coordenadas cartesiano, indicado na figura a1, tem origem no apoio fixo.

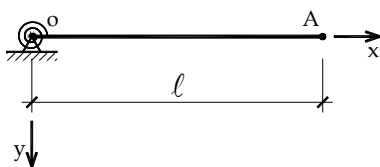


Figura a1 – Viga rígida em engaste elástico

Na figura a2 esta barra está sendo solicitada por uma força vertical F de valor qualquer.

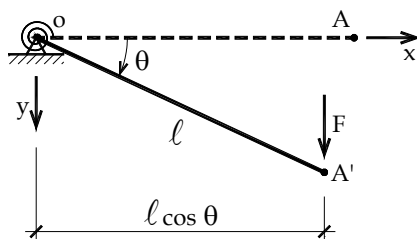


Figura a2 – Estrutura carregada – posição deslocada

Como se observa, ao se aplicar a força, o ponto de aplicação da mesma se move e sua distância (na horizontal) em relação à origem deixa de ser “ ℓ ” e passa a ser “ $\ell \cos(\theta)$ ”.

Na Figura a3, o diagrama de corpo livre, na configuração deslocada, é apresentado e possibilita a análise geometricamente exata do equilíbrio.

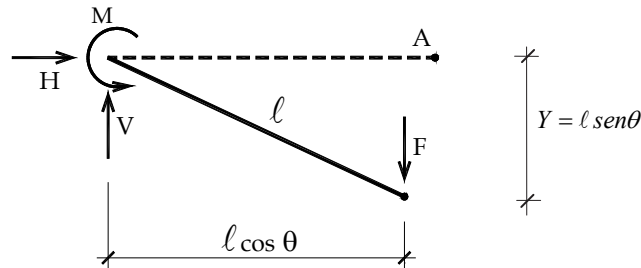


Figura a3 – Diagrama de corpo livre na posição deslocada

Da análise da figura a3 se encontra $V = F$; $H = 0$; e $M = F \ell \cos(\theta)$. Pela hipótese estabelecida para o comportamento da mola, sendo k sua constante de proporcionalidade, encontra-se:

$$k\theta = F \ell \cos(\theta) \quad (a)$$

ou

$$F = \frac{k\theta}{\ell \cos(\theta)} \quad (b)$$

onde o intervalo de validade da solução é $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Na Figura a4, adotando-se $\ell = 1m$ e $k = 1kNm$, a linha contínua representa o comportamento exato da posição vertical ($Y = \ell \sin \theta$) em função da força vertical para baixo aplicada em kN, enquanto a linha tracejada representa a resposta linear, ou seja, para $\theta = F \ell / k$ e $\ell \sin \theta = \ell \theta$. Observa-se pela figura a4 que a solução exata indica que quando a barra tender a ficar na vertical $Y = 1m$ a posição da barra não se alterará mais qualquer que seja o acréscimo de carga. Ainda na figura a4 percebe-se que a solução aproximada (linear) não possui significado físico caso se deseje estudar o equilíbrio de uma estrutura de grande deslocabilidade e se aproxima da solução exata apenas quando os deslocamentos, ou a mudança de posição, são pequenos.

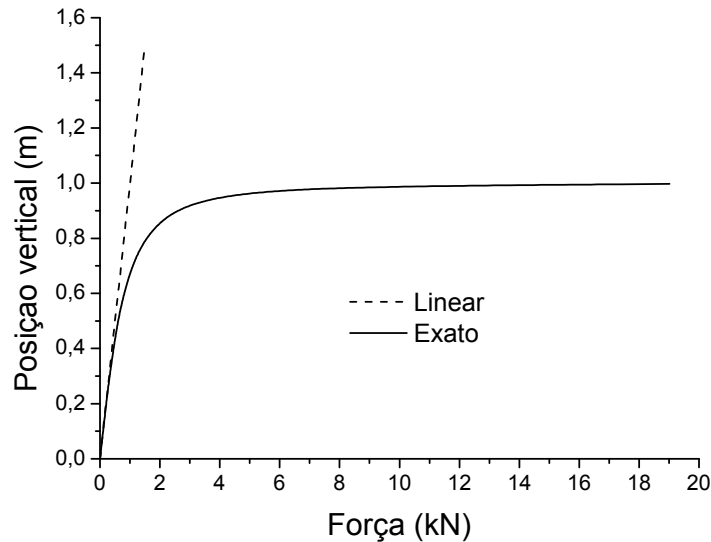


Figura a4 – Posição Y por força aplicada

Para se determinar a equação de equilíbrio pelo princípio da estacionariedade da energia mecânica escreve-se a equação (1.1) como:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} \quad (\text{a})$$

onde

$$\mathbb{P} = -FY \quad \text{e} \quad \mathbb{U} = \frac{k\theta^2}{2} = \frac{k(\arcsen(Y/\ell))^2}{2} \quad (\text{b})$$

então

$$\Pi = \frac{k(\arcsen(Y/\ell))^2}{2} - FY \quad (\text{c})$$

Usando-se o princípio da estacionariedade, escreve-se:

$$\delta\Pi = \frac{d\mathbb{P}}{dY} \delta Y + \frac{d\mathbb{U}}{dY} \delta Y = \left(\frac{d\mathbb{P}}{dY} + \frac{d\mathbb{U}}{dY} \right) \delta Y = 0 \quad (\text{d})$$

ou

$$\frac{d\mathbb{U}}{dY} + \frac{d\mathbb{P}}{dY} = 0 \quad \text{ou} \quad F^{int} - F = 0 \quad (1.15)$$

A equação (1.15) revela a equação de equilíbrio, indicando que a força interna (conjugada energética da posição) é igual à força externa (aplicada). Essa equação ainda pode ser desenvolvida, como:

$$F = \frac{d\mathbb{U}}{dY} = k \arcsen(Y/\ell) \frac{1}{\ell \cos(\arcsen(Y/\ell))} = \frac{k\theta}{\ell \cos\theta} \quad (\text{e})$$

confirmando o resultado (b). Poder-se-ia ter feito a variação diretamente em θ , porém não ficaria evidente que F é conservativa e a conclusão apresentada em (1.15) também se perderia.

O cálculo da rigidez tangente (ou Hessiana do problema) é feito como:

$$H = \frac{d^2\Pi}{dY^2} = \frac{d^2\mathbb{U}}{dY^2} = \frac{dF^{int}}{dY} = \frac{dF^{int}}{d\theta} \frac{d\theta}{dY} = \frac{dF^{int}}{d\theta} \frac{1}{\ell \cos\theta} \quad (f)$$

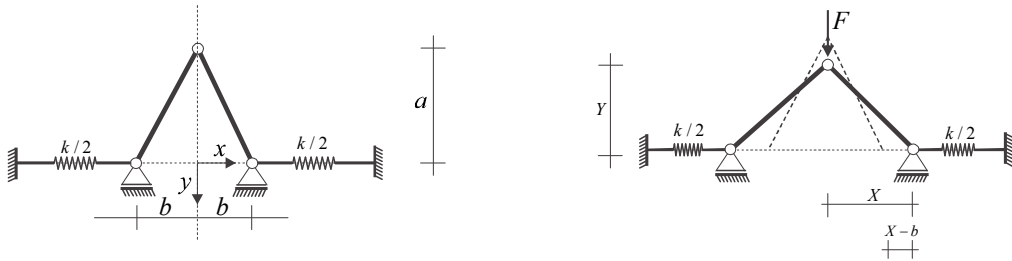
onde, para forças conservativas a segunda derivada da energia mecânica coincide com a segunda derivada da energia de deformação. Desenvolvendo-se (f), tem-se:

$$k_t = H = \frac{k}{\ell^2} \left(\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{\theta \tan\theta}{\cos^2\theta} \right) > 0 \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (g)$$

ou seja, o equilíbrio é estável para qualquer nível de força.

1.4.b – Treliça rígida em apoio elástico

As configurações inicial e atual da estrutura analisada são apresentadas na figura b1. A força aplicada é conservativa.



(a) Indeslocada - Configuração inicial (b) Deslocada - Configuração atual

Figura b1 - Geometria e carregamento aplicado

Como as barras da estrutura são rígidas seu comprimento é constante ao longo da análise e vale $\ell = \sqrt{a^2 + b^2}$. Portanto, existe uma relação direta entre as coordenadas X e Y dos pontos de análise que reduzem o número de posições variáveis, ou seja:

$$\ell^2 = Y^2 + X^2 \quad \text{ou} \quad X = \sqrt{\ell^2 - Y^2} \quad (a)$$

Como o problema é simétrico e considerando-se a mola elástica linear, a energia de deformação total é dada por:

$$\mathbb{U} = 2x \left(\frac{1}{2} (k/2) (X - b)^2 \right) = \frac{k}{2} (X - b)^2 = \frac{k}{2} (\sqrt{\ell^2 - Y^2} - b)^2 \quad (b)$$

A energia mecânica total fica dada em função de Y como:

$$\Pi(Y) = \frac{k}{2}(\sqrt{\ell^2 - Y^2} - b)^2 - FY \quad (c)$$

A equação de equilíbrio resulta:

$$\frac{d\Pi(Y)}{dY} = \left(\frac{b}{\sqrt{\ell^2 - Y^2}} - 1 \right) kY - F = 0 \quad (d)$$

A Hessiana (ou rigidez tangente) resulta:

$$\frac{d^2\Pi(Y)}{dY^2} = \left(\frac{b}{\sqrt{\ell^2 - Y^2}} - 1 + \frac{bY^2}{(\ell^2 - Y^2)^{3/2}} \right) k \quad (e)$$

Para efeito de ilustração considera-se $b=1$, $a=1$ e $k=1$ e apresentam-se os gráficos das figuras b2 e b3.

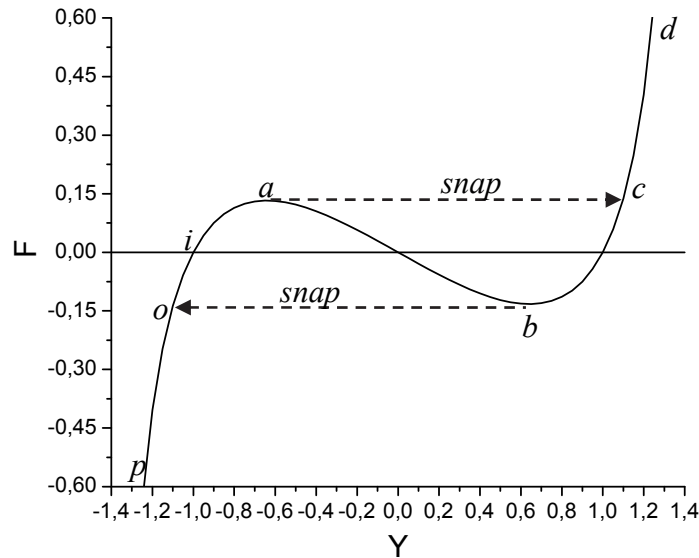


Figura b2 - Força aplicada em função da posição

Os gráficos foram gerados prescrevendo-se a posição Y e calculando-se a força necessária para se manter a estrutura na posição prescrita, ou seja, controle de posição.

No que segue realiza-se uma análise em controle de força, ou seja, aplicando-se a força e calculando-se a posição correspondente. Iniciando-se na posição inicial da estrutura, $Y = -1$, correspondente ao ponto i no gráfico da figura b2, ao se aplicar força negativa o gráfico é percorrido no sentido $i \rightarrow o$ passando por o e continuando sobre a linha contínua indefinidamente. A estrutura tende a ficar vertical e a força tende a ser $-\infty$. Nesse trecho a rigidez tangente é sempre positiva, veja a figura b3 e, portanto, a estrutura se comporta de forma estável.

Novamente, começando a análise na posição inicial, ponto i do gráfico da figura b2, aplicando-se uma força positiva crescente o caminho de solução percorre o gráfico até o ponto a com valor positivo para a Hessiana, veja figura b3. Assim, o trecho $i - a$ é estável. No ponto a a Hessiana apresenta valor nulo e, portanto, o equilíbrio é indiferente. Esse ponto é chamado ponto limite (em força), pois não se pode aumentar o valor da força sem causar um salto na posição (chamado snap) do ponto a até o ponto c , a partir do qual o equilíbrio, para forças crescentes, se torna estável novamente. Esse salto chama-se "snap through" em inglês, devido à existência de outro tipo de salto, veja próximos exemplos, chamado "snap back".

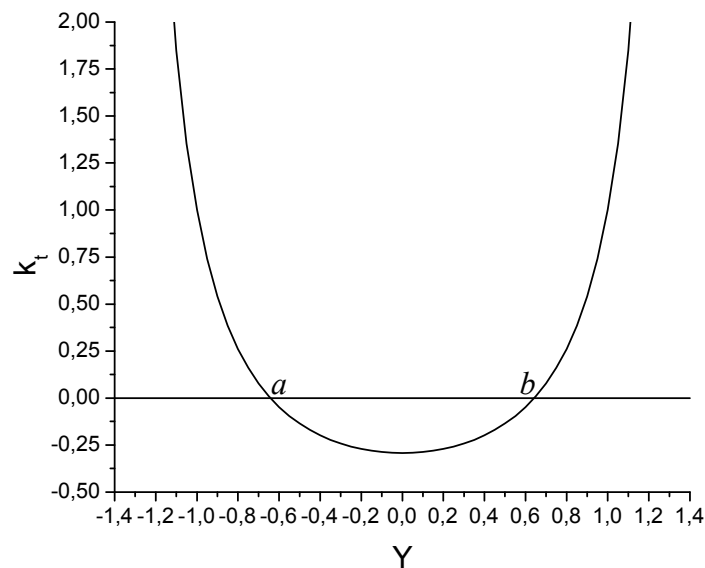


Figura b3 - Rigidez tangente em função da posição

Faz-se agora uma análise em controle de força decrescente, porém começando no ponto d do gráfico da figura b2. O caminho de equilíbrio segue de d até b com Hessiana positiva, e portanto estável, no ponto limite b a Hessiana é nula e a solução salta para o ponto o continuando para o ponto p com Hessiana positiva.

Portanto o trecho $a - b$ do caminho de solução não existe para controle de força, pois seu equilíbrio é instável (Hessiana negativa), porém com controle em posições é possível passar por aquele trecho.

1.4.c – Coluna rígida em engaste elástico (ação excêntrica)

A estrutura a ser analisada é uma coluna de comprimento L , supostamente rígida, vinculada em sua base sobre o apoio fixo e uma mola de rotação idêntica ao caso

estudado no exemplo 1.4.a. A ação externa é uma força vertical F conservativa, sempre positiva, de intensidade arbitrária e excêntrica.

A Figura c1(a) mostra a geometria da estrutura descarregada, incluindo o sistema de referência. A figura c1(b) mostra uma configuração genérica natural para a estrutura carregada, enquanto a figura c1(c) mostra o diagrama de corpo livre para esta configuração.

Já a figura c2(a) mostra outra configuração genérica possível, chamada não natural, pois para atingi-la foi necessário girar a estrutura no sentido anti-horário a uma posição angular $\theta = -\text{arctg}(\varepsilon)$, sendo $\varepsilon = \frac{e}{\ell}$ onde “ e ” é a excentricidade inicial do sistema, fisicamente definida pelo pequeno balanço indicado na figura c1(a). A figura c2(b) mostra o diagrama de corpo livre para a configuração não natural.

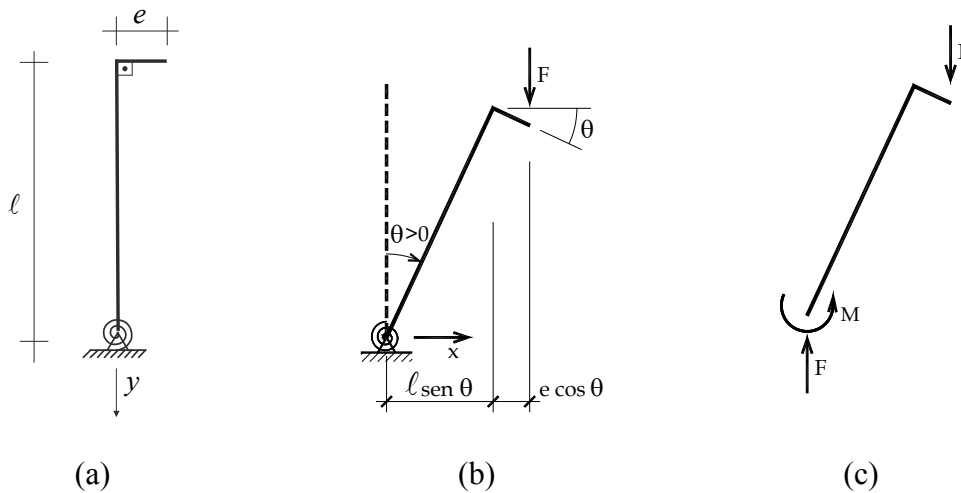


Figura c1 – (a) Estrutura descarregada, (b) Configuração natural para ação não nula, (c) Diagrama de corpo livre

A análise do equilíbrio para a figura c1(c) resulta em:

$$F = \frac{k\theta}{(\ell \sin(\theta) + e \cos(\theta))} \quad (a)$$

ou

$$F = \frac{k}{\ell} \frac{\theta}{(\sin(\theta) + \varepsilon \cos(\theta))} \quad (b)$$

Para $F > 0$ esta equação é válida para $0 \leq \theta < \pi - \text{arctg}(\varepsilon)$. O limite superior do intervalo representa a tendência à direita para a configuração descrita na figura c3(a)

ante a qual a força pode ser levada ao infinito sem mudança de posição desde que se considere a barra rígida e sem limite de resistência .

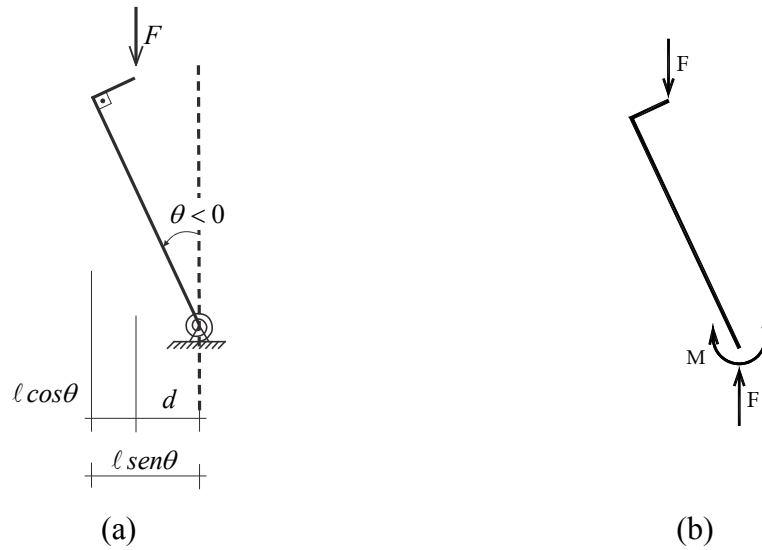


Figura c2 – (a) Configuração possível não natural, (b) Diagrama de corpo livre

No caso da figura c2(b), o equilíbrio resulta na equação:

$$F = \frac{\alpha k}{(\ell \sin(\alpha) - e \cos(\alpha))} = \frac{k}{\ell} \frac{\alpha}{(\sin(\alpha) - \varepsilon \cos(\alpha))} \quad (c)$$

onde $\alpha = |\theta|$, M no sentido indicado na figura c2(b) e θ positivo conforme figura c1(b). A equação (c) vale para o intervalo $-\pi - \arctg(\varepsilon) < \theta < -\arctg(\varepsilon)$. O limite inferior para θ é a tendência pela esquerda para a configuração em c3(a). Já o limite superior é o início da configuração não natural, posição c3(b), comentado anteriormente.

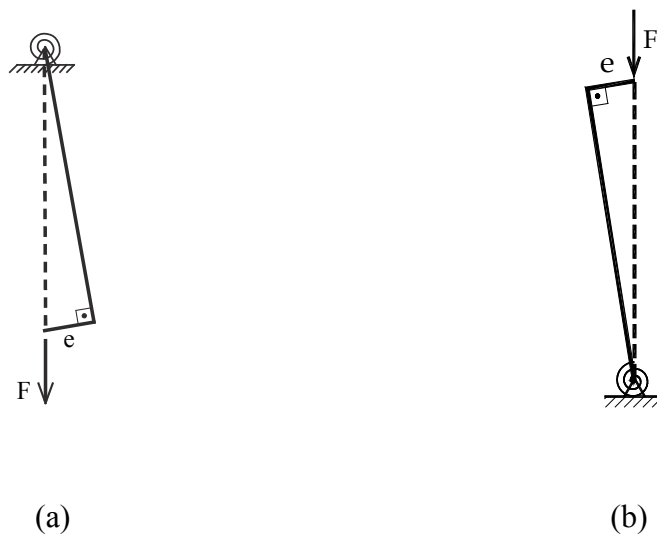


Figura c3 – Configurações limite (singulares)

O gráfico da figura c4 é elaborado para $k = 1$, $\ell = 1$ e $\varepsilon = 0.01$ considerando-se valores positivos e negativos (ou α) de θ nas expressões (b) e (c).

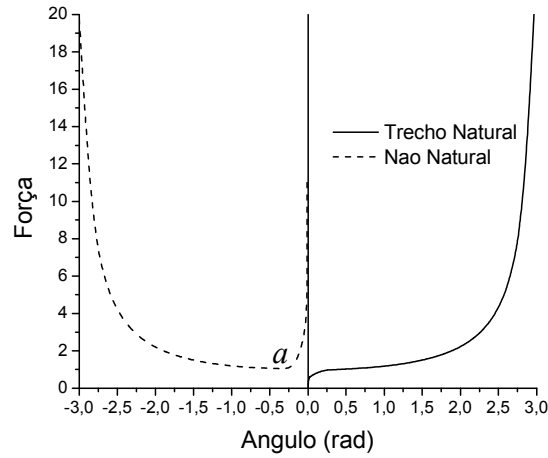


Figura c4 – Força aplicada em função da posição θ

Deve-se lembrar que, apesar desse intervalo ser muito pequeno e não aparecer na figura c4, não existe equilíbrio para $-\arctg(\varepsilon) < \theta < 0$, pois o binário gerado por F e sua reação terão o mesmo sentido do momento resistente M , entretanto poder-se-ia ter equilíbrio ao se admitir força negativa (para cima).

Observa-se na figura c4, que para o trecho onde $-\pi - \arctg(\varepsilon) < \theta < -\arctg(\varepsilon)$, existem sempre duas posições θ possíveis de equilíbrio para a mesma força F aplicada, uma à esquerda do ponto a e outra à sua direita. Como se sabe, uma análise em energia fornece maiores informações e o ponto a na trajetória de equilíbrio será determinado. Considerando-se $\alpha = |\theta|$ a energia potencial total é escrita como:

$$\Pi(\theta) = \frac{\kappa\theta^2}{2} - F[-\ell(\cos(\theta) - \varepsilon\sin(\theta))] \quad \text{para} \quad 0 \leq \theta < \pi - \arctg(\varepsilon) \quad (d)$$

$$\Pi(\alpha) = \frac{\kappa\alpha^2}{2} - F[-\ell(\varepsilon\sin(\alpha) + \cos(\alpha))] \quad \text{para} \quad \arctg(\varepsilon) \leq \alpha < \pi + \arctg(\varepsilon) \quad (e)$$

A primeira derivada da energia potencial total é a equação de equilíbrio e a segunda derivada em relação à θ ou α fica:

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = k - F\ell(\cos(\theta) - \varepsilon\sin(\theta)) \quad 0 \leq \theta < \pi - \arctg(\varepsilon) \quad (f)$$

$$\frac{d^2\Pi}{d\alpha^2} = k - F\ell(\cos(\alpha) + \varepsilon\sin(\alpha)) \quad \arctg(\varepsilon) \leq \alpha < \pi + \arctg(\varepsilon) \quad (g)$$

Substituindo-se as equações (b) e (c) nas expressões (f) e (g), respectivamente, pode-se analisar o sinal da segunda derivada da energia de deformação e, portanto, a natureza do equilíbrio em relação à posição θ ou α . Isto é feito no gráfico apresentado na figura c5 para $k = 1$, $\ell = 1$ e $\varepsilon = 0.01$.

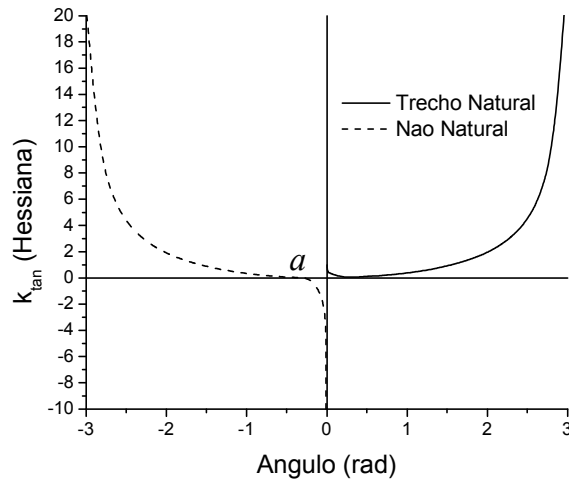
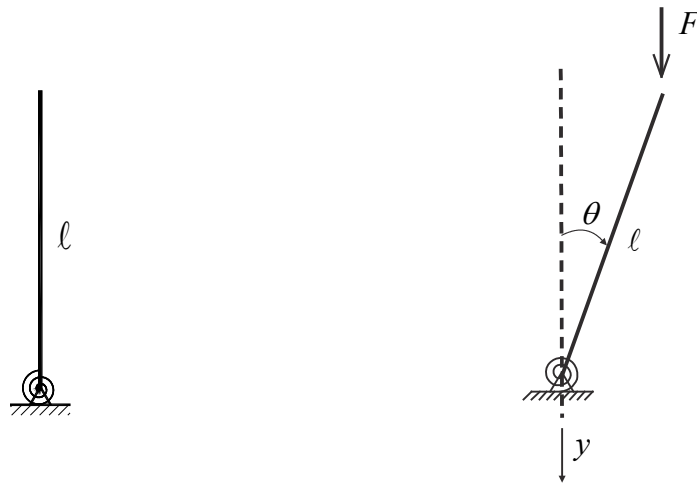


Figura c5 – Natureza do equilíbrio

Como se observa (para $\varepsilon = 0,01$) o equilíbrio é sempre estável no trecho natural, enquanto no trecho não natural o equilíbrio é instável para $\arctg(\varepsilon) < \alpha < 0,31459rad$, como $\theta = -\alpha$, para $-0,31459rad < \theta < -\arctg(\varepsilon)$, justificando o gráfico da figura c4. Observa-se na figura c5 que o ponto a corresponde à $\theta = -0.31459rad$. Resultados análogos são obtidos para qualquer ε não nulo adotado.

1.4.d – Coluna rígida sobre engaste elástico (ação centrada – imperfeições)

Quando, para o problema anterior, $\varepsilon = 0$ trata-se de uma situação completamente diferente, chamada de caso limite. Neste caso, a configuração natural da estrutura é única e, sem nenhum defeito, a barra se encontraria na vertical qualquer que fosse a intensidade da força aplicada. Esta configuração, ao invés de natural, é chamada ideal, pois nas situações reais não existe peça totalmente alinhada. Assim, deve-se estudar o equilíbrio em configurações onde $\theta \neq 0$ (perturbação matemática no sistema ideal), ver figura d1.



(a) Descarregada

(b) Carregada - perturbada

Figura d1 – Coluna rígida sobre engaste elástico

Desta forma tem-se para $\theta \neq 0$:

$$F = \frac{k}{\ell} \frac{\theta}{\text{sen}(\theta)} \quad (a)$$

Fazendo-se o limite da expressão (a) para $\theta = 0$ se encontra um valor particular de F chamado força crítica $F_{cr} = k / \ell$.

O gráfico da figura d2 revela as possíveis posições de equilíbrio para o sistema em estudo. Como comentado anteriormente, se a estrutura não tem defeito uma possível posição de equilíbrio é $\theta = 0$, qualquer que seja o nível de carga aplicado, porém, para valores maiores do que F_{cr} , mais de um valor de θ é possível para o mesmo nível de carga e, portanto o equilíbrio para $\theta = 0$ se torna instável, ou seja, qualquer perturbação horizontal no sistema fará a estrutura buscar equilíbrio em θ dado pela equação (a).

Por outro lado, para $F < F_{cr}$, qualquer perturbação horizontal (gerando θ) resultará em momento reativo da mola maior que o momento ativo da força, ou seja, o equilíbrio é estável para $\theta = 0$.

O ponto $\theta = 0$, $F = F_{cr}$ do gráfico apresentado é chamado ponto de bifurcação da solução, pois para uma carga acima da crítica o desvio pode ocorrer em qualquer direção. Uma análise energética deste problema informa facilmente as naturezas de equilíbrio descritas acima. O potencial de energia total válido qualquer que seja θ é:

$$\Pi = \frac{k\theta^2}{2} - F[-\ell \cos(\theta)] = \frac{k\theta^2}{2} - FY \quad (b)$$

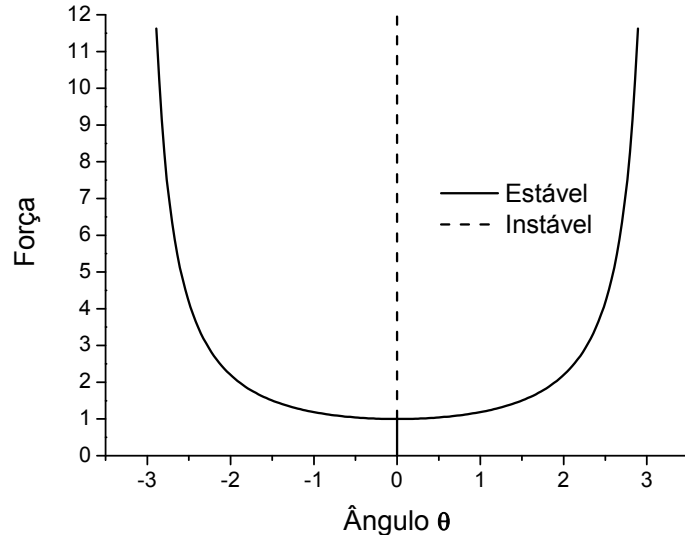


Figura d2 – Natureza do equilíbrio para ($\varepsilon = 0$).

De onde se conclui que a segunda derivada vale:

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = k - F\ell \cos(\theta) \quad (c)$$

A análise da equação (c) revela que para $\theta = 0$ e $F < F_{cr}$ o equilíbrio é estável, pois $d^2\Pi/d\theta^2 > 0$. Se $\theta = 0$ e $F > F_{cr}$ o equilíbrio é instável, pois $d^2\Pi/d\theta^2 < 0$.

Se teta $\theta \neq 0$, usando $F = k\ell / \text{sen}(\theta)$ em (c) tem-se:

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = k \left(1 - \frac{\theta}{\text{tg}(\theta)} \right) \quad (d)$$

que para $k > 0$ é maior que zero, ou seja, o equilíbrio é estável. Para $\theta \rightarrow 0$ a expressão (d) tende a zero, revelando o caráter indiferente da solução quando $F = F_{crit}$. É

interessante ainda colocar os gráficos das figuras d2 e c4 juntos para verificar que o gráfico da figura d2 pode ser obtido fazendo-se um limite do gráfico da figura c4 para $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ao se observar as figuras d2 e d3 alguns comentários associados à análise estrutural devem ser tecidos.

Em primeiro lugar uma situação ideal onde a ação externa esteja perfeitamente alinhada com o membro estrutural ou estrutura não acontece na prática, mesmo porque os membros estruturais ou estruturas nunca são perfeitamente retos.

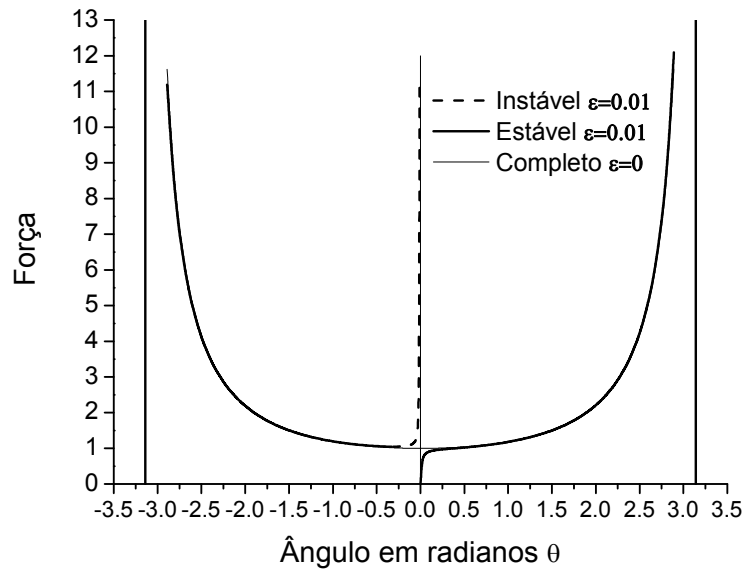


Figura d3 – Comparação – caso excêntrico e caso limite

Desta forma, técnicas de dimensionamento ou verificação de estruturas associadas à limitação dos valores das ações externas em relação às cargas críticas começam a ser questionadas. As técnicas mais atuais associam a resistência portante do elemento estrutural, ou da estrutura, aos níveis de tensão que estão efetivamente atuando em todos os pontos da mesma.

Estes níveis de tensão só podem ser calculados com precisão a partir de técnicas que considerem o equilíbrio na posição deslocada da estrutura.

Algumas normas técnicas aceitam análises lineares, desde que se garanta que os níveis de deslocamento e tensão na estrutura respeitem certos limites de variabilidade ao se fazer uma análise não-linear geométrica simplificada, ou seja, não mudem significativamente de valor. Obviamente que ao se dispor de ferramenta de análise não linear geométrica exata, os cálculos podem ser feitos com precisão, dispensando-se as disposições normativas simplistas.

Voltando-se ao objeto de estudo, já se identificou que o equilíbrio pode ser estável ou instável e a passagem de uma natureza à outra pode ocorrer por ponto de bifurcação para estruturas ideais ou ponto limite (ou de bifurcação) para estruturas reais.

1.4.e – Treliça confinada (treliça de von Mises)

O caso a ser analisado é constituído de duas barras de treliça articuladas entre si e fixadas sobre apoios fixos, como mostra a figura e1. As barras têm comportamento

elástico linear, mas são impedidas de fletir, isto é, permanecem retas durante todo o processo de carregamento.

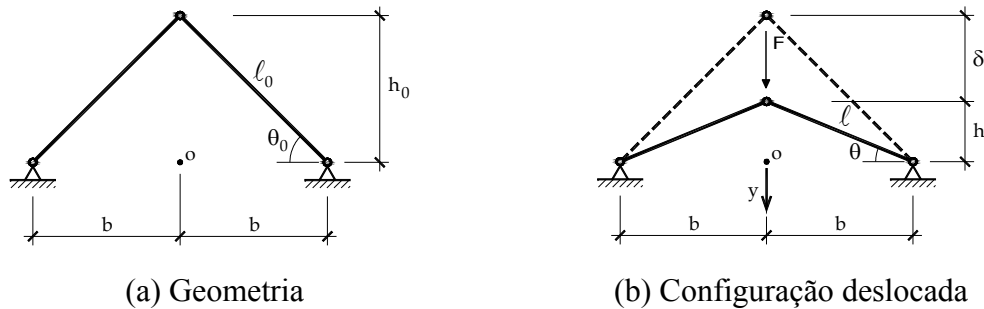


Figura e1 – Treliça de Von Mises

A solução deste problema será feita diretamente pelo princípio da energia mecânica estacionária, tendo como origem o ponto “o” da figura e1b e eixo ”y” orientado para baixo. É admitido que o ponto de aplicação da força não se movimenta na horizontal (simetria) e que a força seja conservativa (sentido e intensidade independentes da configuração da estrutura).

A energia de deformação, conforme equação (p) do item 1.3, em termos da deformação de engenharia $\varepsilon = (\ell - \ell_0) / \ell_0$, é dada por

$$U_e = 2 \cdot \left(\frac{E\varepsilon^2}{2} A\ell_0 \right) \quad (a)$$

onde a multiplicação por dois representa a existência de duas barras.

A deformação pode ser calculada em função do ângulo θ como:

$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\ell}{\ell_0} - 1 = \frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta)} - 1 \quad (b)$$

ou

$$\varepsilon = \cos(\theta_0) \sec(\theta) - 1 \quad (c)$$

Desta forma a energia de deformação armazenada na estrutura em função de θ fica:

$$U_e = EA\ell_0 (\cos(\theta_0) \sec(\theta) - 1)^2 \quad (d)$$

E a energia mecânica total fica

$$\Pi = EA\ell_0 (\cos(\theta_0) \sec(\theta) - 1)^2 - F(-btg(\theta)) \quad (e)$$

A equação de equilíbrio é dada por:

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = 2EA\ell_0(\cos(\theta_0)\sec(\theta) - 1)\cos(\theta_0)\operatorname{tg}(\theta)\sec(\theta) + Fb\sec^2(\theta) = 0 \quad (f)$$

Resolvendo-se a equação (f) para F encontra-se exatamente a expressão do equilíbrio, ou seja:

$$F = 2EA\left(1 - \frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta)}\right)\operatorname{sen}(\theta) \quad (g)$$

A segunda derivada da energia potencial total resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = 2EAb\sec(\theta) \{ & \operatorname{tg}^2(\theta) + (\cos(\theta_0)\sec(\theta) - 1) \\ & + (\sec^2(\theta) + \operatorname{tg}^2(\theta)) \} + Fb\sec^2(\theta)\operatorname{tg}(\theta) \end{aligned} \quad (h)$$

Substituindo-se (g) em (h) e rearranjando, encontra-se:

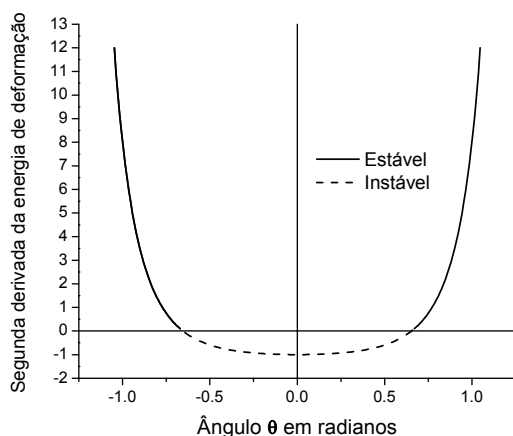
$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = \frac{2EAb}{\cos^4(\theta)}(\cos(\theta_0) - \cos^3(\theta)) \quad (i)$$

A condição crítica é aquela onde a segunda derivada da energia potencial total muda de sinal, ou seja, se anula. O ângulo (θ_c) para o qual isto ocorre na estrutura estudada é:

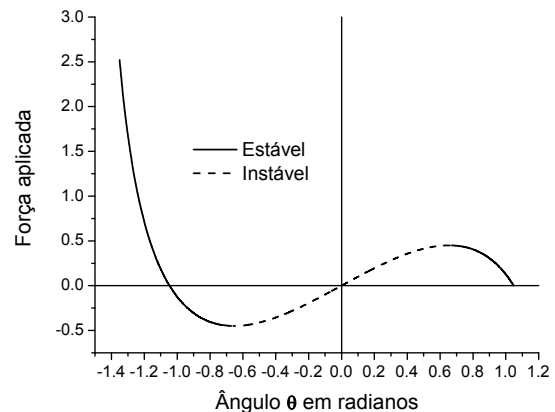
$$\cos(\theta_c) = \sqrt[3]{\cos(\theta_0)} \quad (j)$$

Adotando-se valores $E = 1$, $A = 1$, $b = 1$ e $\theta_0 = 60^\circ$ pode-se analisar graficamente o sinal da expressão (i) para identificar a natureza do equilíbrio.

Nas figuras e2a e e2b estão, respectivamente, os gráficos de $d^2\Pi/d\theta^2$ e de F em função de θ .



(a)



(b)

Figura e2 – (a) Estudo da natureza do equilíbrio, (b) Força por posição angular

Como se pode observar, neste caso, para $-37,8^\circ < \theta < 37,8^\circ$ o comportamento do equilíbrio é instável, pois valores negativos da Hessiana representam pontos de máximo para o potencial de energia total.

Recordando-se de forma mais direta os comentários do exemplo 1.4.b, isto significa, na prática, que uma estrutura só pode estar em posições definidas no trecho tracejado da figura 1.16b caso exista um controle de posição no ponto de aplicação da carga. Caso contrário, ao se aplicar F crescente, quando $\theta = 37,8^\circ$, qualquer acréscimo diferencial de carga leva a estrutura a assumir a posição em $\theta < -37,8^\circ$ de forma abrupta. Este fenômeno é usualmente chamado de “snap-trough”.

Um software de análise não-linear geométrica deve ser capaz de, no mínimo, simular as duas situações, posição controlada e força aplicada. Para o caso de força controlada deve encontrar a solução em um trecho estável da trajetória de equilíbrio, possibilitando a identificação de salto de solução.

Uma terceira situação, diferente das anteriores, é o chamado snap-back, onde existe mais de um nível de carga para uma mesma posição de aplicação da carga. Neste caso, em situação de utilização, a estrutura perderá a estabilidade e mudará bruscamente a configuração interna, caso não entre em colapso. Um software básico indicará tal situação com a busca de posição de equilíbrio distante da posição original no caso de controle de força ou um salto abrupto na força aplicada (para valores inferiores ao desejado) e busca da configuração interna distante da original no controle de posições. Muitas vezes, dependendo do número de graus de liberdade e do passo de carga aplicado, o programa poderá perder a estabilidade numérica, revelando também o colapso estrutural. Este tipo de situação é elucidado no caso elementar seguinte.

Melhorias na solução numérica podem ser feitas utilizando-se, por exemplo, a técnica do controle de arco, apresentada no final do capítulo 5 para o método dos elementos finitos posicional.

1.4.f – Estruturas com mais de um grau de liberdade

Até o momento foram estudadas estruturas onde a posição de todos os seus elementos era determinada por apenas um parâmetro, ou seja, estas estruturas possuíam apenas um grau de liberdade. Todas estas estruturas possuem uma característica comum, ou seja, sendo a configuração de equilíbrio estável ou instável esta sempre pode ser reproduzida e sustentada em um experimento onde a posição (grau de liberdade) de

apenas um ponto é controlada. Observa-se, entretanto, que os trechos de equilíbrio instável para aquelas análises não se sustentariam em estruturas reais onde, em geral, forças são aplicadas e não posições.

No caso de estruturas com vários graus de liberdade só se pode sustentar ou reproduzir uma configuração de equilíbrio instável ao se controlar todos os graus de liberdade da estrutura. Esta situação é inadmissível na utilização de estruturas da prática.

Mesmo assim, mostra-se neste item uma estrutura simples (com dois graus de liberdade) que apresenta o fenômeno de “snap-back”, que leva à perda de estabilidade estrutural, mesmo que se esteja controlando o deslocamento do ponto de aplicação da carga.

A estrutura analisada é semelhante à do item 1.4.e, porém a aplicação da carga é feita através de uma mola de constante elástica “k” conforme a figura f1.

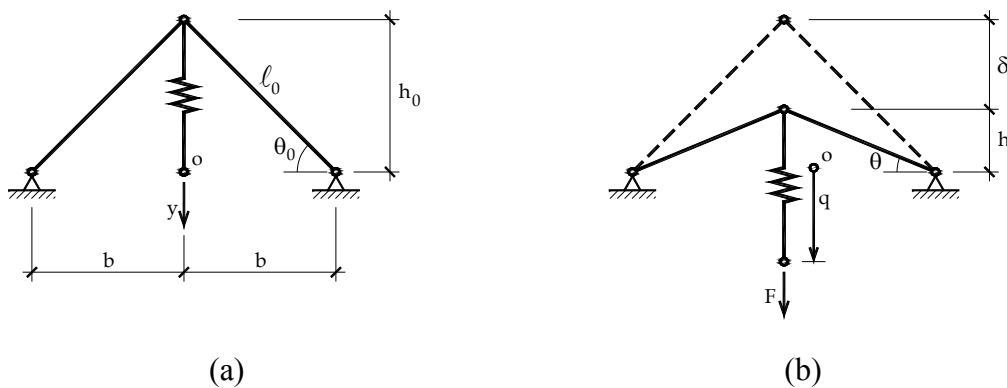


Figura f1 – (a) Geometria descarregada, (b) Carregada

Desta vez a origem do eixo y coincide com o ponto inicial de aplicação da carga. Os dois graus de liberdade adotados são: q (posição do ponto de aplicação da carga) e θ (ângulo formado pela barra e o eixo horizontal).

A energia de deformação acumulada nas barras da treliça coincide com o caso 1.4.e, a energia de deformação acumulada na mola é proporcional ao quadrado de seu alongamento (ΔL), dado por:

$$\Delta L = L - h_0 = (q + b \operatorname{tg}(\theta)) - b \operatorname{tg}(\theta_0) = q + b(\operatorname{tg}(\theta) - \operatorname{tg}(\theta_0)) \quad (a)$$

Assim,

$$U_e(q, \theta) = EA \ell_0 (\cos(\theta_0) \sec(\theta) - 1)^2 + \frac{k}{2} [q + b(\operatorname{tg}(\theta) - \operatorname{tg}(\theta_0))]^2 \quad (b)$$

E a energia mecânica total fica dada em função de q e θ como:

$$\Pi(q, \theta) = EA\ell_0(\cos(\theta_0)\sec(\theta) - 1)^2 + \frac{k}{2}[q + b(\operatorname{tg}(\theta) - \operatorname{tg}(\theta_0))]^2 - Fq \quad (c)$$

Desta forma, a expressão do equilíbrio do sistema é encontrada quando as derivadas parciais de Π em relação aos graus de liberdade q e θ forem nulas simultaneamente, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} &= 2EA\ell_0(\cos(\theta_0)\sec(\theta) - 1)\cos(\theta_0)\operatorname{tg}(\theta)\sec(\theta) \\ &+ kb[q + b(\operatorname{tg}(\theta) - \operatorname{tg}(\theta_0))]\sec^2(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (d)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = k[q + b(\operatorname{tg}(\theta) - \operatorname{tg}(\theta_0))] - F = 0 \quad (e)$$

A partir das equações (e) e (d), aproveitando-se o resultado da equação (g) do exemplo 1.4.e, se escreve F em função de q de forma implícita como

$$\begin{aligned} F &= 2EA \left\{ \operatorname{sen} \left[\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg}(\theta_0) + \frac{F}{kb} - \frac{q}{b} \right) \right] + \right. \\ &\left. - \cos(\theta_0) \left(\operatorname{tg}(\theta_0) + \frac{F}{kb} - \frac{q}{b} \right) \right\} \end{aligned} \quad (f)$$

A equação (e) é não-linear em F , e pode ser resolvida numericamente. Para se estudar a estabilidade do sistema estrutural realiza-se a segunda derivada do funcional de energia potencial total, encontrando-se a matriz Hessiana do sistema.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} &= 2eA\sec(\theta) \{ \operatorname{tg}^2(\theta) + (\cos(\theta_0)\sec(\theta) - 1)(\sec^2(\theta) + \operatorname{tg}^2(\theta)) \} + \\ &+ kb^2(\sec^2(\theta) + 2\operatorname{tg}^2(\theta)) \end{aligned} \quad (g)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta \partial q} = kb\sec^2(\theta) \quad (h)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q \partial \theta} = kb\sec^2(\theta) \quad (i)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} = k \quad (j)$$

A matriz Hessiana é dada por

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta \partial q} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q \partial \theta} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \end{bmatrix} \quad (k)$$

simétrica. No caso dessa matriz 2x2, a condição de estabilidade da estrutura pode ser feita pela avaliação do sinal de seu determinante, que é suficiente para verificar a condição geral dada por (1.10).

Devido à disponibilidade de rotinas prontas, uma estratégia muito usada para se determinar se a matriz é positiva definida em problemas com vários graus de liberdade, é a avaliação do sinal dos autovalores da matriz. Um ponto crítico ocorre quando um auto-valor é nulo e a matriz é positiva definida se todos os seus auto-valores são positivos.

Como a matriz Hessiana para dois graus de liberdade é de ordem dois, a determinação do seu determinante é trivial, ou seja:

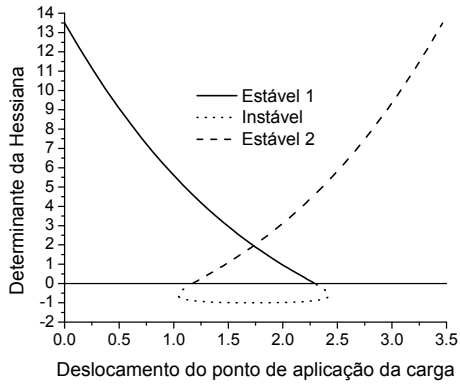
$$\det(H) = \frac{2AEbk}{\cos^4(\theta)} [\cos(\theta_0)(1 + \text{sen}^2(\theta)) - \cos(\theta)] + \frac{k^2 b^2 \text{sen}^2(\theta)}{\cos(\theta)} \quad (\ell)$$

Uma avaliação numérica deste determinante para $b = 1, A = 1, E = 1, k = 1/3$ e $\theta = 60^\circ$ é feita graficamente nas figuras f2a e f2b, enquanto o valor da força aplicada para as possíveis posições do ponto de aplicação da mesma é mostrada na figura f2c.

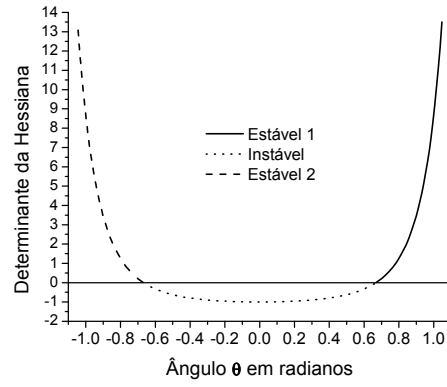
O trecho instável da figura f2c foi traçado a partir da força obtida em função de θ , equação (g) do problema 1.4.e, acrescentando-se ao deslocamento do topo da treliça o valor $\Delta q = F/k$. Deve-se observar que caso o parâmetro de análise fosse θ , o mesmo gráfico da figura e1 do exemplo 1.4.e seria obtido, não fornecendo novas informações.

Para um carregamento crescente (controle de força), o comportamento desta estrutura é um salto do ponto 1 para o ponto 3 no gráfico f2c, gerando deslocamento exagerado no ponto de aplicação da carga.

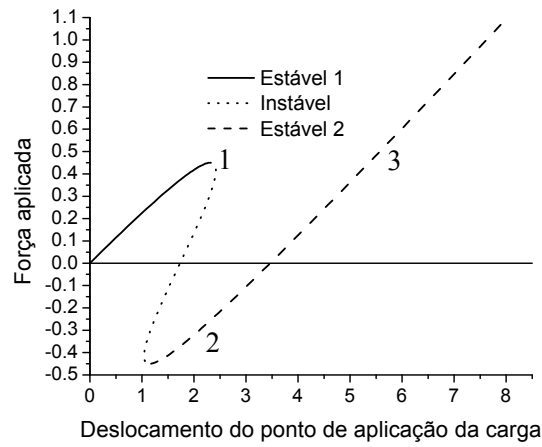
Enquanto que, ao se controlar o deslocamento do ponto de aplicação da carga, o salto se dá, no gráfico da figura f2c do ponto 1 para o ponto 2, reduzindo subitamente o valor da carga aplicada para um mesmo valor de deslocamento q . Observa-se nesta situação, um salto 'interno', do ponto superior da estrutura, representado pela variação brusca de θ .



(a) Estabilidade versus deslocamento



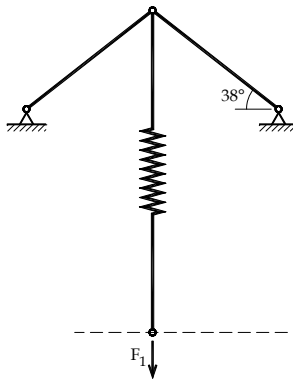
(b) Estabilidade versus ângulo



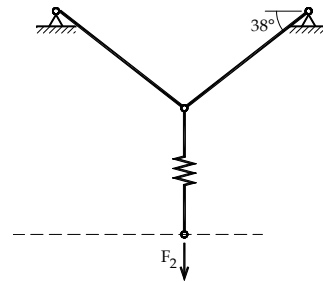
(c) Força versus deslocamento

Figura f2 – Comportamento da estrutura proposta

A ilustração deste fenômeno está na figura f3 que revela a mudança da configuração *a* para a configuração *b* com valor $F_2 < F_1$, gerando alívio na tensão da mola.



(a) Posição relativa ao ponto 1



(b) Posição relativa ao ponto 2

Figura f3 – Posição da estrutura relativa aos pontos 1 e 2 do gráfico 18c.

1.5 - Fechamento

Os equilíbrios estudados neste capítulo são referentes a estruturas simples que não envolvem flexão. Observa-se a dificuldade em se desenvolver os cálculos geometricamente exatos, mesmo para os casos simples aqui descritos. A maioria dos livros, relacionados ao tema deste capítulo, introduzem aproximações relacionadas à geometria, de forma a conseguir analisar membros estruturais mais complexos. Porém, neste texto, a intenção é aproveitar o estágio avançado e o baixo custo dos computadores pessoais para apresentar a teoria necessária ao desenvolvimento de técnica computacional precisa e eficiente, geometricamente exata, de análise não-linear geométrica de sólidos e estruturas.

A energia cinética, necessária para a solução de problemas dinâmicos, será introduzida de forma simplificada no próximo capítulo, sendo estendida oportunamente para casos mais complicados.

1.6 - Bibliografia Recomendada

Além dos trabalhos científicos do autor, recomenda-se a leitura da bibliografia a seguir:

- 1) Camotim, D. e Reis, A. Estabilidade Estrutural, McGraw-Hill, Lisboa, 2000.
- 2) Coda H.B, Mecânica dos Sólidos II, EESC-USP, 2017.
- 3) Schiel, F. Introdução à resistência dos Materiais, Harbra, 1984.

2- Treliça não linear geométrica – Conceitos e Solução pelo MEF Posicional

No capítulo 1 foram apresentados os conceitos de não linearidade geométrica e o equacionamento do equilíbrio a partir do princípio da estacionariedade da energia mecânica. Exemplos simples foram apresentados, sem uma sistematização capaz de transformar o procedimento em método numérico de solução e sem nenhuma alusão a meios contínuos deformáveis.

Nesse capítulo tal sistematização é apresentada para a solução de treliças planas ou tridimensionais sob ação estática ou dinâmica. Incluem-se conceitos referentes à energia específica de deformação uniaxial, medidas de deformação uniaxial, hiperelasticidade e energia cinética. Todos esses conceitos estarão limitados às aplicações desse capítulo e abrirão caminhos para os desenvolvimentos dos capítulos seguintes, a saber, a mecânica dos sólidos flexíveis elásticos e a generalização do MEF posicional.

Os conceitos desse capítulo serão limitados a barras de treliça cuja área da seção transversal será considerada constante para qualquer nível de deformação.

2.1 - Medidas de deformação - Uniaxiais

Para se definir medidas de deformação uniaxiais é interessante se imaginar um trecho infinitesimal de barra elástica submetida a uma força uniaxial crescente tal como mostra a Figura 2.1.

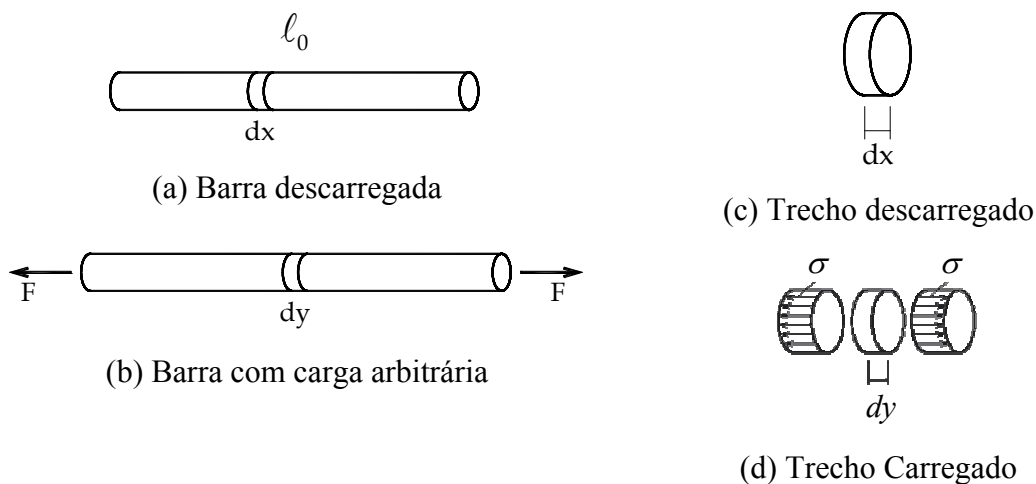


Figura 2.1 – Barra submetida à força uniaxial

Na figura 2.1 a tensão σ terá o seguinte significado $\sigma = F / A_0$, porque a área da seção transversal da barra será considerada constante. Essa tensão será chamada de

tensão de Cauchy ou tensão real. O fato de se ter dado um nome para essa tensão indica que outros tipos de tensão serão definidos; entretanto, todos os tipos de tensão possuem relação matemática entre si.

Define-se a deformação longitudinal de engenharia como:

$$\varepsilon = \frac{dy - dx}{dx} \quad (2.1)$$

sendo dx o comprimento inicial de um infinitésimo de barra descarregada, figura 2.1c, e dy o comprimento atual do mesmo infinitésimo, figura 2.1d, para a barra solicitada.

Qualquer medida de deformação longitudinal é relativa a um comprimento de referência, quando esse comprimento é o inicial a medida de deformação é classificada como medida Lagrangiana e quando o comprimento de referência é o final, a medida é classificada como Euleriana. Nos capítulos seguintes, ao invés de se falar de um comprimento de referência se falará de um espaço de referência, ou seja, quando a referência é a posição inicial a medida de deformação é Lagrangiana e quando a referência é a posição atual a medida de deformação é Euleriana.

Outra medida de deformação Lagrangiana muito utilizada é a Deformação de Green-Lagrange, ou simplesmente Deformação de Green. Essa deformação, para o caso uniaxial desse capítulo, é dada por:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2} \quad (2.2)$$

É interessante se desenvolver algebricamente a deformação longitudinal de Green para mostrar sua equivalência à deformação longitudinal de engenharia para pequenas deformações, como:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} + 1 \right) \frac{dy - dx}{dx} = \frac{1}{2} (\lambda + 1) \varepsilon \quad (2.3)$$

onde, define-se a grandeza alongamento $\lambda = dy/dx$, observa-se que $\lambda < 1$ para compressão e $\lambda > 1$ para tração. Um detalhe importante é que para problemas com significado físico, sempre ocorre a seguinte desigualdade $\lambda > 0$, pois não se pode admitir degeneração do material (desaparecimento ou inversão). Quando a deformação é pequena se torna óbvio que $dy \cong dx$ e, portanto, $\lambda \cong 1$ donde, para pequenas deformações, resulta:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} (\lambda + 1) \varepsilon \cong \varepsilon \quad (2.4)$$

No que segue outras duas medidas de deformação são apresentadas, a primeira é chamada deformação de Almansi, dada por:

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dy^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (2.5)$$

onde sua característica Euleriana é revelada pelo denominador (referência) ser na configuração atual. A última deformação a ser apresentada neste capítulo é a deformação de Hencky, ou logarítmica, que em sua versão uniaxial é dada por:

$$\mathbb{H} = \ln(\lambda) = \ln(dy/dx) = -\ln(dx/dy) \quad (2.6)$$

Apesar de não parecer ser uma medida Euleriana, a deformação de Hencky é assim classificada, pois, da mesma forma que a deformação de Almansi, apresenta valor tendendo à $-\infty$ quando o comprimento de uma fibra na configuração atual tende para zero. Alguns autores chamam a deformação de Hencky de deformação real, porém esse resultado só vale para estado uniaxial de tensão (com variação de seção transversal admitida).

Todas essas medidas de deformação podem ser calculadas para um elemento de treliça como sendo a deformação média (constante no elemento) em função de seu comprimento inicial e final, veja a figura 2.2.

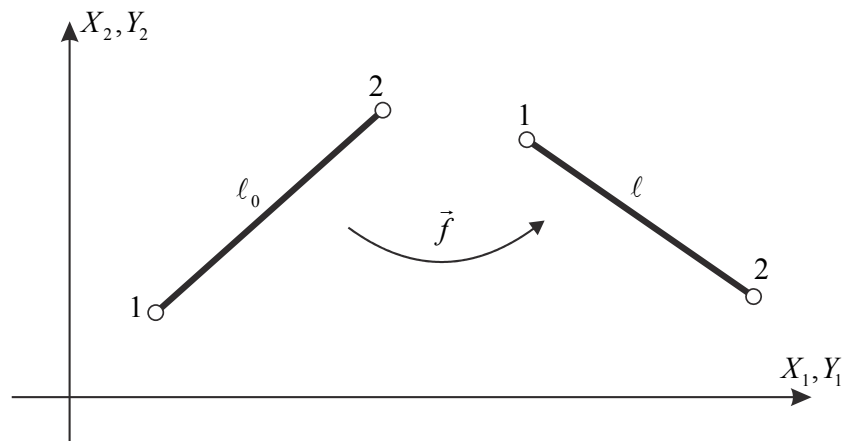


Figura 2.2 Elemento finito de treliça e mudança de configuração

Na figura 2.2 os eixos coordenados representam tanto as coordenadas iniciais X_i^k dos nós da treliça como as coordenadas atuais Y_i^k , onde k é o nó e i a direção, \vec{f} representa a função mudança de configuração que será importante para os desenvolvimentos dos capítulos relacionados aos sólidos gerais deformáveis. Para treliças a abordagem é mais simples e direta, omitindo-se passagens com \vec{f} .

Assim, as deformações ficam dadas simplesmente por:

$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}; \quad \mathbb{E} = \frac{1}{2} \frac{\ell^2 - \ell_0^2}{\ell_0^2}; \quad \mathbb{A} = \frac{1}{2} \frac{\ell^2 - \ell_0^2}{\ell^2}; \quad \mathbb{H} = \ln(\ell / \ell_0) \quad (2.7)$$

que podem ser escritas em função das coordenadas iniciais e atuais dos nós de treliça, pois seus comprimentos ficam dados como:

$$\ell_0^2 = (X_1^2 - X_1^1)^2 + (X_2^2 - X_2^1)^2 + (X_3^2 - X_3^1)^2 \quad \text{ou} \quad \ell_0 = \sqrt{(X_1^2 - X_1^1)^2 + (X_2^2 - X_2^1)^2 + (X_3^2 - X_3^1)^2} \quad (2.8)$$

$$\ell^2 = (Y_1^2 - Y_1^1)^2 + (Y_2^2 - Y_2^1)^2 + (Y_3^2 - Y_3^1)^2 \quad \text{ou} \quad \ell = \sqrt{(Y_1^2 - Y_1^1)^2 + (Y_2^2 - Y_2^1)^2 + (Y_3^2 - Y_3^1)^2} \quad (2.9)$$

É interessante verificar que, para pequenos níveis de deformações, todas as medidas de deformação apresentadas são equivalentes, isso é feito calculando-se a variação da deformação em função da variação do comprimento, como:

$$\delta\varepsilon = \frac{1}{\ell_0} \delta\ell; \quad \delta\mathbb{E} = \frac{\ell}{\ell_0^2} \delta\ell; \quad \delta\mathbb{A} = \frac{\ell_0^2}{\ell^3} \delta\ell; \quad \delta\mathbb{H} = \frac{1}{\ell} \delta\ell \quad (2.10)$$

e colocando-se $\ell \rightarrow \ell_0$.

2.2 - Energia específica de deformação para materiais elásticos - conceituação uniaxial - leis constitutivas - conjugado energético

A definição da energia específica de deformação armazenada no interior de um corpo, quando este se deforma, é de interesse para a obtenção de leis constitutivas elásticas consistentes válidas para pequenas e grandes deformações.

Para se definir a energia específica de deformação, realiza-se um paralelo com o que foi descrito para a energia de deformação acumulada em uma mola, veja figura 1.4. Lembra-se que nesse capítulo, por se tratar de uma descrição uniaxial, não se considerará a variação de área do sólido, que será feita nos capítulos posteriores.

Escolhendo-se, por simplicidade, a medida de deformação de engenharia ε , para se ilustrar a definição da energia específica de deformação, considera-se a inexistência da energia cinética e o valor de ε crescente de zero até seu valor atual em pequenos acréscimos $d\varepsilon$ em cada nível de tensão $\sigma_0(\varepsilon)$, gerando o gráfico da Figura 2.3. A energia de deformação por unidade de volume (energia específica de deformação) u_e ou ψ pode ser definida como a área sob o gráfico da figura 2.3 ou o trabalho (por unidade de volume) realizado pela tensão ao imprimir deformação no contínuo:

$$\psi = u_e = \int_0^\varepsilon \sigma_0(\varepsilon) d\varepsilon \quad (2.11)$$

Observa-se que a dependência de σ_0 em relação à ε é um conceito similar à dependência da força interna em relação à posição imposta na mola da figura 1.4, e depende do material analisado. Na figura 2.3 a energia específica de deformação é quantificada pela área sob o gráfico que relaciona tensão e deformação.

Para se perceber que u_e representa energia por unidade de volume, basta uma simples análise dimensional, ou seja:

$$u_e \propto \frac{F}{L^2} = \frac{FL}{L^3} = \frac{W}{V} \quad (2.12)$$

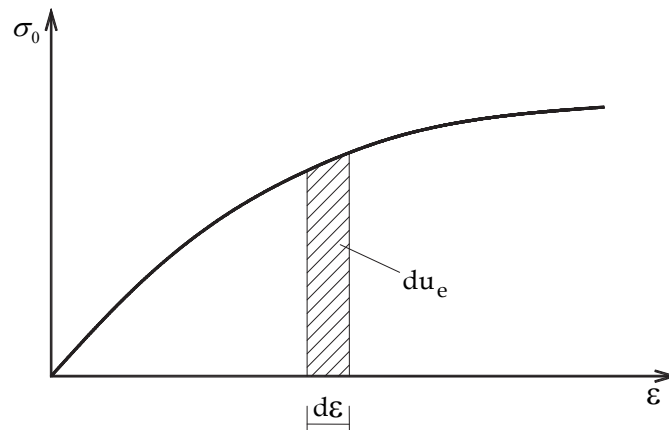


Figura 2.3 – Gráfico Tensão x Deformação uniaxial

A energia de deformação total acumulada no corpo pode ser calculada como a integral da energia específica de deformação (no caso Lagrangiana) sobre o volume inicial do corpo, ou seja,

$$U_e = \int_{V_0} u_e dV_0 \quad (2.13)$$

Voltando-se à equação (2.11) constata-se que,

$$\sigma_0(\varepsilon) = \frac{du_e}{d\varepsilon} \quad (2.14)$$

ou seja, se é possível conhecer uma expressão para a energia específica de deformação (em função da deformação) de um determinado material, a lei constitutiva pode ser escrita pela expressão (2.14). Duas definições estão presentes em (2.14), a primeira é que se existe explicitamente u_e o material é dito hiperelástico, veja a figura 2.5a, e a segunda é que tensão é “conjugada energética” da deformação, pois é encontrada como a derivada da energia específica de deformação em relação à deformação.

Por exemplo, seja a função energia específica de deformação:

$$u_e(\varepsilon) = \frac{E}{2} \varepsilon^2 \quad (2.15)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal. Então, a tensão conjugada energética de ε é:

$$\sigma_0(\varepsilon) = \frac{\partial u_e}{\partial \varepsilon} = E \varepsilon \quad (2.16)$$

que é a conhecida Lei de Hooke uniaxial. Deve-se lembrar que nesse capítulo não se está considerando variação de área ou de volume. Conclui-se, portanto, que a Lei de Hooke uniaxial pode ser escrita na forma quadrática (2.15). Deve-se observar que um potencial quadrático é muitas vezes classificado como convexo. No jargão da elasticidade matemática os potenciais admitidos como geradores de leis constitutivas consistentes devem ser convexos.

A definição de material hiperelástico facilita a introdução de outras medidas de deformação nos modelos de materiais, por exemplo, o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff é definido colocando-se na forma de (2.15) a deformação de Green, ao invés da deformação de engenharia, ou seja:

$$u_e^{SVK}(\mathbb{E}) = \frac{K}{2} \mathbb{E}^2 \quad (2.17)$$

onde K é chamada constante elástica longitudinal do modelo. A derivada da energia específica de deformação de Saint-Venant-Kirchhoff é uma medida de tensão chamada tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. A tensão de Piola-Kirchhoff é dada por,

$$S = \frac{du_e^{SVK}}{d\mathbb{E}} = K \mathbb{E} \quad \psi = u_e = \int_0^{\mathbb{E}} S d\mathbb{E} \quad (2.18)$$

Os modelos constitutivos escritos nas formas (2.15) e (2.17) são chamados aqui de modelos constitutivos integrais. Assim, um modelo constitutivo integral (potencial) quadrático resulta em uma lei constitutiva que relaciona de forma linear a deformação adotada e a sua tensão conjugada, o que não quer dizer que a relação entre a força aplicada no corpo e o deslocamento resultante seja linear.

Sendo de interesse, pode-se criar a expressão de um modelo constitutivo linear para a deformação de Almansi uniaxial como:

$$u_e^{Al} = \frac{1}{2} Z \mathbb{A}^2 \quad M = \frac{du_e^{Al}}{d\mathbb{A}} = Z \mathbb{A} \quad (2.19)$$

onde Z é o módulo elástico desse modelo e M sua tensão conjugada. Para exemplificar o que foi dito, volta-se à figura 2.1 e escreve-se a relação entre a força

aplicada F e o comprimento atual da barra usando-se os modelos constitutivos de Hooke (2.16), de Saint-Venant-Kirchhoff (2.18) e linear de Almansi (2.19).

Pelo fato da área ser constante, para os três modelos tem-se:

$$F = \alpha_1 \sigma_0 A_0, \quad F = \alpha_2 S A_0, \quad F = \alpha_3 M A_0 \quad (2.20)$$

onde α_i relaciona a tensão considerada e a tensão real (de Cauchy). Para a Lei de Hooke tem-se:

$$F = \alpha_1 E \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} A_0 \quad \Rightarrow \quad \ell = \ell_0 + \frac{(F / \alpha_1) \ell_0}{EA_0} \quad (2.21)$$

Para a Lei de Saint-Venant-Kirchhoff tem-se:

$$F = \alpha_2 \frac{1}{2} \left(\frac{\ell^2 - \ell_0^2}{\ell_0^2} \right) KA_0 \quad \Rightarrow \quad \ell = \sqrt{\ell_0^2 + 2 \frac{(F / \alpha_2) \ell_0^2}{KA_0}} \quad (2.22)$$

Para a Lei de Almansi linear:

$$F = \alpha_3 \frac{1}{2} \left(\frac{\ell^2 - \ell_0^2}{\ell^2} \right) ZA_0 \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{\ell_0}{\sqrt{1 - 2(F / \alpha_3) / (ZA_0)}} \quad (2.23)$$

Para um mesmo valor de constantes elásticas $Z = K = E = 1$ e adotando-se $\alpha_i = 1$, $\ell_0 = 1$ e $A_0 = 1$, o gráfico da figura 2.4 mostra a diferença dos modelos constitutivos no comportamento do elemento estrutural da figura 2.1.

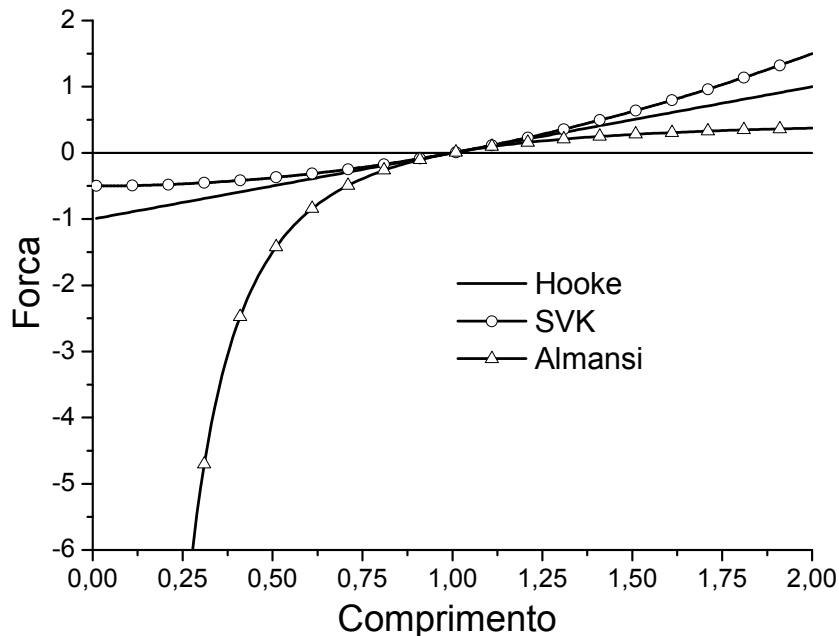


Figura 2.4 - Comportamento de uma barra de treliça dependendo do modelo constitutivo com $\alpha_i = 1$

Deve-se observar que os modelos constitutivos são diferentes apesar de representarem uma relação linear entre cada medida de deformação e a tensão de referência. Quando as deformações são pequenas as curvas se confundem, isso ocorre porque, conforme a equação (2.10), as deformações se confundem.

Uma análise detalhada da figura 2.4 revela que a Lei de Hooke e a Lei de Saint-Venant-Kirchhoff admitem inversão do material para níveis finitos de tensão. Isto ocorre quando $\ell = 0$. Para $\alpha_i = 1$, no caso da Lei de Hooke a degeneração ocorre para $\sigma_0 = -E$ e no caso da Lei de SVK para $S = -E/2$. Já a lei constitutiva que relaciona de forma linear a deformação Euleriana de Almansi e a tensão (nesse caso nominal) não admite a degeneração material.

Recorda-se o comentário feito antes da equação (2.4), ou seja, para problemas físicos sempre deve ocorrer $\lambda = \ell / \ell_0 > 0$, pois não se pode admitir degeneração do material. Assim, para grandes deformações as Leis de Hooke e SVK são inapropriadas. Entretanto, é possível se criar leis constitutivas que evitem a degeneração para as medidas de deformação Lagrangianas. Por exemplo, seja a seguinte lei constitutiva escrita para a deformação de Green:

$$u_e = \frac{K}{4} \left((2\mathbb{E} + 1) - \ln((2\mathbb{E} + 1)) - 1 \right) \quad (2.24)$$

então

$$S = \frac{du_e}{d\mathbb{E}} = K \left(\frac{\mathbb{E}}{2\mathbb{E} + 1} \right) = K \mathbb{A} \quad (2.25)$$

que representa o mesmo comportamento da Lei Linear de Almansi para o material constituinte da barra. Assim, podem-se criar leis constitutivas não lineares que se adaptem ao comportamento do material que se deseja modelar, utilizando-se medida de deformação conveniente, como a deformação de Green.

Outro exemplo de adaptação de leis constitutivas à medida de deformação de Green é a adaptação da Lei de Hooke, que pode ser escrita em função da deformação de Green como:

$$u_e = \frac{K}{6} \left(2(2\mathbb{E} + 1)^{3/2} - 6\mathbb{E} \right) \text{ com } S = \frac{du_e}{d\mathbb{E}} = K \left(\sqrt{2\mathbb{E} + 1} - 1 \right) = K \varepsilon \quad (2.26)$$

Deve-se observar, entretanto, que a tensão encontrada em (2.26) e (2.25) é a tensão de Piola-Kirchhoff, indicando que a adaptação apresentada não é completa.

Pelas as expressões (2.24) até (2.26), observa-se que a relação entre tensão e deformação (de Green) não resultou linear para os potenciais de energia específica de

deformação adotados. Para se ilustrar uma lei constitutiva não linear genérica, seja a seguinte expressão calibrada para um determinado material:

$$u_e = \frac{b}{2}\varepsilon^2 + \frac{c}{4}\varepsilon^4 + \dots + a_1\varepsilon^{-2} + a_2\varepsilon^{-4} + \dots \quad (2.27)$$

onde as constantes $b, c, \dots, a_1, a_2, \dots$ são determinadas em laboratório, calcula-se a tensão conjugada uniaxial, como:

$$\sigma_0 = \frac{du_e}{d\varepsilon} = b\varepsilon + c\varepsilon^3 + \dots \quad (2.28)$$

que resulta em uma relação não linear entre a tensão e a deformação conjugada, veja a figura 2.5. Da equação (2.28) pode-se escrever uma relação diferencial entre tensão e deformação conjugadas, como:

$$d\sigma_0 = \frac{d\sigma_0}{d\varepsilon} d\varepsilon = \frac{d^2u_e}{d\varepsilon^2} d\varepsilon = E_t(\varepsilon) d\varepsilon \quad \text{ou} \quad \frac{d^2u_e}{d\varepsilon^2} = E_t(\varepsilon) \quad (2.29)$$

onde o chamado módulo de elasticidade tangente $E_t(\varepsilon)$ é dado por:

$$\frac{d^2u_e}{d\varepsilon^2} = E_t(\varepsilon) = b + 3c\varepsilon^2 + \dots \quad (2.30)$$

que pode ser visto no detalhe da figura 2.5b.

O módulo de elasticidade tangente, que é a hessiana da energia específica de deformação, expressa a rigidez do material para cada nível de deformação medido.

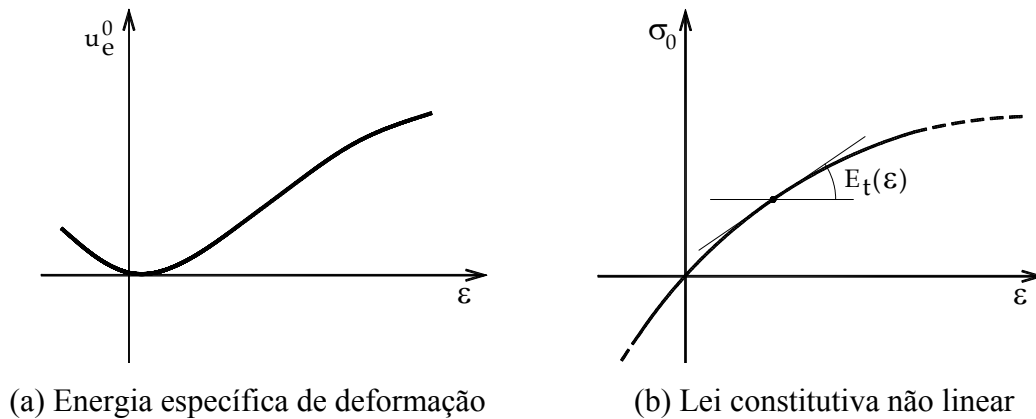


Figura 2.5 – Comportamento hiperelástico não linear

Desta forma, fica evidente que a elasticidade linear é uma particularização da elasticidade geral, no caso deste capítulo, da hiperelasticidade. Apesar de não se ter comentado, por ser conceito inerente a disciplinas anteriores, materiais hiperelásticos, por serem elásticos, retornam ao nível de deformação nulo quando descarregados, ou seja, não apresentam deformações residuais.

2.3 - Formulação estática do MEF posicional para treliças

Nesse item, aproveitando-se os conceitos que relacionam energia e equilíbrio apresentados no capítulo 1 e os conceitos de energia específica de deformação uniaxial e leis constitutivas dos itens anteriores, será apresentada a formulação estática do MEF posicional para a solução de treliças bi e tridimensionais que é baseada no Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica.

2.3.1 - Energia potencial das forças externas e energia de deformação

Na figura 2.6 ilustra-se uma treliça genérica em sua configuração inicial. A solução desse problema consiste em se determinar as posições atuais dos nós (equilíbrio estático) para um conjunto de forças externas e restrições de posições para determinados nós, conforme mostrado na figura 2.7.

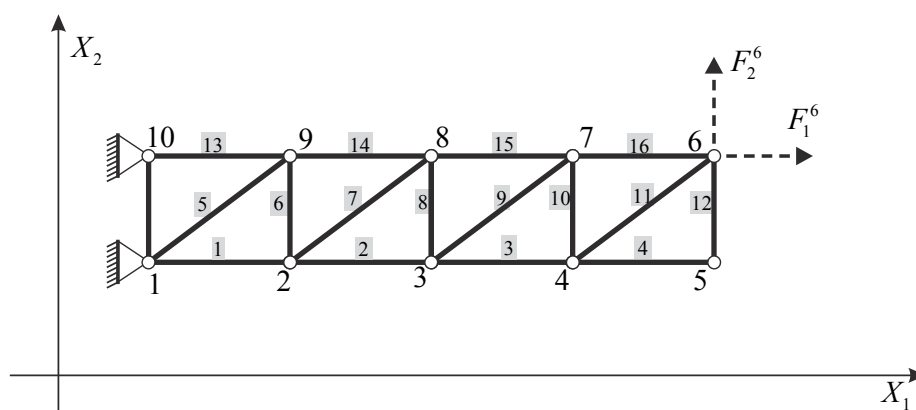


Figura 2.6 - Treliça 2D em sua configuração inicial - forças ainda não aplicadas

É comum se definir por elemento finito um subconjunto do domínio de análise sobre o qual se aproximam as variáveis de interesse. No caso de treliças, o elemento estrutural (barra simples) se confunde com o próprio elemento finito de treliça, uma vez que esses são subdomínios da estrutura e apresentam comportamento muito simples, a saber, deformação longitudinal constante. Na figura 2.6 observa-se que tanto os nós da treliça quanto os elementos foram numerados. Essa figura representa a treliça em sua configuração inicial, por isso os eixos coordenados representam apenas as coordenadas iniciais X_i e as forças foram apresentadas tracejadas, pois ainda não foram aplicadas.

Ao se aplicarem as forças externas, a treliça ocupará a posição deslocada (atual), conforme representada na figura 2.7.

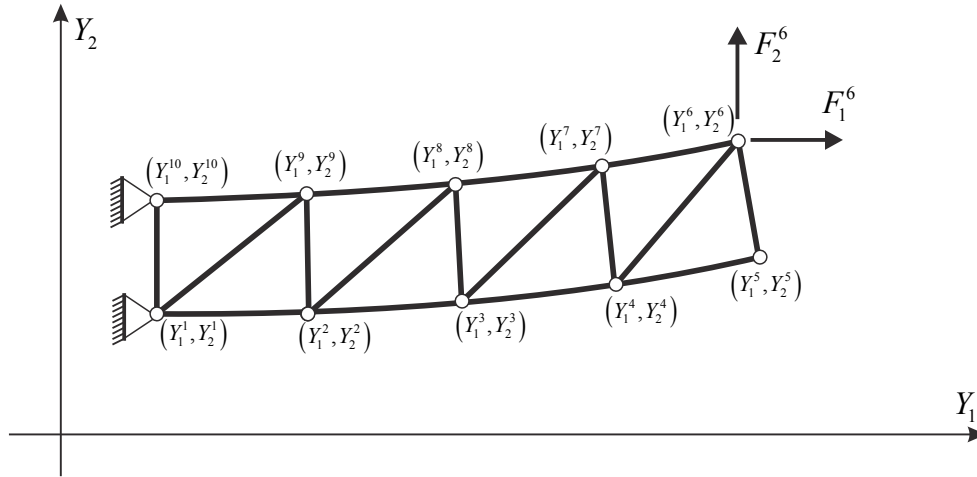


Figura 2.7 - Treliça 2D genérica na configuração atual

Na figura 2.7 foram apresentadas as coordenadas atuais correspondentes aos nós numerados conforme a figura 2.6, ou seja, Y_i^α onde i representa direção (que pode variar de 1 até 2 para problemas 2D e de 1 até 3 para problemas 3D) e α representa o nó. Da mesma forma, para a configuração inicial existem as coordenadas X_i^α . Como ilustração apresentam-se duas forças externas aplicadas não nulas no nó 6 (uma horizontal e outra vertical), mas para um problema genérico, todos os nós podem estar sujeitos a forças aplicadas F_i^α .

Das figuras 2.6 e 2.7 e da equação (1.2) escreve-se diretamente o cálculo do potencial das forças externas para uma treliça genérica, como:

$$\mathbb{P} = -F_i^\alpha Y_i^\alpha \quad (2.31)$$

onde índices repetidos indicam soma. No caso $\alpha = 1, \dots, n_{nos}$ e $i = 1, 2$ ou $i = 1, 2, 3$ para os casos bi e tridimensionais, respectivamente, onde n_{nos} representa o número de nós da treliça. É de interesse observar que, desconsiderando-se as restrições impostas aos nós 1 e 10 da treliça ilustrativa, esse problema apresenta 20 possíveis graus de liberdade, ou seja, 2 mobilidades (ou graus de liberdade) independentes por nó (problema 2D). Assim, para um problema geral de treliça, o número total de graus de liberdade é dado por $n = 2n_{nos}$ ou $n = 3n_{nos}$, para os casos 2D e 3D, respectivamente.

Com essa noção da relação entre o número de nós e o número de graus de liberdade, podem-se organizar os graus de liberdade dos problemas de treliça na forma de vetor Y_j ao invés da forma de matriz (ou tensor) Y_i^α pela seguinte correspondência:

$$j = d \cdot (\alpha - 1) + i \quad (2.32)$$

onde d é a dimensão do problema. Por exemplo, os graus de liberdade do nó 8 da treliça da figura 2.7 são (Y_{15}, Y_{16}) ao invés de se escrever (Y_1^8, Y_2^8) .

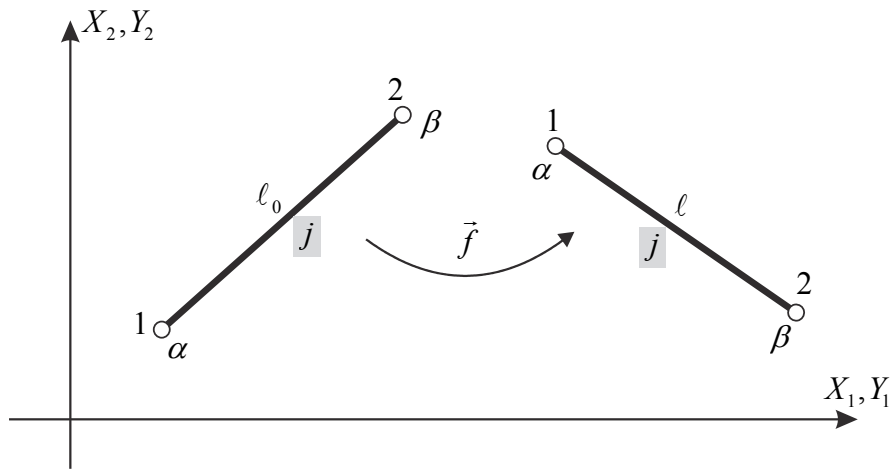


Figura 2.8 - Descrição da mudança de configuração para um elemento finito

A figura 2.8 é uma adaptação da figura 2.2 para um elemento finito j qualquer de uma treliça geral. Em uma numeração local, um dos nós do elemento sempre será chamado de nó 1 e o outro de nó 2, porém, esses nós correspondem a uma numeração global α e β . Tal correspondência, em um código computacional, é identificada pela 'matriz' de incidência nodal, ou seja, para a figura 2.8:

$$\alpha = inc(j,1) \quad \text{e} \quad \beta = inc(j,2) \quad (2.33)$$

ou seja, para um elemento j seu primeiro nó (local) corresponde ao nó global α e seu segundo nó local corresponde ao nó global β . No exemplo da figura 2.6, para o elemento 11 pode-se inferir que: $inc(11,1) = 4$ e $inc(11,2) = 6$.

Como o interesse deste texto é a elaboração de códigos computacionais para a análise não linear geométrica de estruturas, alguns trechos de código ou de algoritmos serão apresentados com o intuito de motivar a programação. Quando um trecho de código for apresentado será usada uma linguagem básica em FORTRAN, porém o leitor está livre para usar a linguagem de sua preferência.

Neste ponto da leitura já se sabe que se deve informar ao código computacional o número de nós, o número de elementos, as coordenadas iniciais dos nós, a incidência dos elementos, a área das seções transversais e a constante elástica do material de cada elemento. Isto é feito no trecho de código (versão 3D) a seguir:

```

read(3,*) !Num de nos, Num de elem, Num passos,tol
read(3,*) nnos,nel,nt,tol
write(50,*) 'Num de nos, Num de elem, Num passos, Tol'
write(50,*) nnos,nel,nt,tol
read(3,*) !No, X1, X2, X3
write(50,*) 'No, X1, X2, X3'
do i=1,nnos
  read(3,*) k,x(3*(k-1)+1),x(3*(k-1)+2),x(3*(k-1)+3)
  write(50,*) k, x(3*(k-1)+1),x(3*(k-1)+2),x(3*(k-1)+3)
enddo

read(3,*) !El, no1, no2
write(50,*) 'El, no1, no2'
do i=1,nel
  read(3,*) k,inc(k,1),inc(k,2)
  write(50,*) k,inc(k,1),inc(k,2)
enddo

read(3,*) !Elemento, Elasticidade, Area
write(50,*) 'Elemento, Elasticidade, Area'
do i=1,nel
  read(3,*) k,el(k),a(k)
  write(50,*) k,el(k),a(k)
enddo

```

No trecho de código anterior, o símbolo "!" indica comentário, sendo a leitura daquela linha muda. Além das variáveis já descritas, informaram-se o número de passos de carga e a tolerância da análise. Estes parâmetros serão descritos mais adiante e estão relacionados à aplicação do método de Newton-Raphson para a solução do equilíbrio não linear. A unidade 3 corresponde ao arquivo de entrada e a unidade 50 ao arquivo de saída. Observe que na leitura das coordenadas a relação entre nós e direções com o grau de liberdade, equação (2.32) foi aplicada para a organização vetorial do problema.

Imaginando-se que cada quadro da treliça da figura 2.6 possua dimensões 2 na horizontal por 1 na vertical, que todas as barras possuam área 1 e módulo de

elasticidade 1000, o arquivo de entrada para a leitura apresentada seria, por exemplo, como segue:

Num de nos, Num de elem, Num passos, tolerancia

10,16,10,0.000001

No, X1, X2, X3

1,1,2,0

2,3,2,0

3,5,2,0

4,7,2,0

5,9,2,0

6,9,3,0

7,7,3,0

8,5,3,0

9,3,3,0

10,1,3,0

El, no1, no2

1,1,2

2,2,3

3,3,4

4,4,5

5,1,9

6,2,9

7,2,8

8,3,8

9,3,7

10,4,7

11,4,6

12,5,6

13,10,9

14,9,8

15,8,7

16,7,6

El,Elasticidade, Area

1	1000	1
2	1000	1
3	1000	1
4	1000	1
5	1000	1
6	1000	1
7	1000	1
8	1000	1
9	1000	1
10	1000	1
11	1000	1
12	1000	1
13	1000	1
14	1000	1
15	1000	1
16	1000	1

Retornando à descrição do problema, conhecida a incidência dos elementos pode-se escrever a energia de deformação para um elemento finito qualquer j em função das variáveis principais do problema, a saber, posições nodais, como:

$$U_e^j(Y_1^1, Y_2^1, Y_1^2, Y_2^2) = U_e^j(Y_i^\alpha) \quad (2.34)$$

onde, nesse caso, α é o nó local, podendo assumir valor 1 ou 2, e i é a direção.

Recordando-se a equação (2.13) escreve-se:

$$U_e^j(Y_i^\alpha) = \int_{V_0^{(j)}} u_e^j(Y_i^\alpha) dV_0 \quad (2.35)$$

onde índice entre parêntesis não indica soma. Apesar de se poder utilizar qualquer medida de deformação, por coerência aos próximos capítulos, adota-se a deformação de Green para o desenvolvimento do código de treliça. Qualquer potencial de energia específica dependente da deformação de Green poder ser utilizado, neste capítulo serão adotados os três potenciais de energia específica de deformação dados pelas equações (2.17), (2.26) e (2.24), que correspondem, respectivamente, às Leis constitutivas de Saint-Venant-Kirchhoff, de Hooke e Linear de Almansi para modelar materiais diferentes. Lembra-se aqui que todas as tensões conjugadas correspondem à tensão de

Piola-Kirchhoff de segunda espécie, portanto apenas o primeiro modelo corresponde perfeitamente ao modelo original.

Identificando-se nessas expressões que a grandeza que depende das posições nodais da treliça é a deformação de Green e que essas energias específicas são constantes em um elemento de treliça, reescreve-se a equação (2.35) como:

$$U_e^j(Y_i^\alpha) = A_0^{(j)} \ell_0^{(j)} u_e^j(\mathbb{E}(Y_i^\alpha)) \quad (2.36)$$

A energia de deformação de toda a treliça é dada pela soma das energias de deformação de todos os elementos finitos, ou seja:

$$U_e = \sum_{j=1}^{nel} U_e^j(Y_k^\beta) \quad (2.37)$$

Portanto, a energia mecânica total do sistema fica dada por:

$$\Pi = \mathbb{P} + U_e = -F_i^\alpha Y_i^\alpha + \sum_{j=1}^{nel} U_e^j(Y_k^\beta) \quad (2.38)$$

2.3.2 - Equações de equilíbrio - Estacionariedade da Energia Mecânica

Conforme descrito no capítulo 1, o equilíbrio da estrutura, no caso treliça, ocorre quando a variação da energia mecânica do sistema é nula. Tomando-se a equação (2.38) a estacionariedade ocorre quando:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial Y_\ell^\gamma} \delta Y_\ell^\gamma = 0 \quad (2.39)$$

que, usando a correspondência entre nós e direções com graus de liberdade, equação (2.32), também pode ser escrita como:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial Y_i} \delta Y_i = 0 \quad \text{com} \quad i = d \cdot (\gamma - 1) + \ell \quad (2.40)$$

A variação δY_i ou $(\delta \vec{Y})$ é arbitrária, ou seja, cada componente dessa variação pode assumir qualquer valor real independentemente do valor assumido por outra componente. Por exemplo, para um problema com 10 graus de liberdade pode-se arbitrar $\delta \vec{Y}^t = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$, que implica $\partial\Pi / \partial Y_5 = 0$. Assim a equação (2.40), para um problema com 10 graus de liberdade, representa 10 equações de equilíbrio. De maneira compacta, para um problema qualquer com n graus de liberdade, a equação (2.40) pode ser substituída simplesmente por:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i} + \frac{\partial U_e}{\partial Y_i} = 0_i \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial Y_\ell^\gamma} = 0_\ell^\gamma \quad (2.41)$$

que representa n equações de equilíbrio.

Forças externas

Observando-se a expressão (2.38), procede-se inicialmente a derivada da energia potencial das forças externas (conservativas) como:

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_k^\beta} = \frac{\partial(-F_i^\alpha Y_i^\alpha)}{\partial Y_k^\beta} = -F_i^\alpha \frac{\partial Y_i^\alpha}{\partial Y_k^\beta} = -F_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} = -F_k^\beta \quad (2.42)$$

onde, como se sabe, o Delta de Kronecker vale 0 para índices diferentes e 1 para índices iguais. O significado da operação algébrica da equação (2.42) é que a derivada da posição de um nó em relação à posição de outro nó só pode existir para nós coincidentes, ou seja, se $\alpha = \beta$. A derivada em relação a uma direção qualquer em relação à outra direção só pode existir se as direções forem coincidentes, ou seja, $i = k$.

Em um problema simples pode-se verificar a equação (2.42) de uma forma direta. Por exemplo, em um problema 2D com apenas 3 nós ter-se-ia:

$$\mathbb{P} = -F_1^1 Y_1^1 - F_2^1 Y_2^1 - F_1^2 Y_1^2 - F_2^2 Y_2^2 - F_1^3 Y_1^3 - F_2^3 Y_2^3 \quad (2.43)$$

realizando-se a derivada diretamente, por exemplo,

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_1^2} = -F_1^1 \frac{\partial Y_1^1}{\partial Y_1^2} - F_2^1 \frac{\partial Y_2^1}{\partial Y_1^2} - F_1^2 \frac{\partial Y_1^2}{\partial Y_1^2} - F_2^2 \frac{\partial Y_2^2}{\partial Y_1^2} - F_1^3 \frac{\partial Y_1^3}{\partial Y_1^2} - F_2^3 \frac{\partial Y_2^3}{\partial Y_1^2} \quad (2.44)$$

tem-se,

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_1^2} = -F_1^1 \cdot 0 - F_2^1 \cdot 0 - F_1^2 \cdot 1 - F_2^2 \cdot 0 - F_1^3 \cdot 0 - F_2^3 \cdot 0 = -F_1^2 \quad (2.45)$$

que confirma a equação (2.42).

Reescrevendo-se a equação (2.42) para graus de liberdade, ao invés de nós e direções, tem-se:

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i} = \frac{\partial(-F_k Y_k)}{\partial Y_i} = -F_k \frac{\partial Y_k}{\partial Y_i} = -F_k \delta_{ki} = -F_i \quad (2.46)$$

que indica que a derivada do potencial de forças aplicadas em relação ao grau de liberdade i é o negativo da força externa aplicada segundo o grau de liberdade considerado.

Forças internas

Observando-se a definição de conjugado energético força interna - posição, veja equação (1.12) do capítulo 1, procede-se a derivada, em relação às posições nodais (graus de liberdade) do termo correspondente à energia de deformação presente na equação (2.38), como:

$$F_i^{\alpha(int)} = \frac{\partial U_e}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{\partial \sum_{j=1}^{nel} U_e^j(Y_k^\beta)}{\partial Y_i^\alpha} = \sum_{j=1}^{nel} \frac{\partial U_e^j(Y_k^\beta)}{\partial Y_i^\alpha} \quad (2.47)$$

Conforme se pode observar na figura 2.6, a energia de deformação de cada elemento finito depende apenas de dois nós. Por outro lado a força interna associada a um nó será a soma das forças internas dos elementos finitos concorrentes àquele nó. Por exemplo, será possível calcular as forças internas dos elementos 9, 10, 15, 16 que são conectados ao nó 7 e, por simples soma, computar as forças internas do nó 7.

No que segue, utilizando-se numeração local, mostra-se como se calculam as forças internas nos elementos, depois, usando-se a 'matriz' de incidência nodal, equação (2.33), e a relação entre nós e direções com graus de liberdade, equação (2.32), apresenta-se o procedimento de 'montagem' do vetor de forças internas para a estrutura toda. Esse procedimento é mostrado de forma compacta na figura 2.9, onde se representam as forças internas calculadas como a derivada da energia de deformação do elemento j em relação aos graus de liberdade locais que, por soma, serão acumulados (\rightarrow) nos graus de liberdade globais correspondentes.

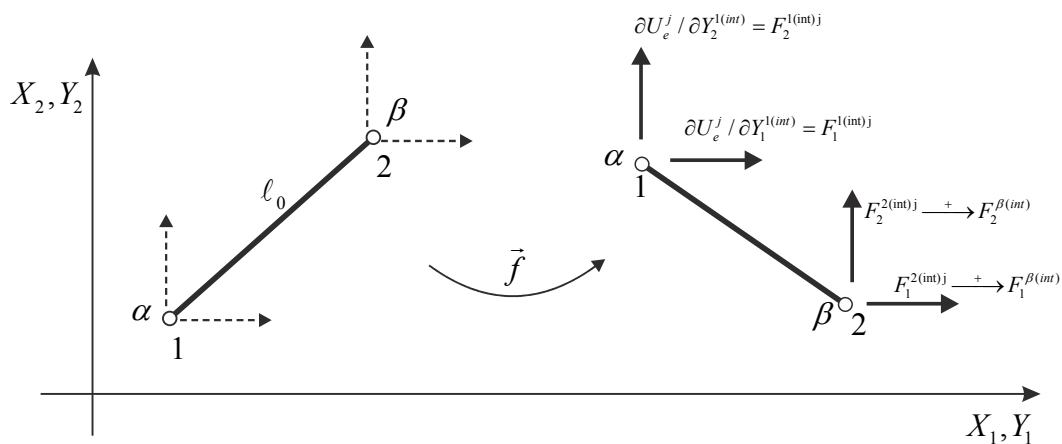


Figura 2.9 - Representação gráfica 2D das forças internas em um elemento

De acordo com os itens 2.1 e 2.2 desse capítulo, qualquer potencial convexo pode ser utilizado para modelar a energia específica de deformação, inclusive qualquer

medida de deformação objetiva pode ser adotada para gerar o potencial. Para se manter a coerência com os capítulos subsequentes, aqui será adotada a deformação de Green e as energias de deformação que representam os modelos constitutivos de Saint-Venant-Kirchhoff, Hooke e Almansi linear, conforme as equações (2.17), (2.26) e (2.24), respectivamente, reescritas de forma conveniente como:

$$u_e^{SVK}(\mathbb{E}) = \frac{K}{2} \mathbb{E}^2 \quad (2.48)$$

$$u_e^{Hooke} = \frac{K}{6} (2(2\mathbb{E} + 1)^{3/2} - 6\mathbb{E}) \quad (2.49)$$

$$u_e^{Al} = \frac{K}{4} ((2\mathbb{E} + 1) - \ln((2\mathbb{E} + 1)) - 1) \quad (2.50)$$

chamadas simplesmente de u_e nos desenvolvimentos a seguir:

Lembrando-se da equação (2.36), procede-se a derivada da energia de deformação de um elemento finito j aplicando-se a regra da cadeia, ou seja:

$$\frac{\partial U_e^j}{\partial Y_k^\beta} = A_0^{(j)} \ell_0^{(j)} \frac{\partial u_e^j(\mathbb{E})}{\partial \mathbb{E}} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_k^\beta} = A_0^{(j)} \ell_0^j S \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_k^\beta} \quad (2.51)$$

onde S é a tensão de Piola-Kirchhoff uniaxial no elemento.

Das equações (2.7), (2.8) e (2.9) se escreve:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\ell^2}{\ell_0^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(Y_1^2 - Y_1^1)^2 + (Y_2^2 - Y_2^1)^2 + (Y_3^2 - Y_3^1)^2}{\ell_0^2} - 1 \right) \quad (2.52)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_1^1} &= -\frac{(Y_1^2 - Y_1^1)}{\ell_0^2}, \quad \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_2^1} = -\frac{(Y_2^2 - Y_2^1)}{\ell_0^2}, \quad \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_1^2} = +\frac{(Y_1^2 - Y_1^1)}{\ell_0^2}, \\ \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_2^2} &= +\frac{(Y_2^2 - Y_2^1)}{\ell_0^2}, \quad \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_3^1} = -\frac{(Y_3^2 - Y_3^1)}{\ell_0^2}, \quad \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_3^2} = +\frac{(Y_3^2 - Y_3^1)}{\ell_0^2} \end{aligned} \quad (2.53)$$

ou, indicialmente

$$\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_k^\beta} = \frac{(-1)^\beta}{\ell_0^2} (Y_k^2 - Y_k^1) \quad (2.54)$$

com $\beta = 1, 2$ e $k = 1, 2, 3$ para problemas 3D ou $k = 1, 2$ para problemas 2D.

Assim, a expressão da força interna (Lagrangeana) na numeração local para um elemento finito de treliça fica

$$(F_k^{\beta(\text{int})})^j = \frac{\partial U_e^j}{\partial Y_k^\beta} = A_0^j S \frac{(-1)^\beta}{\ell_0} (Y_k^2 - Y_k^1) \quad (2.55)$$

Ao se analisar a equação (2.55) para uma barra horizontal, por exemplo, identifica-se que o resultado da força interna é $F^{int} = SA_0(\ell / \ell_0)$ revelando que $\alpha_2 = \ell / \ell_0$ na equação (2.20). Essa é a relação entre a tensão de Cauchy e a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie para a representação uniaxial $\sigma = \ell / \ell_0 S = JS$, onde $J = dV / dV_0$ é a relação entre volumes, conforme será confirmado pela expressão (4.119).

Como ilustração, pode-se recuperar os modelos com $\alpha_i = 1$, das equações (2.21), (2.22) e (2.23) com a seguinte adaptação **não rigorosa** da equação (2.55):

$$\left(\bar{F}_k^{\beta(int)}\right)^j = \frac{\partial U_e^j}{\partial Y_k^\beta} \frac{\ell_0}{\ell} = \frac{\partial U_e^j}{\partial Y_k^\beta} \frac{d\mathbb{E}}{d\varepsilon} = A_0^j S \frac{(-1)^\beta}{\ell} (Y_k^2 - Y_k^1) \quad (2.55')$$

Por força de ilustração, essa força interna será usada como alternativa **não rigorosa** no código computacional. Nas deduções continua-se utilizando a equação (2.55) lembrando-se que a formulação é Lagrangiana e a deformação de referência é a deformação de Green. Aplicando-se a adaptação a estrutura ficará mais flexível na tração e mais rígida na compressão do que aquela apresentada no gráfico da figura 2.4. Isso significa que se podem alterar modelos constitutivos para melhor corresponder a um comportamento esperado do material. Seus resultados em pequenas deformações, mas grandes deslocamentos, não apresentam diferenças significativas, porém, no gráfico da figura a2, mostra-se que os modelos modificados (2.55') possuem comportamento mais rígido à compressão do que os modelos naturais (2.55).

Na versão de graus de liberdade, a equação (2.55) fica.

$$\left(F_i^{(int)}\right)^j = A_0^j S \frac{(-1)^\beta}{\ell_0} (Y_k^2 - Y_k^1) \quad \text{com} \quad i = d.(\beta - 1) + k \quad (2.56)$$

onde d é a dimensão do problema.

Para cada uma das energias de deformação (2.48), (2.49) e (2.50) tem-se valores de tensões diferentes, indicando a diferença do modelo constitutivo adotado, como:

$$S^{SVK}(\mathbb{E}) = K \mathbb{E}, \quad S^{Hooke} = K \left(\sqrt{2\mathbb{E} + 1} - 1 \right), \quad S^{Al} = K \left(\frac{\mathbb{E}}{2\mathbb{E} + 1} \right) \quad (2.57)$$

onde K é o módulo de elasticidade do material, bem definido para pequenas deformações. Conforme o modelo constitutivo escolhido substitui-se a tensão correspondente, equação (2.57) na tensão S genérica da expressão (2.55) ou (2.56) para o cálculo da força interna.

Ainda esclarecendo a passagem da equação (2.55) para (2.56), conforme se observa, na numeração local do elemento finito de barra simples (treliça) existem, no caso tridimensional, 6 graus de liberdade e, portanto, 6 forças internas (componentes), três para cada nó. A correspondência entre graus de liberdade e os dois índices nó-direção é feita como:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad F_i = F_k^\beta \quad \text{com} \quad i = d \cdot (\beta - 1) + k \quad (2.58)$$

onde d é a dimensão do problema.

Usando-se a correspondência entre nó-direção e graus de liberdade da equação (2.32), repetida em (2.56) e (2.58), e a correspondência entre nó local e nó global da equação (2.33), as forças internas globais se relacionam de forma cumulativa com as forças internas locais como:

$$\left(F_i^{int}\right)^{global} = \left(F_i^{int}\right)^{global} + \left(F_k^{\beta int}\right)^{local} \quad \text{com} \quad i = d \cdot (inc(j, \beta) - 1) + k \quad (2.59)$$

que resume a montagem por acúmulo (soma) das forças internas.

À luz das equações (2.38) e (2.41), usando-se as expressões (2.46) e (2.59) resultam as n equações não lineares de equilíbrio:

$$F_i^{int}(\vec{Y}) - F_i^{ext} = 0_i \quad \text{ou} \quad F_k^{\beta int}(\vec{Y}) - F_k^{\beta ext} = 0_k \quad (2.60)$$

onde o vetor dos graus de liberdade (posições) da estrutura \vec{Y} é a incógnita do problema. As forças internas calculadas na equação (2.55) e montadas na equação (2.59) são funções não lineares das posições incógnitas \vec{Y} , caracterizando a não linearidade das equações de equilíbrio (2.60).

Para auxiliar o entendimento da técnica de solução a ser apresentada no próximo item, é interessante comentar que as forças internas só podem ser calculadas na forma de tentativa e as equações de equilíbrio só são satisfeitas quando o vetor posição tentativa coincidir com a posição de equilíbrio (exata) da estrutura.

No que segue, um trecho de programa FORTRAN que calcula a força interna para o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff é mostrado:

```

do j=1,nel
  k1=inc(j,1)
  k2=inc(j,2)
  rl02=(x(3*(k1-1)+1)-x(3*(k2-1)+1))**2
# +(x(3*(k1-1)+2)-x(3*(k2-1)+2))**2
# +(x(3*(k1-1)+3)-x(3*(k2-1)+3))**2
  rl2=(y(3*(k1-1)+1)-y(3*(k2-1)+1))**2
# +(y(3*(k1-1)+2)-y(3*(k2-1)+2))**2
# +(y(3*(k1-1)+3)-y(3*(k2-1)+3))**2
  eg=(rl2-rl02)/rl02*0.5
c  Saint-Venant-Kirchhoff
  ue(j)=0.5*el(j)*a(j)*(rl02**.5)*eg**2 !energia de def
  s=el(j)*eg !tensão de Piola
  fn(j)=s*a(j) !forca normal Lagrangeana na barra
c  Forca interna
  do ib=1,2
    do ia=1,3
      k=3*(ib-1)+ia
      dedyba=(-1.)**ib/rl02*(y(3*(k2-1)+ia)-y(3*(k1-1)+ia))
      fiel(j,k)=dedyba*el(j)*eg*a(j)*(rl02**.5) !eq (2.51) ou eq (2.55)
    enddo !ia
  enddo !ib
enddo !j

```

Trabalho 1: Aproveitando os dois trechos de programa e a teoria discutida até aqui, o aluno deverá fazer um programa que leia coordenadas finais de uma estrutura hipotética (por exemplo de uma única barra) e calcule as tensões e forças normais nas barras e as forças internas globais (usar a equação (2.55')). Sabendo que na posição de equilíbrio (no caso imposta) as forças internas são iguais às forças externas, veja equação (2.60), as forças internas calculadas informam quais as forças que deveriam ser aplicadas na estrutura para que esta saísse das coordenadas iniciais para as coordenadas atuais.

Também devem ser testados casos em que a estrutura sofre apenas movimentos de corpo rígido, verificando que nessas situações não surgem forças internas, ou seja, as medidas de deformação são objetivas.

2.3.3 - Técnica de Solução básica - Newton-Raphson

Nesse item a estratégia de solução do sistema não linear, equação (2.60), é esclarecida. Começa-se reescrevendo a equação (2.60) usando a estrutura de graus de liberdade descrita anteriormente, acrescentando-se o vetor g_i na igualdade que será usado para facilitar a descrição,

$$g_j = \frac{\partial \Pi}{\partial Y_j} = \frac{\partial U_e}{\partial Y_j} - F_j = F_j^{int} - F_j = 0_j \quad (2.61)$$

onde F_j^{int} é o vetor de força interna calculado como derivada da energia de deformação em relação às posições nodais. As posições nodais são as incógnitas do problema e não se conhecem a priori seus valores, portanto, quando se arbitra uma posição tentativa \bar{Y}^0 para o equilíbrio, a equação (2.61) retorna valor não nulo para $g_j(\bar{Y}^0)$ que se torna o vetor de desbalanceamento mecânico do método de Newton-Raphson. Comenta-se que a primeira posição tentativa é a posição inicial do problema \bar{X} .

Expandindo-se o vetor de desbalanceamento na vizinhança da posição tentativa \bar{Y}^0 , encontra-se:

$$g_j(\bar{Y}) = g_j(\bar{Y}^0) + \left. \frac{\partial g_j}{\partial Y_k} \right|_{\bar{Y}^0} \Delta Y_k + O_j^2 = 0 \quad (2.62)$$

onde \bar{Y} é a solução procurada do problema.

Desprezando-se os termos de ordem superior O_j^2 , reescreve-se a segunda igualdade de (2.62) como:

$$\Delta Y_k = - \left(\left. \frac{\partial g_j}{\partial Y_k} \right|_{\bar{Y}^0} \right)^{-1} g_j(\bar{Y}^0) = - \left(\left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_k \partial Y_j} \right|_{\bar{Y}^0} \right)^{-1} g_j(\bar{Y}^0) = -(H_{kj})^{-1} g_j(\bar{Y}^0) \quad (2.63)$$

onde ΔY_k é a correção da posição e, para forças conservativas, $H_{kj} = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_k \partial Y_j} \right|_{\bar{Y}^0}$ é a

matriz Hessiana ou rigidez tangente do problema para a posição tentativa.

A solução tentativa é então melhorada fazendo-se:

$$Y_k^0 = Y_k^0 + \Delta Y_k \quad (2.64)$$

com o novo valor tentativa retorna-se à equação (2.62) onde se calcula o novo desbalanceamento e à equação (2.63) para se calcular uma nova correção, até que

ΔY_k ou g_j sejam suficientemente pequenos. O nível de carga é aumentado de forma incremental para se percorrer o caminho de equilíbrio da estrutura analisada e identificar a existência de pontos ou trechos de instabilidade, quando a matriz Hessiana deixa de ser positiva definida, conforme a discussão da natureza do equilíbrio realizada no capítulo 1.

No próximo item mostra-se a obtenção da matriz Hessiana (ou rigidez tangente) de treliças.

O algoritmo de Newton-Raphson pode ser resumido como segue:

- a) Assume-se como primeira tentativa de solução a posição inicial, ou seja, $Y_k^0 = X_k$
- b) Incrementa-se o nível de carga $F_k = F_k + dF_k$ ou de posição prescrita $Y_k = Y_k + dY_k$
- c) Calculam-se nos elementos F_k^{int} e H_{kj} , expressões (2.56) e (2.70)
- d) Montam-se o vetor global de forças internas e a Hessiana global, usando (2.59) e (2.74)
- e) Resolve-se ΔY_k no sistema linear (2.63)
- f) Atualiza-se a posição – equação (2.64)
- g) Calcula-se $|\Delta Y_k|/|X_k|$. Caso $|\Delta Y_k|/|X_k| < \text{tolerância}$ encontrou-se a posição de equilíbrio para este nível de carga, volte ao item (b) e incremente a carga. Caso contrário, volte ao item (c) e, com Y_k^0 calculado no item (f) como nova posição tentativa, faça nova iteração para melhorar a precisão da solução.

2.3.4 - Cálculo da Matriz Hessiana

No item anterior mencionou-se que a matriz Hessiana da estrutura é dada por:

$$H_{ik} = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_i \partial Y_k} \right|_{\bar{v}^0} \quad (2.65)$$

Tal como realizado para a força interna, no item 2.3.2, a matriz Hessiana será desenvolvida para um elemento, usando a notação nó-direção e depois montada por acúmulo e correspondência de graus de liberdade para toda a estrutura. Assim, a equação (2.65) fica escrita para um elemento j como:

$$\left(H_{ik}^{\alpha\beta} \right)^j = \frac{\partial^2 U_e^j}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} \quad \text{ou} \quad \left(H_{ik}^{\alpha\beta} \right)^j = \frac{\partial}{\partial Y_i^\alpha} \left(\frac{\partial U_e^j}{\partial Y_k^\beta} \right) \quad (2.66)$$

Deve-se observar que, pelo fato das forças serem conservativas e pelo teorema de Schwartz, a matriz Hessiana é sempre simétrica. Aproveitando-se a equação (2.51) se escreve

$$\left(H_{ik}^{\alpha\beta}\right)^j = A_0^{(j)} \ell_0^{(j)} \frac{\partial}{\partial Y_i^\alpha} \left(\frac{\partial u_e^j(\mathbb{E})}{\partial \mathbb{E}} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_k^\beta} \right) \quad (2.67)$$

ou, realizando-se a derivada do produto

$$\left(H_{ik}^{\alpha\beta}\right)^j = A_0^{(j)} \ell_0^{(j)} \left(\frac{\partial^2 u_e^j(\mathbb{E})}{\partial Y_i^\alpha \partial \mathbb{E}} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_k^\beta} + \frac{\partial u_e^j(\mathbb{E})}{\partial \mathbb{E}} \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} \right) \quad (2.68)$$

Aplicando-se a regra da cadeia sobre o primeiro termo do parêntesis, resulta:

$$\left(H_{ik}^{\alpha\beta}\right)^j = A_0^{(j)} \ell_0^{(j)} \left(\frac{\partial^2 u_e^j(\mathbb{E})}{\partial \mathbb{E}^2} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_i^\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_k^\beta} + \frac{\partial u_e^j(\mathbb{E})}{\partial \mathbb{E}} \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} \right) \quad (2.69)$$

Das expressões (2.18) e (2.30), pode-se escrever (2.69) como:

$$\left(H_{ik}^{\alpha\beta}\right)^j = A_0^{(j)} \ell_0^{(j)} \left(K_t(\mathbb{E}) \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_i^\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_k^\beta} + S \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} \right) \quad (2.70)$$

onde S a tensão de Piola-Kirchhoff uniaxial, veja a equação (2.57), e $K_t(\mathbb{E})$ é o módulo de elasticidade tangente do modelo constitutivo adotado.

Da mesma forma que se adaptou a equação (2.55) pode-se adaptar (de forma não rigorosa) a equação (2.70) para se ter $\alpha_i = 1$ e se reproduzir os modelos constitutivos (2.21), (2.22) e (2.23). Assim, em geral, nos exemplos apresentados utilizou-se, no lugar de (2.70), a seguinte equação:

$$\left(H_{ik}^{\alpha\beta}\right)^j = A_0^{(j)} \ell_0^{(j)} \left(K_t(\mathbb{E}) \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_i^\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_k^\beta} + S \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} \right) \frac{\ell_0^2}{\ell^2} \quad (2.70')$$

A rigor dever-se-ia derivar ℓ^2 para se ter um cálculo rigoroso. Os módulos de elasticidade tangente são calculados a partir das (2.48) até (2.50), aproveitando-se (2.57), como:

$$K_t^{SVK} = K, \quad K_t^{Hooke} = K \left(\frac{1}{\sqrt{2\mathbb{E}+1}} \right), \quad K_t^{Al} = K \left(\frac{1}{(2\mathbb{E}+1)^2} \right) \quad (2.71)$$

Para valores de posição tentativa, calculam-se com facilidade \mathbb{E} , S e $\partial \mathbb{E} / \partial Y_i^\alpha$. Falta calcular a segunda derivada da deformação de Green em relação às posições. Para tanto, aplica-se a segunda derivada pretendida sobre a equação (2.54), como:

$$\frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} = \frac{\partial}{\partial Y_i^\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_k^\beta} = \frac{(-1)^\beta}{\ell_0^2} \frac{\partial (Y_k^2 - Y_k^1)}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{(-1)^\beta (-1)^\alpha}{\ell_0^2} \delta_{ik} \quad (2.72)$$

onde $\beta = 1, 2$ e $\alpha = 1, 2$ são os nós do elemento e $i = 1, 2, 3$ e $k = 1, 2, 3$ são as direções para um problema 3D.

Pode-se substituir (2.54) e (2.72) em (2.70) para se escrever a fórmula completa da matriz Hessiana de um elemento finito, como:

$$\left(H_{ik}^{\alpha\beta} \right)^j = (-1)^\beta (-1)^\alpha \frac{A_0^{(j)}}{\ell_0} \left(K_i(\mathbb{E}) \frac{(Y_i^2 - Y_i^1)}{\ell_0} \frac{(Y_k^2 - Y_k^1)}{\ell_0} + S \delta_{ik} \right) \quad (2.73)$$

Usando-se a correspondência entre nó-direção e graus de liberdade da equação (2.32) e a correspondência entre nó local e nó global da equação (2.33), a matriz Hessiana global se relaciona com a matriz Hessiana local por acumulação como:

$$H_{oz}^{global} = H_{oz}^{global} + \left(H_{ik}^{\alpha\beta} \right)^j local \quad \text{com } o = d \cdot (inc(j, \alpha) - 1) + i \text{ e } z = d \cdot (inc(j, \beta) - 1) + k \quad (2.74)$$

Um exemplo de código FORTRAN que realiza essa operação é:

```

do j=1,nel
  k1=inc(j,1)
  k2=inc(j,2)
  rl02=(x(3*(k1-1)+1)-x(3*(k2-1)+1))**2
# +(x(3*(k1-1)+2)-x(3*(k2-1)+2))**2
# +(x(3*(k1-1)+3)-x(3*(k2-1)+3))**2
  rl2=(y(3*(k1-1)+1)-y(3*(k2-1)+1))**2
# +(y(3*(k1-1)+2)-y(3*(k2-1)+2))**2
# +(y(3*(k1-1)+3)-y(3*(k2-1)+3))**2
  eg=(rl2-rl02)/rl02*0.5
c   Tensão de piola-Kirchhoff - Saint-Venant-Kirchhoff
  s=el(j)*eg !tensão de Piola
c   Hessiana
  do ib=1,2 !no
    do ia=1,3 !gl
      k=3*(ib-1)+ia !gll
      dedyba=(-1.)**ib/rl02*(y(3*(k2-1)+ia)-y(3*(k1-1)+ia))
    do ix=1,2

```

```

do ig=1,3
  l=3*(ix-1)+ig
  dedyxg=(-1.)**ix/rl02*(y(3*(k2-1)+ig)-y(3*(k1-1)+ig))
  rh_dy=dedyba*dedyxg*(el(j)*a(j)*rl02**.5) !independente da tensão
  d2edy2baxg=0.
  if(ia.eq.ig) d2edy2baxg=(-1.)**ib*(-1.)**ix/rl02
  rh_dy2=d2edy2baxg*s*a(j)*rl02**.5 !dependente da tensão
  hl(j,k,l)=(rh_dy+rh_dy2) ! Hessiana equação (2.70)
enddo !ib - no
enddo !ia - gl
enddo !ig - no
enddo !ix - gl
enddo !elemento

```

2.3.5 - Aplicação de condições de contorno

Para se encerrar a solução do problema estático de treliça pelo MEF posicional, falta detalhar a aplicação de condições de contorno em força e posições. Um sólido 3D (ou uma estrutura) possui 6 movimentos de corpo rígido. Para uma estrutura bidimensional tem-se 3 movimentos de corpo rígido. Assim, a matriz Hessiana é singular e é necessária a aplicação de, pelo menos 6 condições de contorno independentes em posições (ou deslocamentos) para estruturas 3D (ou 3 para estruturas 2D) de forma a tornar o sistema da equação (2.63) resolvível, ou a matriz Hessiana inversível. Na programação, cria-se a variável $ko(3nos)$ que, caso possua valor 0 indica que o grau de liberdade é livre e, caso possua valor 1 indica que o grau de liberdade (posição) é prescrito.

Tanto o comportamento da posição prescrita, quanto da força prescrita são informados ao código computacional na forma de incremento. No caso do exemplo de código aqui apresentado, considerou-se carregamento e recalque com crescimento monotônico e proporcional para todos os nós, veja item b do algoritmo de Newton-Raphson. Assim, apenas um conjunto de vetores para $d\vec{Y}$ e $d\vec{F}$ são informados. Ficando como exercício para o aluno outros tipos de comportamento.

A entrada de dados, continuando o trecho de código apresentado no item 2.3.1, fica:


```

read(3,*) !Num de nos restritos
write(50,*) 'Num de nos restritos'
read(3,*) nnor
write(50,*) nnor
read(3,*) !Restricao de gras de liberdade
read(3,*) !No, ko1, ko2, ko3
write(50,*) 'Restricao de gras de liberdade'
write(50,*) 'No, ko1, ko2, ko3'
do i=1,nnor
  read(3,*) k,ko(3*(k-1)+1),ko(3*(k-1)+2),ko(3*(k-1)+3)
  write(50,*) k,ko(3*(k-1)+1),ko(3*(k-1)+2),ko(3*(k-1)+3)
enddo
read(3,*) !Variacao da posica imposta
read(3,*) !No, dY1, dY2, dY3
write(50,*) 'Variacao da posica imposta'
write(50,*) 'No, dY1, dY2, dY3'
do i=1,nnor
  read(3,*) k,dy(3*(k-1)+1),dy(3*(k-1)+2),dy(3*(k-1)+3)
  write(50,*) k,dy(3*(k-1)+1),dy(3*(k-1)+2),dy(3*(k-1)+3)
enddo
read(3,*) !Num de nos carregados
read(3,*) nnoc
write(50,*) 'Num de nos carregados'
write(50,*) nnoc
read(3,*) !Variacao da carga imposta
read(3,*) !No, df1, df2, df3
write(50,*) 'Variacao da carga imposta'
write(50,*) 'No, df1, df2, df3'
do i=1,nnoc
  read(3,*) k,df(3*(k-1)+1),df(3*(k-1)+2),df(3*(k-1)+3)
  write(50,*) k,df(3*(k-1)+1),df(3*(k-1)+2),df(3*(k-1)+3)
enddo

```

c Primeira tentativa do equilibrio $Y=X$

$Y=X$

Operacionalmente, para que a matriz fique inversível e o resultado da correção nos graus de liberdade em posição sejam nulos, basta, respectivamente, zerar a linha e a coluna da matriz Hessiana correspondentes aos graus de liberdade i para os quais vetor $ko(i)=1$ e colocar 1 na diagonal e zerar o vetor de desbalanceamento (resíduo mecânico) \vec{g} neste grau de liberdade. Dessa forma, retorna nula a correção em posição prescrita e não nulos os valores onde os graus de liberdade estão livres. No código computacional isso foi feito como:

c Calculando vetor resíduo

g=f-fi !vetor g = -g

c Aplicando restricoes

*do i=1,3*nnos*

if (ko(i).eq.1) then

*do j=1,3*nnos*

hg(i,j)=0.

hg(j,i)=0.

enddo !j

hg(i,i)=1.

g(i)=0. !zerando resíduo onde o recalque é conhecido

endif

enddo !i

No final de cada processo iterativo, quando $|\Delta Y_k|/|X_k| < \text{tolerância}$, tem-se como resultado a posição de equilíbrio para o passo de carga e o vetor de forças internas, que, por definição, é igual ao vetor de forças aplicadas, informando as reações de apoio.

Para justificar o procedimento acima descrito, seja o sistema de equações onde se conhecem os valores $\Delta y_2 = 0$ (correção de \vec{Y} prescrito), g_1 e g_3 .

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix} \quad (2.75)$$

que pode ser rearranjado como:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & 0 & h_{13} \\ h_{12} & 1 & h_{23} \\ h_{13} & 0 & h_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta y_1 \\ -g_2 \\ \Delta y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_{12} & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & h_{23} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_1 \\ -0 \\ g_3 \end{Bmatrix} \quad (2.76)$$

onde se utilizou o fato de se saber que $\Delta y_2 = 0$, pois é a correção de um valor previamente conhecido. Reescreve-se (2.76) como:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ h_{12} & 1 & h_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta y_1 \\ -g_2 \\ \Delta y_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & h_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ h_{13} & 0 & h_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta y_1 \\ 0 \\ \Delta y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ 0 \\ g_3 \end{Bmatrix} \quad (2.77)$$

Os dois termos dessa equação são desacoplados, pois a solução da segunda parte não depende da primeira parte, ou seja, resolve-se

$$\begin{bmatrix} h_{11} & 0 & h_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ h_{13} & 0 & h_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta y_1 \\ 0 \\ \Delta y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ 0 \\ g_3 \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

donde se encontram Δy_1 e Δy_3 . Utiliza-se agora a primeira parte de (2.77) para se encontrar:

$$g_2 = h_{12}\Delta y_1 + h_{23}\Delta y_3 \quad (2.79)$$

A equação (2.79) não tem importância para nosso problema, pois faz parte de um processo iterativo que no final resulta $0 = 0$.

Trabalho 2: Aproveitando-se os trechos de programa e a teoria discutida até aqui, o aluno deverá fazer seu próprio código de análise estática de treliça. Pode fazer um código 3D restringindo-se todos os graus de liberdade na terceira direção para se resolver treliças 2D, ou fazer um programa que use como entrada o valor da dimensão do problema $d = 2$ ou $d = 3$. Os exemplos que deverão ser resolvidos para validar o código desenvolvido são os apresentados no próximo item. Caso desejem utilizar o software Acadview do departamento de Engenharia de Estruturas da EESC para pós-processar seus resultados, deve-se gerar arquivo tipo txt para a leitura dos resultados. Por exemplo, se quiserem apresentar os deslocamentos como variáveis o padrão da geração do arquivo de saída é dado pelo seguinte trecho de código escrito em FORTRAN,

```
c *****
c Saída para pos processamento
```

```

c *****
subroutine visual
USE BIG_STUFF
implicit real*8(a-h),integer*4(i-n),real*8(o-z)
include 'blestr.for'
if(it.eq.1) then ! it é o passo de carga
write(8,200)
write(8,*)
write(8,*) 'Arquivo de pos-processamento - txt'
write(8,*)
write(8,*) 'itens de linhas em branco ou com textos,'
write(8,*) 'quando usar formato 1h# indica inicio de listas'
write(8,*)
write(8,*) 'nnos, nele, nlistas'
write(8,201)
write(8,*) nnos,nel,3*nt !cada lista um deslocamento nesse exemplo
write(8,*)
write(8,*) 'coordx coordy coordz deslx delsy deslz'
write(8,201)
do i=1,nnos
write(8,111) x(3*(i-1)+1),x(3*(i-1)+2),x(3*(i-1)+3),
# (y(3*(i-1)+1)-x(3*(i-1)+1)),
# (y(3*(i-1)+2)-x(3*(i-1)+2)),
# (y(3*(i-1)+3)-x(3*(i-1)+3))
enddo
write(8,*)
write(8,*) 'tipo grauaprox nó1 nó2'
write(8,201)
do j=1,nel
write(8,20) 1,1,(inc(j,k),k=1,2)
enddo
else
endif
111 format (6(1x,e27.6))

```

112 *format(4(1x,e27.6))*

200 *format(20hpegar comentarios em)*

201 *format(1h#)*

c inicio das listas

write(8,)*

write(8,) 'título da lista e dados dos nós'*

write(8,201)

write(8,) 'DESL X', it*

do i=1,nnos

write(8,112)

(y(3(i-1)+1)-x(3*(i-1)+1)),*

(y(3(i-1)+2)-x(3*(i-1)+2)),*

(y(3(i-1)+3)-x(3*(i-1)+3)),*

(y(3(i-1)+1)-x(3*(i-1)+1))*

enddo

write(8,)*

write(8,) 'título da lista e dados dos nós'*

write(8,201)

write(8,) 'DESL Y', it*

do i=1,nnos

write(8,112)

(y(3(i-1)+1)-x(3*(i-1)+1)),*

(y(3(i-1)+2)-x(3*(i-1)+2)),*

(y(3(i-1)+3)-x(3*(i-1)+3)),*

(y(3(i-1)+2)-x(3*(i-1)+2))*

enddo

write(8,)*

write(8,) 'título da lista e dados dos nós'*

write(8,201)

write(8,) 'DESL Z', it*

do i=1,nnos

write(8,112)

(y(3(i-1)+1)-x(3*(i-1)+1)),*

(y(3(i-1)+2)-x(3*(i-1)+2)),*

```

# (y(3*(i-1)+3)-x(3*(i-1)+3)),
# (y(3*(i-1)+3)-x(3*(i-1)+3))
enddo
20 format(18i6)
return
end

```

2.3.6 - Exemplos para validação (benchmarks)

Nesse item alguns exemplos são apresentados para auxiliar a validação dos códigos desenvolvidos pelos alunos. A tolerância adotada para a verificação do equilíbrio é de $tol = 1.0 \times 10^{-6}$ em posição.

2.3.6.a - Reprodução dos modelos constitutivos:

Uma barra horizontal é submetida à tração e compressão, usando os modelos constitutivos SVK, Hooke e Almansi Linear, das equações (2.48), (2.49) e (2.50) e as relações (2.55) e (2.55'), mostrando que essa última garante a reprodução exata dos modelos constitutivos escolhidos para a figura 2.4. É utilizado apenas um elemento finito e é imposto controle de posição, assim, a força indicada na figura a1 é obtida diretamente pela força interna. As propriedades (adimensionais) adotadas são: $\ell_0 = 1$, $A_0 = 1$ e $K = 1$, sendo K o módulo de elasticidade.

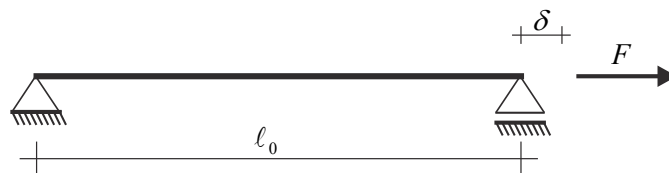


Figura a1 - Barra tracionada - controle de posição

Comparando-se os resultados da figura a2 com os da figura 2.4, conclui-se que, adotando-se a expressão (2.55'), o código computacional está reproduzindo as curvas da figura 2.4, impostas adotando-se $\alpha_i = 1$ em (2.21), (2.22) e (2.23), porém os modelos constitutivos calculados com rigor (de origem conhecida) são os da equação (2.55).

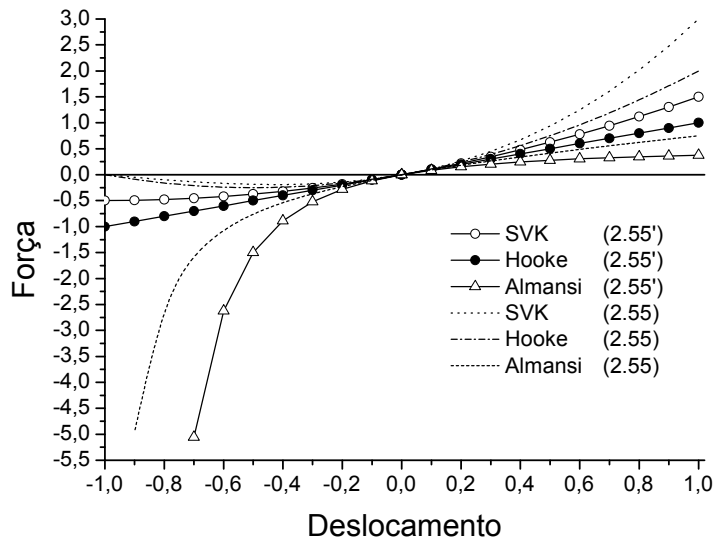


Figura a2 - Força por deslocamento para diferentes modelos constitutivos

Mesmo assim, observa-se que na compressão os modelos modificados são mais rígidos na compressão, o que garante maior intervalo de validade para a solução numérica. Para pequenas deformações todos os modelos constitutivos se confundem e, para grandes deformações, cada modelo possui seu comportamento próprio. Deve-se recordar que o modelo constitutivo de Almansi é o único que evita a degeneração do material por compressão. Por simplicidade, nos demais exemplos, utilizaram-se as expressões (2.55') e (2.70').

2.3.6.b - Treliça de von Mises:

No exemplo 1.4e do capítulo 1 esse problema foi resolvido analiticamente para a Lei de Hooke. Assim, a resposta aqui obtida, utilizando-se esse modelo, pode ser verificada pela resposta analítica. A Treliça de Mises é mostrada na figura 2.b.1 e o gráfico da força aplicada pelo deslocamento vertical do ponto de aplicação da força é apresentado na figura 2.b.2.

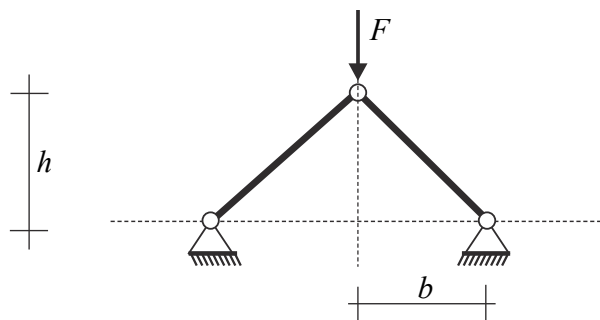


Figura 2.b.1 - Treliça de von-Mises

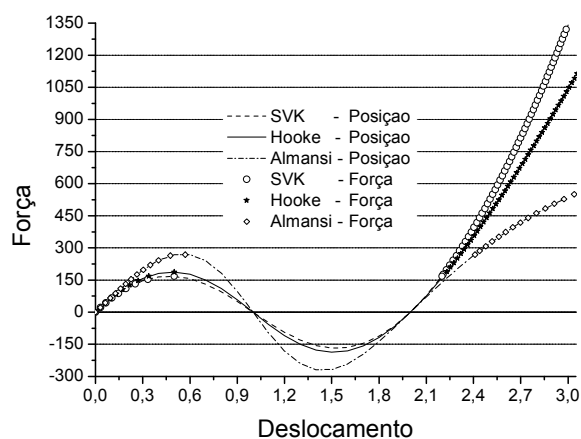


Figura 2.b.2 - Força pelo deslocamento vertical

Por simplicidade adotaram-se $h = 1$, $b = 1$, $K = 1000$ e $A_0 = 1$ para as análises numéricas realizadas. Foram adotados os três modelos constitutivos, SVK, Hooke e Almansi linear e foram utilizados controle de força e posição, para se verificar a existência de trecho não estável coberto pelo controle de posições e a presença de snap-through no controle de força.

2.3.6.c - Flexão de uma torre "engastada"

Nesse exemplo a torre treliçada de 16m de comprimento, figura 2.c.1, é estudada. Utilizam-se os três modelos constitutivos com controle de posições. Calcula-se a carga aplicada diretamente do resultado das forças internas. Todos os tramos são iguais e adotaram-se: $K = 10000$ e área de seção transversal $A_0 = 0,1$.

Na figura 2.c.2 apresenta-se o gráfico da força pelo deslocamento vertical para os três modelos constitutivos e na figura 2.c.3 apresenta-se a deformada final para o modelo constitutivo de Almansi Linear.

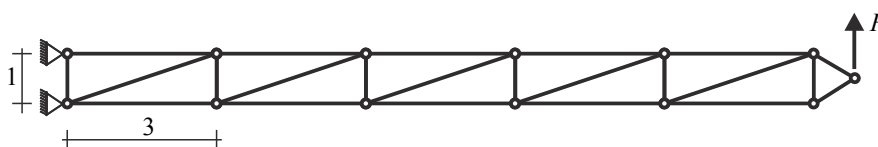


Figura 2.c.1 - Torre treliçada sujeita à flexão.

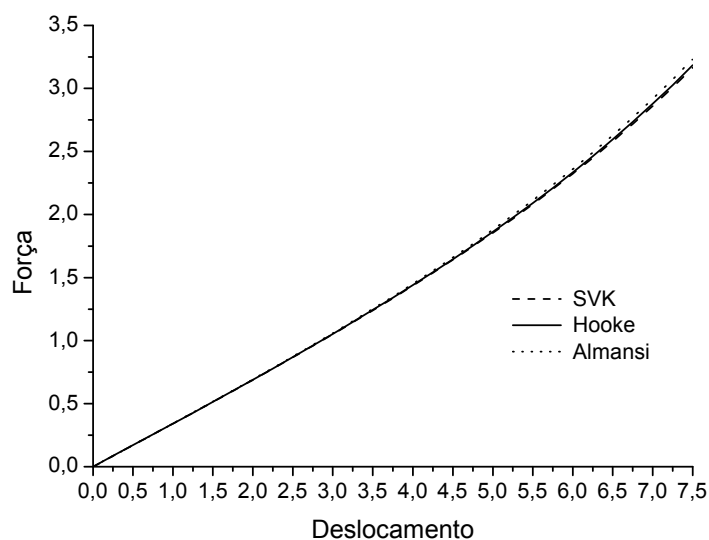


Figura 2.c.2 - Força pelo deslocamento vertical

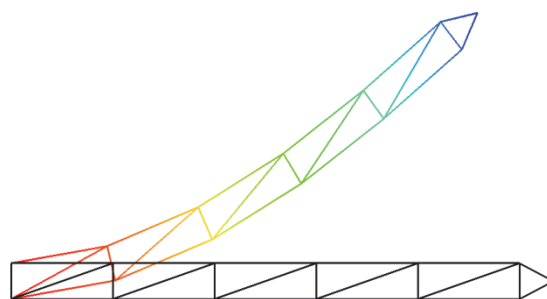


Figura 2.c.3 - Deslocada da última configuração.

Apesar do nível de deslocamento ser grande o nível de deformação nos elementos estruturais foi pequeno, o que pode ser constatado pela pequena diferença dos resultados apresentados na figura 2.c.2.

2.3.6.d - Torre "engastada" sujeita à compressão

A mesma torre do exemplo anterior está sujeita a um carregamento compressivo centrado, conforme mostra a figura 2.d.1.

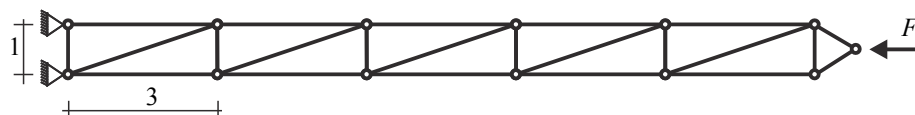


Figura 2.d.1 - Torre sujeita à compressão

As propriedades físicas adotadas são as mesmas do exemplo anterior, para os gráficos apresentados utilizaram-se os modelos constitutivos sem correção, pois os modelos corrigidos das expressões (2.55') e (2.70') apresentam menor intervalo de

convergência. Controle de força foi aplicado com nível de força máximo para cada modelo constitutivo dado por $F_{SVK} = 6,05$, $F_{Hooke} = 6,27$ e $F_{Almansi} = 6,71$. Esses níveis de carga foram aplicados de forma crescente com passo de $\Delta F = 0,11$ e estabelecidos como sendo aqueles onde uma perda de estabilidade (Hessiana quase singular) interna (local) foi atingida. Na figura 2.d.2 mostra-se o gráfico da força aplicada pelo deslocamento transversal para níveis de carga até um passo antes da perda de estabilidade. O mecanismo de perda de estabilidade é explicado na figura 2.d.3 onde, para o modelo constitutivo de Almansi apresentaram-se as posições deslocadas para o passo 60 e 61. Deve-se comentar que a reprodução de resultados próximas a pontos de instabilidade é muito difícil, pois a matriz Hessiana é quase singular e as soluções ficam muito dependentes dos pontos de solução de sistemas lineares adotados.

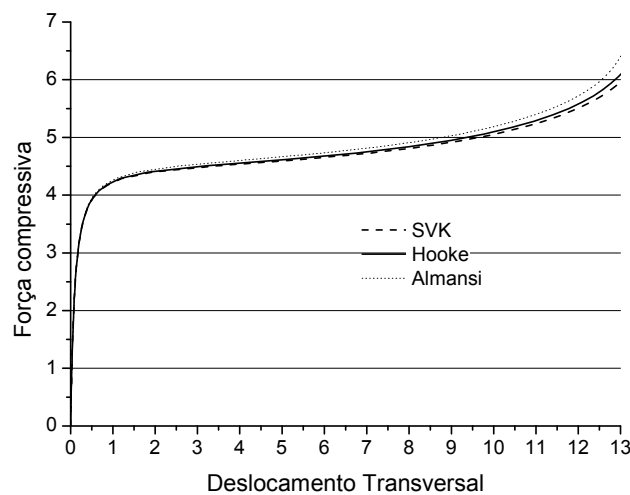


Figura 2.d.2 - Força compressiva por deslocamento transversal

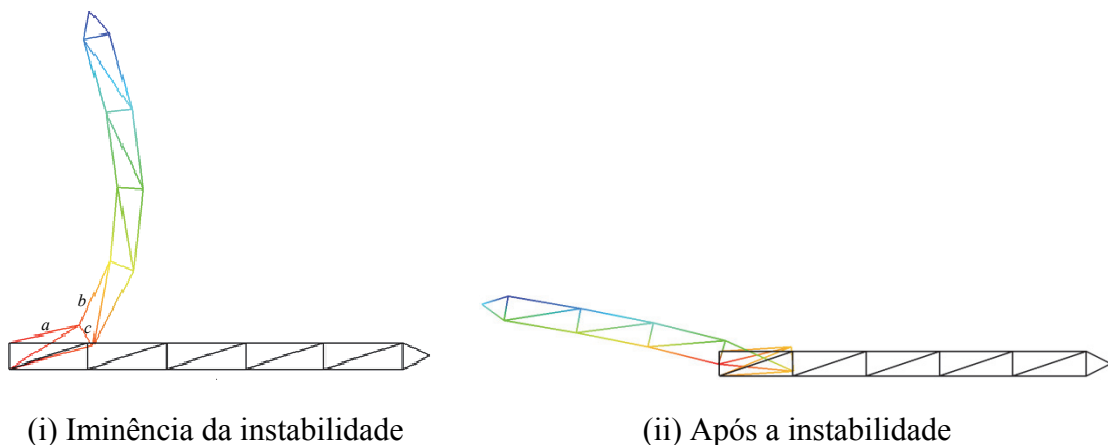


Figura 2.d.3 - Posições deslocadas para modelo de Almansi - Instabilidade

Como se observa na figura 2.d.2, a assimetria (diagonais em apenas um sentido) da treliça conduzem a um comportamento típico de pilar sujeito à compressão

excêntrica. Para forças acima de 3 os deslocamentos começam a ser pronunciados e uma redução da rigidez da estrutura fica evidente entre a carga 4,2 e 5,5.

Na figura 2.d.3 (i) apresenta-se a iminência de uma perda de estabilidade interna da estrutura. Essa perda de estabilidade se caracteriza pela "treliça de von-Mises" que se forma internamente pelas barras *a* e *b* comprimidas e dirigidas pela força também de compressão na barra *c*. Para aumentar a extensão da análise, alterou-se a treliça da figura 2.d.1 para a da figura 2.d.4. Considerando-se o módulo de elasticidade das duas diagonais novas próximas à carga de apenas $K=100$, de forma a conferir excentricidade ao problema analisado.

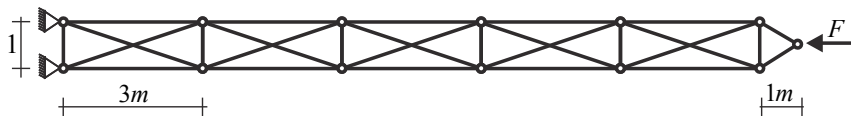


Figura 2.d.4 - Torre com reforço em cruz sujeita a compressão

Observa-se que para introduzir excentricidade adotou-se constante elástica $K=10$ para as duas últimas barras do contraventamento novo, próximas ao carregamento.

Na figura 2.d.5 mostra-se o comportamento do deslocamento lateral em função da força aplicada para os três modelos constitutivos e na figura 2.d.6 mostra-se o novo mecanismo de colapso interno para o modelo de Almansi. Novamente se observa que nas proximidades da perda de estabilidade não se esperam soluções próximas de programas desenvolvidos por outros autores, pois a matriz Hessiana é quase singular.

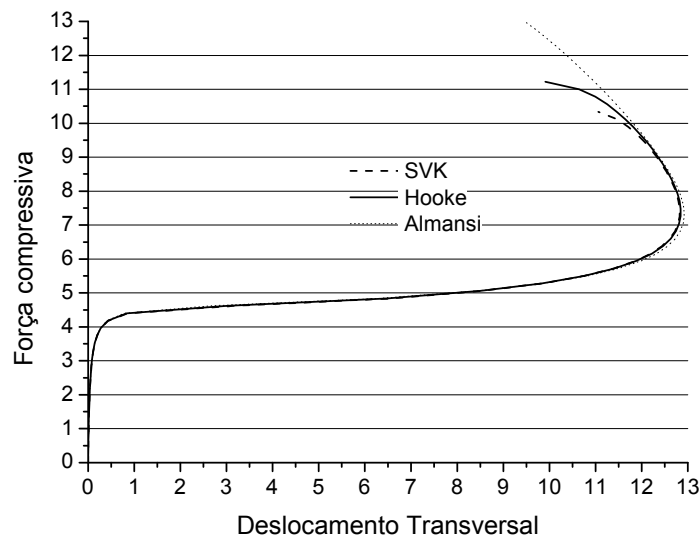
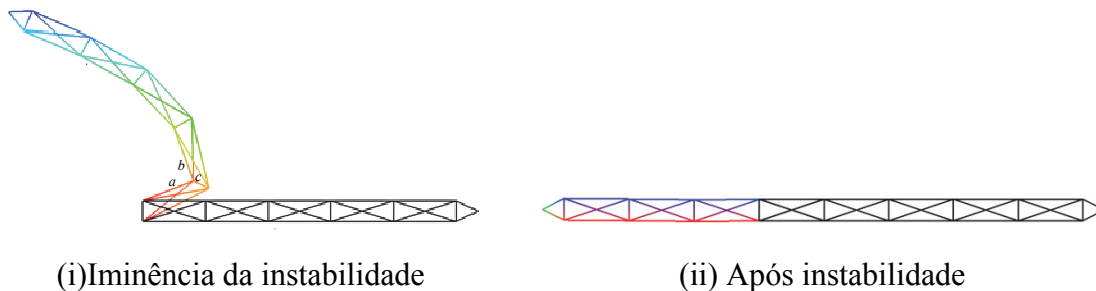


Figura 2.d.5 - Força compressiva por deslocamento transversal



(i) Iminência da instabilidade (ii) Após instabilidade

Figura 2.d.6 - Posições deslocadas para modelo de Almansi - Instabilidade

Como se pode observar com os reforços em cruz avançou-se mais na análise e a forma pós-crítica se apresentou simétrica. O mecanismo de ruína é muito parecido, porém as barras adicionais reduziram o efeito de coerção da barra c .

2.3.6.e - Arco simétrico, construção simplificada do modelo e análise

Esse exemplo é dividido em duas etapas. A primeira é a análise de uma viga simétrica biapoiada (aproveitando-se a discretização dos exemplos anteriores) submetida a uma força central para cima (controle de posição) de forma a criar um arco conforme a figura 2.e.1. As propriedades das barras são $A_0 = 0.01$ e $K = 1.0 \times 10^9$. As dimensões do problema são idênticas às dos problemas anteriores. Utilizou-se apenas o modelo constitutivo de Almansi linear.

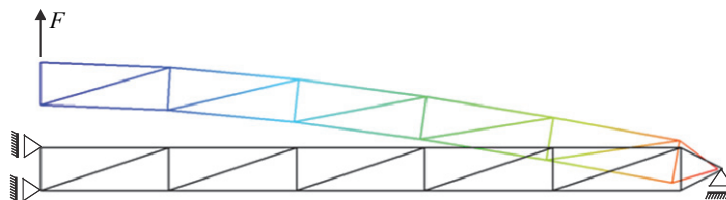


Figura 2.e.1 - Análise de viga biapoiada simétrica.

Na primeira fase um movimento vertical total de 2 unidades foi imposto apenas no nó superior e dividido em 10 passos iguais. A carga resultante (necessária para gerar o deslocamento) obtida diretamente da força interna foi de $F = 6870,48$ para essa metade da estrutura.

Tomam-se as coordenadas finais da análise da primeira fase para ser a discretização da geometria inicial da segunda fase, ou seja, a discretização de um arco submetido a uma carga vertical de cima para baixo, conforme indica a figura 2.e.2. Atenção especial deve ser dada ao apoio da direita que passa a ser fixo ao invés de

móvel como o era na análise da viga da primeira fase. Nessa segunda etapa também se aplica controle de posições e identifica-se um ponto crítico da estrutura no nível de deslocamento $y = 1,2$ de um total de 4 aplicado no ponto superior onde a carga é indicada.

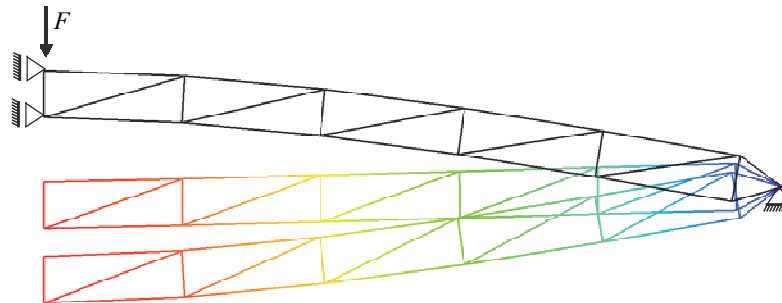


Figura 2.e.2 - Arco submetido à força transversal

Na figura 2.e.3 apresenta-se a força aplicada em função do deslocamento vertical do ponto central do arco revelando o aparecimento de um snap-through caso controle de força fosse aplicado. A força correspondente ao ponto crítico é $F_{cr} \cong 11250$. Observa-se que, para o arco completo, o valor da força é o dobro da apresentada.

Várias aplicações de interesse foram mostradas, revelando que o MEF posicional é uma ferramenta poderosa para análises não lineares geométricas de estruturas. No próximo item a formulação de treliça será estendida para análises dinâmicas. Métodos mais poderosos de solução para sistemas de equações não lineares são assuntos de temas mais avançados. De qualquer forma o método do comprimento de arco será apresentado no capítulo 5, quando o leitor já estará mais familiarizado com o MEF posicional.

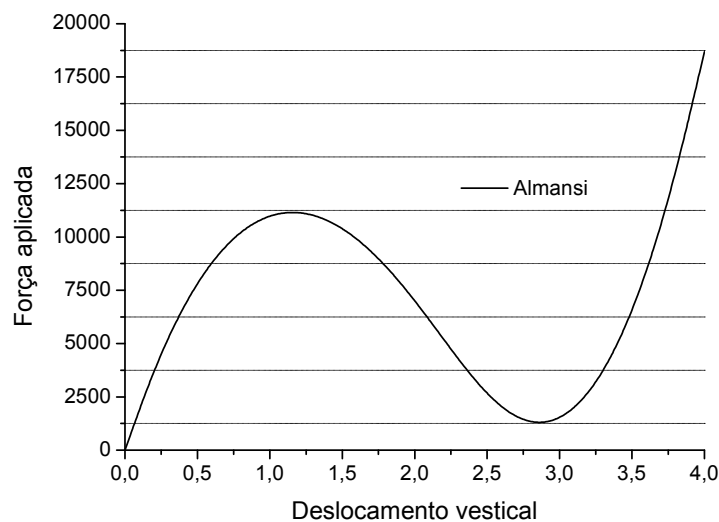


Figura 2.e.3 - Força em função da posição aplicada

2.4 - Formulação dinâmica do MEF posicional para treliças

Os desenvolvimentos dos itens anteriores foram limitados à análise estática de treliças e, para tanto, eliminou-se da energia mecânica total o termo correspondente à energia cinética. Assim, para considerar os efeitos dinâmicos, reescreve-se a equação (1.1) em sua forma completa, ou seja:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K} \quad (2.80)$$

Lembra-se que o elemento de treliça não apresenta rigidez transversal, portanto, em aplicações estáticas não é possível se aplicar forças transversais sobre o elemento, apenas em seus nós. Em problemas dinâmicos essa limitação do elemento de treliça se traduz na necessidade de se considerar a massa da estrutura concentrada em seus nós. Assim, a parcela de energia cinética da equação (2.80) pode ser escrita como a soma das energias cinéticas dos nós da estrutura, como:

$$\mathbb{K} = \sum_{\alpha=1}^{mos} \mathbb{K}_{\alpha} = \frac{1}{2} M_{(\alpha)} \dot{Y}_i^{\alpha} \dot{Y}_i^{\alpha} = \frac{1}{2} M_{\alpha} \left| \dot{\bar{Y}}^{\alpha} \right|^2 \quad (2.81)$$

onde α representa um nó genérico da estruturas, \dot{Y}_i^{α} representa a velocidade do nó na direção i , $\dot{\bar{Y}}^{\alpha}$ é a representação vetorial da velocidade no nó α e M_{α} é a massa associada ao nó. Pode-se adiantar que a massa associada ao nó terá duas parcelas, uma oriunda da massa dos elementos finitos concorrentes ao nó e outra que pode ser atribuída diretamente como entrada de dados que pode corresponder a uma massa agregada à estrutura, como, por exemplo, tanques, silos, contrapesos, dispositivos de controle de vibração etc.

2.4.1 - Equações de equilíbrio dinâmico ou de movimento

As equações de equilíbrio dinâmico, ou de movimento, são encontradas diferenciando-se a equação (2.80) em relação às posições nodais, tal como feito no procedimento estático, veja as equações (2.38) até (2.40). Assim reescreve-se (2.39) incluindo-se a derivada da energia cinética, como:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i^{\alpha}} \delta Y_i^{\alpha} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i^{\alpha}} \delta Y_i^{\alpha} + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_i^{\alpha}} \delta Y_i^{\alpha} + \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial Y_i^{\alpha}} \delta Y_i^{\alpha} = \left(\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i^{\alpha}} + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_i^{\alpha}} + \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial Y_i^{\alpha}} \right) \delta Y_i^{\alpha} = 0 \quad (2.82)$$

É necessário, portanto, desenvolver a parcela associada à variação da energia cinética. A forma mais simples de se desenvolver essa parcela é a partir da igualdade:

$$\delta\mathbb{K} = \frac{\partial\mathbb{K}}{\partial Y_j^\gamma} \delta Y_j^\gamma = \frac{d\mathbb{K}}{dt} \delta t \quad (2.83)$$

onde, pelo fato do tempo ser uma variável independente, pode-se escrever a variação da energia cinética na última forma. Assim, desenvolvendo-se a última parcela, tem-se:

$$\frac{d\mathbb{K}}{dt} \delta t = \frac{1}{2} M_{(\alpha)} \frac{d(\dot{Y}_i^\alpha \dot{Y}_i^\alpha)}{dt} \delta t = \frac{1}{2} M_{(\alpha)} \left(\frac{d\dot{Y}_i^\alpha}{dt} \dot{Y}_i^\alpha + \dot{Y}_i^\alpha \frac{d\dot{Y}_i^\alpha}{dt} \right) \delta t = M_{(\alpha)} \ddot{Y}_i^\alpha \dot{Y}_i^\alpha \delta t = M_{(\alpha)} \ddot{Y}_i^\alpha \delta Y_i^\alpha \quad (2.84)$$

ou seja, unindo-se (2.83) e (2.84) escreve-se:

$$\delta\mathbb{K} = \frac{\partial\mathbb{K}}{\partial Y_i^\alpha} \delta Y_i^\alpha = M_{(\alpha)} \ddot{Y}_i^\alpha \delta Y_i^\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{\partial\mathbb{K}}{\partial Y_i^\alpha} = M_{(\alpha)} \ddot{Y}_i^\alpha \quad (2.85)$$

Na última forma da equação (2.85) não há soma nos nós α , pois esta representa a força de inércia na direção i para o nó α .

Outra forma bem mais complicada de se encontrar a equação (2.85) começa com o seguinte desenvolvimento:

$$\frac{\partial\mathbb{K}}{\partial Y_j^\gamma} \delta Y_j^\gamma = \frac{1}{2} M_\alpha \frac{\partial(\dot{Y}_i^\alpha \dot{Y}_i^\alpha)}{\partial Y_j^\gamma} \delta Y_j^\gamma = \frac{1}{2} M_\alpha \left(\frac{\partial\dot{Y}_i^\alpha}{\partial Y_j^\gamma} \dot{Y}_i^\alpha + \dot{Y}_i^\alpha \frac{\partial\dot{Y}_i^\alpha}{\partial Y_j^\gamma} \right) \delta Y_j^\gamma = M_\alpha \left(\dot{Y}_i^\alpha \frac{\partial\dot{Y}_i^\alpha}{\partial Y_j^\gamma} \right) \delta Y_j^\gamma \quad (2.86)$$

como a velocidade de um nó em uma direção são variáveis independentes da posição de outro nó e de direção diferente, tem-se que

$$\frac{\partial\dot{Y}_i^\alpha}{\partial Y_j^\gamma} = \delta_{\alpha(\gamma)} \delta_{i(j)} \frac{d\dot{Y}_i^\alpha}{dt} \frac{dt}{dY_j^\gamma} = \delta_{\alpha(\gamma)} \delta_{i(j)} \frac{d\dot{Y}_i^\alpha}{dt} \frac{1}{\frac{dY_j^\gamma}{dt}} = \delta_{\alpha(\gamma)} \delta_{i(j)} \frac{\dot{Y}_i^\alpha}{\dot{Y}_j^\gamma} \quad (2.87)$$

que substituído em (2.86) resulta:

$$\frac{\partial\mathbb{K}}{\partial Y_j^\gamma} \delta Y_j^\gamma = M_{(\alpha)} \left(\dot{Y}_i^\alpha \delta_{\alpha(\gamma)} \delta_{i(j)} \frac{\dot{Y}_i^\alpha}{\dot{Y}_j^\gamma} \right) \delta Y_j^\gamma = M_{(\gamma)} \cancel{\dot{Y}_j^\gamma} \frac{\dot{Y}_j^\gamma}{\cancel{\dot{Y}_j^\gamma}} \delta Y_j^\gamma = M_{(\gamma)} \dot{Y}_j^\gamma \delta Y_j^\gamma \quad (2.88)$$

que, tomando-se apenas o primeiro e o último termos recai em (2.85).

Pelo fato das parcelas referentes ao potencial de forças externas e à energia de deformações da equação (2.82) já terem sido desenvolvidas nos itens anteriores, à luz das equações (2.38) e (2.41), usando-se as expressões (2.46) e (2.60) e incluindo-se a equação (2.85) resultam as n equações não lineares de equilíbrio dinâmico, ou de movimento, como:

$$F_i^{\beta \text{ int}}(\vec{Y}) - F_i^{\beta \text{ ext}} + M_{(\beta)} \ddot{Y}_i^\beta = 0_i^\beta \quad \text{ou} \quad F_i^{\text{int}}(\vec{Y}) - F_i^{\text{ext}} + F_i^{\text{iner}} = 0_i \quad (2.89)$$

onde o vetor dos graus de liberdade (posições) da estrutura \vec{Y} é a incógnita do problema e F_i^{iner} pode ser entendida, pelo princípio d'Alambert, como uma força inercial.

A montagem da matriz de massa por elemento finito e a sua composição com massas concentradas adicionais seguem a organização dos graus de liberdade definidas pelas equações (2.32), (2.33) e (2.58).

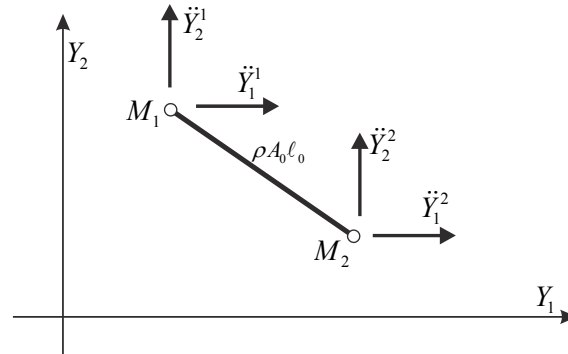


Figura 2.10 - Massas e acelerações nodais para elemento de treliça

Observando-se a figura 2.10, o vetor de forças inerciais de um elemento finito pode ser escrito como:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix}^{iner} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad F_i^{iner} = F_k^{\beta\,iner} \quad \text{com} \quad i = d \cdot (\beta - 1) + k \quad (2.90)$$

para o caso 3D (d=3), com

$$\begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \end{Bmatrix}^{iner} = \begin{Bmatrix} M_1 \ddot{Y}_1^1 \\ M_1 \ddot{Y}_2^1 \\ M_1 \ddot{Y}_3^1 \\ M_2 \ddot{Y}_1^2 \\ M_2 \ddot{Y}_2^2 \\ M_2 \ddot{Y}_3^2 \end{Bmatrix} = \frac{\rho A_0 \ell_0}{2} \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_1^1 \\ \ddot{Y}_2^1 \\ \ddot{Y}_3^1 \\ \ddot{Y}_1^2 \\ \ddot{Y}_2^2 \\ \ddot{Y}_3^2 \end{Bmatrix} = \frac{\rho A_0 \ell_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_1^1 \\ \ddot{Y}_2^1 \\ \ddot{Y}_3^1 \\ \ddot{Y}_1^2 \\ \ddot{Y}_2^2 \\ \ddot{Y}_3^2 \end{Bmatrix} \quad (2.91)$$

onde $M_\alpha = \rho A_0 \ell_0 / 2$. A escrita da equação (2.91) na forma matricial indica que para outros tipos de elementos finitos mais complexos a matriz de massa de um elemento finito pode ser cheia ao invés de diagonal. Além disso, o formato matricial facilita o entendimento da matriz Hessiana dinâmica ou total a ser definida no próximo item. A montagem do vetor de força inercial está implícita na equação (2.90), devendo-se lembrar que ocorre acúmulo das massas vindas de elementos concorrentes no mesmo nó

global, tal como ilustrado para forças internas na figura 2.9. Além disso, nesse acúmulo a imposição de massa adicional é feita por simples soma nos graus de liberdade globais do nó onde essa massa estiver localizada.

2.4.2 - Processo de solução - Newmak + Newton-Raphson

Reescreve-se a equação de movimento (2.89) usando a organização por graus de liberdade e matriz de massa, como:

$$\vec{g} = \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} = \vec{F}^{int}(\vec{Y}) + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} - \vec{F}^{ext}(t) = \vec{0} \quad (2.92)$$

da mesma forma que foi escrita a equação (2.61). Destaca-se nessa equação a dependência do tempo da força externa e obviamente da posição e da força interna em relação à posição. Lembra-se que a matriz de massa é constante e que o vetor \vec{g} só é nulo se a posição de equilíbrio exata no instante de análise for conhecida, caso contrário esse vetor é chamado de vetor de desbalanceamento mecânico.

Sem maiores explicações, não sendo objetivo deste material, por similaridade às análises dinâmicas lineares, inclui-se amortecimento proporcional à velocidade na equação (2.92) como:

$$\vec{g} = \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \vec{Y}}(\vec{Y}) + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\vec{Y}} - \vec{F}^{ext}(t) = \vec{0} \quad (2.93)$$

onde a matriz de amortecimento será considerada proporcional à massa e/ou Rigidez inicial, portanto constante. Na equação (2.93) recuperou-se o significado da força interna como a derivada da energia de deformação em relação às posições nodais.

O processo de solução apresentado nesse item é para problemas transientes, ou seja, quando a força externa varia ao longo do tempo. No próximo item comenta-se a solução de vibração livre, localizando sua utilidade e possível adequação aos problemas não lineares.

A equação (2.93) é válida para qualquer instante de análise da estrutura e o tempo é uma variável contínua. Porém, a solução numérica impõe que o tempo seja tratado de forma discreta, ou seja, o instante atual é calculado como o instante anterior acrescido do passo ou intervalo de tempo, como:

$$t_{s+1} = t_s + \Delta t \quad (2.94)$$

onde t_{s+1} é o instante atual. A equação (2.93) vale para o tempo atual e pode ser reescrita como:

$$\bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{Y}}_{s+1}) = \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\mathbf{Y}}}_{s+1} \bigg|_{s+1} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}}_{s+1} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{Y}}}_{s+1} + \mathbf{C} \cdot \dot{\bar{\mathbf{Y}}}_{s+1} - \bar{\mathbf{F}}_{s+1}^{ext} = \bar{\mathbf{0}} \quad (2.95)$$

onde, por simplicidade, omite-se t .

Seguindo a ideia de se transformar o tempo contínuo em discreto, diversas aproximações temporais (chamados de integradores temporais) são propostas na literatura, um dos mais simples e também mais eficiente para análise estrutural linear é o algoritmo de Newmark. O fato da matriz de massa do MEF posicional ser constante, na maioria das aplicações, permite que esse integrador possua bom desempenho nas análises não lineares. Esta característica se estende para qualquer formulação Lagrangiana total.

As aproximações de Newmark podem ser escritas como:

$$\bar{\mathbf{Y}}_{s+1} = \bar{\mathbf{Y}}_s + \dot{\bar{\mathbf{Y}}}_s \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\bar{\mathbf{Y}}}_s + \beta \ddot{\bar{\mathbf{Y}}}_{s+1} \right] \Delta t^2 \quad (2.96)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{Y}}}_{s+1} = \dot{\bar{\mathbf{Y}}}_s + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\bar{\mathbf{Y}}}_s + \gamma \Delta t \ddot{\bar{\mathbf{Y}}}_{s+1} \quad (2.97)$$

onde β e γ são parâmetros livres. Por exemplo, se $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$ as equações (2.96) e (2.97) recaem nas equações de movimento retilíneo uniformemente acelerado, ou seja, se está considerando aceleração constante em um passo de tempo. Esses valores serão adotados como padrão na solução de problemas usuais, podendo ser alterados, caso se pretenda aplicações como impacto e não linearidades físicas mais severas.

É de interesse se escrever a velocidade e a aceleração atuais em função das posições atuais e de valores conhecidos do passado. Para tanto basta se isolar essas variáveis nas equações (2.96) e (2.97), como

$$\ddot{\bar{\mathbf{Y}}}_{s+1} = \frac{\bar{\mathbf{Y}}_{s+1} - \left(\frac{\bar{\mathbf{Y}}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\bar{\mathbf{Y}}}_s}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\bar{\mathbf{Y}}}_s \right)}{\beta \Delta t^2} = \frac{\bar{\mathbf{Y}}_{s+1}}{\beta \Delta t^2} - \bar{\mathbf{Q}}_s \quad (2.98)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{Y}}}_{s+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \bar{\mathbf{Y}}_{s+1} + \left[\dot{\bar{\mathbf{Y}}}_s + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\bar{\mathbf{Y}}}_s \right] - \left(\frac{\bar{\mathbf{Y}}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\bar{\mathbf{Y}}}_s}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\bar{\mathbf{Y}}}_s \right) \gamma \Delta t = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \bar{\mathbf{Y}}_{s+1} + \bar{\mathbf{R}}_s - \gamma \Delta t \bar{\mathbf{Q}}_s \quad (2.99)$$

com

$$\bar{\mathbf{Q}}_s = \left(\frac{\bar{\mathbf{Y}}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\bar{\mathbf{Y}}}_s}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\bar{\mathbf{Y}}}_s \right) \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{R}}_s = \left[\dot{\bar{\mathbf{Y}}}_s + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\bar{\mathbf{Y}}}_s \right] \quad (2.100)$$

Substituindo-se (2.98) e (2.99) em (2.95) resulta:

$$\bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{Y}}_{s+1}) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}}_{s+1} \bigg|_{s+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \bar{\mathbf{Y}}_{s+1} - \mathbf{M} \cdot \bar{\mathbf{Q}}_s + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \cdot \bar{\mathbf{Y}}_{s+1} + \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{R}}_s - \gamma \Delta t \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{Q}}_s - \bar{\mathbf{F}}_{s+1}^{ext}(t) = \bar{\mathbf{0}} \quad (2.101)$$

A equação (2.101) se resume em $\bar{g}(\vec{Y}_{s+1})=0$, resultando numa equação não linear com respeito à (\vec{Y}_{s+1}) , que será resolvida aplicando-se o Método de Newton-Raphson.

Uma expansão em série de Taylor truncada em primeira ordem é realizada conforme segue:

$$\bar{0} = \bar{g}(\vec{Y}_{s+1}) \cong \bar{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) + \nabla \bar{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \Delta \vec{Y} \quad (2.102)$$

onde

$$\nabla \bar{g}(\vec{Y}_{s+1}) = \mathbf{H} = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vec{Y}^2} \right|_{s+1} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial Y^2} \right|_{s+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} = \mathbf{H}^{estat} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \quad (2.103)$$

onde \mathbf{H}^{estat} é a hessiana estática já calculada nos itens anteriores e usada no código estático.

Da equação (2.103) resulta o sistema linear para o cálculo da correção da posição no instante considerado, ou seja:

$$\nabla \bar{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \cdot \Delta \vec{Y} = -\bar{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \quad \text{ou} \quad \mathbf{H} \cdot \Delta \vec{Y} = -\bar{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \quad (2.104)$$

onde \vec{Y}_{s+1}^0 é uma posição tentativa. No início de um passo de tempo ela é assumida como sendo o resultado do último passo de tempo, ou seja, \vec{Y}_s . Resolvendo-se a correção $\Delta \vec{Y}$ na equação (2.104) uma nova tentativa para \vec{Y}_{s+1} é calculada como:

$$\vec{Y}_{s+1}^0 = \vec{Y}_{s+1} + \Delta \vec{Y} \quad (2.105)$$

equação idêntica à (2.64). A aceleração e a velocidade devem ser recalculadas para cada iteração, usando-se as equações (2.98) e (2.99) reescritas de forma compacta como:

$$\vec{\ddot{Y}}_{s+1} = \frac{\vec{Y}_{s+1}}{\beta \Delta t^2} - \vec{Q}_s \quad \text{e} \quad \dot{\vec{Y}}_{s+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \vec{Y}_{s+1} + \vec{R}_s - \gamma \Delta t \vec{Q}_s \quad (2.106)$$

Lembra-se que \vec{Q}_s e \vec{R}_s ficam constantes durante as iterações, pois são valores do passado e só são atualizados depois da convergência em um passo de tempo para serem usados no próximo passo de tempo. O critério de parada é dado pela equação,

$$\frac{\|\bar{g}(Y^0)\|}{\|\vec{F}^{ext}\|} \leq TOL \quad \text{ou} \quad \frac{\|\Delta \vec{Y}\|}{\|\vec{X}\|} \leq TOL \quad (2.107)$$

Quando o resultado converge \vec{Y}_{s+1}^0 se confunde com a própria solução \vec{Y}_{s+1} que, para o próximo passo de tempo, será novamente \vec{Y}_s , ou seja, a primeira solução tentativa.

No primeiro passo de tempo a aceleração deve ser calculada pela equação de movimento como:

$$\ddot{\vec{Y}}_0 = M^{-1} \left[\vec{F}_0^{ext} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vec{Y}} \Big|_0 - C \dot{\vec{Y}}_0 \right] \quad (2.108)$$

O algoritmo de solução pode ser resumido como segue:

a) Assume-se como primeira tentativa de solução a posição, velocidade e aceleração do final do passo anterior, ou seja, $\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_{s+1}^0 = \vec{Y}_s$, $\dot{\vec{Y}}_{s+1} = \dot{\vec{Y}}_{s+1}^0 = \dot{\vec{Y}}_s$, $\ddot{\vec{Y}}_{s+1} = \ddot{\vec{Y}}_{s+1}^0 = \ddot{\vec{Y}}_s$. Observa-se que os valores atualizados se confundem com os valores tentativa e o mesmo vetor numérico pode ser usado para armazená-los em código computacional.

b) Calcula-se o nível de força aplicado $\vec{F}_{s+1}^{ext}(t_{s+1})$ e/ou posições prescritas $\vec{Y}_{s+1}(t_{s+1})$, calculam-se \vec{Q}_s e \vec{R}_s com as equações (2.100).

c) Usando a posição tentativa, calculam-se nos elementos a força interna F_{s+1}^{int} , equação (2.56) e a matriz Hessiana Estática \mathbf{H}_{s+1}^{estat} pela equação (2.73).

d) Montam-se o vetor global de forças internas e a Hessiana global, usando (2.58), (2.59) e (2.74). Soma-se a parcela dinâmica $\mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}_{s+1} / \beta \Delta t^2 - \mathbf{M} \cdot \vec{Q}_s + \gamma \mathbf{C} \cdot \dot{\vec{Y}}_{s+1} / \beta \Delta t + \mathbf{C} \cdot \vec{R}_s - \gamma \Delta t \mathbf{C} \cdot \vec{Q}_s$ à força interna. Somam-se os termos de massa e amortecimento na Hessiana estática, resultando na Hessiana completa, veja a equação (2.103)

e) Calcula-se o vetor $\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0)$ ou $\vec{g}(\vec{Y}_{s+1})$ pela equação (2.101) e aplicam-se as condições de contorno conforme item 2.3.5, usando-se a Hessiana completa e o vetor de desbalanceamento mecânico.

f) Resolve-se $\Delta \vec{Y}$ no sistema linear (2.104)

g) Atualiza-se a posição, equação (2.105)

h) Atualizam-se a aceleração e velocidade pelas equações (2.106)

i) Calcula-se $|\Delta Y_k| / |X_k|$.

i1) Caso $|\Delta Y_k| / |X_k| < tol$ encontrou-se a posição de equilíbrio do passo de tempo, guarda-se o resultado do passo presente como valores do passado para o

próximo passo, ou seja, $Y_S = Y_{S+1}$, $\dot{Y}_S = \dot{Y}_{S+1}$ e $\ddot{Y}_S = \ddot{Y}_{S+1}$, volta-se ao item (b) para próximo passo de tempo.

i2) Caso $|\Delta Y_k|/|X_k| \geq tol$, volte ao item (c) e faça nova iteração para melhorar a precisão da solução.

2.4.3 - Vibração livre

A vibração livre é um conceito definido para análise linear de estruturas e nada mais é que a solução da equação de movimento para força externa nula (ou constante). Para ser coerente com nossa abordagem não linear, partindo-se da equação (2.92), com força externa nula, escreve-se:

$$\vec{F}^{int}(\vec{Y}) + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}(t) = \vec{0} \quad (2.109)$$

Observa-se que quando a estrutura está na posição inicial \vec{Y}_0 , não há energia de deformação acumulada e, portanto, não há força interna. De toda forma mantém-se a força interna na equação, pois será necessário expandi-la para uma perturbação. Dessa forma, para uma posição $\vec{Y} = \vec{Y}_0 + \delta\vec{Y}$, pode-se escrever a equação (2.109) perturbando-se a força interna como:

$$\cancel{\vec{F}^{int}(\vec{Y}_0)} + \left. \frac{\partial \vec{F}^{int}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}_0} \delta\vec{Y} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}(t) = \vec{0} \quad (2.110)$$

Do fato de \vec{Y}_0 ser estático, resulta que a única causa da aceleração do corpo é a perturbação $\delta\vec{Y}$. Além disso, a derivada da força interna em relação à posição, na configuração inicial, é a Hessiana inicial que define a matriz de rigidez linear, portanto, a equação (2.110) fica reescrita como:

$$\mathbf{H}_0 \cdot \delta\vec{Y} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\delta\vec{Y}}(t) = \vec{0} \quad (2.111)$$

Para a análise linear os deslocamentos são chamados pequenos, e se confundem com uma perturbação, assim, a equação (2.111) é escrita nos textos de análise linear como:

$$\mathbf{H}_0 \cdot \vec{u} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{u}} = \vec{0} \quad (2.112)$$

Apesar de ser objeto mais avançado, é possível se analisar uma 'vibração livre' em torno de uma configuração deslocada qualquer. Para tanto basta se entender \vec{Y}_0 na equação (2.110) como uma posição de equilíbrio estático (não nula) no caminho de

solução. Assim, $\vec{F}^{int}(\vec{Y}_0)$ não é nulo, mas pode ser considerado constante ao longo do tempo, não interferindo na solução dinâmica da equação, definindo apenas a posição de equilíbrio estático entorno da qual o corpo vibraria. Considerando-se \vec{u} o movimento entorno da solução estática, escreve-se a mesma equação (2.112) como,

$$\mathbf{H} \cdot \vec{u} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{u}} = \vec{0} \quad (2.113)$$

sendo \mathbf{H} a Hessiana atual de um nível de carga estático.

Essa equação indica que a vibração depende do nível de tensão (ou de deformação) da estrutura. Um exemplo muito simples disso são as diferentes frequências de vibração de uma mesma corda de violão sujeita a diferentes níveis de tração.

A solução do problema definido por (2.112) ou (2.113) é do tipo,

$$\vec{u} = \vec{A} \text{sen}(wt) + \vec{B} \text{cos}(wt) \quad (2.114)$$

Que substituída em (2.113) ou (2.112) resulta:

$$\mathbf{H} \cdot \vec{u} - \omega^2 \mathbf{M} \cdot \vec{u} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{H} - \omega^2 \mathbf{M}) \cdot \vec{u} = \vec{0} \quad (2.115)$$

Que é um problema de auto-valor auto-vetor, sendo ω as frequências naturais, ou seja:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.116)$$

onde T é o período da vibração. O período (T) pode ser usado para se determinar o intervalo de tempo ideal para as análises transientes do item anterior. Para tanto, observa-se que nem todas as frequências naturais são bem representadas no modelo numérico, pois o número de frequências naturais (numericamente determinadas) é igual ao número de graus de liberdade do problema e os modos correspondentes às frequências mais altas possuem geometria inadequada.

Por exemplo, para o problema da figura 2.6 tem-se 16 frequências naturais obtidas na solução numérica de (2.115), mas ao se estudar os modos de vibração (auto-vetores) se constata que apenas 3 ou 4 frequências contribuem com boa precisão para um movimento geral de estruturas daquele tipo. Assim, como sugestão para definição do passo de tempo para uma análise transiente, toma-se a maior entre as 5% menores frequências de vibração (ou a terceira, quando 5% for numericamente menor ou igual a 3), calcula-se o período correspondente pela equação (2.116) e se divide T pelo número de intervalos de tempo (ntp) que se pretende modelar esse período, ou seja:

$$\Delta t = T_{5\%} / ntp \quad (2.117)$$

Obviamente que a expressão (2.117) é apenas uma estimativa de passo de tempo para problemas onde predominam movimentos vibratórios. Quando o movimento predominante é ondulatório (propagação de ondas em meios contínuos) o intervalo de tempo pode ser definido como a razão entre o comprimento característico do elemento e a velocidade de onda longitudinal para o meio modelado, como:

$$\Delta t = \ell_0 / C_t \quad \text{com} \quad C_t = \sqrt{E / \rho} \quad (2.118)$$

sendo E o módulo de elasticidade do meio e ρ a sua densidade.

Muito cuidado deve ser tomado no uso das unidades em problemas dinâmicos, todas as grandezas devem estar escritas para as mesmas unidades básicas, que são comprimento, massa e tempo. Por exemplo, força é constituída por ML / T^2 .

2.4.4 - Exemplos para validação

Neste item alguns exemplos são mostrados para validar os códigos computacionais desenvolvidos pelos alunos. Os exemplos são representativos e têm a intenção de, além de possibilitar a conferência dos programas dos alunos, esclarecer alguns aspectos mais diretos da análise dinâmica de estruturas.

2.4.4.a - Movimento de uma barra devido ao impacto longitudinal

Esse exemplo consiste na barra da figura a1 submetida à carga indicada (subitamente aplicada). As propriedades físicas adotadas sem preocupação com unidades (valores introduzidos no programa) são: $E = 10^4$, $A = 1$ e $\rho = 1$. A carga aplicada vale $F(t) = H(t)$ ou seja, a função ressalto unitária no tempo a partir do instante inicial, veja figura a1.

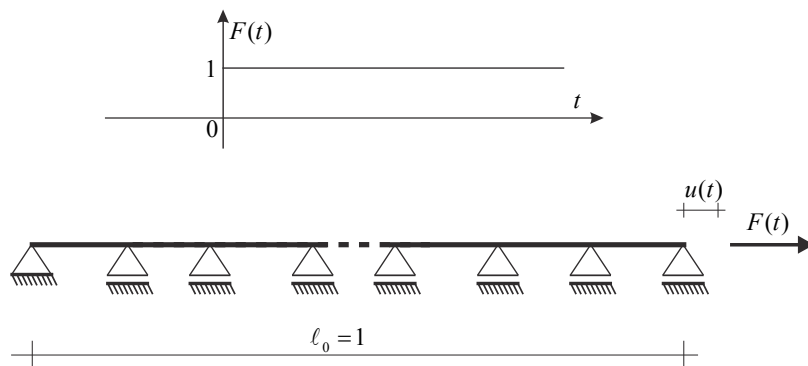


Figura a1 - Ilustração do problema e carga aplicada

Os apoios móveis apresentados na figura a1 indicam que cada nó da discretização só possui o grau de liberdade na direção da carga aplicada, tornando o problema passível de solução (matriz hessiana não singular) por meio de elementos de barra simples. Duas discretizações diferentes foram adotadas, uma com dez elementos finitos de comprimento $\Delta\ell_{10} = 0,1$ e outra com cem elementos de $\Delta\ell_{100} = 0,01$. Por ser um problema tipicamente ondulatório, calcula-se o intervalo de tempo utilizando-se as expressões (2.118), para as quais resultam $C_\ell = 100$, $\Delta t_{10} = 0,001$ e $\Delta t_{100} = 0,0001$. O modelo constitutivo de Hooke foi adotado para as duas discretizações. O deslocamento estático, avaliado em pequenos deslocamentos, da extremidade carregada é $u_{est} = 10^{-4}$. Na figura a2 apresenta-se o comportamento desse deslocamento em relação ao tempo comparando-o com a solução analítica em pequenos deslocamentos que pode ser encontrada em qualquer bom material de dinâmica linear de estruturas. O tempo total de análise para a estrutura foi de $t_{tot} = 0,1$.

Conforme se observa, quando se aumenta o número de elementos finitos a resposta numérica se aproxima da resposta analítica. Esse exemplo revela que o algoritmo de Newmark foi adequadamente implementado.

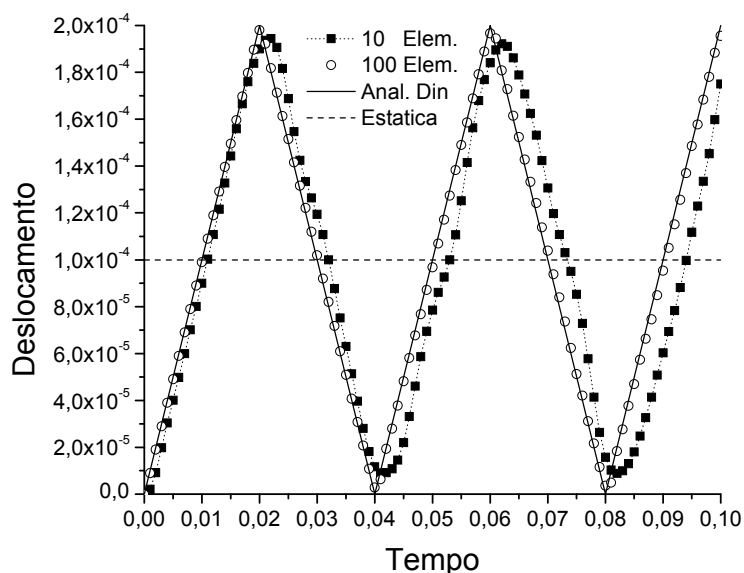


Figura a2 - Deslocamento em função do tempo para carga repentina

Com relação aos aspectos de análise dinâmica, mesmo em problemas com características ondulatórias, vale comentar que soluções em elementos finitos são necessariamente vibratórias, ou seja, composição de modos de vibração. Isto ocorre,

pois problemas associados a meios contínuos possuem um número infinito de graus de liberdade que são transformados em um número finito nas análises numéricas..

2.4.4.b - Viga engastada submetida a carregamento transversal concentrado

A estrutura da figura b1 é constituída por barras horizontais, verticais e inclinadas. As barras horizontais possuem área de seção transversal $A_h = 50\text{cm}^2 = 5 \times 10^{-3}\text{m}^2$ enquanto as barras verticais e inclinadas possuem $A_{vi} = 81,2\text{cm}^2 = 8,12 \times 10^{-3}\text{m}^2$. Adota-se $E = 200\text{Mg} / [\text{m} \cdot (\text{ms})^2] = 200\text{GPa}$ para toda a estrutura e densidade $\rho = 7\text{Mg} / \text{m}^3 = 7000\text{kg} / \text{m}^3$.

A força transversal é aplicada na extremidade livre de forma súbita com valor $F = 12,5 \times 10^{-6}\text{Mg m} / (\text{ms})^2 H(t)$ ou $F = 12,5\text{kN} H(t)$. Para se ter números bem comportados em processamento numérico, a entrada de dados no programa foi feita utilizando-se as unidades $\text{Mg} = 1000\text{kg}$, $\text{ms} = 10^{-3}\text{s}$ e metros. A lei constitutiva aplicada é de Hooke.

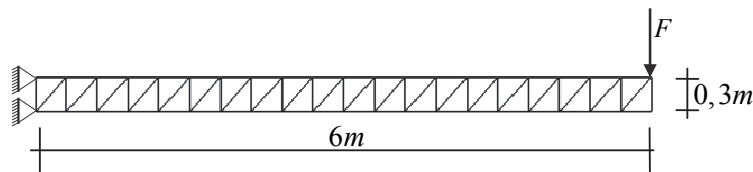


Figura b1 - Viga treliçada sujeita a carga transversal

Observa-se que todas as propriedades físicas são escritas com grandezas básicas. Por exemplo, em problemas estáticos é usual se usar a unidade de módulo de elasticidade na forma $E \propto F / A$, mas, para problemas dinâmicos é mais adequado se fazer: $F \propto ML / T^2$ e $A \propto L^2$, que resulta $E \propto M / (LT)$. Isto é feito de formas a não se cometer alguns erros comuns presentes na literatura, como a mistura de unidades de comprimento ao se utilizar, por exemplo, $E \propto \text{kN} / \text{cm}^2$.

Essa viga treliçada possui momento de inércia e massa total equivalentes a uma barra maciça engastada de mesmo comprimento com seção transversal retangular de dimensões $10 \times 30\text{cm}$. Essa equivalência é verificada pela solução numérica estática do problema que resulta em um deslocamento transversal no ponto de aplicação da carga de $\delta^{num} = 2,02\text{cm}$ que é apenas 1% maior que o deslocamento da viga maciça. As frequências de vibração encontradas são $\omega_1^{num} = 0,0445\text{rad} / (\text{ms})$,

$\omega_2^{num} = 0,26427 \text{ rad} / (\text{ms})$ e $\omega_3^{num} = 0,68673 \text{ rad} / (\text{ms})$ enquanto para a viga maciça tem-se os seguintes resultados analíticos $\omega_1^{anal} = 0,048 \text{ rad} / (\text{ms})$, $\omega_2^{anal} = 0,300 \text{ rad} / (\text{ms})$ e $\omega_3^{anal} = 0,840 \text{ rad} / (\text{ms})$. Observa-se que a primeira frequência apresenta uma boa concordância, indicando que a rotina de cálculo de autovalores foi implementada adequadamente. Obviamente que as demais frequências vão se afastando, pois a equivalência proposta é bastante simplificada.

Na figura b2 apresentam-se os três primeiros modos de vibração calculados para a posição inicial com suas frequências naturais. É importante comentar que os modos de vibrar apresentados por *solvers* de autovalor – autovetor podem apresentar diferenças, pois as intensidades e sinais dos modos são arbitrários.

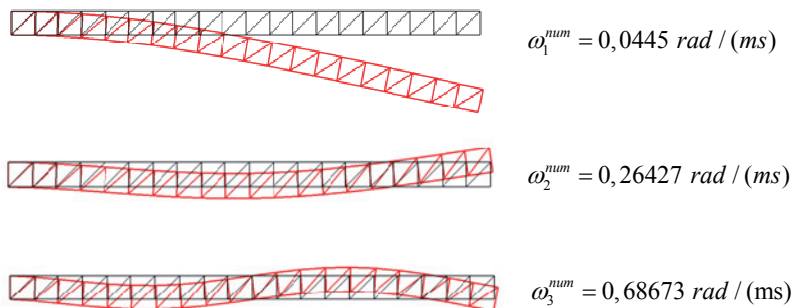


Figura b2 - Modos de vibrar (sem escala) e frequências naturais

Na figura b3 mostra-se o comportamento temporal do deslocamento transversal do ponto carregado da viga treliçada sujeita ao carregamento súbito aplicado. O deslocamento máximo ainda é pequeno, assim, o deslocamento transversal máximo esperado é aproximadamente o dobro do deslocamento estático.

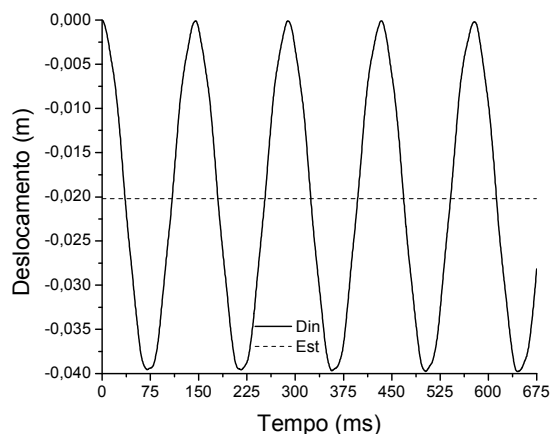


Figura b3 - Deslocamento transversal do ponto carregado para ao longo do tempo com $F = 12,5 \times 10^{-6} \text{ Mg m} / (\text{ms})^2$.

O intervalo de tempo adotado foi estimado automaticamente pelo código a partir da equação (2.117) e vale $\Delta t = 0,3377\text{ms}$, que corresponde à sexta frequência natural que vale $\omega_6^{num} = 1,86042 \text{ rad} / (\text{ms})$.

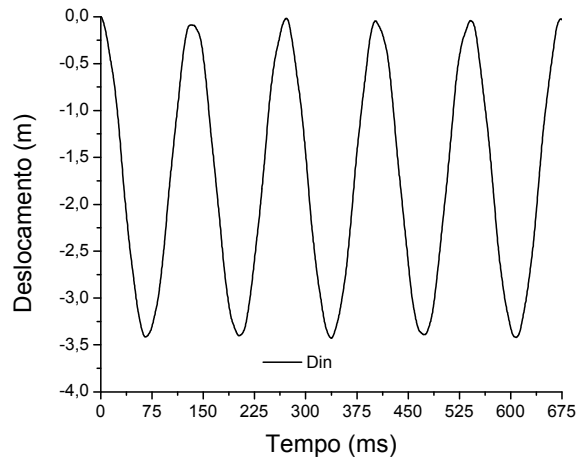


Figura b4 - Deslocamento transversal do ponto carregado ao longo do tempo com

$$F = 12,5 \times 10^{-4} \text{ Mg m} / (\text{ms})^2 .$$

Na figura b4 apresenta-se o resultado do mesmo problema para uma carga aplicada cem vezes maior, ou seja $F(t) = 12,5 \times 10^{-4} \text{ Mg m} / (\text{ms})^2 H(t)$. Como se pode observar o deslocamento transversal não aumentou proporcionalmente ao aumento da carga, além disso a "frequência" de vibração aumentou. Esse fato ocorre porque ao se desenvolver um grande deslocamento a rigidez longitudinal da estrutura foi acionada e esta é maior que a rigidez transversal.

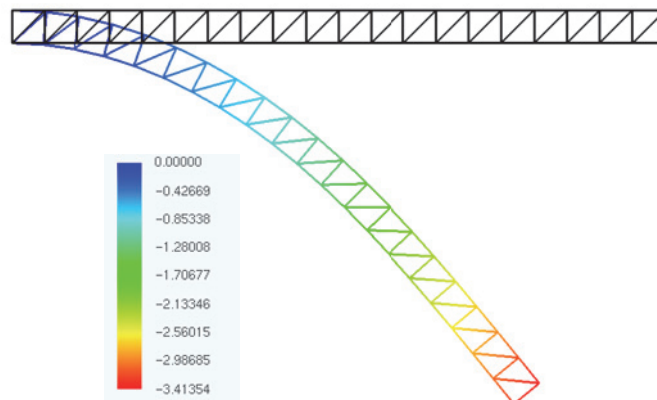


Figura b5 - Configuração correspondente ao $t = 65,85715\text{ms}$.

Para se ter uma ideia do nível de deslocamento considerado na análise da figura b4, apresenta-se na figura b5 a configuração da estrutura no passo de tempo 195, correspondente ao tempo $t = 65,85715\text{ms}$. A palavra frequência foi utilizada entre

aspas, pois problemas não lineares não possuem exatamente um modo de vibrar e, apesar dos níveis de deslocamento passarem por picos de valores semelhantes, veja a figura b4, a forma da curva nunca se repete exatamente.

2.4.4.c - Pórtico treliçado sujeito a carregamento transversal súbito

Esse exemplo é parecido com o exemplo anterior, pois é uma estrutura com resposta tipicamente vibratória. A geometria do problema, pórtico treliçado submetido a carregamento vertical, é apresentada na figura c1. Todas as barras da estrutura possuem área de seção transversal $A = 12\text{cm}^2 = 1,2 \times 10^{-3}\text{m}^2$, correspondente a uma seção tubular retangular de altura 10cm , base de 5cm e espessura $0,4\text{cm}$. Toda a estrutura é constituída de material com módulo de elasticidade $E = 210\text{Mg} / [\text{m} \cdot (\text{ms})^2] = 210\text{GPa}$ e densidade $\rho = 7\text{Mg} / \text{m}^3 = 7000\text{kg} / \text{m}^3$, ou seja, aço. As forças transversais aplicadas conforme mostra a figura valem $F(t) = 5,0 \times 10^{-5}\text{Mg} \text{m} / (\text{ms})^2 H(t)$ ou $F = 50\text{kN} H(t)$. Uma análise estática foi realizada e o deslocamento vertical do ponto A resultou em $v_A = 5,48\text{cm}$.

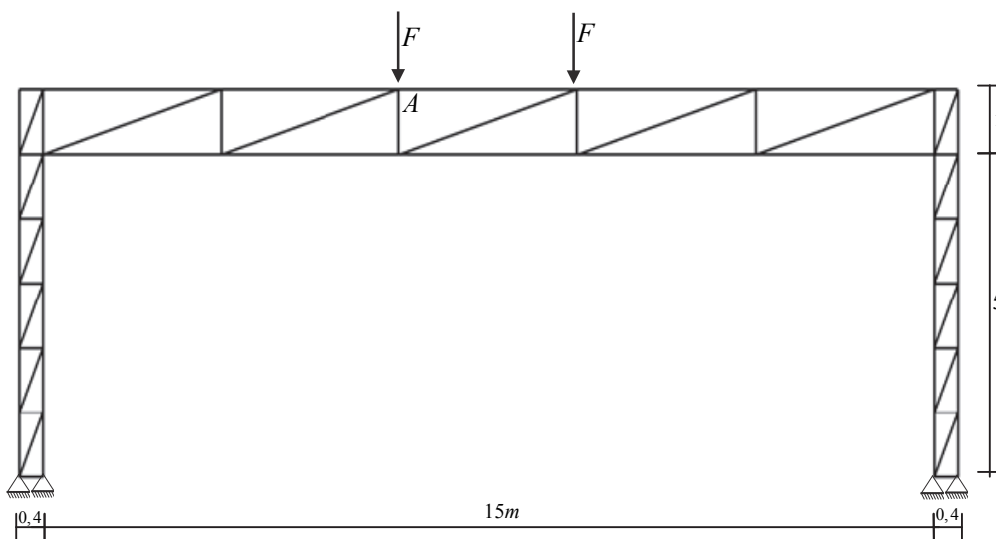


Figura c1 - Geometria e carregamento do problema

Os quatro primeiros modos de vibrar e suas correspondentes frequências naturais são apresentados na figura c2. O intervalo de tempo foi calculado automaticamente no código utilizando-se a fórmula (2.117) resultando $\Delta t = 1,6005\text{ms}$ correspondente à $1/10$ da quinta frequência natural $\omega_5 = 0,39256\text{rad} / (\text{ms})$. O mesmo comentário feito para a figura b2 valem aqui e para todas as análise de modos de vibração

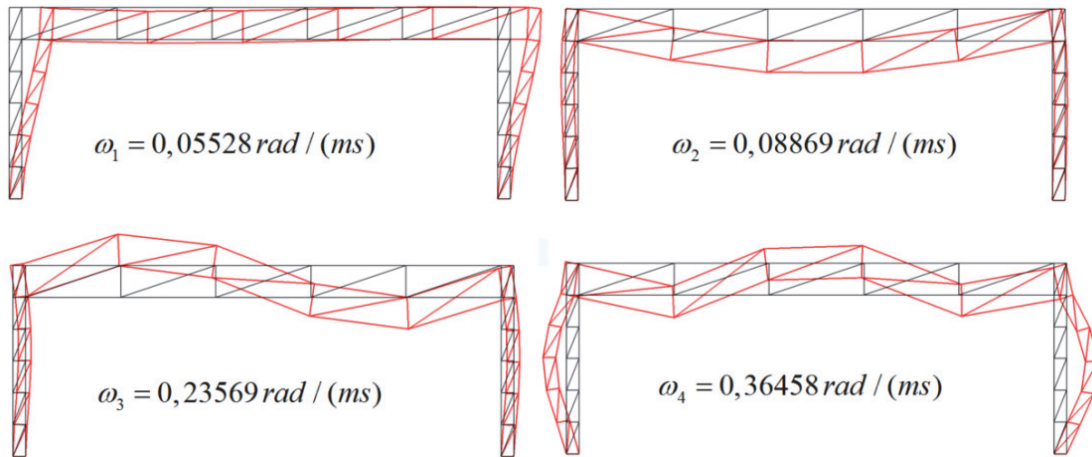


Figura c2 - Primeiros quatro modos de vibrar - sem escala

Na figura c3 mostra-se o comportamento vertical do ponto *A* ao longo do tempo comparado com a resposta estática. Observa-se a estabilidade do algoritmo de Newmark pela grande duração em períodos da análise realizada.

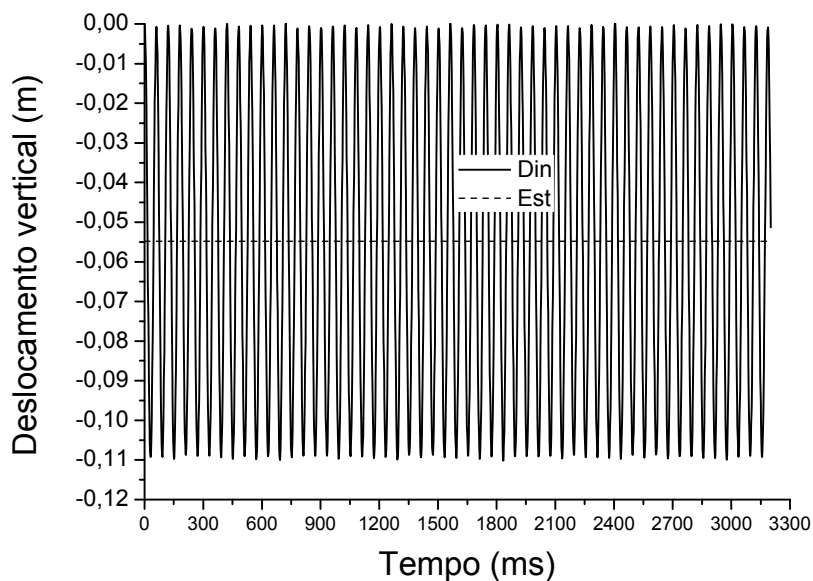


Figura c3 - Deslocamento vertical ao longo do tempo para carga original

Na figura c4 apresenta-se a mesma análise para uma carga 10 vezes maior, ou seja $F(t) = 5,0 \times 10^{-4} Mg m / (ms)^2 H(t)$ ou $F = 500 \text{ kN } H(t)$. Diferentemente do exemplo anterior a estrutura ficou levemente mais flexível quando grandes deslocamentos aconteceram. Na figura c5 apresenta-se uma posição de máximo deslocamento transversal, revelando os grandes deslocamentos dessa análise.

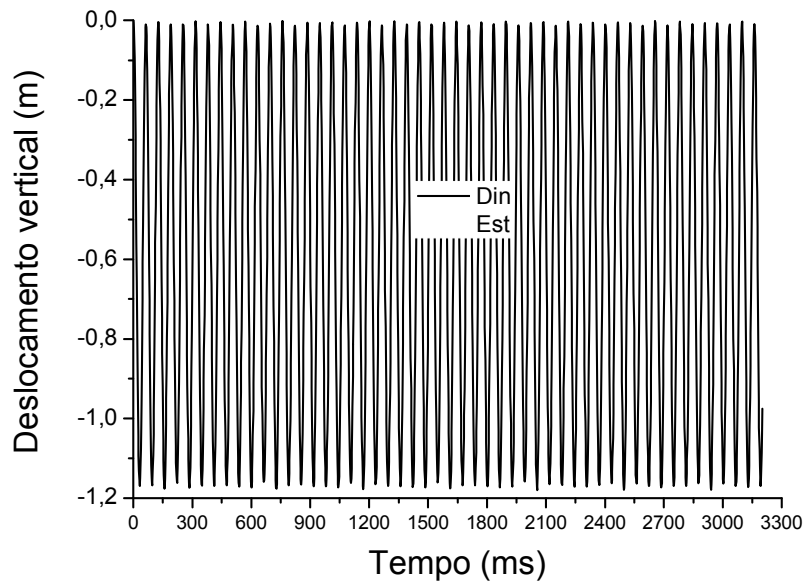


Figura c4 - Deslocamento vertical ao longo do tempo para carga 10x a original

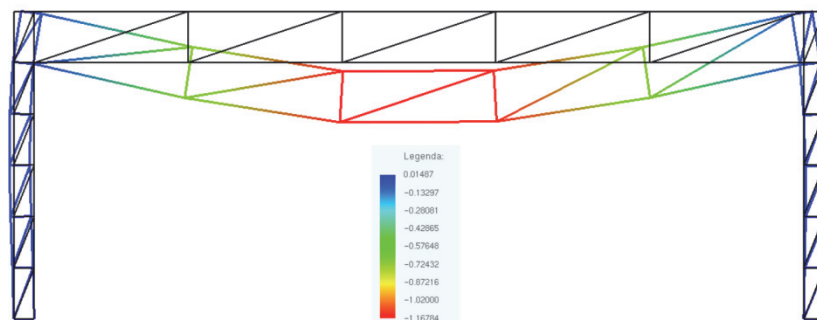


Figura c5 - Configuração do passo 60, $t = 93,03ms$, escala real

2.4.4.d - Viga treliçada engastada sujeita à ação de força senoidal

A mesma viga do exemplo **b** é submetida à força transversal de mesma intensidade, mas com variação senoidal próxima à primeira frequência harmônica da estrutura, ou seja, $F(t) = F = 12,5 \times 10^{-6} Mg m / (ms)^2 \text{sen}(0,04445t)$. O deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga é mostrado na figura d1 para a estrutura original e para a estrutura com acréscimo de massa concentrada (igual à da estrutura) no ponto de aplicação da carga. O tempo de análise adotado é $9,42s$ e o intervalo de tempo é $\Delta t = 4,71ms$.

Caso a frequência da carga fosse exatamente a frequência da estrutura a amplitude de deslocamentos cresceria indefinidamente levando o código à perda de estabilidade após um tempo de análise.

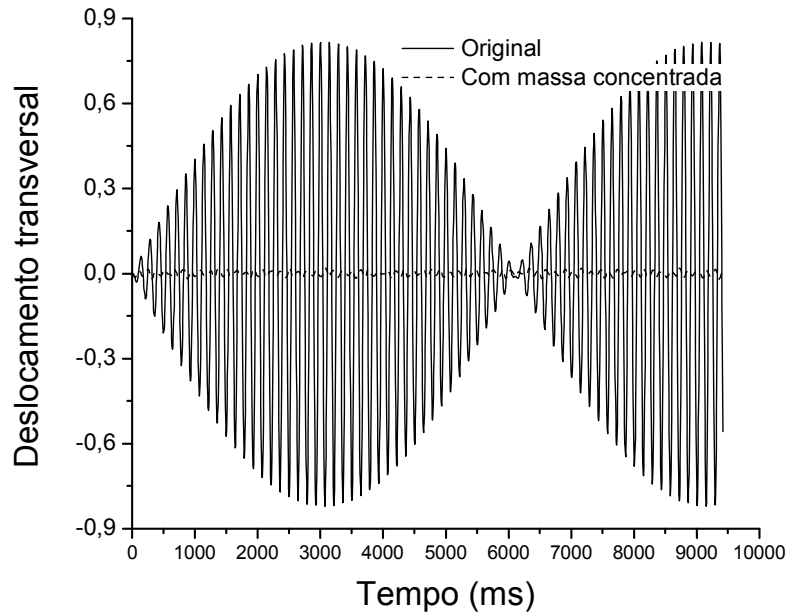


Figura d1 - Comportamento não linear de estrutura sob carga em frequência harmônica

No exemplo **b** o máximo deslocamento é da ordem de 4cm para a mesma intensidade da carga (porém súbita) aplicada nessa estrutura. Como se observa na figura d1 o efeito de *quase* ressonância conduz a um deslocamento transversal máximo de quase 90cm para vão de 6m . Entretanto, a diferença entre a frequência da carga e a primeira frequência natural causa uma oposição de fase que leva à redução da amplitude do movimento e, quando a fase se ajusta, novo aumento da amplitude. Esse tipo de comportamento é conhecido como batimento.

Na figura d1 mostra-se também a redução da amplitude do movimento ao se acrescentar uma massa elevada no ponto de aplicação da carga (alteração da frequência natural), estratégia usada para criar dispositivos de controle de vibração por massa. Esse controle ocorre pela mudança da frequência natural de vibração da estrutura, afastando-a da frequência de excitação causada, por exemplo, por máquinas. Nesse caso, a introdução da massa reduz as primeiras frequências de vibração da estrutura.

2.4.4.e - Influência da protensão nas frequências naturais de estruturas

Nesse exemplo, as frequências de vibração da viga treliçada da figura e1 são calculadas para os cinco casos descritos a seguir.

Caso a: Viga simplesmente apoiada sem cabo central

Caso b: Viga simplesmente apoiada com cabo central frouxo

Caso c: Viga simplesmente apoiada com cabo central protendido

Caso d: Viga simplesmente apoiada com barra única sem protensão ligando as extremidades

Caso e: Viga simplesmente apoiada sem cabo com força externa simulando a protensão

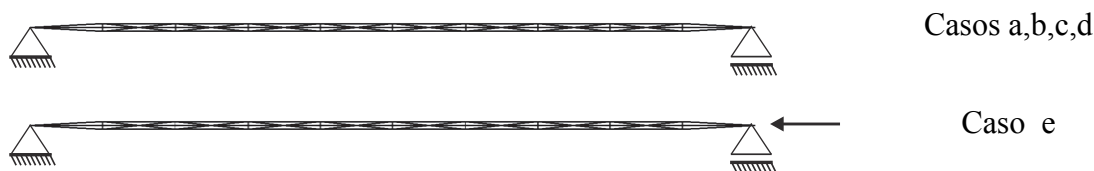


Figura e1 - Casos de análise dos modos de vibração

O vão total da viga é de $\ell = 10m$ com cada trecho igualmente espaçado de $\Delta\ell = 1m$ e altura total de $h = 10cm$. As propriedades utilizadas para as barras da treliça são $A = 2.0 \times 10^{-3} m^2$, $\rho = 7Mg/m^3$ e $E = 200GPa$. Adotaram-se a mesma área, porém a densidade dos elementos do cabo é $0,7Mg/m^3$ e seu módulo de elasticidade é $E = 2000GPa$. Nos casos b e c foram utilizados 10 elementos de cabo (elementos de treliça justapostos) de mesmo comprimento unindo as extremidades da viga, mas sem contato com os nós internos da treliça. O modelo constitutivo adotado foi o de Almansi linear para todos os casos. A barra única do caso d possui as mesmas características físicas dos elementos de cabo.

A protensão foi realizada em duas etapas: Na primeira simula-se a estrutura estaticamente aplicando-se uma redução de $1,5 \times 10^{-4}m$ em cada elemento de cabo, providenciando-se apoios com mobilidade horizontal nos nós dos cabos para que a estrutura não apresente Hessiana singular. Na segunda etapa, lê-se a posição final de todos os nós da primeira etapa como posição inicial diferente da posição de repouso (novo esquema de entrada de dados deixado para o leitor resolver) aplicando-se ao mesmo tempo a redução das barras para que a resultante de forças em todos os nós fique nula.

Nessa segunda etapa, quando o cabo está protendido, os apoios móveis nos cabos não precisam existir (mesmo se a análise fosse estática), pois a Hessiana não será mais singular. Quando o cabo está frouxo, mesmo sem os apoios, é possível realizar análise de modos de vibração, apesar da Hessiana estática ser singular. Processa-se o programa, calculando-se os auto-valores e auto-vetores pela equação (2.113). Esse

exemplo poderia ter uma análise dinâmica transiente adicional, porém não é esse seu objetivo.

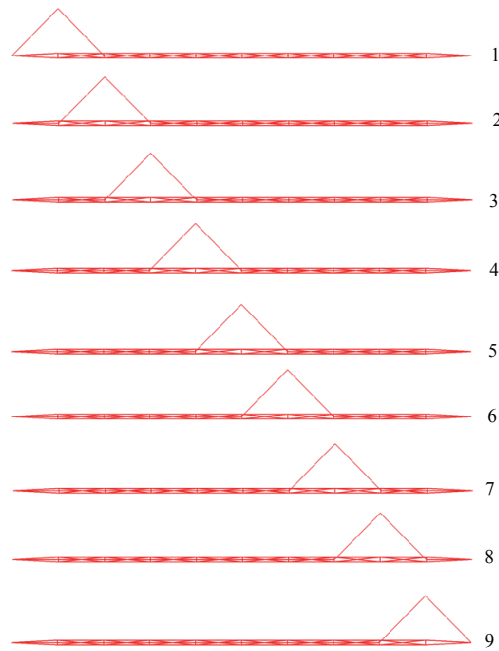


Figura e2 - Primeiras frequências de vibração para estrutura com cabo frouxo $\omega = 0$

Por curiosidade na figura e2 apresentam-se os primeiros modos do caso b que correspondem à frequência nula de vibração para o cabo frouxo. O valor nulo da frequência indica que a matriz Hessiana (parcela singular) não se opõe a esse movimento, ou seja, em pequenos deslocamentos o cabo é totalmente livre (hipostático) para se movimentar e a superposição dos auto-vetores comporiam seu movimento.

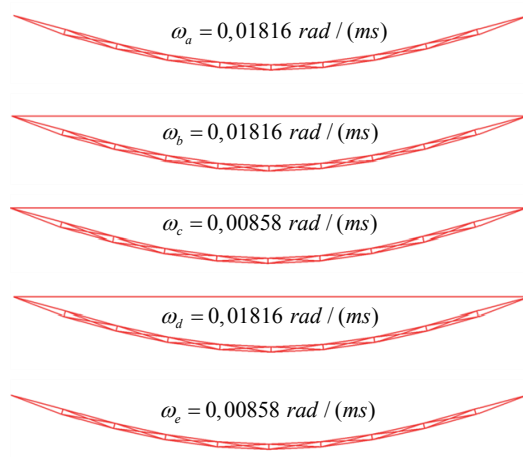


Figura e3 - Primeiros modos de vibração e frequências para todos os casos

Na figura e3 apresenta-se o primeiro modo com auto-valor não nulo de todos os casos. Observa-se que os casos c e e apresentam a primeira frequência de vibração

menor, ou seja, a parcela não linear da matriz Hessiana, dependente dos níveis de tensão, alteram a rigidez do problema, alterando, conseqüentemente, seu modo de vibrar. Na figura e4 apresentam-se os 6 primeiros modos de vibrar da estrutura protendida, deve-se observar como se intercala a predominância das frequências da estrutura e do cabo de protensão.

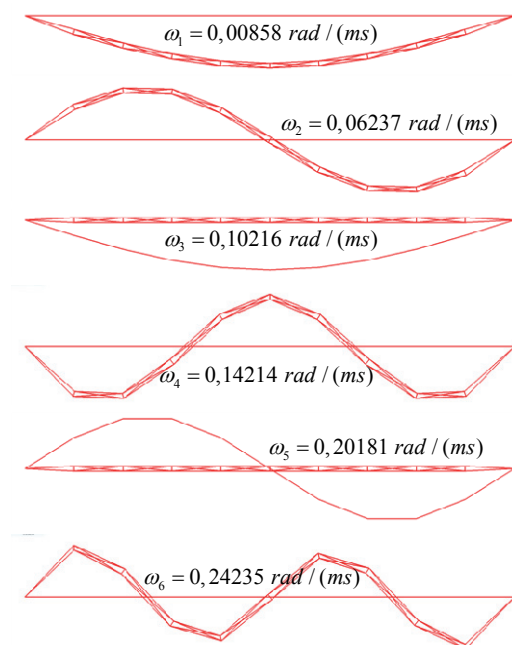


Figura e4 - Modos de vibração da estrutura protendida

2.5 - Bibliografia Recomendada

Além dos trabalhos científicos do autor, recomenda-se a leitura da bibliografia a seguir:

- 1) WARBURTON, G.B., The Dynamical Behaviour of Structures, Pergamon Press, 1976.
- 2) CODA, H.B., Análise tridimensional transiente de estruturas pela combinação entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos, Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP, 1993.
- 3) CARRAZEDO, R. Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos, Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP, 2009.

3 - Cinemática dos corpos deformáveis

Nesse capítulo procura-se apresentar os conceitos cinemáticos para corpos deformáveis (contínuos) para qualquer nível de deslocamento e deformação, ou seja, o texto não está limitado a pequenas deformações e pequenos deslocamentos, como na maioria dos textos dedicados aos estudantes de engenharia. O capítulo é dedicado a fornecer os subsídios necessários à extensão do MEF posicional à análise de problemas sólidos, barras gerais e cascas. A exposição será feita de forma gradual abordando os conceitos estritamente necessários à elasticidade não linear em sua versão Lagrangiana total.

3.1 - Conceituação uniaxial

Para se conceituar a deformação longitudinal observe o ensaio de tração da barra indicada na figura 3.1. Antes de se aplicar a força \vec{F} , na configuração inicial, marcaram-se dois pontos x^A e x distantes Δx entre si. Após a aplicação da ação externa ocorre uma mudança de configuração, para a qual os pontos marcados passaram a ocupar as posições $y^A = f(x^A)$ e $y = f(x)$. A função f indica a mudança de configuração que poderia não ser fruto da ação de uma força, mas de temperatura ou outro tipo de ação qualquer.

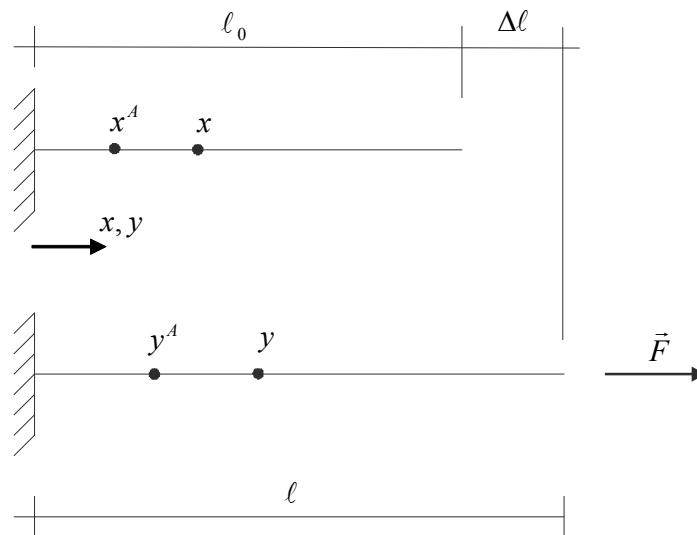


Figura 3.1 – Mudança de configuração

Na configuração atual a distância entre os pontos marcados passa a ser $\Delta y = y - y^A = f(x) - f(x^A)$. Da figura 3.1 define-se deformação longitudinal média de engenharia, como:

$$\varepsilon_{med} = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \quad (3.1)$$

Para se medir com maior precisão a deformação no ponto A , pode-se definir deformação média na vizinhança finita de A como:

$$\varepsilon_{med}^{viz} = \frac{\Delta y - \Delta x}{\Delta x} = \frac{(y - y^A) - (x - x^A)}{(x - x^A)} \quad (3.2)$$

A equação (3.2) pode ser reescrita de duas formas:

$$\varepsilon_{med}^{viz} = \frac{\Delta y - \Delta x}{\Delta x} = \frac{(f(x) - f(x^A))}{(x - x^A)} - 1 \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_{med}^{viz} = \frac{\Delta y - \Delta x}{\Delta x} = \frac{(y - x) - (y^A - x^A)}{(x - x^A)} = \frac{u(x) - u(x^A)}{(x - x^A)} \quad (3.4)$$

onde u é o deslocamento na direção uniaxial de um ponto genérico. Define-se a deformação no ponto A fazendo-se o limite das equações (3.3) ou (3.4) quando x se aproxima de x^A , ou seja, a vizinhança passa a ser infinitesimal, como:

$$\varepsilon(x^A) = \left(\lim_{x \rightarrow x^A} \frac{(f(x) - f(x^A))}{(x - x^A)} \right) - 1 = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x^A} - 1 = \lambda(x^A) - 1 \quad (3.5)$$

$$\varepsilon(x^A) = \left(\lim_{x \rightarrow x^A} \frac{(u(x) - u(x^A))}{(x - x^A)} \right) = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x^A} \quad (3.6)$$

A expressão (3.6) informa que a deformação longitudinal em um problema uniaxial pode ser expressa como a derivada do deslocamento em relação à coordenada que define o problema. Esta expressão é, em geral, a mais usada e conhecida, porém em elasticidade não linear a forma (3.5) resulta em procedimentos de cálculo mais simples. Neste caso a grandeza λ é chamada alongamento de Cauchy-Green, ou simplesmente alongamento. Ainda, como o ponto A é arbitrário, as fórmulas (3.5) e (3.6) valem para qualquer posição x , ou seja:

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} - 1 = \frac{dy}{dx} - 1 = \lambda(x) - 1 = \frac{dy - dx}{dx} \quad (3.7)$$

onde as representações que usam y no lugar de $f(x)$, apesar de matematicamente deselegantes, levam a um entendimento físico importante associado que remete à definição da deformação média de engenharia. Ou seja, a razão entre a diferença dos comprimentos infinitesimais final e inicial pelo comprimento inicial de uma fibra do material é a deformação longitudinal de engenharia no ponto. Da mesma forma o alongamento relativo $\lambda(x)$ em um ponto é dado pela razão entre comprimento infinitesimal final e o comprimento infinitesimal inicial de uma fibra do material.

Quando a configuração inicial do corpo é tomada como referência, a medida de deformação e todas as outras grandezas associadas são chamadas Lagrangianas. Caso a configuração atual de um corpo seja tomada como referência, a deformação (por exemplo $\ln(dx/dy)$) e todas as outras grandezas associadas são chamadas Eulerianas.

Sem a simplificação de pequenos deslocamentos, a Tensão de Cauchy é uma grandeza Euleriana, pois é definida na configuração atual do corpo. Entretanto, na elasticidade linear (que não é o objeto desse texto) esta tensão é tratada como se fosse Lagrangiana, pois a configuração atual (ou final) se confunde com a inicial, simplificação que não é admitida na elasticidade não linear.

3.2 - Deformação de engenharia multiaxial

A deformação longitudinal definida no item anterior, principalmente no formato da equação (3.6), é muito utilizada nos textos relacionados à elasticidade linear e lá é chamada simplesmente de deformação uniaxial. Observa-se que no ensaio mostrado na figura 3.1 a fibra analisada mudou de posição seguindo a direção horizontal, ou seja, sem apresentar rotação. Essa limitação faz com que sua definição seja limitada a problemas lineares. Aqui, sem limitação do nível dos deslocamentos, as componentes longitudinal e distorcional de deformação, na conceituação de engenharia, serão definidas para sólidos gerais. As ilustrações serão apresentadas para corpos bidimensionais, porém as definições e fórmulas são aplicadas para sólidos bi e tridimensionais.

3.2.1 - Deformação longitudinal

Todo sólido deformável em equilíbrio estático ou em movimento, sujeito a ações externas, muda de forma ou de configuração, veja a figura 3.2. A função \vec{f} (invertível) descreve a mudança da configuração inicial B_0 para a configuração atual B de um

corpo genérico. Esta função é considerada, nesse estudo, contínua e continuamente diferenciável até a segunda derivada e é chamada simplesmente função mudança de configuração. O uso de \vec{f} para descrever o comportamento geral do sólido resulta em análise Lagrangiana, pois a referência é a configuração inicial. A utilização de sua inversa (\vec{g}), para descrever o comportamento do sólido resulta em uma descrição Euleriana.

Nosso estudo será voltado à descrição Lagrangiana, porém, para ser mais completo, algumas grandezas eulerianas serão comentadas.

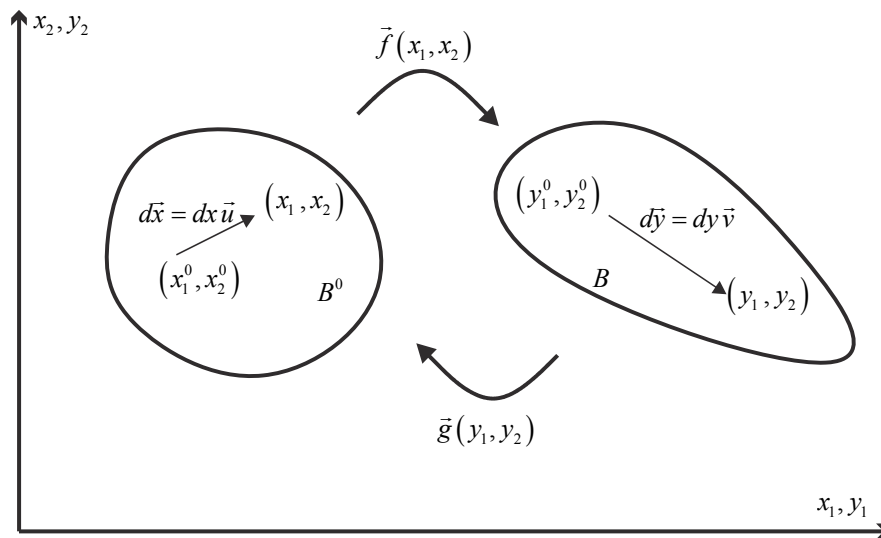


Figura 3.2 – Mudança de configuração

Na figura 3.2 os vetores infinitesimais $d\vec{x}$ e $d\vec{y}$ são dados pelos seus comprimentos infinitesimais dx e dy (sempre positivos, pois o material não pode degenerar - virar do avesso) e por suas direções, especificadas pelos versores \vec{u} e \vec{v} .

Do cálculo diferencial escreve-se a função mudança de configuração \vec{f} calculada em um ponto (x_1, x_2, x_3) em uma vizinhança de (x_1^0, x_2^0, x_3^0) como:

$$\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \vec{f}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + Grad(\vec{f}) \cdot d\vec{x} \quad (3.8)$$

Passando-se $\vec{f}(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ para o lado esquerdo da equação retorna a relação entre $d\vec{y}$ e $d\vec{x}$ como:

$$d\vec{y} = d\vec{f} = Grad(\vec{f}) \cdot d\vec{x} = A \cdot d\vec{x} \quad (3.9)$$

ou, em notação indicial, :

$$dy_i = f_{i,j} dx_j = a_{ij} dx_j \quad (3.10)$$

Para simplificar a notação dyadica, chamou-se o gradiente da função mudança de configuração de A , tensor de ordem 2.

Aproveitando-se dos conceitos do cálculo vetorial, calcula-se o comprimento dy como,

$$dy^2 = d\bar{y}^t \cdot d\bar{y} \quad (3.11)$$

onde o símbolo transposto é utilizado para auxiliar na notação dos tensores de ordem 2 a serem aplicados. Substituindo-se a equação (3.9) na equação (3.11) resulta:

$$dy^2 = d\bar{x}^t \cdot A^t \cdot A \cdot d\bar{x} \quad (3.12)$$

Substituindo-se a representação $d\bar{x} = dx \bar{u}$ em (3.12), escreve-se:

$$dy^2 = (\bar{u}^t \cdot A^t \cdot A \cdot \bar{u}) dx^2 \quad \frac{dy^2}{dx^2} = (\bar{u}^t \cdot A^t \cdot A \cdot \bar{u}) \quad (3.13)$$

onde $\lambda_u = dy / dx > 0$ é o alongamento na direção do vetor \bar{u} . Assim, com base naquilo que foi descrito no item anterior, para se medir uma deformação longitudinal de engenharia na direção de \bar{u} (referência em B^0 - Lagrangiana) deve-se fazer:

$$\varepsilon_u = \frac{dy}{dx} - 1 = \lambda_u - 1 \quad (3.14)$$

ou seja, como dx e dy , apesar de infinitesimais, são positivos, tem-se:

$$\lambda_u = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\bar{u}^t \cdot A^t \cdot A \cdot \bar{u}} \quad \text{e} \quad \varepsilon_u = \sqrt{\bar{u}^t \cdot A^t \cdot A \cdot \bar{u}} - 1 \quad (3.15)$$

Deve-se comentar que a relação dy / dx na equação (3.14) não indica derivada, mas a relação entre os comprimentos infinitesimais dy e dx . Neste ponto é interessante se definir o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green,

$$C = A^t \cdot A \quad \text{com} \quad C^t = A^t \cdot A \quad \text{simétrico} \quad (3.16)$$

grandeza importante na descrição lagrangiana da elasticidade não linear.

Para se exemplificar uma medida de deformação longitudinal euleriana repete-se o procedimento descrito pelas equações anteriores, tendo como referência o corpo na configuração atual. Nessa situação a função mudança de configuração inversa é $\vec{g}(y_1, y_2, y_3)$.

Do cálculo diferencial escreve-se a função \vec{g} calculada em um ponto (y_1, y_2, y_3) em uma vizinhança de (y_1^0, y_2^0, y_3^0) como:

$$\bar{g}(y_1, y_2, y_3) = \bar{g}(y_1^0, y_2^0, y_3^0) + \text{grad}(\bar{g}) \cdot d\bar{y} \quad (3.17)$$

onde $\text{grad}(\)$ foi escrito com letra minúscula para indicar a diferença de uma operação euleriana de uma lagrangiana. Passando-se $\bar{g}(y_1^0, y_2^0, y_3^0)$ para o lado esquerdo da equação retorna a relação entre $d\bar{y}$ e $d\bar{x}$ como:

$$d\bar{x} = d\bar{g} = \text{grad}(\bar{g}) \cdot d\bar{y} = B^t \cdot d\bar{y} \quad (3.18)$$

ou, em notação indicial,

$$dx_i = g_{i,j} dy_j = b_{ji} dy_j \quad (3.19)$$

donde conclui-se que $B^t = A^{-1}$. O uso do símbolo de transposto na definição do gradiente de \bar{g} na equação (3.18) é conveniente na dedução da relação entre áreas, veja a equação (3.88).

Aproveitando-se dos conceitos do cálculo vetorial, calcula-se o comprimento dx como,

$$dx^2 = d\bar{x}^t \cdot d\bar{x} \quad (3.20)$$

Substituindo-se a equação (3.18) na equação (3.20) resulta:

$$dx^2 = d\bar{y}^t \cdot B \cdot B^t \cdot d\bar{y} \quad (3.21)$$

Utilizando-se a representação $d\bar{y} = dy \bar{v}$ em (3.21), escreve-se:

$$dx^2 = (\bar{v}^t \cdot B \cdot B^t \cdot \bar{v}) dy^2 \quad \frac{dx^2}{dy^2} = (\bar{v}^t \cdot B \cdot B^t \cdot \bar{v}) \quad (3.22)$$

a relação $\bar{\lambda}_v = dx/dy$ é chamada de alongamento escalar à esquerda de uma fibra, enquanto o alongamento escalar λ_u , definido anteriormente, é muitas vezes chamado de alongamento escalar à direita.

Pode-se definir a seguinte medida de deformação longitudinal euleriana

$$\varepsilon_v = \frac{dy - dx}{dy} = 1 - \frac{dx}{dy} = 1 - \bar{\lambda}_v \quad (3.23)$$

chamada deformação de Hencki Nesse caso, como dx e dy , apesar de infinitesimais são positivos, tem-se:

$$\lambda_v = \sqrt{\bar{v}^t \cdot B \cdot B^t \cdot \bar{v}} \quad \text{e} \quad \bar{\varepsilon}_u = 1 - \sqrt{\bar{v}^t \cdot B \cdot B^t \cdot \bar{v}} \quad (3.24)$$

Define-se o tensor de alongamento à esquerda de Cauchy-Green como,

$$M = B \cdot B^t \quad \text{com} \quad M^t = B \cdot B^t \quad \text{simétrico} \quad (3.25)$$

grandeza importante na descrição euleriana da elasticidade não linear.

3.2.2 - Distorção Lagrangiana

Marcando-se duas linhas ortogonais no corpo indeformado (configuração B^0), veja figura 3.3, a distorção de engenharia é definida pela quantidade angular (em radianos) do quanto estas linhas deixam de ser ortogonais após a mudança de configuração, ou seja:

$$\gamma_{uv} = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (3.26)$$

Aqui é importante lembrar que radiano é adimensional, pois é uma medida relativa entre o comprimento de um arco e o raio que o gerou e, portanto, pode ser usado como medida de deformação. Como será visto adiante, ao invés de se utilizar a distorção de engenharia, é preferível definir a semi-distorção ou distorção matemática ε_{uv} como,

$$\varepsilon_{uv} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad (3.27)$$

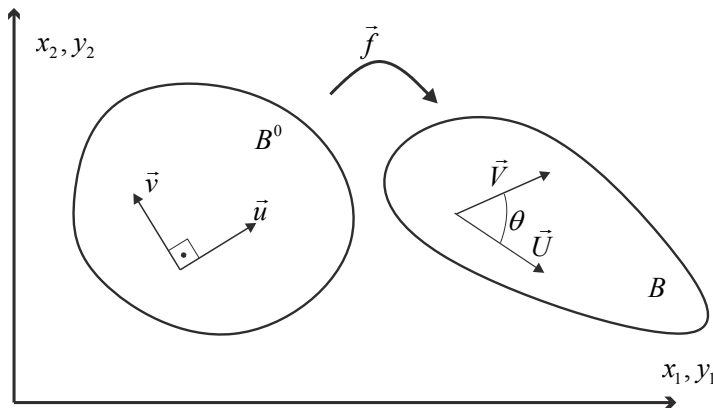


Figura 3.3 – Distorção

Na figura 3.3 \vec{u} e \vec{v} são versores na configuração inicial enquanto \vec{U} e \vec{V} são vetores não unitários na configuração atual, pois acompanham a mudança de forma do corpo. Da figura 3.2 e das equações (3.9), (3.13) e (3.15) se escreve:

$$d\vec{y} = dx A \cdot \vec{u} \quad \text{e} \quad d\vec{y} = dy \frac{\vec{U}}{|\vec{U}|} = \frac{dy}{dx} dx \frac{\vec{U}}{|\vec{U}|} = \lambda_u dx \frac{\vec{U}}{|\vec{U}|} \quad (3.28)$$

portanto,

$$A \cdot \vec{u} = \lambda_u \frac{\vec{U}}{|\vec{U}|} \quad \text{ou} \quad \frac{\vec{U}}{|\vec{U}|} = \frac{A \cdot \vec{u}}{\lambda_u} \quad (3.29)$$

o mesmo vale para a direção original dada por \vec{v} , veja figura 3.3,

$$\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{A \cdot \vec{v}}{\lambda_v} \quad (3.30)$$

Utilizando-se a definição do ângulo formado entre dois vetores escreve-se:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{|\vec{U}| |\vec{V}|} = \frac{\vec{u}^t \cdot A^t \cdot A \cdot \vec{v}}{\lambda_u \lambda_v} = \frac{\vec{V}^t \cdot \vec{U}}{|\vec{U}| |\vec{V}|} \quad (3.31)$$

Unindo-se (3.131) e (3.27) resulta a semi-distorção como:

$$\varepsilon_{uv} = \varepsilon_{vu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\vec{u}^t \cdot A^t \cdot A \cdot \vec{v}}{\lambda_u \lambda_v} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\vec{u}^t \cdot C \cdot \vec{v}}{\lambda_u \lambda_v} \right) \right) \quad (3.32)$$

onde C é o tensor de alongamento de Cauchy-Green à direita, veja a equação (3.16).

Para o caso tridimensional, um terceiro versor \vec{w} , ortogonal à \vec{u} e \vec{v} deve ser considerado e também se calculam as semi-distorções nos planos (na configuração inicial) definidos por \vec{u} e \vec{w} e por \vec{w} e \vec{v} .

Para se encontrar as "componentes" cartesianas lagrangianas da deformação ε , calculam-se os valores de ε_u , ε_v , ε_w , ε_{uv} , ε_{uw} e ε_{vw} com $\vec{u} = \vec{i} = \vec{e}^1$, $\vec{v} = \vec{j} = \vec{e}^2$ e $\vec{w} = \vec{k} = \vec{e}^3$, versores coordenados

$$\varepsilon_{11} = \sqrt{c_{11}} - 1, \quad \varepsilon_{22} = \sqrt{c_{22}} - 1, \quad \varepsilon_{33} = \sqrt{c_{33}} - 1 \quad (3.33)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{c_{ij}}{\lambda_i \lambda_j} \right) \right) \quad \text{para} \quad i \neq j \quad (3.34)$$

onde o tensor de alongamento de Cauchy-Green, equação (3.16) foi utilizado. Assim, as componentes do tensor C estão diretamente associadas às componentes cartesianas de deformação. Maiores detalhes serão apresentados no item 3.4. Observa-se que cada componente cartesiana do tensor de Cauchy-Green foi encontrada aplicando-se $c_{ij} = \vec{e}^i \cdot C \cdot \vec{e}^j$, onde $(\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

As equações (3.33) podem ser reescritas usando a definição de alongamento longitudinal, veja a equação (3.14), ou seja,

$$\varepsilon_{11} = \lambda_{11} - 1, \quad \varepsilon_{22} = \lambda_{22} - 1, \quad \varepsilon_{33} = \lambda_{33} - 1 \quad (3.35)$$

Poder-se-ia cogitar em escrever as "componentes cartesianas" da deformação não linear de engenharia (equações (3.33) e (3.34)) na forma de um tensor de ordem 2, porém, o arranjo resultante não é um tensor, pois ao se aplicar a fórmula de rotação sobre este arranjo em forma de matriz, não se encontraria a medida correspondente de

deformação na direção desejada. Para tanto, é necessário se aplicar a rotação sobre o tensor de alongamento de Cauchy-Green para depois se calcular as novas "componentes" da deformação não linear de engenharia. Porém, esse procedimento, além de trabalhoso, impossibilita a definição de leis constitutivas coerentes, conforme será visto mais adiante.

Obviamente que o gradiente da função mudança de configuração (A) respeita as fórmulas de giro, assim pode-se escrever o gradiente da função mudança de configuração para um sistema coordenado $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ a partir do gradiente calculado em (x_1, x_2, x_3) como:

$$\bar{A} = R^t \cdot A \cdot R \quad \text{ou vice versa} \quad A = R \cdot \bar{A} \cdot R^t \quad (3.36)$$

Utilizando-se essa propriedade do gradiente sobre a equação (3.16) encontra-se:

$$C = A^t \cdot A = R \cdot \bar{A}^t \cdot R^t \cdot R \cdot \bar{A} \cdot R^t = R \cdot \bar{A}^t \cdot \bar{A} \cdot R^t = R \cdot \bar{C} \cdot R^t \quad (3.37)$$

ou resumidamente:

$$C = R \cdot \bar{C} \cdot R^t \quad \text{ou inversamente} \quad \bar{C} = R^t \cdot C \cdot R \quad (3.38)$$

onde R é a matriz de rotação definida com detalhes em cursos anteriores ou nas equações (4.20) e (4.21).

Portanto, vale a fórmula do giro para o tensor de alongamento de Cauchy-Green, o que possibilitará a criação de leis constitutivas coerentes.

3.3 - Deformação de Green-Lagrange e deformação de Almansi

Analisando-se as "componentes" de deformação não linear de engenharia e seu significado geométrico intuitivo, equações (3.33) e (3.34), constata-se que as deformações longitudinais nas direções cartesianas possuem uma relação direta com os termos da diagonal do tensor de alongamento de Cauchy-Green e que as componentes de distorção possuem relação direta com os termos fora da diagonal deste tensor.

Retornando-se à equação (3.12) e lembrando-se que se pode escrever

$$dx^2 = d\bar{x}^t \cdot d\bar{x} = d\bar{x}^t \cdot I \cdot d\bar{x} \quad \text{escreve-se:}$$

$$dy^2 - dx^2 = d\bar{x}^t \left(A^t \cdot A - I \right) d\bar{x} \quad (3.39)$$

ou ainda,

$$\frac{dy^2 - dx^2}{dx^2} = \bar{u}^t \cdot \left(A^t \cdot A - I \right) \cdot \bar{u} = \bar{u}^t \cdot \left(C - I \right) \cdot \bar{u} \quad (3.40)$$

Assim, comparando-se (3.40) com a (3.33), (3.34) e (3.35) e lembrando-se da equação (2.2), define-se o tensor de Deformações de Green-Lagrange (ou apenas Green) como:

$$E = \frac{1}{2}(A' \cdot A - I) = \frac{1}{2}(C - I) \quad \text{ou} \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij}) \quad (3.41)$$

Se o tensor $E = 0$ não há deformação no ponto analisado, mas se $E \neq 0$ o corpo se deforma e todas as componentes de deformação intuitivas de (3.33) e (3.34) estão contempladas.

Seguindo procedimento análogo para a descrição Euleriana, pode-se observar que se pode escrever $dy^2 = d\bar{y}' \cdot d\bar{y} = d\bar{y}' \cdot I \cdot d\bar{y}$ que, juntamente com a equação (3.32), permite escrever:

$$\frac{dy^2 - dx^2}{dy^2} = \bar{v}' \cdot (I - B \cdot B') \cdot \bar{v} = \bar{v}' \cdot (I - M) \cdot \bar{v} \quad (3.42)$$

que, lembrando-se da equação (2.5) define-se o tensor de deformação de Almansi como:

$$F = \frac{1}{2}(I - M) \quad (3.43)$$

Como o objetivo desse material é o desenvolvimento de formulação Lagrangiana total de elementos finitos baseada em posições, a grande maioria das passagens se baseia na função mudança de configuração \bar{f} e na deformação de Green tal como escrita na equação (3.41). Entretanto, é conveniente se escrever o tensor de deformação de Green (E) em função dos deslocamentos para que os leitores possam identificar essa medida de deformação em outros textos.

Para tanto, lembra-se da definição de deslocamento, escrita em notação indicial como:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = y_i(x_1, x_2, x_3) - x_i \quad (3.44)$$

Assim, o gradiente do deslocamento é escrito como:

$$u_{i,j}(x_1, x_2, x_3) = y_{i,j}(x_1, x_2, x_3) - \delta_{ij} \quad (3.45)$$

ou, em notação dyadica:

$$\nabla \bar{u} = A - I \quad \text{ou} \quad A = \nabla \bar{u} + I \quad (3.46)$$

Substituindo-se a segunda das (3.46) em (3.16) resulta:

$$C = (\nabla \bar{u} + I)' \cdot (\nabla \bar{u} + I) = \nabla \bar{u}' \cdot \nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}' + \nabla \bar{u} + I \quad (3.47)$$

Conseqüentemente, a deformação de Green, equação (3.41), é dada em função do deslocamento por:

$$E = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u}' \cdot \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}'^t + \nabla \vec{u}) \quad (3.48)$$

3.4 - Deformação linear - uma análise crítica

Neste item informa-se ao leitor o caráter aproximado da medida linear de deformações utilizada na Elasticidade Linear, deixando-se claro que sua aplicação implica em representação errônea de grandes rotações acarretando em limitações para análises de grandes deslocamentos (NLG). Começa-se relacionando, com maior detalhe, os elementos da diagonal do tensor de deformações de Green com as "componentes" longitudinais cartesianas da deformação não linear de engenharia, por exemplo, fazendo-se $\vec{u} = \vec{i}$ determina-se

$$c_{u(u)} = (1, 0, 0) \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_{11} \quad (3.49)$$

que, juntamente com as equações (3.41), (3.33) ou (3.49) resulta:

$$E_{11} = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + 1)(\lambda_1 - 1) = \frac{(\lambda_1 + 1)}{2} \varepsilon_{11} \quad (3.50)$$

Quando a deformação é pequena, o alongamento relativo é muito próximo da unidade ($\lambda_1 \cong 1$), pois não há mudança significativa de comprimento das fibras do material, portanto:

$$E_{11} \cong \varepsilon_{11}, \quad E_{22} \cong \varepsilon_{22} \quad E_{33} \cong \varepsilon_{33} \quad (3.51)$$

tal como feito para problemas uniaxiais, veja equação (2.4).

Outra forma de se chegar à mesma conclusão é escrevendo-se E_{11} a partir da equação (3.48), ou seja, em função do deslocamento, como,

$$E_{11} = \frac{1}{2}(u_{1,1}u_{1,1} + u_{1,1} + u_{1,1}) \quad (3.52)$$

A partir das equações (3.45) e (3.14), resulta,

$$u_{1,1} = (y_1 - x_1)_{,1} = y_{1,1} - 1 = \lambda_1 - 1 = \varepsilon_{11} \quad (3.53)$$

portanto, escreve-se (3.52) como,

$$E_{11} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}^2 + 2\varepsilon_{11}) = \frac{\varepsilon_{11}^2}{2} + \varepsilon_{11} \quad (3.54)$$

Assim, quando a deformação longitudinal é pequena, vale a equação (3.51) e aflora da equação (3.52) a intenção de se desprezar $\nabla \vec{u}' \cdot \nabla \vec{u}$ na representação (3.48) para representar pequenas deformações. Neste sentido, deve-se mostrar que, quando a distorção é pequena, os termos fora da diagonal de E se aproximam dos termos correspondentes do tensor de deformação linear definido como,

$$\varepsilon^{lin} = \frac{\nabla \vec{u}' + \nabla \vec{u}}{2} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{ij}^{lin} = \frac{(u_{i,j} + u_{j,i})}{2} \quad (3.55)$$

Faz-se uso inicial da medida de deformação não linear de engenharia, pois se sabe da coincidência de sua definição com a da medida linear de deformação, a menos da magnitude dos deslocamentos e giros admitidos. Seja a semi-distorção não linear de engenharia medida no plano formado por $\vec{u} = \vec{i}$ e $\vec{v} = \vec{j}$ (equação (3.32)),

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{c_{12}}{\lambda_1 \lambda_2} \right) \right) \quad (3.56)$$

Realizando-se uma expansão em série de Taylor do arco-cosseno em torno de $c_{12} = 0$ tem-se:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{c_{12}}{\lambda_1 \lambda_2} + O(c_{12}^3) \right) \right) = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{c_{12}}{2} + \frac{1}{2} O \left(\left(\frac{c_{12}}{\lambda_1 \lambda_2} \right)^3 \right) \quad (3.57)$$

Introduzindo-se a hipótese de pequenas rotações, para qualquer componente, quando a deformação é pequena resulta:

$$\varepsilon_{ij}^{lin} \cong \frac{1}{2} c_{ij} = E_{ij} \quad \text{para} \quad i \neq j \quad (3.58)$$

Desta forma, conclui-se que a deformação linear (pequenos deslocamentos, deformações e rotações) é dada pela expressão (3.55).

3.4.1 - Limitações da deformação linear para movimentos de corpo rígido

Apesar de se ter mencionado que a medida de deformação linear vale para pequenas deformações, deslocamentos e rotações, a prova de que os deslocamentos e rotações devem ser pequenos ainda não foi apresentada. Para tanto, tomam-se funções de translação e de rotação pura sobre um corpo qualquer e se verifica se a deformação resultante é nula. Caso a deformação resultante não seja nula a medida de deformação possui limitações, ou, utilizando-se o jargão científico, é não objetiva.

Movimento de corpo rígido - Translação

A função mudança de configuração que representa translação é:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, x_3) = x_i + d_i \quad (3.59)$$

onde d_i é o vetor deslocamento constante, assim,

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = d_i \quad (3.60)$$

Desta forma encontram-se:

$$\nabla \vec{f} = A = I \quad \nabla \vec{u} = 0 \quad (3.61)$$

Aplicando-se as equações (3.41) ou (3.48) e (3.55) conclui-se que tanto a deformação de Green quanto a deformação linear não registram deformação para translações de corpo rígido.

Movimento de corpo rígido - Rotação

Para simplificar, em uma representação bidimensional, a função mudança de configuração que representa rotação é dada por:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta) & \text{ou} & & u_1 &= x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta) - x_1 \\ y_2 &= x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta) & & & u_2 &= x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta) - x_2 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Portanto,

$$A = R, \quad C = R^t \cdot R = I, \quad E = 0 \quad (3.63)$$

$$\nabla \vec{u} = R - I, \quad (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^t) = R + R^t - 2I, \quad \varepsilon^{lin} = \begin{bmatrix} \cos \theta - 1 & 0 \\ 0 & \cos \theta - 1 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

ou seja, para rotação de corpo rígido a deformação de Green é objetiva, mas a deformação linear não é, pois registra deformação onde não há.

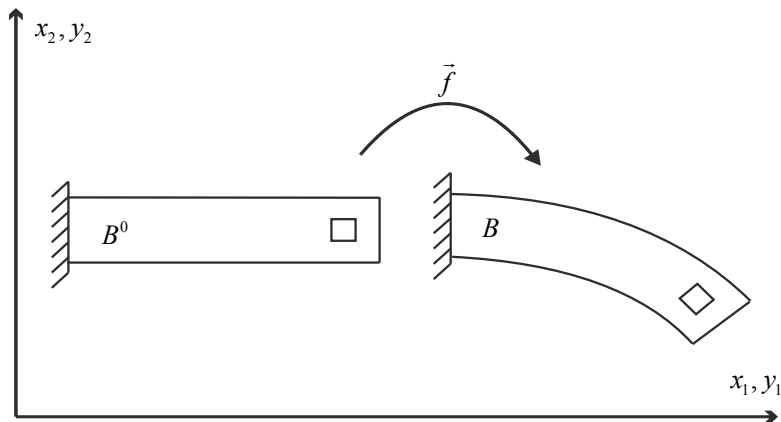


Figura 3.4 - Grandes rotações de um infinitésimo em corpo flexível

Entretanto, se o giro for pequeno $\cos\theta \rightarrow 1$ e a deformação inadequada desaparece. Assim, a deformação linear pode ser utilizada como boa aproximação quando os giros forem pequenos.

A figura 3.4 mostra como um elemento infinitesimal, contido em um corpo que sofre grandes deslocamentos, está sujeito a grandes rotações. Portanto, a deformação linear fica limitada a pequenos deslocamentos, rotações e deformações. Desta forma, uma análise que utiliza esta medida de deformação, equação (3.55), é chamada de análise linear geométrica e é aqui descartada.

3.5 - Mudança de volume na mudança de configuração

A deformação volumétrica é definida como a razão entre a diferença do volume final e inicial de um infinitésimo e o seu volume inicial, como:

$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{dV}{dV_0} - 1 = J - 1 \quad (3.65)$$

onde J é a relação entre os volumes atual e inicial em um ponto do corpo deformável, muitas vezes chamado Jacobiano da transformação, no caso, jacobiano da função mudança de configuração.

Para se calcular a variação volumétrica (ou a relação entre volumes) é preciso se calcular o volume de um infinitésimo nas configurações inicial e atual do sólido, sujeito a uma mudança de configuração, veja a figura 3.5

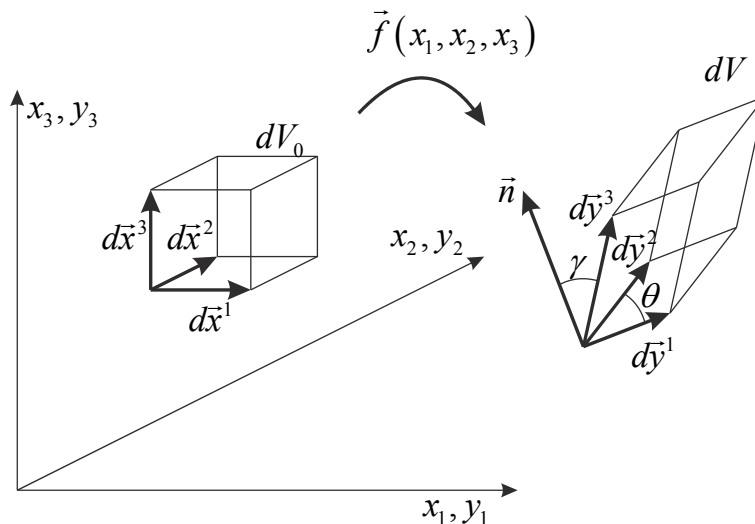


Figura 3.5 - Mudança de volume

Antes de se realizar essas operações para os vetores infinitesimais da figura 3.5, vale a pena se recordar o cálculo geral do volume indicado na figura 3.6, definido pelos

vetores $[\vec{v}, \vec{g}, \vec{r}]$. Inicia-se com a determinação do vetor \vec{w} resultado do produto vetorial $\vec{v} \wedge \vec{g}$ cujo módulo é a área da base do prisma, como:

$$\vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{g} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = (v_2 g_3 - v_3 g_2) \vec{i} + (v_3 g_1 - v_1 g_3) \vec{j} + (v_1 g_2 - v_2 g_1) \vec{k} \quad (3.66)$$

Realizando-se o produto escalar $\vec{w} \cdot \vec{r}$ encontra-se o produto da área da base pela altura do prisma (projeção de \vec{r} na direção de \vec{w}) e, portanto, seu volume. Algebricamente fica:

$$(\vec{v} \wedge \vec{g}) \cdot \vec{r} = (|\vec{v}| |\vec{g}| \text{sen}(\theta)) \cdot |\vec{r}| \cos(\gamma) = A \cdot h = V \quad (3.67)$$

Onde, nesta expressão, A e V são escalares e correspondem à área da base e ao volume do prisma, respectivamente.

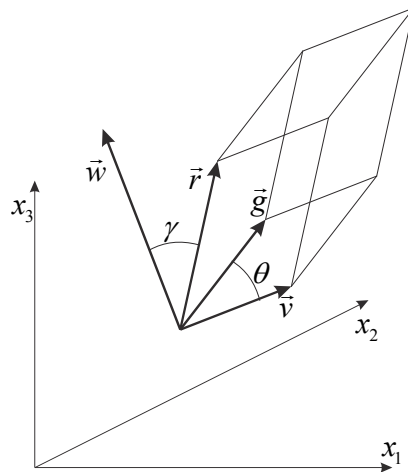


Figura 3.6 – Volume do prisma

Em coordenadas expandidas, a expressão $(\vec{v} \wedge \vec{g}) \cdot \vec{r}$ é escrita como:

$$V = (\vec{v} \wedge \vec{g}) \cdot \vec{r} = (v_2 g_3 - v_3 g_2) r_1 + (v_3 g_1 - v_1 g_3) r_2 + (v_1 g_2 - v_2 g_1) r_3 \quad (3.68)$$

que significa substituir na expressão do determinante (Sarrus) a base ortonormal $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ pelas componentes do vetor \vec{r} , ou seja:

$$V = Det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

Caso um dos vetores envolvidos na expressão (3.68) ou (3.69) possa ser escrito como composição de outros dois (ou de um só), \vec{r} estará contido no plano de \vec{v} e \vec{g} , o volume do prisma resulta nulo e, portanto, o determinante da equação (3.69) é nulo. Nesse caso, diz-se que os vetores são Linearmente Dependentes (LD) se o determinante da equação (3.69) é nulo, caso contrário são Linearmente Independentes (LI).

Em notação indicial a expressão (3.68) ou (3.69) pode ser escrita como:

$$V = \xi_{ijk} v_i g_j r_k \quad (3.70)$$

onde ξ_{ijk} é o conhecido tensor de permutação de Levi-Cevita.

Voltando-se ao cálculo de J ; observando-se a figura 3.5, à luz da figura 3.6 e equação (3.70), os volumes infinitesimais são calculados como:

$$dV_0 = (d\vec{x}^1 \wedge d\vec{x}^2) \cdot d\vec{x}^3 = dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.71)$$

$$dV = (d\vec{y}^1 \wedge d\vec{y}^2) \cdot d\vec{y}^3 = \xi_{ijk} dy_i^1 dy_j^2 dy_k^3 \quad (3.72)$$

onde o fato de $d\vec{x}^1 = (dx_1, 0, 0)$ ou $dx_i^1 = \delta_{(i)1} dx_i$, $d\vec{x}^2 = (0, dx_2, 0)$ e $d\vec{x}^3 = (0, 0, dx_3)$ não tira a generalidade. Mas, da equação (3.10), $dy_\alpha^z = a_{\alpha\gamma} dx_\gamma^z$, sendo $a_{\alpha\gamma}$ o gradiente da função mudança de configuração, então

$$dV = \xi_{ijk} a_{i\gamma} dx_\gamma^1 a_{j\beta} dx_\beta^2 a_{k\xi} dx_\xi^3 = \xi_{ijk} (a_{i1} dx_1 a_{j2} dx_2 a_{k3} dx_3) = \xi_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} dV_0 \quad \text{ou} \quad (3.73)$$

$$dV = \xi_{ijk} a_{i\gamma} \delta_{(\gamma)1} dx_\gamma a_{j\beta} \delta_{(\beta)2} dx_\beta a_{k\xi} \delta_{(\xi)3} dx_\xi = \xi_{ijk} (a_{i1} dx_1 a_{j2} dx_2 a_{k3} dx_3) = \xi_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} dV_0$$

ou, da definição de determinante de uma matriz 3x3, expressa em (3.70):

$$dV = Det(A) dV_0 = J dV_0 \quad (3.74)$$

onde $J = Det(A)$. Retornando-se à equação (3.65) tem-se:

$$\varepsilon_v = Det(A) - 1 \quad \text{ou} \quad dV = Det(A) dV_0 \quad (3.75)$$

Uma forma simples de se calcular $J = Det(A)$ em nossa aplicação, é lembrar que:

$$Det(A^t \cdot A) = Det(C) = (Det(A))^2 = J^2 \quad (3.76)$$

Além disso, observa-se que $Det(C)$ é um dos invariantes do tensor C e pode ser calculado em suas direções principais, como:

$$Det(C) = Det \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = (1 + \varepsilon_1^p)^2 (1 + \varepsilon_2^p)^2 (1 + \varepsilon_3^p)^2 \quad (3.77)$$

onde usou-se a equação (3.35). Das equações (3.77), (3.76) e (3.75) resulta:

$$\varepsilon_v = (1 + \varepsilon_1^p)(1 + \varepsilon_2^p)(1 + \varepsilon_3^p) - 1 = \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p + \varepsilon_1^p \varepsilon_2^p + \varepsilon_1^p \varepsilon_3^p + \varepsilon_2^p \varepsilon_3^p + \varepsilon_1^p \varepsilon_2^p \varepsilon_3^p \quad (3.78)$$

que para pequenas deformações é dado por:

$$\varepsilon_v = (1 + \varepsilon_1^p)(1 + \varepsilon_2^p)(1 + \varepsilon_3^p) - 1 \cong \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (3.79)$$

ou

$$\varepsilon_v \cong \varepsilon_{ii} = \text{Trac}(\varepsilon) \quad (3.80)$$

que revela outra simplificação da elasticidade linear.

A observação mais importante desse item, já comentada no capítulo 2, é que o material não pode apresentar auto intersecção, ou seja, não pode 'virar do avesso' ou desaparecer, assim é condição necessária que

$$J > 0 \quad (3.81)$$

em qualquer análise mecânica que se venha a fazer. A garantia física de que a equação (3.81) será sempre satisfeita só pode ser dada através das relações constitutivas dos materiais, ou seja, as relações tensão-deformação que serão abordadas no item 4.9.

3.6 - Mudança de área na mudança de configuração - Fórmula de Nanson

A relação entre as áreas da configuração atual e da configuração inicial será a chave para a relação entre a tensão real na configuração atual (tensão de Cauchy) e medidas de tensão matemáticas definidas na configuração inicial, sendo as mais importantes as tensões de Piola-Kirchhoff de primeira e segunda espécie.

Para se chegar à fórmula pretendida, observam-se os volumes cilíndricos da figura 3.7, que são gerados pelas áreas infinitesimais e pelos vetores \vec{u} e \vec{v} . Pode-se definir uma área vetor como:

$$d\vec{A}_0 = \vec{N} dA_0 \quad (3.82)$$

e o vetor área atual como

$$d\vec{A} = \vec{n} dA \quad (3.83)$$

onde \vec{N} e \vec{n} são os versores unitários ortogonais à área nas respectivas configurações.

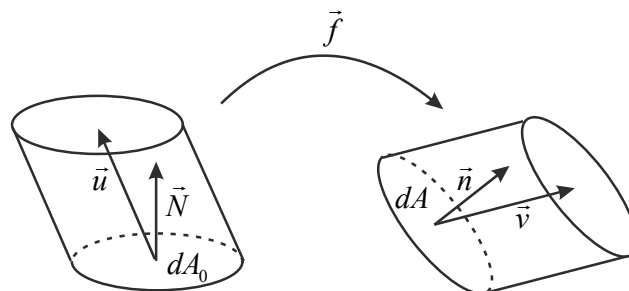


Figura 3.7 - mudança de configuração - cilindro de referência

Calcula-se o volume na configuração inicial como:

$$dV_0 = \vec{u}^t \cdot d\vec{A}_0 = \vec{u}^t \cdot \vec{N} dA_0 \quad (3.84)$$

Analogamente tem-se para a configuração atual:

$$dV = \vec{v}^t \cdot d\vec{A} = \vec{v}^t \cdot \vec{n} dA \quad (3.85)$$

Lembrando-se da relação entre volumes, equação (3.74), e que $\vec{v} = \mathbf{A} \cdot \vec{u}$ onde \mathbf{A} é o gradiente da função mudança de configuração (em negrito para não ser confundido com a área), escreve-se

$$dV = \vec{u}^t \cdot \mathbf{A}^t \cdot \vec{n} dA = J dV_0 = J \vec{u}^t \cdot \vec{N} dA_0 \quad (3.86)$$

Pelo fato da direção geradora do volume inicial \vec{u} ser arbitrária pode-se escrever:

$$\mathbf{A}^t \cdot \vec{n} dA = J \vec{N} dA_0 \quad (3.87)$$

Pré-multiplicando-se a expressão anterior por $\mathbf{B} = (\mathbf{A}^t)^{-1}$ resulta:

$$\vec{n} dA = J \mathbf{B} \cdot \vec{N} dA_0 \quad (3.88)$$

que, como comentado anteriormente, é conhecida como **Fórmula de Nanson** e é muito importante na relação entre as diferentes medidas de tensão. Observa-se aqui que não aparece o símbolo de transposto em \mathbf{B} , veja comentário após equação (3.19).

É interessante se escrever (3.88) na forma indicial, como:

$$n_i dA = J b_{ik} N_k dA_0 \quad (3.89)$$

3.7 - Direções principais e valores principais do tensor de alongamento de Cauchy-Green à direita

Em aplicações de engenharia é muito importante se determinar valores de máxima e mínima deformação e as direções em que estas ocorrem. A estes valores se atribuem o nome de deformações e direções principais.

As direções principais são aquelas segundo as quais o tensor de alongamento de Cauchy-Green se torna diagonal, ou seja, deixa de existir distorção, esta afirmação é escrita matematicamente como:

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{R}_p^t \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}_p \quad (3.90)$$

onde \mathbf{R}_p é uma matriz de rotação que relaciona coordenadas escritas nas direções principais rotacionadas x_{1p} e x_{2p} , com as coordenadas escritas nas direções x_1 e x_2 , conforme Figura 3.8.

Para uma representação 2D, na Figura 3.8 observa-se que o infinitésimo de volume (referência de cálculo) é rotacionado de um ângulo específico θ_p para o qual a matriz de rotação \mathbf{R}_p é dada por:

$$R_p = \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) & -\text{sen}(\theta_p) \\ \text{sen}(\theta_p) & \cos(\theta_p) \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Uma propriedade interessante da matriz de rotação é que suas colunas representam os vetores geradores dos eixos principais e, portanto, as direções principais,

$$\vec{\phi}^t = \{ \cos(\theta_p) \quad \text{sen}(\theta_p) \} \quad (3.92)$$

$$\vec{\varphi}^t = \{ -\text{sen}(\theta_p) \quad \cos(\theta_p) \} \quad (3.93)$$

onde $\vec{\phi}$ e $\vec{\varphi}$ são os dois vetores (direções) principais.

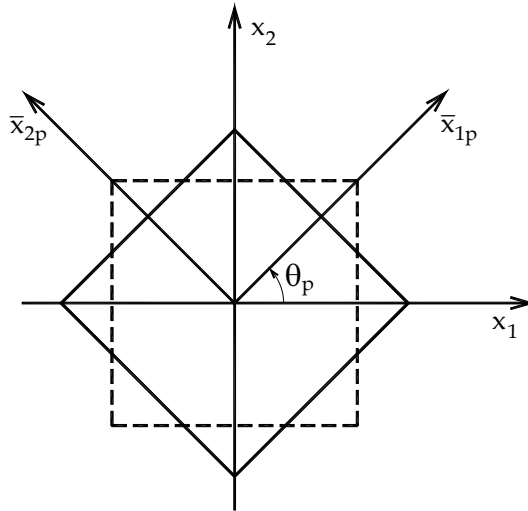


Figura 3.8 – Rotação imposta ao infinitésimo de volume

Para se determinar estas direções principais e seus correspondentes valores principais (alongamentos) pré-multiplicamos a equação (3.90) por \mathbf{R} , resultando:

$$C \cdot R_p = R_p \cdot C_p \quad (3.94)$$

e substituímos R_p e C_p por suas formas explícitas.

$$C \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 & \varphi_1 \\ \phi_2 & \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \varphi_1 \\ \phi_2 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{p1}^2 & 0 \\ 0 & \lambda_{p2}^2 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

A equação (3.95) pode ser dividida em duas equações idênticas, tendo em vista que os valores λ_{pi}^2 e vetores $\vec{\phi}$ e $\vec{\varphi}$ são incógnitas, ou seja,

$$C \cdot \bar{\phi} = \lambda_p^2 \bar{\phi} \quad (3.96)$$

onde o índice de λ_p foi omitido por se tratar de uma equação que terá duas soluções distintas. A equação (3.96) é um problema padrão de auto-valor, auto-vetor e possui solução muito simples. Escreve-se a equação (3.96) na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_p^2 & 0 \\ 0 & \lambda_p^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (3.97)$$

ou melhor

$$\begin{bmatrix} (C_{11} - \lambda_p^2) & C_{12} \\ C_{21} & (C_{22} - \lambda_p^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.98)$$

A equação (3.98) só apresenta solução não nula caso o determinante da matriz seja nulo, resultando na chamada equação característica do problema de auto-valor, auto-vetor.

$$(C_{11} - \lambda_p^2)(C_{22} - \lambda_p^2) - C_{12}C_{21} = 0 \quad (3.99)$$

O fato de C ser positiva definida garante que a equação (3.99), para o caso bidimensional, tenha sempre duas raízes distintas reais e positivas, tal como:

$$\lambda_{p1}^2 = \left(C_{11} + C_{22} + \sqrt{(C_{11} - C_{22})^2 + 4C_{12}^2} \right) / 2 \quad (3.100)$$

$$\lambda_{p2}^2 = \left(C_{11} + C_{22} - \sqrt{(C_{11} - C_{22})^2 + 4C_{12}^2} \right) / 2 \quad (3.101)$$

onde λ_{p1} e λ_{p2} são os alongamentos principais.

Substituindo-se λ_{p1} na equação (3.98) determina-se a primeira direção principal,

$$\bar{\phi}_1 = 1; \bar{\phi}_2 = (\lambda_{p1}^2 - C_{11}) / C_{12} \quad (3.102)$$

$$\phi_1 = \bar{\phi}_1 / \sqrt{\bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2}; \phi_2 = \bar{\phi}_2 / \sqrt{\bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2} \quad (3.103)$$

A segunda direção principal é obtida simplesmente fazendo-se $\phi_1 = -\phi_2$ e $\phi_2 = \phi_1$.

Desta forma, para um função mudança de configuração conhecida é possível se calcular, para cada ponto do corpo deformado, o gradiente da mudança de configuração e o alongamento de Cauchy-Green com seus alongamentos e direções principais. O que foi descrito para a versão bidimensional também vale para a versão tridimensional, ou seja, o cálculo dos alongamentos e direções principais é um simples problema de auto-

valor auto vetor. No capítulo 4 aproveita-se, durante as definições de tensão de Cauchy, ou tensão real, para se apresentar as fórmulas de obtenção dos autovalores e auto-vetores de tensor 3×3 .

É importante se observar que as direções principais da deformação de Green são as mesmas do alongamento de Cauchy-Green, pois uma das parcelas dessa deformação é o tensor identidade insensível à rotação. Ademais, para a deformação de Green, o procedimento de cálculo das deformações e direções principais é o mesmo descrito para o alongamento. Comenta-se que, para a deformação não linear de engenharia deve-se substituir o tensor de alongamento principal C_p no cálculo da deformação, pois não vale regra de giro para esta medida de deformação intuitiva, chamada aqui de deformação não linear de engenharia.

3.8 - Bibliografia Recomendada

Além dos trabalhos científicos do autor, recomenda-se a leitura da bibliografia a seguir:

- 1) OGDEN, R.W., Non-linear Elastic deformation, Ellis Horwood, England, 1984. for Engineering. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England.
- 2) BONET, J., WOOD, r.d., Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, Cambridge University Press 1997,2008.
- 3) HOLZAPFEL, G. A. (2000). Nonlinear Solid Mechanics – A Continuum Approach
- 4) CRISFIELD, M. A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 1. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd., 2000. ISBN 0 471 92956 5 (v. 1).
- 5) CIARLET, P. G. (1993). Mathematical Elasticity, Volume 1: Three Dimensional Elasticity. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands.
- 6) CHAVES, E.W.V.. Mecânica del Medio Continuo - Conceptos básicos, CIMNE, Espanha, 2007.

4 - Tensões - Equilíbrio e Energia

No capítulo anterior foi estudada a mudança de configuração ou movimento dos sólidos deformáveis sem levar em consideração as ações que poderiam causar tal comportamento. Neste capítulo as ações externas, principalmente mecânicas, são abordadas, fazendo-se uso ou definindo-se conceitos como força, aceleração, inércia, velocidade, tensão, quantidade de movimento, energia, a relação entre tensão e deformação etc. Obviamente os leitores já estão familiarizados com os conceitos a serem abordados em parte desse capítulo, porém, uma observação sobre a escrita deve ser feita, do item 4.1 até o item 4.3 utilizou-se \bar{x} para indicar direções e derivadas Eulerianas, aproveitando-se as notações usuais. A partir do item 4.4 começa-se a fazer diferença entre configuração inicial e atual.

4.1 - Forças de superfície

Antes de se iniciar a definição operacional da força de superfície, deve-se deixar claro que, devido à Terceira Lei de Newton (A toda ação há sempre uma ação oposta em igual intensidade), forças aplicadas sobre sólidos ou estruturas na realidade são sempre forças de contato entre corpos (ou força de campo, como gravidade e eletromagnetismo). Como nossos estudos são baseados na mecânica do contínuo e, portanto, não há corpos sem dimensão (área, volume ou comprimento nulos), as chamadas forças concentradas (e momentos) são abstrações matemáticas que servem para auxiliar na determinação de algumas soluções de problemas mecânicos.

Assim, forças concentradas representadas por vetores, são na realidade *equivalentes mecânicos* de forças distribuídas nas superfícies ou no domínio de corpos (sólidos deformáveis). Essas representações (forças e momentos concentrados) continuarão sendo usadas quando forem adequadas ao problema estudado.

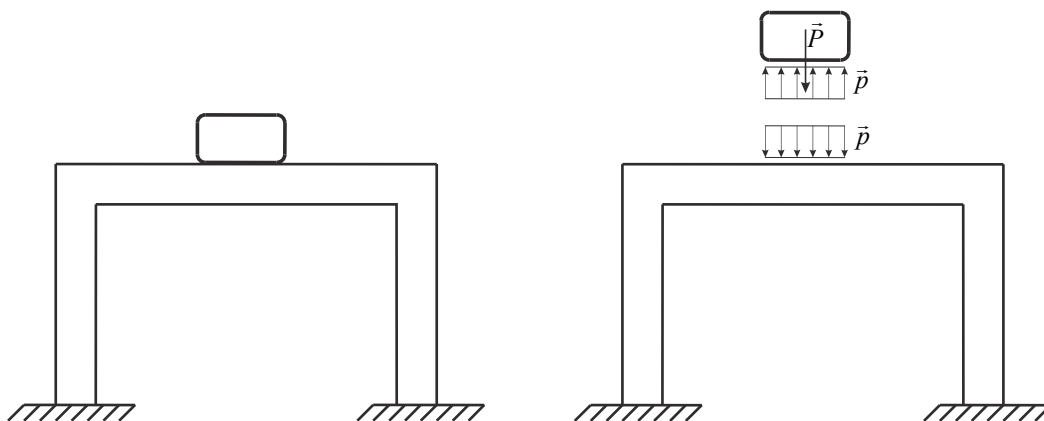


Figura 4.1 – (a) Situação real, (b) Representação esquemática

Na figura 4.1 ilustra-se uma viga sustentando um saco de cimento. O saco de cimento é atraído pela Terra impondo uma força distribuída na viga, que por sua vez impõe uma força distribuída no saco impedindo sua aproximação à superfície da Terra. A viga é um sólido deformável e a força de superfície ilustrada possui intensidade, direção e sentido. Além disso, está aplicada sobre a superfície atual do corpo, ou seja em uma descrição Euleriana.

Para generalizar, toma-se um corpo com forma qualquer em sua configuração atual, sujeito a um conjunto de forças de superfície, conforme ilustrado na figura 4.2. Em uma análise estática, a resultante de todas as forças aplicadas sobre o corpo deve resultar nula (Primeira Lei de Newton).

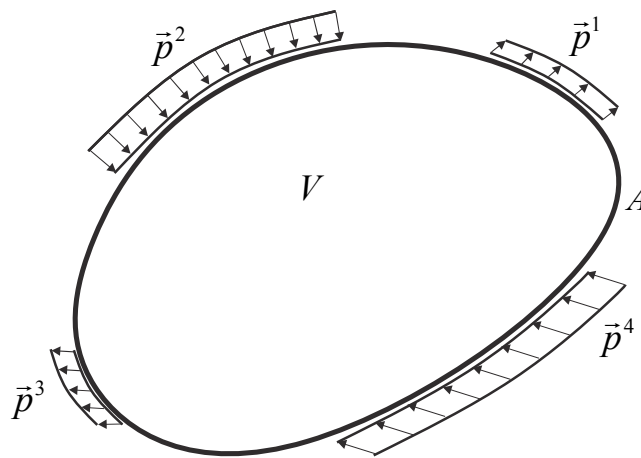
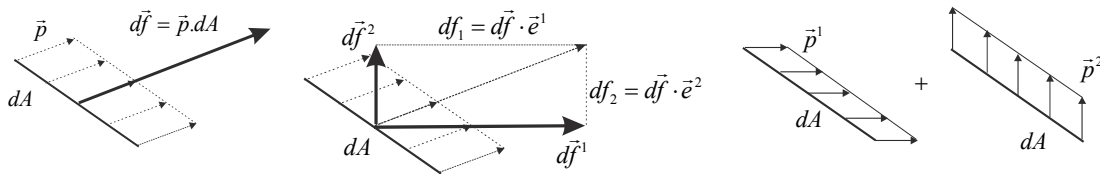


Figura 4.2 – Corpo genérico sob ação de diversas forças de superfície auto equilibradas

Destacando-se um infinitésimo de área qualquer da superfície, pode-se definir um equivalente mecânico $d\vec{f}$ infinitesimal de força dado pela força de superfície \vec{p} multiplicada pela área infinitesimal dA . Este equivalente mecânico é representado por um vetor, veja uma ilustração bidimensional na figura 4.3a, e pode ser decomposto em componentes segundo os eixos coordenados, conforme indica a figura 4.3b.



(a) Força equivalente (b) Componentes das forças (c) Forças de superfície

Figura 4.3 – Forças de superfície

As componentes da força infinitesimal são obviamente dadas pelas componentes da força de superfície multiplicadas pela área infinitesimal, veja figura 4.3c, conforme:

$$d\vec{f} = \vec{p} dA \quad (4.1)$$

com

$$\begin{aligned} d\vec{f}^1 &= (d\vec{f} \cdot \vec{e}^1) \vec{e}^1 = (d\vec{f} \cdot \vec{i}) \vec{i} \\ d\vec{f}^2 &= (d\vec{f} \cdot \vec{e}^2) \vec{e}^2 = (d\vec{f} \cdot \vec{j}) \vec{j} \\ d\vec{f}^3 &= (d\vec{f} \cdot \vec{e}^3) \vec{e}^3 = (d\vec{f} \cdot \vec{k}) \vec{k} \end{aligned} \quad (4.2)$$

ou, aproveitando-se da notação indicial, se escreve em forma de coordenadas ao invés de componentes:

$$df_i = p_i dA \quad (4.3)$$

Assim, a força de superfície \vec{p} opera como vetor e pode ser chamada vetor força de superfície apesar de ser um ente distribuído.

4.2 - Tensão de Cauchy

O ente tensão quantifica, de forma contínua, a interação entre as partículas que constituem um sólido sujeito às ações externas. A resistência ao afastamento ou à aproximação de planos paralelos (ou superfícies paralelas) do contínuo é quantificada pela grandeza *componente de tensão normal*, enquanto a resistência ao deslizamento relativo entre planos paralelos (ou superfícies paralelas) é quantificada pela *componente de tensão de cisalhamento*. A tensão de Cauchy, conforme está sendo definida nesse material, é referida à configuração atual do corpo e possui significado fenomenológico simples.

A resistência do material é usualmente verificada para uma composição das componentes de tensão de Cauchy e não para componentes isoladas. A representação de todas as componentes de tensão em um ponto é chamada de estado de tensão. Como será observado mais adiante, outros tipos de tensão podem substituir a tensão de Cauchy, principalmente em análise Lagrangiana, porém uma relação matemática entre essas tensões e a tensão de Cauchy será sempre possível e desejável.

4.2.1 - Definição geral de estado de tensão em um ponto:

Imagine-se um corpo qualquer na configuração atual sujeito a um conjunto equilibrado de forças externas aplicadas conforme a figura 4.4a. Fazendo-se um corte

imaginário, separando o corpo em duas partes, surge por ação e reação uma distribuição de forças por unidade de superfície (\vec{t}) esboçada qualitativamente na figura 4.4b. Esta força por unidade de superfície não é normal nem tangencial à superfície de corte e, portanto, é chamada simplesmente de tensão (ou vetor tensão).

Comparando-se o vetor tensão como o vetor força de superfície, a única diferença entre eles é o fato de um ser interno ao corpo (atuando sobre um plano fictício) e o outro estar aplicado sobre o contorno do corpo, uma superfície real.

Extraindo-se um infinitésimo de área da superfície do corte, figura 4.4c, pode-se deduzir que a intensidade e a direção da força representada dependem do corte realizado. Além disso, pode-se indicar um infinitésimo de força pela expressão:

$$d\vec{F} = \vec{t} dA \quad (4.4)$$

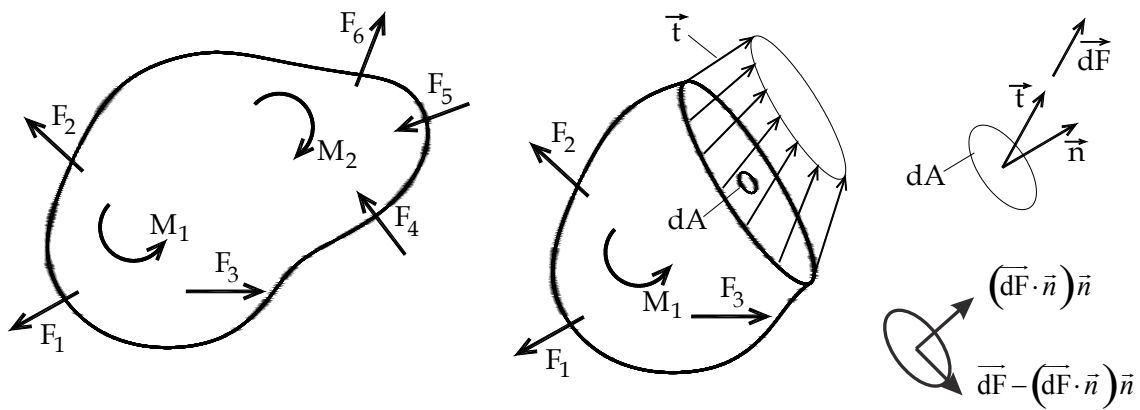


Figura 4.4– (a) Corpo em equilíbrio, (b) corte genérico, (c) infinitésimo de área
(d) componentes normal e tangencial

A força ortogonal ao infinitésimo de área é calculada pelo produto escalar entre $d\vec{F}$ e \vec{n} . A componente tangencial é a diferença entre $d\vec{F}$ e a componente normal $(d\vec{F} \cdot \vec{n})\vec{n}$, veja a figura 4.4d.

Para melhor se organizar as ideias e os procedimentos de cálculo, imagina-se que, ao invés de se fazer um único corte no corpo, realizam-se seis cortes, paralelos dois a dois, com distâncias nulas entre si e ortogonais aos eixos coordenados. Desta forma, separa-se do corpo um volume elementar em equilíbrio, conforme a figura 4.5a, onde existem planos de entrada (-) e de saída (+) que recebem os nomes dos eixos coordenados a eles ortogonais.

Sobre as faces do volume elementar indicam-se os respectivos vetores de tensão, veja a figura 4.5a, colocando o índice que indica o plano em que este atua. Como os planos de entrada e saída representam o mesmo plano nos corpos "separados", por ação e reação sabe-se que as tensões em um plano de entrada possuem o mesmo valor das tensões em um plano de saída, porém sentido contrário.

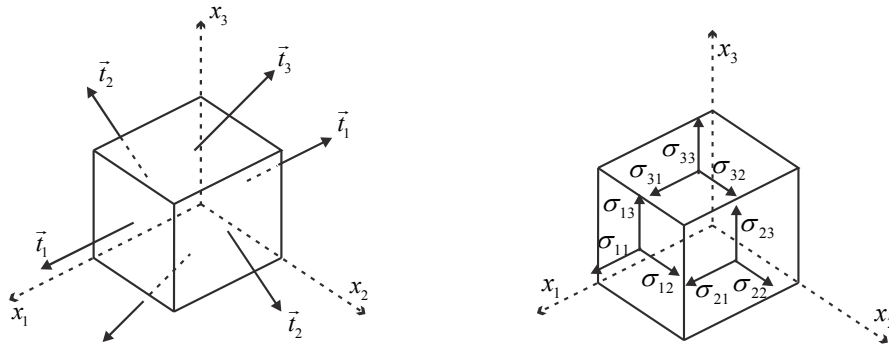


Figura 4.5 – (a) Vetores tensões sobre planos ortogonais, (b) Componentes de tensão e convenção de sinais.

Sem considerar os sentidos dos vetores \vec{t} desenhados na figura 4.5a, pois estes foram simplesmente arbitrados, decompõem-se os vetores de tensão que atuam sobre cada face do volume elementar em componentes cartesianas, conforme a figura 4.5b, resultando nas chamadas componentes de tensão.

As componentes possuem dois índices, o primeiro referente ao plano onde atuam e o segundo indicando sua direção. A convenção de sinal fica definida como: Para os planos de saída (+) o sentido das componentes de tensão positivas coincide com o sentido dos eixos coordenados, tal como desenhado. Para os planos de entrada (-) as componentes positivas são contrárias aos sentidos dos eixos coordenados. Aqui se deve lembrar que, como a ação e reação é satisfeita, as componentes de tensão em faces opostas possuem o mesmo valor (e sinal) e são representadas em sentidos opostos.

As componentes de tensão são usualmente denominadas pela letra grega sigma (σ) ao invés de se utilizar a letra (t), que foi empregada para se denominar o vetor de tensão.

É muito importante mencionar que as componentes ortogonais aos planos são chamadas simplesmente de tensões normais e sua convenção de sinal coincide com a estabelecida nos cursos de mecânica dos sólidos da graduação, ou seja, são positivas quando indicam tração e negativas na compressão. Além disso, as componentes que

seguem direção tangencial ao plano de atuação são chamadas simplesmente de tensões de cisalhamento e sua convenção de sinal coincide com a convenção de força cortante estabelecida para barras gerais. É usual utilizar-se a letra grega tal (τ) para denominar a componente de cisalhamento, porém, em nosso curso, para se aproveitar as facilidades da notação indicial, isso não será, em geral, feito.

Do exposto, ao invés de se organizar o ente tensão na forma vetorial, escolhe-se a organização na forma tensorial, ou seja:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma_{ij} \quad (4.5)$$

Na expressão (4.5) as duas últimas notações são as preferidas pois permitem o uso de notação indicial.

Estando o volume elementar da figura 4.5 em equilíbrio, pode-se calcular o equilíbrio de momentos, por exemplo, em torno do eixo x_3 . Para tanto, visualiza-se a face x_1x_2 (ou o plano x_3) do volume elementar, conforme a figura 4.6, e deixam-se presentes apenas os infinitésimos de força que causam momento em torno do eixo x_3 . Observe que os infinitésimos de força são resultado do produto entre a componente de tensão e sua área de atuação.

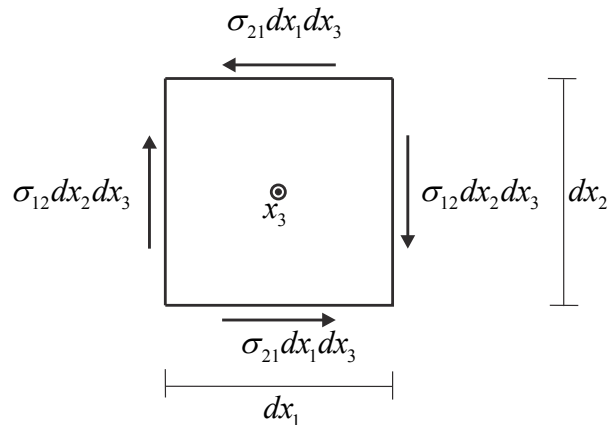


Figura 4.6 – Análise do equilíbrio de momentos em torno do eixo x_3

Realizando o equilíbrio tem-se:

$$(\sigma_{12} dx_2 \cdot dx_3) \cdot dx_1 = (\sigma_{21} dx_1 \cdot dx_3) \cdot dx_2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (4.6)$$

onde, repetindo-se o procedimento para as outras faces, resultam expressões usualmente chamadas de Teorema de Cauchy, ou seja:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{ou} \quad \sigma = \sigma^t \quad (4.7)$$

Assim, o tensor de tensões é simétrico e, portanto, têm-se apenas 6 componentes de tensão independentes, que explicitadas ficam.

$$\sigma = \sigma^t = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (4.8)$$

Imagine que, ao invés de se extrair o volume elementar da figura 4.5, retire-se do contínuo um volume tetraédrico conforme indicado na figura 4.7. Os planos que delimitam o tetraedro representado são três planos coordenados de entrada (-) e um plano inclinado de saída cujo versor normal é \vec{n} . O vetor de tensões representado neste plano é \vec{t}_n onde a letra n indica o plano. Deve-se observar que a área do plano n foi denominada dA , enquanto as áreas correspondentes aos planos coordenados são as suas projeções, ou seja:

$$\text{Projeção no plano } x_1 \text{ ou } (x_2, x_3) \quad n_1 \cdot dA$$

$$\text{Projeção no plano } x_2 \text{ ou } (x_1, x_3) \quad n_2 \cdot dA$$

$$\text{Projeção no plano } x_3 \text{ ou } (x_1, x_2) \quad n_3 \cdot dA$$

Onde os índices correspondem às componentes do vetor normal unitário.

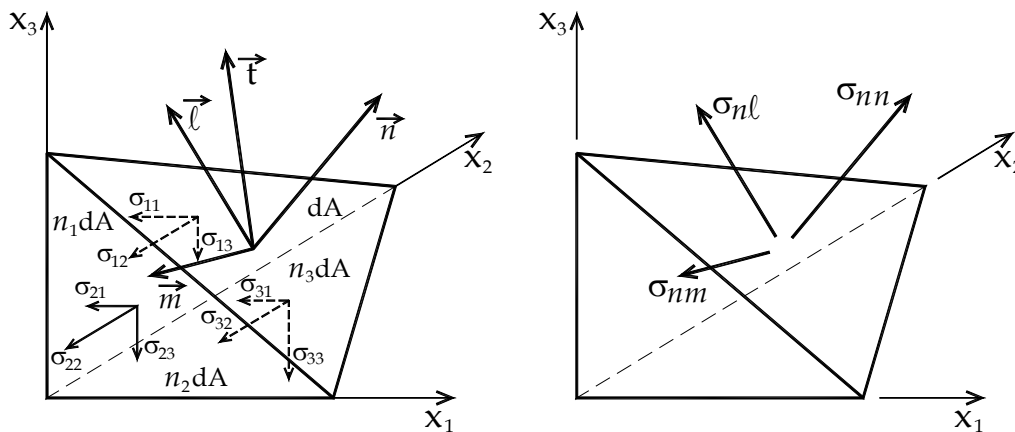


Figura 4.7 – Tetraedro elementar

Conhecendo-se os valores das áreas pode-se calcular o equilíbrio do tetraedro em cada direção coordenada, por exemplo, na direção 3,

$$\Sigma F_{x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_3 \cdot dA = \sigma_{13} \cdot n_1 \cdot dA + \sigma_{23} \cdot n_2 \cdot dA + \sigma_{33} \cdot n_3 \cdot dA \quad \text{ou}$$

$$t_3 = \sigma_{13} \cdot n_1 + \sigma_{23} \cdot n_2 + \sigma_{33} \cdot n_3 \quad (4.9)$$

Analogamente, nas outras direções, tem-se:

$$t_2 = \sigma_{12} \cdot n_1 + \sigma_{22} \cdot n_2 + \sigma_{32} \cdot n_3 \quad (4.10)$$

$$t_1 = \sigma_{11} \cdot n_1 + \sigma_{21} \cdot n_2 + \sigma_{31} \cdot n_3 \quad (4.11)$$

Obviamente que estas expressões podem ser compactadas em uma única utilizando-se a notação indicial:

$$t_i = \sigma_{ji} n_j = \sigma_{ij} n_j \quad (4.12)$$

onde a última igualdade se deve à simetria do tensor de tensões. Ou em forma dyadica:

$$\vec{t} = \sigma^t \cdot \vec{n} = \sigma \cdot \vec{n} \quad (4.13)$$

Levando-se em consideração a simetria do tensor de tensões, esta expressão pode ser escrita de forma explícita, como:

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Esta expressão é conhecida como fórmula de Cauchy. Se o plano inclinado é uma superfície externa do corpo o vetor de tensão passa a ser entendido como força de superfície e as expressões (4.12), (4.13) ou (4.14) passam a relacionar o estado de tensão no ponto com as forças de superfície:

$$p_i = \sigma_{ji} n_j = \sigma_{ij} n_j \quad \text{ou} \quad \vec{p} = \sigma^t \cdot \vec{n} = \sigma \cdot \vec{n} \quad (4.15)$$

Na figura 4.7a foram indicados versores (arbitrários) $\vec{\ell}$ e \vec{m} sobre o plano inclinado seguindo a regra $\vec{\ell} \times \vec{m} = \vec{n}$. Para se calcular as componentes de tensão na direção de cada um desses versores basta realizar os produtos internos $\sigma_{n\ell} = \vec{t} \cdot \vec{\ell}$, $\sigma_{nm} = \vec{t} \cdot \vec{m}$ e $\sigma_{nn} = \vec{t} \cdot \vec{n}$, ou seja:

$$\sigma_{nm} = n_1 \cdot t_1 + n_2 \cdot t_2 + n_3 \cdot t_3 \quad (4.16)$$

$$\sigma_{n\ell} = \ell_1 \cdot t_1 + \ell_2 \cdot t_2 + \ell_3 \cdot t_3 \quad (4.17)$$

$$\sigma_{nn} = m_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot t_2 + m_3 \cdot t_3 \quad (4.18)$$

Aplicando-se as equações (4.16) até (4.18) sobre (4.13), sem considerar a simetria da tensão, resulta:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nm} \\ \sigma_{n\ell} \\ \sigma_{nn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Observando-se que os versores $\vec{\ell}$ e \vec{m} também podem representar planos ortogonais ao plano definido por \vec{n} , repetindo-se os procedimentos anteriores chega-se a fórmula:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn} & \sigma_{\ell n} & \sigma_{mn} \\ \sigma_{n\ell} & \sigma_{\ell\ell} & \sigma_{m\ell} \\ \sigma_{nm} & \sigma_{\ell m} & \sigma_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & \ell_1 & m_1 \\ n_2 & \ell_2 & m_2 \\ n_3 & \ell_3 & m_3 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Esta expressão indica que um estado de tensão único pode ter valores numéricos diferentes de suas componentes conforme a orientação do sistema de eixos escolhido. Da mesma forma, a partir do estado de tensão escrito em um sistema de referência ortogonal, pode-se encontrar seu correspondente em outro sistema ortogonal rotacionado. Fisicamente pode-se entender que, para um mesmo estado de tensão, os números que o representa podem ser diferentes, conforme a orientação do plano de corte escolhido para a análise ou da orientação do volume elementar retirado do contínuo.

Lembrando-se que os versores $\vec{n}, \vec{\ell}$ e \vec{m} formam uma base ortonormal no espaço euclidiano, e que se organizou a tensão com o plano definindo na linha e a direção definindo a coluna, em notação dyadica a equação (4.20) fica

$$\bar{\sigma}' = R' \cdot \sigma' \cdot R \quad \text{ou} \quad \sigma' = R \cdot \bar{\sigma}' \cdot R' \quad (4.21a)$$

Ou, sem utilizar a simetria do tensor, transpondo toda a equação fica:

$$\bar{\sigma} = R' \cdot \sigma \cdot R \quad \text{ou} \quad \sigma = R \cdot \bar{\sigma} \cdot R' \quad (4.21b)$$

Onde a barra superior indica a tensão escrita no sistema de referência rotacionado $(\vec{\ell}, \vec{m}, \vec{n})$ ou a tensão observada em um volume elementar cujos versores que geram suas faces são $(\vec{\ell}, \vec{m}, \vec{n})$. Em notação indicial fica:

$$\bar{\sigma}_{ij} = r_{ki} \sigma_{k\alpha} r_{\alpha j} \quad \text{ou inversamente} \quad \sigma_{ij} = r_{ik} \bar{\sigma}_{k\alpha} r_{j\alpha} \quad (4.22)$$

Observa-se, portanto, que o tensor de tensões de Cauchy é realmente um **tensor**, pois opera como tal e, portanto, possui auto-valores e auto-vetores que representam, respectivamente, as tensões principais (máximas e mínimas) e as direções principais.

4.2.2 - Tensões principais de Cauchy

Neste item aproveita-se para generalizar o cálculo de autovalor e auto-vetor, apresentado na versão bidimensional, para o alongamento de Cauchy Green. Usando-se os conceitos apresentados nos cursos de graduação (tanto de resistência dos materiais quanto de álgebra linear), sabe-se que as máximas tensões normais são os auto-valores

do tensor de tensões e, portanto, ocorrem em planos onde as tensões de cisalhamento são nulas. Assim, existe, para o elemento infinitesimal de sólido, uma orientação no espaço para a qual o tensor de tensões fica diagonal, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn}^p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\ell\ell}^p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{mm}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}^p \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & \ell_1 & m_1 \\ n_2 & \ell_2 & m_2 \\ n_3 & \ell_3 & m_3 \end{bmatrix}^p \quad (4.23)$$

Esta equação pode ser dividida para cada uma das direções principais, como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn}^p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}^p \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}^p = R^t \cdot \sigma \cdot \vec{n} \quad (4.24)$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{\ell\ell}^p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}^p \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix}^p \quad (4.25)$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{mm}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}^p \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}^p \quad (4.26)$$

que são totalmente equivalentes, bastando alterar a posição da linha da matriz de rotação e a posição da tensão principal calculada. Escolhendo-se o plano \vec{n} para se realizar os cálculos, chamando-se σ_{nn}^p simplesmente de σ^p e pré multiplicando-se a equação (4.24) por R , se escreve:

$$\begin{bmatrix} n_1 & \ell_1 & m_1 \\ n_2 & \ell_2 & m_2 \\ n_3 & \ell_3 & m_3 \end{bmatrix}^p \begin{bmatrix} \sigma^p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}^p = \sigma \cdot \vec{n} \quad (4.27)$$

e, operando-se o lado esquerdo, resulta:

$$\sigma^p \cdot \vec{n} = \sigma^p \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}^p = \sigma \cdot \vec{n} \quad (4.28)$$

onde em $\sigma^p \cdot \vec{n}$ o ponto na base da linha indica produto entre o escalar σ^p e tensor de ordem 1 \vec{n} .

ou

$$\sigma \cdot \vec{n} = \sigma^p \cdot \vec{n} \quad (4.29)$$

que é um problema padrão de auto-valor/auto-vetor onde σ^p (escalar) é o auto-valor e \vec{n} é o auto-vetor. Pelo exposto após a equação (4.26), os outros dois problemas de auto-valor/auto-vetor são idênticos ao exposto em (4.29). Na sequência mostra-se que existem três auto-valores e três auto-vetores independentes para a equação (4.29) e, portanto, o problema é integralmente determinado.

Para resolver o problema exposto em (4.28) ou (4.29) escreve-se:

$$\sigma^p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}^p \quad (4.30)$$

ou

$$\begin{bmatrix} (\sigma_{11} - \sigma^p) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & (\sigma_{22} - \sigma^p) & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & (\sigma_{33} - \sigma^p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ou } K \cdot \vec{n}^p = \vec{0} \quad (4.31)$$

Define-se a equação característica de (4.31) como:

$$Det(K) = 0 \quad (4.32)$$

Desenvolvendo-se o determinante a equação (4.32) resulta:

$$(\sigma^p)^3 - I_1 (\sigma^p)^2 + I_2 \sigma^p - I_3 = 0 \quad (4.33)$$

onde

$$I_1 = \sigma_{ii}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \text{ e } I_3 = Det(\sigma) \quad (4.34)$$

Como as tensões principais não podem ser dependentes do sistema de coordenadas adotado, chamam-se as constantes I_1, I_2 e I_3 (escalares apesar da letra maiúscula) de invariantes de tensão. Isto significa que a equação (4.34) é única. Não se deve esquecer que as tensões principais também são invariantes de tensão, pois independem do sistema de coordenadas adotado.

O fato do tensor de tensões ser simétrico garante a existência de três raízes reais para a equação característica, que podem ser calculadas por procedimentos numéricos (Jacobi por exemplo) utilizados em calculadoras ou de forma fechada pelas expressões de Cardan transcritas abaixo.

$$R = \frac{1}{2} \left(-\frac{I_1 I_2}{3} + I_3 + \frac{2I_1^3}{27} \right) \quad (4.35a)$$

$$Q = \sqrt{\frac{1}{27} \left(\frac{I_1^2}{3} - I_2 \right)^3 - R^2} \quad (4.35b)$$

$$\rho = \sqrt{R^2 + Q^2} \quad (4.35c)$$

$$\theta = \arctg(Q/R) \quad \begin{cases} R > 0 & \Rightarrow 0 < \theta < \pi/2 \\ R < 0 & \Rightarrow \pi/2 < \theta < \pi \end{cases} \quad (4.35d)$$

$$\sigma_1^p = 2\sqrt[3]{\rho} \cos(\theta/3) + \frac{I_1}{3} \quad (4.35e)$$

$$\sigma_2^p = 2\sqrt[3]{\rho} \cos((2\pi - \theta)/3) + \frac{I_1}{3} \quad (4.35f)$$

$$\sigma_3^p = 2\sqrt[3]{\rho} \cos((2\pi + \theta)/3) + \frac{I_1}{3} \quad (4.35g)$$

Como $Det(K) = 0$, veja equação (4.32), o sistema de equações resultante é indeterminado para a busca do auto-vetor correspondente. Isto significa que, quando se calcula um auto-vetor, encontra-se uma direção principal e qualquer múltiplo deste também é auto-vetor da equação (inclusive com mudança de sentido). Assim, cada auto-vetor será normalizado e será chamado de auto-versor. O auto-versor indica a direção e sentido do plano onde a tensão principal correspondente atua e seu oposto indica o plano oposto onde a mesma tensão atua, ou seja, conceito similar ao conceito de planos de entrada e saída.

Por exemplo, usando σ_1^p na equação (4.30) calcula-se \vec{v}^{p1} (colocado no lugar de \vec{n}^{p1} por não ser normalizado) como:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}^{p1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Arbitrando-se $v_1 = 1$ (poderia ter sido outra componente) escreve-se:

$$k_{i2}v_2 + k_{i3}v_3 = -k_{i1} \quad (4.37)$$

Tomando-se, por exemplo, as duas primeiras linhas deste sistema indeterminado, calculam-se v_2 e v_3 , normaliza-se o resultado chegando à:

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} \quad (4.38)$$

Procede-se da mesma forma para os outros auto-valores determinando-se todos os auto-versores. Deve-se comentar que a escolha $v_1 = 1$ pode ser errada, pois v_1 pode ser nulo. Neste caso, não se consegue resolver (4.37) e deve-se arbitrar outra componente (v_2 ou v_3) com valor unitário. Observa-se que neste caso um dos outros auto-versores será $\vec{n}^t = (1, 0, 0)$, pois este deve ser ortogonal ao auto-vetor com componentes do tipo $(0, v_2, v_3)$. Para que isso ocorra, é óbvio que um dos planos coordenados é principal e que algumas componentes de tensão de cisalhamento do tensor originário são nulas. Para os outros auto-vetores vale a mesma explicação.

Comenta-se ainda que as colunas da matriz de rotação R^p da equação (4.23) são os auto-versores, organizados em uma sequência destro giro, ou seja $\vec{n}^1 \wedge \vec{n}^2 = \vec{n}^3$. Outros desenvolvimentos relativos ao tensor de tensões de Cauchy também são importantes, como a determinação das máximas tensões de cisalhamento, da tensão hidrostática, da tensão octaédrica, da tensão desviadora etc. Todas essas propriedades foram apresentadas em disciplinas associadas à elasticidade linear e seria excessivo repeti-los aqui. Entretanto, em momento oportuno, se for necessário, esses valores serão utilizados.

4.3 - Equações de Equilíbrio em tensões - Equilíbrio Local Euleriano

No item anterior, ao se considerar um corpo em equilíbrio, em sua configuração atual, usando cortes arbitrários no contínuo, definiu-se o ente tensão de Cauchy ou tensão real. No presente item o equilíbrio de um corpo genérico será estudado a partir da distribuição variável dessas tensões (ponto a ponto) no interior do mesmo.

Diferentemente do que foi realizado no item anterior, ao invés de se considerar a terceira Lei de Newton (ação e reação) que informava de antemão a igualdade entre os vetores de tensão e, portanto, impunha a igualdade das componentes de tensão definidas para planos opostos em um único corte, serão consideradas a primeira e a segunda Leis de Newton, visando estudar o equilíbrio e o movimento do infinitésimo de volume escrito em tensões.

O elemento infinitesimal da figura 4.5 representava um único ponto no corpo e sua apresentação serviu para a definição das componentes de tensão. Agora este

infinitésimo é entendido como uma porção do contínuo que possibilita visualizar a variação (diferencial) de qualquer grandeza $f(x_1, x_2, x_3)$ no interior do domínio (em sua configuração atual – apesar do uso do argumento \vec{x}), veja a figura 4.8. Pois interessa a variação das componentes de tensão de Cauchy no interior do contínuo, veja a figura 4.9.

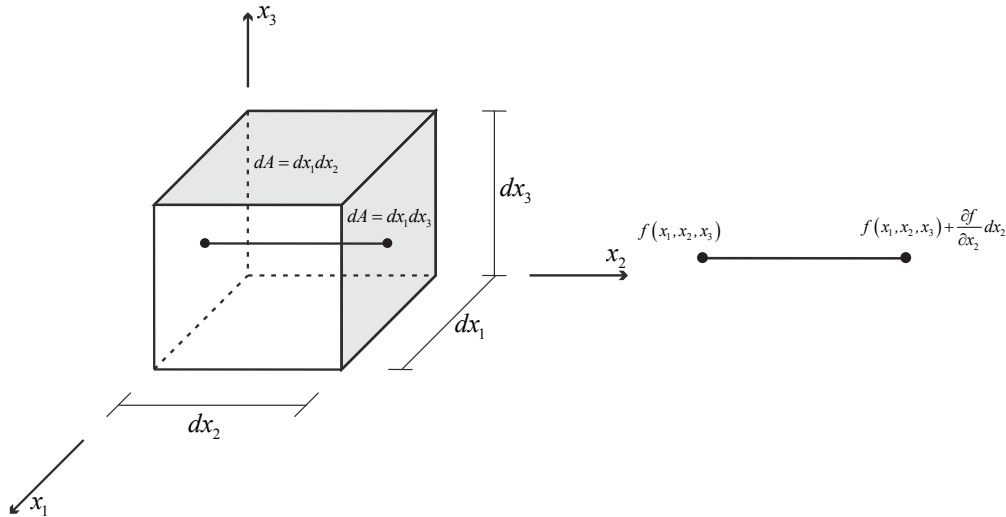


Figura 4.8 – Detalhes geométricos do elemento infinitesimal.

Na figura 4.9 observa-se que as tensões mudam de valor no contínuo segundo as direções cartesianas que indicam sua variação infinitesimal do plano de entrada para o plano de saída. Além disso, pode-se observar, na figura 4.9, a existência de forças de volume. A aceleração do infinitésimo é proporcional à resultante de forças e inversamente proporcional à sua massa ($\rho dx_1 dx_2 dx_3$). A aceleração angular do infinitésimo é inversamente proporcional à sua inércia de rotação e proporcional à resultante de torque. Ou seja, imaginando-se este elemento infinitesimal livre do contínuo que o circunda, porém sujeito às tensões por este geradas, três equações de equilíbrio de translação (ou de movimento de translação) e três equações de equilíbrio em rotação (ou de movimento de rotação) podem ser escritas.

Para todas as forças infinitesimais (incluindo-se todos os planos) na direção x_1 , veja figura 4.9, tem-se.

$$\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 + b_1 dx_1 dx_2 dx_3 = \quad (4.39)$$

$$= \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \sigma_{31} dx_1 dx_2 + \sigma_{21} dx_1 dx_3 + \rho \ddot{y}_1 dx_1 dx_2 dx_3$$

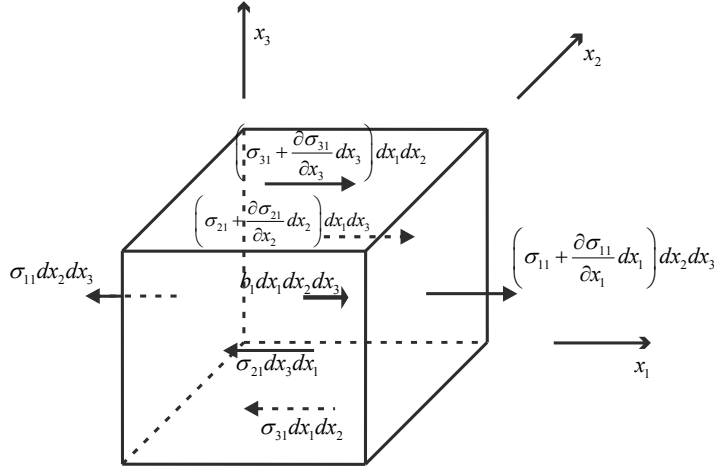


Figura 4.9 – Variação das tensões e equilíbrio na direção 1

Eliminando-se os termos que se anulam e lembrando-se que o infinitésimo de volume na configuração atual (apesar de se usar \bar{x}) $dV = dx_1 dx_2 dx_3$, resulta:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + b_1 \right) dV = \rho \ddot{y}_1 dV \quad (4.40)$$

ou eliminando-se dV ,

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + b_1 \right) = \rho \ddot{y}_1 \quad (4.41)$$

que é chamada equação diferencial de equilíbrio local (ou de movimento) na direção x_1 .

Realizando-se as mesmas operações nas direções x_2 e x_3 resultam as equações de equilíbrio nas outras direções, ou seja,

$$\left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + b_2 \right) = \rho \ddot{y}_2 \quad (4.42)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 \right) = \rho \ddot{y}_3 \quad (4.43)$$

Em notação indicial se escreve simplesmente:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = \rho \ddot{y}_i \quad (4.44)$$

que representa matematicamente o equilíbrio Euleriano local ou no ponto do contínuo.

Em notação dyadica reescreve-se a equação (4.44) como:

$$\text{div}(\sigma^t) + \vec{b} = \rho \ddot{\vec{y}} \quad (4.45)$$

Deve-se observar a coerência das expressões, onde o divergente de um tensor é um vetor.

Por enquanto, a solução do equilíbrio (sem utilizar a simetria do tensor de tensões) significaria em se resolver 9 componentes de tensão com apenas três equações de equilíbrio.

Para se estudar o equilíbrio de momento em torno do eixo x_3 (ou a equação de movimento – giro) incluindo a variação das tensões, uma nova versão da figura 4.6 pode ser vista na figura 4.10.

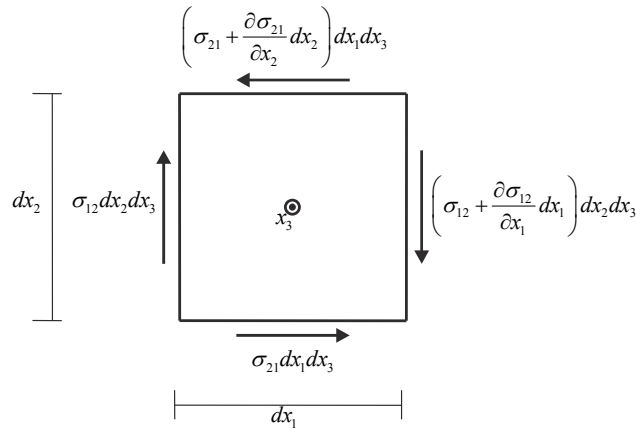


Figura 4.10 – Equação de movimento angular - torque

Como o ponto onde se calcula o momento é arbitrário escolhe-se o próprio eixo x_3 indicado resultando:

$$\left(\left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 \right) \frac{dx_2}{2} + (\sigma_{21} dx_1 dx_3) \frac{dx_2}{2} + \quad (4.46)$$

$$- \left(\left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \right) \frac{dx_1}{2} - (\sigma_{12} dx_2 dx_3) \frac{dx_1}{2} = I_t \ddot{\theta}_3$$

No lado direito da expressão (4.46) observa-se a aceleração angular e o momento angular de inércia em torno do eixo x_3 . Este último pode ser calculado e é dado por:

$$I_t = \left(\int_{-dx_1/2}^{dx_1/2} \int_{-dx_2/2}^{dx_2/2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) d\alpha_1 d\alpha_2 \right) dx_3 = dx_3 (dx_2 dx_1^3 + dx_1 dx_2^3) / 12 \quad (4.47)$$

Substituindo-se (4.47) em (4.46) escreve-se:

$$\left\{ \sigma_{21} - \sigma_{12} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) \right\} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{12} dx_3 (dx_2 dx_1^3 + dx_1 dx_2^3) \ddot{\theta}_3 \quad (4.48)$$

Pode-se substituir na equação (4.48) cada infinitésimo dx_i por $a_i d\alpha$, onde cada a_i é uma constante real e $d\alpha$ um infinitésimo qualquer, ou seja:

$$(\sigma_{21} - \sigma_{12})a_1a_2a_3d\alpha^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}a_2 - \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}a_1\right)a_1a_2a_3d\alpha^4 = \frac{d\alpha^5}{12}a_3(a_2a_1^3 + a_1a_2^3)\ddot{\theta}_3 \quad (4.49)$$

Ou, simplificando,

$$(\sigma_{21} - \sigma_{12}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}a_2 - \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}a_1\right)d\alpha = \frac{1}{12}d\alpha^2(a_1^2 + a_2^2)\ddot{\theta}_3 \quad (4.50)$$

Lembrando-se que um infinitésimo é tão pequeno quanto se queira (portanto nulo) resulta:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (4.51)$$

Assim, o Teorema de Cauchy se confirma para problemas dinâmicos incluído a variação das tensões no contínuo, pois se repetindo a operação nas outras direções resulta:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (4.52)$$

Ou seja, as três equações contidas em (4.52) são resolvidas diretamente reduzindo o número de incógnitas de 9 para 6. Deve-se enfatizar que a simetria do tensor de tensões indica que as equações de equilíbrio em momento estão plenamente satisfeitas.

Como um dos objetivos da análise mecânica é se encontrar a distribuição de tensões em um sólido, para a solução das 6 componentes de tensão restantes tem-se apenas 3 equações de equilíbrio, equação (4.44), ou seja, o problema é indeterminado quando se utilizam apenas as equações de equilíbrio. Em teoria de estruturas dir-se-ia que o problema é hiperestático. Este problema será resolvido quando se aplicar relações tensão-deformação e posição-deformação. Usando conceitos dos capítulos 2 e 3, pode-se dizer que, apesar da deformação de Green não ser a deformação conjugada energética da tensão de Cauchy, uma relação não linear (6 equações) entre posições e deformação já foi apresentada. Aumentando o número de equações para 9 e número de incógnitas para 15, ou seja, 6 componentes de tensão, 6 componentes de deformação e três componentes de posição.

4.4 - Equações Eulerianas globais de equilíbrio

Nesse texto as equações de equilíbrio são chamadas Eulerianas apenas para recordar o fato de estarem sendo realizadas em uma configuração atual do corpo e para um instante definido no tempo. Antes de abordar as equações de equilíbrio é necessário

se apresentar a equação de continuidade ou de conservação de massa, que possibilita realizar uma passagem muito importante das deduções.

4.4.1 - Equação de continuidade ou de conservação de massa.

Será considerada conservação de massa nas transformações mecânicas estudadas, ou seja, não serão consideradas situações que se possam retirar ou criar massa nos corpos analisados.

Assim, a massa pode ser calculada tanto no início do processo como em qualquer instante como:

$$M = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 \quad \text{ou} \quad M = \int_{V(t)} \rho(t) dV \quad (4.53)$$

onde ρ_0 é a densidade inicial do material e $\rho(t)$ é a densidade ao longo do tempo que varia conforme o volume do corpo se altera.

A conservação de massa indica que:

$$M = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_{V(t)} \rho(t) dV = \int_{V_0} \rho(t) J(t) dV_0 \quad (4.54)$$

Como o volume escolhido para definir a integração é arbitrário, conclui-se que:

$$\rho_0 = \rho(t) J(t) \quad \text{ou} \quad \rho(t) = \frac{\rho_0}{J(t)} \quad (4.55)$$

As equações (4.54) e (4.55) expressam a conservação de massa nos pontos do contínuo. Para os objetivos da análise numérica não linear a ser apresentada nos próximos capítulos, mais importante que a própria definição da conservação de massa é o colorário que desta segue. Considera-se a seguinte integração:

$$\int_{V(t)} \rho(t) f(t) dV = \int_{V_0} \rho(t) J(t) f(t) dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 f(t) dV_0 \quad (4.56)$$

onde $f(t)$ é uma função do tempo diferenciável qualquer.

Derivando-se a equação (4.56) em relação ao tempo se escreve:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(t) f(t) dV = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho_0 f(t) dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \frac{df(t)}{dt} dV_0 = \int_{V(t)} \rho(t) \frac{df(t)}{dt} dV \quad (4.57)$$

ou, simplesmente:

$$\frac{d}{dt} \int_V f(t) \rho(t) dV = \int_V \dot{f}(t) \rho(t) dV \quad (4.58)$$

que é o colorário procurado, ou seja, a derivada em relação ao tempo de uma integral cujo volume depende do tempo com núcleo também dependente do tempo, mas que

possui como parte do núcleo a densidade, é calculada simplesmente derivando-se a função principal do núcleo em relação ao tempo.

4.4.2 - Equilíbrio global de forças ou equações de movimento de translação

A equação global de equilíbrio, ou melhor, a equação de movimento de um corpo qualquer é escrita diretamente da Segunda Lei de Newton. A quantidade de movimento é uma grandeza vetorial e é dada por:

$$\vec{Q} = \int_V \rho \dot{\vec{y}} dV \quad (4.59)$$

onde V é o volume do corpo em análise, veja figura 4.11.

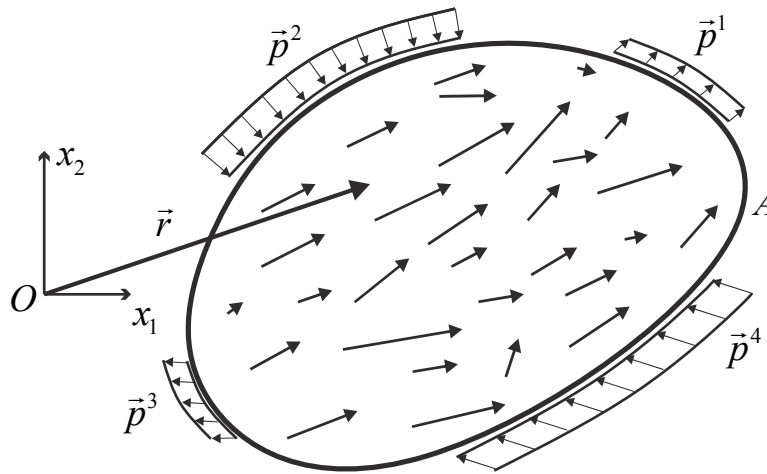


Figura 4.11 – Corpo em movimento

Como já comentado anteriormente, as forças aplicadas no corpo podem ser divididas em dois tipos, as forças de superfície \vec{p} e as forças de volume \vec{b} , veja a figura 4.11. A resultante de forças aplicadas é calculada como:

$$\vec{R} = \int_V \vec{b} dV + \int_A \vec{p} dA \quad (4.60)$$

Pela segunda Lei de Newton a variação em relação ao tempo da quantidade de movimento é igual à resultante de forças aplicada no corpo, ou seja:

$$\vec{R} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \int_V \rho \frac{d\dot{\vec{y}}}{dt} dV = \int_V \rho \ddot{\vec{y}} dV \quad (4.61)$$

onde o colorário da conservação de massa, equação (4.58), foi utilizado. Igualando-se as equações (4.60) e (4.61) resulta a equação de movimento de translação global, como:

$$\int_V \vec{b} dV + \int_A \vec{p} dA = \int_V \rho \ddot{\vec{y}} dV \quad (4.62)$$

Em notação indicial a equação (4.62) fica.

$$\int_V b_i dV + \int_A p_i dA = \int_V \rho \ddot{y}_i dV \quad (4.63)$$

Caso se pretenda fazer análises estáticas, o lado direito da equação (4.63) é nulo. É importante se mostrar que a equação local de equilíbrio (4.44) ou (4.45) é equivalente à equação global (4.62) ou (4.63). Isto pode ser feito integrando-se a equação (4.45) no volume do corpo, como:

$$\int_V \text{div}(\sigma^t) dV + \int_V \bar{b} dV = \int_V \rho \ddot{y} dV \quad (4.64)$$

Lembrando-se do Teorema de Gauss (ou Green), que relaciona a integral do divergente de uma função no volume de um corpo com a integral do produto interno desta função com o versor normal à superfície do corpo, tem-se:

$$\int_V \text{div}(\sigma^t) dV = \int_A \sigma^t \cdot \bar{n} dA = \int_A \bar{p} dA \quad (4.65)$$

onde aplicou-se a fórmula de Cauchy em sua versão (4.13).

Para um próximo desenvolvimento é interessante se apresentar a equação (4.65) em notação indicial, como:

$$\int_V \sigma_{ji,j} dV = \int_A \sigma_{ji} n_j dA = \int_A p_i dA \quad (4.66)$$

Onde se aplicou a Fórmula de Cauchy em sua versão (4.12). Substituindo-se (4.65) em (4.64) resulta exatamente a equação de equilíbrio (4.62) ou (4.63). Ou seja, as equações de equilíbrio Local e Global são equivalentes.

4.4.3 - Equilíbrio em momentos ou equações de movimento de rotação

O momento das forças de superfície em relação ao ponto O , veja figura 4.11, (escolhido como a origem do sistema de coordenadas) pode ser escrito em notações dyadica e indicial como:

$$\int_A \bar{r} \wedge \bar{p} dA = \int_A \bar{r} \wedge \sigma^t \cdot \bar{n} dA \quad \text{ou} \quad \int_A \xi_{kij} r_i p_j dA = \int_A \xi_{kij} r_i \sigma_{lj} n_l dA \quad (4.67)$$

É interessante se reunir os três primeiros tensores da última representação da equação (4.67) em um único tensor de ordem 2, como:

$$\int_A \xi_{kij} r_i \sigma_{lj} n_l dA = \int_A \eta_{kl} n_l dA = \int_A \eta \cdot \bar{n} dA \quad (4.68)$$

Aplicando-se o Teorema de Gauss sobre (4.68) tem-se:

$$\int_A \eta_{kl} n_l dA = \int_V \eta_{kl,\ell} dV \quad \text{ou} \quad \int_A \eta \cdot \bar{n} dA = \int_V \text{div}(\eta) dV \quad (4.69)$$

Estas passagens, que parecem excessivas, servem para se entender que todas as variáveis envolvidas, tensão e distância, são transformadas para o domínio de forma coerente, ou seja, agora a distância será medida dos pontos do domínio ao ponto de referência e a derivada de $\eta_{k\ell}$ é a derivada do produto $r_i\sigma_{\ell j}$, pois ξ_{kij} é constante, ou seja,

$$\int_A \xi_{kij} r_i \sigma_{\ell j} n_\ell dA = \int_V \xi_{kij} (r_i \sigma_{\ell j})_{, \ell} dV = \int_V \xi_{kij} (r_i \sigma_{\ell j, \ell} + r_{i, \ell} \sigma_{\ell j}) dV \quad (4.70)$$

Soma-se ao momento da força de superfície, escrita no domínio, o momento da força de domínio em relação ao mesmo ponto de referência, resultando:

$$\begin{aligned} m_k &= \int_V \xi_{kij} (r_i \sigma_{\ell j, \ell} + r_{i, \ell} \sigma_{\ell j}) dV + \int_V \xi_{kij} r_i b_j dV = \\ &= \int_V \xi_{kij} r_i (\sigma_{\ell j, \ell} + b_j) dV + \int_V \xi_{kij} r_{i, \ell} \sigma_{\ell j} dV \end{aligned} \quad (4.71)$$

O momento resultante gera a aceleração dos pontos do domínio que pelo Princípio D'Alambert fica:

$$\bar{m} = \int_V \bar{r} \wedge (\rho \ddot{y}) dV \quad \text{ou} \quad m_k = \int_V \rho \xi_{kij} r_i \ddot{y}_j dV \quad (4.72)$$

Igualando-se (4.71) e (4.72) resulta:

$$\int_V \rho \xi_{kij} r_i \ddot{y}_j dV = \int_V \xi_{kij} r_i (\sigma_{\ell j, \ell} + b_j) dV + \int_V \xi_{kij} r_{i, \ell} \sigma_{\ell j} dV \quad (4.73)$$

Rearranjando-se a equação (4.73) escreve-se:

$$\int_V \xi_{kij} r_i (\rho \ddot{y}_j - \sigma_{\ell j, \ell} - b_j) dV = \int_V \xi_{kij} r_{i, \ell} \sigma_{\ell j} dV \quad (4.74)$$

Comparando-se o núcleo da integral do lado esquerdo da equação (4.74) com a equação de equilíbrio local (4.44) encontra-se:

$$\int_V \xi_{kij} r_{i, \ell} \sigma_{\ell j} dV = 0_k \quad (4.75)$$

Como o vetor posição pode ser escrito como $r_i = x_i$ tem-se $r_{i, \ell} = \delta_{i\ell}$, que aplicado em (4.75) resulta:

$$\int_V \xi_{k\ell j} \sigma_{\ell j} dV = 0_k \quad (4.76)$$

Essa igualdade é satisfeita quando o núcleo é identicamente nulo. Para estudar essa condição, basta aplicar as propriedades do tensor de Levi-Cevita, ou seja:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \text{para} \quad k = 3 \quad (4.77)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} \quad \text{para} \quad k = 2 \quad (4.78)$$

$$\sigma_{32} = \sigma_{23} \quad \text{para} \quad k = 1 \quad (4.79)$$

Observa-se que cada k representa o equilíbrio de momento em torno de cada eixo x_k . Assim, a equação (4.76) verifica o teorema de Cauchy (4.52) a partir do equilíbrio global de momentos para um sólido arbitrário, ou seja, o equilíbrio local é equivalente ao equilíbrio global. Neste item, completou-se o ciclo contrário nas deduções, ou seja, não se integrou o equilíbrio local para se encontrar o global, mas se saiu do equilíbrio global até se determinar o equilíbrio local.

4.5 - Equação Local de equilíbrio (Lagrangiana) - Tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie

Partindo-se agora da equação global de equilíbrio euleriana, encontram-se as equações global e local de equilíbrio (ou movimento) de um sólido qualquer em sua versão lagrangiana. Ao longo desses desenvolvimentos será definido o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie. Esse tensor é não simétrico e algumas referências o adotam como base de desenvolvimento das equações Lagrangianas. Nesse texto esse tensor será ainda trabalhado para se encontrar o tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, que será a medida de tensão estabelecida como padrão dos desenvolvimentos pretendidos.

Parte-se da equação global de equilíbrio (4.64) (euleriana) antes de se aplicar a fórmula de Cauchy, como

$$\int_V b_i dV + \int_A \sigma_{ji} n_j dA = \int_V \rho \ddot{y}_i dV \quad (4.80)$$

Utilizando-se as fórmulas de variação de volume e de variação de área, equações (3.75) e (3.88) ou (3.89), respectivamente, se escreve (4.80) como:

$$\int_{V_0} J b_i dV_0 + \int_{A_0} J \sigma_{ji} B_{jk} N_k dA_0 = \int_{V_0} J \rho \ddot{y}_i dV_0 \quad (4.81)$$

Pela conservação de massa e impondo-se que existe $b_i^0 = J b_i$ se escreve

$$\int_{V_0} b_i^0 dV_0 + \int_{A_0} J \sigma_{ji} B_{jk} N_k dA_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i dV_0 \quad (4.82)$$

onde $B = (A^t)^{-1} = A^{-t}$. Lembra-se que \vec{N} é o versor normal à superfície do corpo na configuração inicial. A nova versão da segunda integral da equação (4.82) necessita um pouco mais de abstração da parte do estudante para aceitar a definição de um novo ente com unidade de tensão chamado primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff P , como:

$$P_{ki} = J\sigma_{ji}B_{jk} \quad \text{ou} \quad P_{ji} = J\sigma_{ki}B_{kj} \quad \text{ou} \quad P^t = J\sigma^t \cdot B \quad (4.83)$$

O tensor P possui unidade de tensão pois o gradiente da função mudança de configuração A e seu inverso B^t são adimensionais. Assim,

$$P = JB^t \cdot \sigma = JA^{-1} \cdot \sigma \quad (4.84)$$

Observar que P não é simétrico. Substituindo-se a tensão definida em (4.83) na equação (4.82) resulta:

$$\int_{V_0} b_i^0 dV_0 + \int_{A_0} P_{ji} N_j dA_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i dV_0 \quad (4.85)$$

onde o índice mudo k foi substituído por j . A diferença da equação (4.85) para a (4.80) é simplesmente o volume de referência e, portanto, aplica-se o teorema de Gauss e a arbitrariedade do volume resultando a equação de equilíbrio local lagrangiana, como:

$$P_{ji,j} + b_i^0 = \rho_0 \ddot{y}_i \quad \text{ou} \quad Div(P^t) + \vec{b} = \rho_0 \vec{\ddot{y}} \quad (4.86)$$

onde $Div()$ foi escrito em letra maiúscula para indicar operação lagrangiana. O fato de P não ser simétrico justifica o zelo assumido nas passagens envolvendo σ .

4.6 - Variação da energia - versão euleriana - configuração atual

Nos capítulos 1 e 2, para se encontrar a posição de equilíbrio de um sistema mecânico qualquer, utilizou-se o Princípio da Estacionariedade da Energia Total. Inclusive, no capítulo 1, mostrou-se através de um exemplo simples a validade dessa afirmação. Neste item, parte-se da equação de equilíbrio local (que é equivalente à equação de equilíbrio global) e se escreve a expressão da variação da energia total, mostrando-se a equivalência entre a equação de equilíbrio e o princípio da estacionariedade.

Ao longo dos desenvolvimentos algumas definições importantes vão surgindo ou sendo confirmadas como, por exemplo, o conceito de conjugado energético. Inicia-se a busca da expressão integral, rerepresentando-se as equações locais eulerianas de equilíbrio (três translações) como:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = \rho \ddot{y}_i \quad (4.44)$$

Ou em notação dyadica, veja equação (4.45) como:

$$div(\sigma^t) + \vec{b} = \rho \vec{\ddot{y}} \quad (4.87)$$

Para se sair da equação local de equilíbrio e se chegar à variação da energia mecânica total, toma-se a equação (4.44) e passa-se o termo de inércia para o lado esquerdo da igualdade, ou seja:

$$\sigma_{ji,j} + b_i - \rho \ddot{y}_i = 0_i = g_i \quad (4.88)$$

onde o vetor nulo é uma força por unidade de volume que poderia ser chamada de g_i .

Uma variação de trabalho gerada pela força g_i para uma mudança infinitesimal de posição, ou simplesmente uma variação de posição, é escrita como:

$$\delta\pi = g_i \delta y_i = 0 \quad \text{ou vetorialmente} \quad \delta\pi = \vec{g} \cdot \delta \vec{y} = 0 \quad (4.89)$$

que obviamente é nula. Esta constatação está totalmente de acordo com o princípio da estacionariedade da energia total, porém calculada ponto a ponto. Integrando-se a equação (4.89) no volume (atual - Cauchy - euleriano) do corpo, escreve-se:

$$\delta\Pi = \int_V \delta\pi dV = \int_V (\sigma_{ji,j} + b_i - \rho \ddot{y}_i) \delta y_i dV = 0 \quad (4.90)$$

A expressão (4.90) certamente indica que $\delta\Pi = 0$ na condição de equilíbrio, porém, deve-se verificar se ela realmente representa a soma das variações de energia, ou seja:

$$\delta\Pi = \delta U + \delta P + \delta K \quad \text{de} \quad \Pi = U + P + K \quad (4.91)$$

onde U é a energia de deformação, P o potencial das forças externas e K a energia cinética.

Separam-se os termos da última integral da equação (4.90) como:

$$\int_V \rho \ddot{y}_i \delta y_i dV - \int_V b_i \delta y_i dV - \int_V \sigma_{ji,j} \delta y_i dV = 0 \quad (4.92)$$

Tendo em vista que o segundo termo da equação (4.92) já é naturalmente parte da variação da energia potencial das forças externas, deve-se trabalhar o primeiro e o terceiro termos, buscando-se a forma apresentada na primeira parte da equação (4.91).

Toma-se a equação da energia cinética como:

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{y}_i \dot{y}_i dV \quad (4.93)$$

e calcula-se a sua variação como:

$$\delta K = \frac{dK}{dt} dt \quad (4.94)$$

Aplicando-se o colorário da conservação de massa escreve-se:

$$\begin{aligned}\delta K &= \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{d}{dt} (\dot{y}_i \dot{y}_i) dt dV = \frac{1}{2} \int_V \rho 2 (\ddot{y}_i \dot{y}_i) dt dV \\ &= \int_V \rho \ddot{y}_i (\dot{y}_i dt) dV = \int_V \rho \ddot{y}_i \delta y_i dV\end{aligned}\quad (4.95)$$

que é exatamente o primeiro termo da equação (4.92), ou seja, a variação da energia cinética pode ser calculada como a integração no volume total do produto interno da força inercial por uma variação de posição.

Para se trabalhar o último termo da equação (4.92) aplica-se, sem nenhuma pretensão, o divergente sobre o produto entre a tensão e a variação da posição, como:

$$\left(\sigma_{ji} \delta y_i \right)_{,j} = \sigma_{ji,j} \delta y_i + \sigma_{ji} \delta y_{i,j} \quad (4.96)$$

ou, rearranjando-se as variáveis:

$$\sigma_{ji,j} \delta y_i = \left(\sigma_{ji} \delta y_i \right)_{,j} - \sigma_{ji} \delta y_{i,j} \quad (4.97)$$

Assim, o núcleo da última integral de (4.92) pode ser substituído pelo lado direito da igualdade (4.97), como:

$$-\int_V \sigma_{ji,j} \delta y_i dV = \int_V \sigma_{ji} \delta y_{i,j} - \left(\sigma_{ji} \delta y_i \right)_{,j} dV = \int_V \sigma_{ji} \delta y_{i,j} dV - \int_V \left(\sigma_{ji} \delta y_i \right)_{,j} dV \quad (4.98)$$

Sendo o último termo dessa equação o divergente de uma função, por exemplo, $f_j = \sigma_{ji} \delta y_i$ tem-se:

$$-\int_V \left(\sigma_{ji} \delta y_i \right)_{,j} dV = -\int_A \sigma_{ji} \delta y_i n_j dA = -\int_A p_i \delta y_i dA \quad (4.99)$$

que, juntamente com a segunda integral de (4.92), constituem a variação da energia potencial das forças externas.

Falta avaliar o penúltimo termo de (4.98). Pela simetria da tensão de Cauchy se escreve:

$$\int_V \sigma_{ji} \delta y_{i,j} dV = \int_V \sigma_{ji} \left(\delta y_{i,j} + \delta y_{j,i} \right) / 2 dV \quad (4.100)$$

Tendo em vista que as derivadas são eulerianas, ou seja, realizadas em relação ao corpo deformado, entende-se que:

$$\delta \varepsilon_{ij} = \left(\delta y_{i,j} + \delta y_{j,i} \right) / 2 \quad (4.101)$$

ou seja, a variação da deformação real (conjugada energética da tensão de Cauchy) é conhecida, apesar da deformação não poder ser escrita. Assim, da equação (4.101)

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma : \delta \varepsilon dV \quad (4.102)$$

Finalmente se escreve a equação (4.91) como:

$$\int_V \rho \ddot{y}_i \delta y_i dV - \int_V b_i \delta y_i dV - \int_A p_i \delta y_i dA + \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = 0 \quad (4.103)$$

que é o princípio da estacionariedade da energia mecânica. Deve-se esclarecer que as derivadas efetuadas neste item se referem à configuração atual.

4.7 - Variação da energia - versão Lagrangiana - configuração inicial

Como a formulação do MEF posicional a ser desenvolvida é lagrangiana, se faz necessário escrever o princípio da estacionariedade na versão lagrangiana. Para tanto, seguem-se exatamente os passos descritos no item anterior, ou seja, multiplica-se a equação (4.86) de equilíbrio na configuração inicial por uma variação da posição δy_i (função das coordenadas iniciais) como:

$$\delta\pi = (\rho_0 \ddot{y}_i - P_{ji,j} - b_i^0) \delta y_i = 0 \quad (4.104)$$

Integra-se a expressão (4.104) no volume inicial, aproveitando-se as passagens do item 4.6 e, lembrando-se apenas que as derivadas agora são feitas em relação ao sistema de referência lagrangiano, encontra-se:

$$\int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} P_{ji} N_j \delta y_i dA_0 + \int_{V_0} P_{ji} \delta y_{i,j} dV_0 = 0 \quad (4.105)$$

As passagens que finalizam as duas últimas parcelas de (4.105) são realizadas neste item. A terceira integral não apresenta dificuldades formais, admite-se uma força de superfície descrita na configuração inicial dada pelo produto escalar entre o primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e a normal à superfície da configuração inicial, veja a equação (4.85). Na última integral, do fato de P_{ji} não ser simétrico e de $\delta y_{i,j} = \delta A_{ij}$ ser a variação do gradiente da função mudança de configuração, conclui-se que o conjugado energético de A_{ij} é P_{ji} , ou seja:

$$\frac{\partial u^e}{\partial A_{ij}} = P_{ji} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u^e}{\partial A} = P^t \quad \text{ou} \quad \delta u^e = P^t : \delta A \quad (4.106)$$

Assim, tem-se:

$$\delta\pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0 + \int_{V_0} P_{ji} \delta A_{ij} dV_0 = 0 \quad (4.107)$$

ou ainda em notação dyadica

$$\delta\pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\vec{y}} \cdot \delta \vec{y} dV_0 - \int_{V_0} \vec{b}^0 \cdot \delta \vec{y} dV_0 - \int_{A_0} \vec{p}^0 \cdot \delta \vec{y} dA_0 + \int_{V_0} P^t : \delta A dV_0 = 0 \quad (4.108)$$

que é o Princípio da Estacionariedade na versão Lagrangiana.

4.8 - Tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie

No capítulo 2, para uma situação uniaxial, apresentou-se o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie como conjugado energético da deformação de Green, neste item isso é feito para aplicações multiaxiais, relação chave para o MEF posicional. Apelando-se para a abstração matemática do estudante, como o gradiente da mudança de configuração A e seu inverso B^t são adimensionais, pode-se imaginar (deliberadamente) que o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff pode ser escrito como:

$$P^t = A \cdot S \quad \text{ou} \quad P_{ji} = A_{ik} \cdot S_{kj} \quad \text{ou} \quad P = S^t \cdot A^t \quad (4.109)$$

onde S recebe o nome de segundo tensor de Piola-Kirchhoff. Substituindo-se a equação (4.109) na relação (4.84) resulta:

$$S^t \cdot A^t = JA^{-1} \sigma \quad \text{ou} \quad S^t = JA^{-1} \cdot \sigma \cdot A^{-t} \quad (4.110)$$

Ainda, usando o fato de que σ é simétrico, se faz:

$$S = J \left(A^{-1} \cdot \sigma \cdot A^{-t} \right)^t = JA^{-1} \cdot \sigma^t \cdot A^{-t} = JA^{-1} \cdot \sigma \cdot A^{-t} = S^t \quad (4.111)$$

ou seja, S é simétrico. Colocando-se a segunda forma da equação (4.109) na última parcela de (4.107) resulta:

$$\int_{V_0} P_{ji} \delta A_{ij} dV_0 = \int_{V_0} A_{ik} S_{kj} \delta A_{ij} dV_0 = \int_{V_0} A_{ik} \delta A_{ij} S_{kj} dV_0 \quad (4.112)$$

ou em notação dyadica

$$\int_{V_0} P^t : \delta A dV_0 = \int_{V_0} A \cdot S : \delta A dV_0 = \int_{V_0} A^t \cdot \delta A : S dV_0 \quad (4.113)$$

pela simetria de S escreve-se:

$$A^t \cdot \delta A : S = (A^t \cdot \delta A) : S = (A^t \cdot \delta A)^t : S = (\delta A^t \cdot A) : S = \delta A^t \cdot A : S \quad (4.114)$$

Pela igualdade entre o primeiro e o último termo da equação (4.114) pode se escrever que:

$$A^t \cdot \delta A : S = \frac{1}{2} (A^t \cdot \delta A : S + \delta A^t \cdot A : S) = \frac{1}{2} (A^t \cdot \delta A + \delta A^t \cdot A) : S \quad (4.115)$$

Lembrando-se que a deformação de Green é dada por:

$$E = \frac{1}{2} (A^t \cdot A - I) \quad (4.116)$$

determina-se:

$$\delta E = \frac{1}{2} (\delta A^t \cdot A + A^t \cdot \delta A) \quad (4.117)$$

ou, olhando-se para a equação (4.115)

$$A' \cdot \delta A : S = \delta E : S = S : \delta E \quad (4.118)$$

ou seja, o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff é conjugado energético da deformação de Green (conforme aceito anteriormente) e a tensão de Cauchy pode ser calculada a partir deste, veja equações (4.110) e (4.111), como:

$$\sigma = \frac{1}{J} A \cdot S \cdot A' \quad (4.119)$$

citada após a equação (2.55) do capítulo 2.

Além disso, a estacionariedade da energia mecânica total, equação (4.108), pode ser escrita para o par conjugado energético (E, S) como:

$$\delta \Pi = \int_{V_0} \rho_0 \vec{y} \cdot \delta \vec{y} dV_0 - \int_{V_0} \vec{b}^0 \cdot \delta \vec{y} dV_0 - \int_{A_0} \vec{p}^0 \cdot \delta \vec{y} dA_0 + \int_{V_0} S : \delta E dV_0 = 0 \quad (4.120)$$

Esta equação será a base para os desenvolvimentos do método dos elementos finitos lagrangiano total baseado em posições para a análise estática ou dinâmica não linear geométrica de sólidos e estruturas.

Nesse ponto é interessante lembrar uma propriedade do cálculo tensorial, muito simples de se mostrar indicialmente, que é:

$$A : B = \text{Tr}(B' \cdot A), \quad A : B \rightarrow a_{kl} b_{kl}, \quad C = B' \cdot A \rightarrow c_{ij} = b_{ki} a_{kj}, \quad \text{Tr}(C) \rightarrow c_{ii} = b_{kl} a_{kl} = a_{kl} b_{kl} \quad (4.121)$$

Muitos textos apresentam as últimas integrais de (4.103) e (4.120), aproveitando-se da simetria dos tensores, como:

$$\int_V \sigma : \delta \varepsilon dV = \int_V \text{Tr}(\sigma \cdot \delta \varepsilon) dV \quad \text{e} \quad \int_{V_0} S : \delta E dV_0 = \int_{V_0} \text{Tr}(S \cdot \delta E) dV_0 \quad (4.122)$$

4.9 - Energia específica de deformação e leis constitutivas para sólidos

No capítulo 2, dedicado à solução de treliças, os conceitos iniciais de energia de deformação, leis constitutivas hiperelásticas e conjugados energéticos foram abordados para problemas uniaxiais com bastante detalhe. Nos itens 4.6, 4.7 e 4.8 o conceito de conjugado energético foi confirmado para problemas tridimensionais, abrindo-se caminho para a criação dos chamados modelos constitutivos hiperelásticos da elasticidade não linear.

Lembra-se que modelo constitutivo hiperelástico é aquele que pode ser escrito a partir de uma expressão fechada para a energia específica de deformação. No capítulo 2 foram apresentados gráficos de energia de deformação (associados a medidas de deformação uniaxiais) que refletiam leis constitutivas com módulos de elasticidade tangente dependentes do nível de deformação atual no material.

A pesquisa das leis constitutivas para materiais elásticos não lineares é uma área muito vasta da mecânica dos sólidos. Neste item serão discutidas algumas expressões para a energia específica de deformação que resultam em leis constitutivas hiperelásticas diversas. Antes de se apresentar tais expressões, é importante que se mencione que a energia específica de deformação (ou energia livre de Helmholtz – em uma versão simplificada) pode ser descrita, no caso de materiais homogêneos e isotrópicos, nas seguintes formas lagrangianas:

$$\Psi(A) = u_e(A) = u_e(C) = u_e(E) = u_e(I_1, I_2, I_3) = u_e(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (4.123)$$

onde I_i são os invariantes de C e λ_i são os alongamentos principais (que também são invariantes). A expressão (4.123) é óbvia, pois a deformação no ponto é integralmente conhecida para qualquer um dos argumentos utilizados. Entretanto, apenas as últimas duas formas impõem necessariamente a isotropia, pela invariância dos argumentos segundo os eixos escolhidos para a análise.

Conforme já foi comentado anteriormente, quando se estiver trabalhando com grandes deformações, a restrição $J > 0$ deve ser imposta pelos modelos constitutivos, no caso, hiperelásticos. Quando o modelo constitutivo não for capaz de impor tal condição, um método numérico desenvolvido com seu emprego deverá ser limitado a deformações moderadas, utilizando-se, por exemplo, testes de parada e avisos. Um modelo constitutivo hiperelástico completo deve satisfazer duas condições principais:

$$u_e(C = I) = u_e(E = 0) = 0 \quad (\text{normalização}) \quad (4.124)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_e \rightarrow +\infty \text{ quando } J \rightarrow 0^+ \\ u_e \rightarrow +\infty \text{ quando } J \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \quad (\text{crescimento}) \quad (4.125)$$

Quando um modelo constitutivo está escrito em função dos invariantes é óbvio que este é isotrópico, pois os invariantes independem da orientação do eixo de referência. Porém, para garantir a isotropia de modelos escritos diretamente em C ou E , cuidados adicionais devem ser tomados, pois as expressões devem ser independentes da orientação dos eixos de referência adotados.

Nesse texto não será utilizada lei constitutiva escrita diretamente em relação ao gradiente da função mudança de configuração A . Caso, em alguma aplicação futura, o leitor tenha esse interesse, cuidados adicionais devem ser tomados na expressão de u_e para evitar a dependência de rotação, translação e o aparecimento de anisotropia. Além disso, a deformação de Green é escolhida como base para as operações matemáticas desse texto.

Calculando-se uma variação da energia específica de deformação, usando como parâmetro a deformação de Green, encontra-se:

$$\delta u_e = \frac{\partial u_e}{\partial E} : \delta E \quad \text{ou} \quad \delta u_e = \frac{\partial u_e}{\partial E_{ij}} \delta E_{ij} \quad (4.126)$$

que, confrontada com a segunda expressão de (4.122) leva à conclusão:

$$S = \frac{\partial u_e}{\partial E} \quad \text{ou} \quad S_{ij} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{ij}} \quad (4.127)$$

ou seja, confirma-se que o conjugado energético da deformação de Green é a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. Além disso, a expressão,

$$\mathcal{C}_{klij} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}} \quad \text{ou} \quad \mathcal{C} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial E \otimes \partial E} \quad (4.128)$$

define o tensor constitutivo elástico tangente que é, pelo teorema de Shwartz, simétrico nos pares $k\ell$ e ij e, pela simetria da deformação de Green, em ij e $k\ell$ e, portanto, possui apenas 21 termos independentes para materiais anisotrópicos gerais.

4.9.1 - Modelo constitutivo de Saint - Venant - Kirchhoff

Esse é o modelo constitutivo mais simples, pois é uma extensão lagrangiana direta da Lei de Hooke, ou seja, uma relação linear entre S e E . A expressão generalizada da energia de deformação do modelo de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK) em sua versão tensorial é dada por:

$$u_e(E) = \frac{1}{2} E_{kl} \mathcal{C}_{klij} E_{ij} \quad \text{ou} \quad u_e(E) = \frac{1}{2} E : \mathcal{C} : E \quad (4.129)$$

onde \mathcal{C} é o tensor constitutivo elástico (constante) de quarta ordem definido de forma geral pela equação (4.128), bastante conhecido na elasticidade linear, pois apenas se trocou, na expressão da Lei de Hooke generalizada, a deformação linear pela deformação de Green. Portanto, é claro que para pequenas deformações essas leis constitutivas coincidem.

A relação tensão deformação é dada aplicando-se (4.127), ou seja:

$$S = \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{1}{2} E : \mathcal{C} : E \right) = \frac{1}{2} (II : \mathcal{C} : E + E : \mathcal{C} : II) = \mathcal{C} : E \quad (4.130)$$

ou em notação indicial,

$$S_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl} E_{kl} \quad (4.131)$$

Aplicando-se a segunda derivada para se determinar o tensor constitutivo elástico, resulta,

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial E \otimes \partial E} = \frac{\partial S}{\partial E} = \mathcal{C} : \Pi = \mathcal{C} \quad (4.132)$$

Em notação de Voigt é possível se explicitar o tensor constitutivo da Lei de SVK, e escrever (4.131) como:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \bar{C}_{1112} & \bar{C}_{1113} & \bar{C}_{1123} \\ & C_{2222} & C_{2233} & \bar{C}_{2212} & \bar{C}_{2213} & \bar{C}_{2223} \\ & & C_{3333} & \bar{C}_{3312} & \bar{C}_{3313} & \bar{C}_{3323} \\ & & & \bar{C}_{1212} & \bar{C}_{1213} & \bar{C}_{1223} \\ & Sim & & \bar{C}_{1313} & \bar{C}_{1323} & \\ & & & & \bar{C}_{2323} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{Bmatrix} \quad (4.133)$$

onde $\bar{C}_{ijkl} = 2C_{ijkl}$ pelo fato de se utilizar apenas uma das componentes simétricas de distorção de Green na expressão (4.133) enquanto as duas são utilizadas na equação (4.131). Como comentado após a equação (4.128) o tensor constitutivo elástico possui apenas 21 constantes independentes não nulas para representar um material anisotrópico geral.

Fazendo-se uma inspeção em pequenas deformações, pela inversa da expressão (4.133), observa-se que as tensões de cisalhamento causam alongamento e as tensões normais causam distorção em um material anisotrópico. Um material anisotrópico é chamado ortótropo quando existe um sistema de eixos cartesianos especial para o qual a influência cruzada entre cisalhamento e normal e a influência entre cisalhamentos não ocorrem. Segundo as direções de ortotropia o tensor constitutivo escrito na notação de Voigt toma a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \bar{C}_{1212} & 0 & 0 \\ & Sim & & \bar{C}_{1313} & 0 & \\ & & & & \bar{C}_{2323} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{Bmatrix} \quad (4.134)$$

onde existem 9 constantes independentes.

A figura 4.12 mostra um material composto por uma matriz isotrópica e fibras dispostas ortogonalmente entre si que, quando considerado homogêneo, é um material ortótropo. A partir desta figura é fácil se identificar o tensor constitutivo elástico com a

forma (4.134). Além disso, é possível se construir a relação inversa, a partir de observações fenomenológicas para pequenas deformações, resultando:

$$\begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{Bmatrix} \quad (4.135)$$

onde, pela simetria, $E_i \nu_{(i)j} = E_j \nu_{(j)i}$ para $i \neq j$. Nesta representação o número de constantes independentes também é 9.

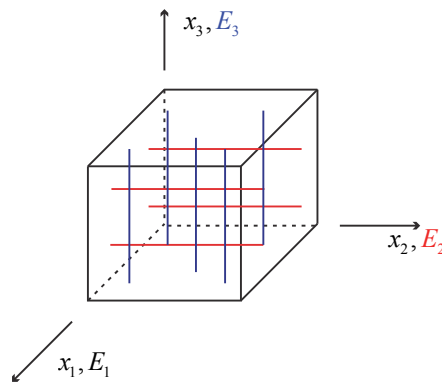


Figura 4.12 – Exemplo de material ortótropo

Na figura 4.13 pode-se ver um exemplo de material transversalmente isótropo, ou seja, pode-se aplicar um giro no tensor constitutivo em torno do eixo de ortotropia (no caso x_3) que o tensor constitutivo elástico não se altera. Neste caso o tensor elástico de flexibilidade na notação de Voigt fica:

$$\begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E & -\nu_{32}/E & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{Bmatrix} \quad (4.136)$$

para o qual o número de constantes independentes é 6.

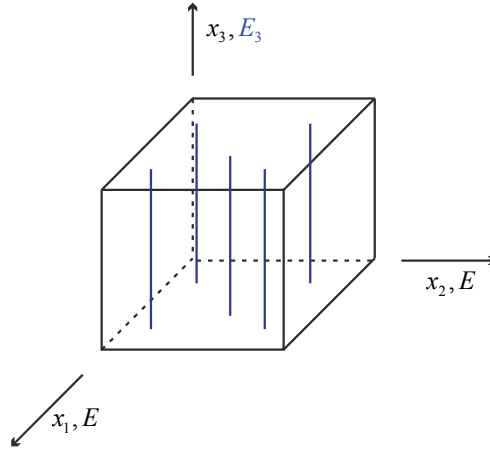


Figura 4.13 – Exemplo de material transversalmente isotrópico

Para materiais isotrópicos, valem as equações,

$$\begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{Bmatrix} \quad (4.137)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{Bmatrix} \quad (4.138)$$

onde E é o módulo de elasticidade, G é o módulo de elasticidade transversal e ν é o coeficiente de Poisson. Ainda da elasticidade linear, aceita-se a relação

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.139)$$

e todos os significados fenomenológicos da Lei de Hooke enquanto as deformações são pequenas. Para deformações moderadas, por similaridade, preserva-se o significado físico. Porém, para grandes deformações, esse modelo não pode ser utilizado, pois não respeita as condições de crescimento (4.125) e em um código computacional, critérios de parada ou avisos devem estar presentes.

Ainda deve-se comentar que, para materiais isotrópicos, é praxe se escrever a energia específica de deformação 3D, equação (4.129) e, portanto, o modelo constitutivo de SVK como:

$$u_e = \frac{\mathcal{G}}{(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu)(E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2) + 2\nu(E_{11}E_{22} + E_{11}E_{33} + E_{22}E_{33}) \right. \\ \left. + (1-2\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2 + E_{13}^2 + E_{31}^2 + E_{23}^2 + E_{32}^2) \right\} \quad (4.140)$$

Para sólidos bidimensionais, em estado plano de deformação, tem-se: $E_{13} = E_{31} = E_{23} = E_{32} = E_{33} = 0$ e a energia de deformação fica dada por:

$$u_e = \frac{\mathcal{G}}{(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu)(E_{11}^2 + E_{22}^2) + 2\nu E_{11}E_{22} + (1-2\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2) \right\} \quad (4.141)$$

tem-se ainda que $S_{13} = S_{23} = 0$ e $S_{33} = \lambda(E_{11} + E_{22}) = \nu(S_{11} + S_{22})$ com $\lambda = E\nu / [(1-2\nu)(1+\nu)]$.

Para sólidos bidimensionais, em estado plano de tensão, assume-se: $S_{13} = S_{31} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = 0$ e a energia de deformação fica dada por:

$$u_e = \frac{\mathcal{G}}{(1-\nu)} \left\{ E_{11}^2 + E_{22}^2 + 2\nu E_{11}E_{22} + (1-\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2) \right\} \quad (4.142)$$

Para facilitar o entendimento e desenvolvimento de modelos constitutivos mais gerais, mostram-se os cálculos das tensões de Piola Kirchhoff de segunda espécie para a lei constitutiva integral (4.141), como:

$$S_{11} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{11}} = \frac{2\mathcal{G}}{(1-2\nu)} ((1-\nu)E_{11} + \nu E_{22}) \quad (4.143)$$

$$S_{22} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{22}} = \frac{2\mathcal{G}}{(1-2\nu)} ((1-\nu)E_{22} + \nu E_{11}) \quad (4.144)$$

$$S_{12} = 2\mathcal{G}E_{12} \quad (4.145)$$

$$S_{21} = 2\mathcal{G}E_{21} \quad (4.146)$$

Deve-se ainda observar que, caso o coeficiente de Poisson seja nulo, não há diferença entre o EPD e o EPT. Derivando-se as equações (4.143) até (4.146) em relação às componentes de deformação de Green escreve-se o tensor constitutivo elástico para o EPD-SVK. Esse procedimento pode ser repetido para o EPT ou para o caso 3D. Conforme será visto no próximo capítulo, o tensor constitutivo elástico é importante na construção da matriz Hessiana do processo de solução, semelhante ao descrito para treliças no capítulo 2.

Para os objetivos de programação introdutória do MEF posicional, dispensa-se a leitura dos próximos itens, que devem ser revisitados após a leitura do capítulo 5.

4.9.2 - O Jacobiano como regulador da condição de crescimento dos modelos constitutivos hiperelásticos

Para que a condição (4.125) seja respeitada em um modelo constitutivo, é necessário que pelo menos uma parte da energia específica de deformação seja escrita em função do Jacobiano (J). Assim, para se calcular as tensões e o tensor constitutivo elástico, por derivações sucessivas da energia específica de deformação, veja equações (4.127) e (4.128), é necessário se saber realizar a operação $\partial J / dE$.

Inicia-se recordando que:

$$C = A^t \cdot A \quad (3.16)$$

$$E = \frac{1}{2}(C - I) \quad (3.41)$$

$$J^2 = Det(C) = (C_{11}C_{22}C_{33} + C_{12}C_{23}C_{31} + C_{21}C_{32}C_{13}) + \\ - (C_{11}C_{32}C_{23} + C_{22}C_{31}C_{13} + C_{33}C_{12}C_{21}) \quad (3.76)$$

$$\sigma = \frac{1}{J} A \cdot S \cdot A^t \quad (4.119)$$

Da equação (3.41) escreve-se:

$$\frac{\partial E}{\partial C} = \frac{1}{2} II \quad \text{ou ainda} \quad \frac{\partial C}{\partial E} = 2II \quad (4.147)$$

Da equação (3.76) se faz, por exemplo:

$$\frac{\partial(J^2)}{\partial C_{11}} = (C_{22}C_{33} - C_{32}C_{23}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial(J^2)}{\partial C_{21}} = (C_{32}C_{13} - C_{12}C_{33}) \quad (4.148)$$

que completando todos os termos leva à:

$$\frac{\partial(J^2)}{\partial C} = Adj(C) = Adj(C^t) = (Adj(C))^t \quad (4.149)$$

onde usou-se da simetria de C na última igualdade. Assim, pode se calcular:

$$\frac{\partial(J^2)}{\partial C} = 2J \frac{\partial J}{\partial C} \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial C} = \frac{1}{2J} (Adj(C))^t = \frac{J}{2} \frac{(Adj(C))^t}{J^2} = \frac{J}{2} C^{-1} \quad (4.150)$$

mas, usando-se (4.147), escreve-se:

$$\frac{\partial J}{\partial E} = \frac{\partial J}{\partial C} : \frac{\partial C}{\partial E} = \frac{J}{2} C^{-1} : 2II = JC^{-1} \quad (4.151)$$

ou simplesmente

$$\frac{\partial J}{\partial E} = JC^{-1} \quad (4.152)$$

Seja, por exemplo, uma energia específica de deformação hipotética Ψ_{vol} , então

$$S_{vol} = \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial E} = \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} JC^{-1} = \alpha J (A^{-1} \cdot A^{-t}) \quad (4.153)$$

onde a letra α foi usada no lugar de $\partial \Psi_{vol} / \partial J$ apenas para indicar que este é um valor escalar. Usando-se (4.119), calcula-se a tensão de Cauchy associada à S_{vol} , como:

$$\sigma_{vol} = \frac{1}{J} A \cdot S_{vol} \cdot A^t = \frac{\alpha J}{J} A \cdot A^{-1} \cdot A^{-t} \cdot A^t = \alpha I = \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} I = \sigma_h \quad (4.154)$$

ou seja, uma tensão hidrostática com intensidade $\partial \Psi_{vol} / \partial J$.

Assim, ao se construir um termo da energia específica de deformação em função unicamente do Jacobiano e os demais termos em função dos outros invariantes, aquele será responsável pela parcela hidrostática de tensão real e estes pela parcela desviadora.

Seja, por exemplo, a energia específica de deformação:

$$\Psi_{vol} = k_{vol} (J^{2n} + J^{-2n} - 2) \quad \text{com} \quad \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} = 2nk_{vol} (J^{2n-1} - J^{-(2n+1)}) \quad (4.155)$$

onde k_{vol} é uma constante elástica do material a ser determinada mais adiante. Para $n=1,2,3\dots$ essa energia respeita as condições de normalização e crescimento, então calcula-se a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie como :

$$S_{vol} = \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial E} = \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial E} = 2nk_{vol} (J^{2n-1} - J^{-(2n+1)}) \frac{\partial J}{\partial E} \quad (4.156)$$

ou usando-se (4.151)

$$S_{vol} = 2nk_{vol} (J^{2n} - J^{-2n}) C^{-1} \quad (4.157)$$

donde pode-se recuperar o valor da tensão de Cauchy pela expressão (4.119) como:

$$\sigma_h = 2nk_{vol} \left(J^{2n-1} - \frac{1}{J^{2n+1}} \right) I \quad (4.158)$$

No início do processo de carregamento tem-se $J \cong 1$ e, portanto, $\sigma_h = 0$, quando $J \rightarrow 0^+$ a tensão hidrostática vai para $-\infty$ e quando $J \rightarrow +\infty$ a tensão hidrostática vai para $+\infty$, verificando a equação (4.125).

Para se calcular o tensor constitutivo tangente a partir de uma energia específica de deformação Ψ_{vol} genérica faz-se:

$$\mathbf{e}_{ijk\ell}^{vol} = \frac{\partial S_{ij}^{vol}}{\partial E_{k\ell}} = \frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial E_{ij} \partial E_{k\ell}} \quad (4.159)$$

que desenvolvendo para um potencial de energia genérico resulta

$$\mathcal{C}_{ijk\ell}^{vol} = \frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial E_{ij} \partial E_{k\ell}} = \frac{\partial J}{\partial E_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial J^2} \frac{\partial J}{\partial E_{k\ell}} + \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \frac{\partial^2 J}{\partial E_{ij} \partial E_{k\ell}} \quad (4.160)$$

que depende de valores escalares $\partial \Psi_{vol} / \partial J$ e $\partial^2 \Psi_{vol} / \partial J^2$ sendo $\partial J / \partial E$ dado pela equação (4.151).

Falta calcular a segunda derivada de J em relação à deformação de Green, dada por

$$\mathcal{H}_{ijk\ell} = \frac{\partial^2 J}{\partial E_{ij} \partial E_{k\ell}} = J \{ D_{ij} D_{k\ell} - 2 D_{ik} D_{j\ell} \} \quad (4.161)$$

onde chamou-se $D = C^{-1}$.

Especificamente para a função Ψ_{vol} da equação (4.155) tem-se:

$$\frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial J^2} = 2nk_{vol} \left((2n-1)J^{2n-2} + (2n+1)J^{-2(n+1)} \right) \quad (4.162)$$

que encerra, juntamente com a equação (4.160) o cálculo do tensor constitutivo elástico para o potencial proposto.

Para se demonstrar a expressão (4.161) começa-se reescrevendo (4.151) (com $D = C^{-1}$) como:

$$M = \frac{\partial J}{\partial E} = J C^{-1} = J D \quad \text{ou} \quad M = J D \quad (4.163)$$

onde usou-se a letra M para encurtar a escrita.

Escreve-se a equação (4.163) em notação indicial, para se realizar as operações com maior detalhes:

$$M_{kj} = J D_{kj} \quad (4.164)$$

Dividem-se as operações em duas colunas, a coluna esquerda quando se pré-multiplica (4.163) por C e a coluna da direita quando se faz a pós-multiplicação.

$$\left. \begin{aligned} J I &= C \cdot M \\ J \delta_{ij} &= C_{ik} M_{kj} \\ \frac{\partial J}{\partial C_{oz}} \delta_{ij} &= \frac{\partial}{\partial C_{oz}} (C_{ik} M_{kj}) \\ \delta_{ij} \frac{\partial J}{\partial C_{oz}} &= \frac{\partial C_{ik}}{\partial C_{oz}} M_{kj} + C_{ik} \frac{\partial M_{kj}}{\partial C_{oz}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} J I &= M \cdot C \\ J \delta_{ij} &= M_{ik} C_{kj} \\ \frac{\partial J}{\partial C_{oz}} \delta_{ij} &= \frac{\partial}{\partial C_{oz}} (M_{ik} C_{kj}) \\ \delta_{ij} \frac{\partial J}{\partial C_{oz}} &= \frac{\partial M_{ik}}{\partial C_{oz}} C_{kj} + \frac{\partial C_{kj}}{\partial C_{oz}} M_{ik} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{(a)} \\ \text{(b)} \\ \text{(c)} \\ \text{(d)} \end{aligned}$$

$$C_{ik} \frac{\partial M_{kj}}{\partial C_{oz}} = \delta_{ij} \frac{\partial J}{\partial C_{oz}} - M_{kj} \frac{\partial C_{ik}}{\partial C_{oz}} \quad \left| \quad C_{kj} \frac{\partial M_{ik}}{\partial C_{oz}} = \delta_{ij} \frac{\partial J}{\partial C_{oz}} - M_{ik} \frac{\partial C_{kj}}{\partial C_{oz}} \quad \right| \quad (e)$$

Usando-se $D = C^{-1}$ e o fato de $\partial C_{ik} / \partial C_{oz} = \delta_{io} \delta_{kz}$, continua-se o processo:

$$D_{\gamma i} C_{ik} \frac{\partial M_{kj}}{\partial C_{oz}} = D_{\gamma i} \delta_{ij} \frac{\partial J}{\partial C_{oz}} - D_{\gamma i} M_{kj} \delta_{io} \delta_{kz} \quad \left| \quad C_{kj} D_{j\gamma} \frac{\partial M_{ik}}{\partial C_{oz}} = \delta_{ij} D_{j\gamma} \frac{\partial J}{\partial C_{oz}} - D_{j\gamma} M_{ik} \delta_{ko} \delta_{jz} \quad \right| \quad (f)$$

$$\delta_{\gamma k} \frac{\partial M_{kj}}{\partial C_{oz}} = D_{\gamma j} \frac{\partial J}{\partial C_{oz}} - D_{\gamma o} M_{zj} \quad \left| \quad \delta_{k\gamma} \frac{\partial M_{ik}}{\partial C_{oz}} = D_{i\gamma} \frac{\partial J}{\partial C_{oz}} - D_{z\gamma} M_{io} \quad \right| \quad (g)$$

$$\frac{\partial M_{j\gamma}}{\partial C_{oz}} = D_{j\gamma} \frac{\partial J}{\partial C_{oz}} - D_{jo} M_{z\gamma} \quad \left| \quad \frac{\partial M_{j\gamma}}{\partial C_{oz}} = D_{j\gamma} \frac{\partial J}{\partial C_{oz}} - D_{z\gamma} M_{jo} \quad \right| \quad (h)$$

Algumas substituições de índices foram feitas na linha (h): na segunda coluna trocou-se a letra i por j e na primeira γ por j . Assim, conclui-se que:

$$D_{jo} M_{z\gamma} = D_{z\gamma} M_{jo} \quad (i)$$

que podem ser substituídas por sua média em qualquer das expressões (h), como:

$$\frac{\partial M_{j\gamma}}{\partial C_{oz}} = D_{j\gamma} \frac{\partial J}{\partial C_{oz}} - \frac{1}{2} (D_{jo} M_{z\gamma} + D_{z\gamma} M_{jo}) \quad (4.165)$$

Usando-se (4.164), (4.151) e (4.147) realiza-se a sequência:

$$\frac{\partial M_{j\gamma}}{\partial E_{oz}} = 2D_{j\gamma} \frac{\partial J}{\partial C_{oz}} - (D_{jo} M_{z\gamma} + D_{z\gamma} M_{jo}) \quad (i)$$

Lembrando-se a equação (4.163), escreves-se:

$$\frac{\partial M_{j\gamma}}{\partial E_{oz}} = D_{j\gamma} \frac{\partial J}{\partial E_{oz}} - (D_{jo} M_{z\gamma} + D_{z\gamma} M_{jo}) \quad (j)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial E_{oz} \partial E_{j\gamma}} = JD_{j\gamma} D_{oz} - J (D_{jo} D_{z\gamma} + D_{z\gamma} D_{jo}) \quad (k)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial E_{oz} \partial E_{j\gamma}} = J \{ D_{j\gamma} D_{oz} - (D_{jo} D_{z\gamma} + D_{z\gamma} D_{jo}) \} \quad (4.166)$$

Finalmente, escreve-se:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial E_{j\gamma} \partial E_{oz}} = J \{ D_{j\gamma} D_{oz} - 2D_{jo} D_{z\gamma} \} \quad (4.167)$$

que é a expressão (4.161).

Observa-se que não é possível trocar j com z ou o com γ na equação (4.167) dificultando sua escrita em notação dyadica (ou compacta).

As equações (4.157) e (4.160) revelam que é possível se escrever uma parcela que controla a variação de volume em modelos constitutivos. É de interesse, portanto, se determinar outras parcelas que não dependam da variação de volume.

4.9.3 - Decomposição multiplicativa para a geração de modelos hiperelásticos

Quando se pretende separar, na energia específica de deformação, a parcela que gera energia apenas pela variação de volume daquela que não gera energia pela variação de volume, é usual, na literatura, realizar a chamada decomposição multiplicativa do gradiente da mudança de configuração. Essa decomposição nada mais é do que se escrever

$$A = \hat{A} \cdot \bar{A} \quad (4.168)$$

com

$$\hat{A} = J^{1/3} I \Rightarrow Det(\hat{A}) = J \quad (4.169)$$

$$\bar{A} = J^{-1/3} A \Rightarrow Det(\bar{A}) = 1 \quad (4.170)$$

Usando-se a expressão (4.168) se calcula o alongamento de Cauchy Green como:

$$C = \bar{A}^t \cdot \hat{A}^t \cdot \hat{A} \cdot \bar{A} = J^{2/3} \bar{A}^t \cdot \bar{A} = J^{2/3} \bar{C} \quad \text{ou} \quad \bar{C} = J^{-2/3} C \quad (4.171)$$

com $Det(\bar{C}) = 1$, constante.

Definindo-se $\hat{C} = J^{2/3} I$ tem-se que

$$C = \hat{C} \cdot \bar{C} = \bar{C} \cdot \hat{C} \quad (4.172)$$

que é a decomposição multiplicativa escrita diretamente em C . Como se observa $Det(\hat{C}) = J^2 = Det(C)$.

Como proposta de energia de deformação que contempla a decomposição multiplicativa é usual se escrever:

$$\Psi = \Psi_{vol}(Det(\hat{C})) + \Psi_{iso}(\bar{C}) = \Psi_{vol}(J) + \Psi_{iso}(\bar{C}) \quad (4.173)$$

onde Ψ_{iso} é a parte isocórica da energia, ou seja, aquela que não é sensível a mudanças de volume. Para materiais isotrópicos é comum se tomar a segunda parcela da equação (4.173) e escrever como função dos invariantes de \bar{C} , ou seja:

$$\Psi = \Psi_{vol}(J) + \Psi_{iso}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) \quad \text{ou ainda} \quad \Psi = \Psi_{vol}(J) + \Psi_{iso}^1(\bar{I}_1) + \Psi_{iso}^2(\bar{I}_2) \quad (4.174)$$

Nota-se que o valor $\bar{I}_3 = Det(\bar{C}) = 1$ é omitido na parcela isocórica de (4.174) por ser constante.

Apenas para lembrar, sabe-se que:

$$\bar{I}_1 = Tr(\bar{C}) \quad \text{e} \quad \bar{I}_2 = Tr(\bar{C}^{-1}) \quad (4.175)$$

Várias expressões podem ser estabelecidas para os potenciais isocóricos Ψ_{iso}^1 ou Ψ_{iso}^2 , assim as passagens que seguem levam essas parcelas de forma genérica.

Percebe-se facilmente que nos modelos constitutivos escritos a partir da equação (4.174) tem-se:

$$S = S_{vol} + S_{iso}^1 + S_{iso}^2 = \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial E} + \frac{\partial \Psi_{iso}^1}{\partial E} + \frac{\partial \Psi_{iso}^2}{\partial E} \quad (4.176)$$

e

$$\mathbf{e}_{ijkl} = \mathbf{e}_{ijkl}^{vol} + \mathbf{e}_{ijkl}^{iso1} + \mathbf{e}_{ijkl}^{iso2} = \frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi_{iso}^1}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi_{iso}^2}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (4.177)$$

onde a parte volumétrica já foi tratada no item anterior. Além disso, seguindo-se procedimento análogo ao aplicado no item anterior, calcula-se

$$S_{iso}^1 = \frac{\partial \Psi_{iso}^1}{\partial E} = \frac{\partial \Psi_{iso}^1}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E} \quad (4.178)$$

$$S_{iso}^2 = \frac{\partial \Psi_{iso}^2}{\partial E} = \frac{\partial \Psi_{iso}^2}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E} \quad (4.179)$$

$$\mathbf{e}_{ijkl}^{iso1} = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi_{iso}^1}{(\partial \bar{I}_1)^2} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E_{kl}} + \frac{\partial \Psi_{iso}^1}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (4.180)$$

$$\mathbf{e}_{ijkl}^{iso2} = \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi_{iso}^2}{(\partial \bar{I}_2)^2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E_{kl}} + \frac{\partial \Psi_{iso}^2}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (4.181)$$

4.9.4 - Derivada dos invariantes em relação à deformação de Green

Nas equações (4.178) até (4.181) percebe-se que faltam se calcular as primeira e segunda derivadas dos invariantes isocóricos em relação à deformação de Green.

O primeiro invariante isocórico pode ser escrito como:

$$\bar{I}_1 = Tr(\bar{C}) = J^{-2/3} (C_{11} + C_{22} + C_{33}) = J^{-2/3} C_{ii} = J^{-2/3} tr(C) = J^{-2/3} I_1 \quad (4.182)$$

Sua derivada em relação à deformação de Green fica:

$$\frac{\partial \text{Tr}(\bar{C})}{\partial E} = 2 \frac{\partial \text{Tr}(\bar{C})}{\partial C} = -\frac{4}{3} J^{-5/3} \frac{\partial J}{\partial C} (C_{11} + C_{22} + C_{33}) + 2J^{-2/3} I \quad (4.183)$$

onde I é o tensor identidade de segunda ordem e $\partial J / \partial C = (J/2)C^{-1}$ conforme aparece na equação (4.151), assim:

$$\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E} = -\frac{2}{3} J^{-2/3} \text{Tr}(C) C^{-1} + 2J^{-2/3} I = 2J^{-2/3} \left(I - \frac{1}{3} \text{Tr}(C) C^{-1} \right) \quad (4.184)$$

ou em notação indicial

$$\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E_{ij}} = 2J^{-2/3} \left\{ \delta_{ij} - \frac{1}{3} C_{kk} D_{ij} \right\} \quad (4.185)$$

Escreve-se o segundo invariante isocórico em sua forma mais simples como:

$$\bar{I}_2 = \begin{vmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} \\ \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{33} \end{vmatrix} \quad (4.186)$$

ou, a partir da equação (4.171) desenvolve-se:

$$\bar{I}_2 = \left\{ (C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}) + (C_{11}C_{33} - C_{13}C_{31}) + (C_{22}C_{33} - C_{23}C_{32}) \right\} J^{-4/3} = J^{-4/3} I_2 \quad (4.187)$$

Sua derivada em relação à deformação de Green fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E} &= 2 \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial C} = -\frac{8}{3} J^{-7/3} \frac{\partial J}{\partial C} \overbrace{\left\{ (C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}) + (C_{11}C_{33} - C_{13}C_{31}) + (C_{22}C_{33} - C_{23}C_{32}) \right\}}^{I_2} + \\ &+ 2J^{-4/3} \underbrace{\begin{bmatrix} C_{22} + C_{33} & -C_{21} & -C_{31} \\ -C_{12} & C_{11} + C_{33} & -C_{32} \\ -C_{13} & -C_{23} & C_{11} + C_{22} \end{bmatrix}}_{\text{Tr}(C)I - C} \end{aligned} \quad (4.188)$$

ou, organizando-se:

$$\frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E} = 2 \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial C} = 2J^{-4/3} \left\{ [\text{Tr}(C)I - C] - \frac{2}{3} C^{-1} I_2 \right\} \quad (4.189)$$

em notação indicial:

$$\frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E_{ij}} = 2J^{-4/3} \left\{ (C_{kk} \delta_{ij} - C_{ij}) - \frac{2}{3} D_{ij} I_2 \right\} \quad (4.190)$$

Observa-se que em (4.184) e (4.189) aparecem os termos J , C^{-1} , $I_1 = \text{Tr}(C)$ e I_2 . É possível se realizar as segundas derivadas dos invariantes para se calcular o tensor constitutivo tangente para modelos hiperelásticos gerais. Para tanto, calcula-se:

$$\frac{\partial I_1}{\partial E_{oz}} = \frac{\partial}{\partial E_{oz}} (C_{ii}) = 2\delta_{oz} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial I_1}{\partial E} = 2I \quad (4.191)$$

e, portanto,

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial E_{j\gamma} \partial E_{oz}} = 0 \quad (4.192)$$

Além disso, de (4.187)

$$\frac{\partial I_2}{\partial C} = \text{tr}(C)I - C^t \quad \text{ou} \quad \frac{\partial I_2}{\partial E} = 2(\text{tr}(C)I - C^t) \quad (4.193)$$

que em notação indicial fica:

$$\frac{\partial I_2}{\partial E_{oz}} = 2(C_{ii}\delta_{oz} - C_{zo}) \quad (4.194)$$

donde

$$\frac{\partial^2 I_2}{\partial E_{j\gamma} \partial E_{oz}} = 4\{\delta_{j\gamma}\delta_{oz} - \delta_{\gamma o}\delta_{jz}\} \quad (4.195)$$

Além disso, à luz dos desenvolvimentos anteriores, fica simples se realizar a derivada de C^{-1} , como:

$$C \cdot C^{-1} = I \quad \text{ou} \quad C_{ij} \cdot D_{jk} = I_{ik} \quad (a)$$

$$\frac{\partial}{\partial C_{oz}}(C_{ij} D_{jk}) = 0_{ikoz} \quad (b)$$

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial C_{oz}} D_{jk} = -C_{ij} \frac{\partial D_{jk}}{\partial C_{oz}} \quad (c)$$

$$\delta_{io}\delta_{jz} D_{jk} = \delta_{io} D_{zk} = -C_{ij} \frac{\partial D_{jk}}{\partial C_{oz}} \quad (d)$$

multiplicando-se por $D_{\gamma i}$

$$D_{\gamma i} C_{ij} \frac{\partial D_{jk}}{\partial C_{oz}} = -D_{\gamma i} \delta_{io} D_{zk} \quad (e)$$

$$\delta_{\gamma j} \frac{\partial D_{jk}}{\partial C_{oz}} = -D_{\gamma o} D_{zk} \quad (f)$$

finalmente

$$\frac{\partial D_{\gamma k}}{\partial C_{oz}} = -D_{\gamma o} D_{zk} \quad \frac{\partial C^{-1}}{\partial C} = -C^{-1} \otimes C^{-1} \quad (4.196)$$

sendo a representação dyadica incompleta.

Utilizando-se as equações (4.189) até (4.196), com algum esforço algébrico, calculam-se:

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{4}{3} J^{-2/3} \left\{ \frac{1}{3} \{ D_{ij} D_{kl} + 3 D_{ik} D_{lj} \} I_1 - D_{ij} \delta_{kl} - D_{kl} \delta_{ij} \right\} \quad (4.197)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{8}{3} J^{-4/3} \left\{ \left[\frac{2}{3} D_{ij} D_{kl} + D_{ik} D_{lj} \right] I_2 - \left[C_{zz} (D_{ij} \delta_{kl} + D_{kl} \delta_{ij}) \right] + \right. \\ \left. + D_{ij} C_{lk} + D_{kl} C_{ji} + \frac{3}{2} [\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{jk} \delta_{il}] \right\} \quad (4.198)$$

Enfim, completam-se as lacunas das equações (4.178) até (4.181) com as equações (4.184) ou (4.185), (4.189) ou (4.190), (4.197) e (4.198).

A proposta de potenciais de energia de deformação mais elaborados pode ser feita pelo leitor em momento oportuno de sua pesquisa, entretanto no item 4.9.6 um modelo completo (apesar de simples) é mostrado, abrindo o entendimento para novas propostas.

4.9.5 - Tensões de Piola isocóricas e a tensão desviadora de Cauchy.

Tal como realizado na equação (4.154) onde se demonstrou que a tensão resultante do potencial volumétrico corresponde à componente hidrostática no espaço de Cauchy, aplicar-se-á a equação (4.119) para as tensões isocóricas 1 e 2.

Juntando-se as equações (4.178) e (4.184) resulta que a tensão isocórica 1 é escrita como:

$$\left(S_{iso}^1 \right)_{ij} = \frac{\partial \Psi_{iso}^1}{\partial I_1} 2J^{-2/3} \left(I - \frac{1}{3} Tr(C) C^{-1} \right) = \alpha \left\{ \delta_{ij} - \frac{1}{3} C_{kk} D_{ij} \right\} \quad (4.199)$$

onde α é um escalar.

Assim, a tensão correspondente no espaço de Cauchy fica dada aplicando-se a expressão (4.119) sobre (4.199), como:

$$\sigma_{iso}^1 = \frac{\alpha}{J} A \cdot \left\{ I - \frac{1}{3} Tr(C) C^{-1} \right\} \cdot A^t = \frac{\alpha}{J} A \cdot \left\{ I - \frac{1}{3} Tr(C) A^{-1} \cdot A^{-t} \right\} \cdot A^t \quad (4.200)$$

$$\sigma_{iso}^1 = \frac{\alpha}{J} \left\{ A \cdot A^t - \frac{1}{3} Tr(C) I \right\} \quad (4.201)$$

como $Tr(C) = Tr(A^t \cdot A) = Tr(A \cdot A^t)$ tem-se:

$$\sigma_{iso}^1 = \frac{\alpha}{J} \left\{ A \cdot A^t - \frac{1}{3} Tr(A \cdot A^t) I \right\} = \sigma^{des} \quad (4.202)$$

Assim, a tensão S_{iso}^1 corresponde a uma tensão desviadora.

Procede-se da mesma forma para a tensão S_{iso}^2 , escrita pela combinação entre as equações (4.179) e (4.189), como

$$S_{iso}^2 = \frac{\partial \Psi_{iso}^2}{\partial I_2} 2J^{-4/3} \left\{ [Tr(C)I - C] - \frac{2}{3} C^{-1} I_2 \right\} = \alpha \left\{ [Tr(C)I - C] - \frac{2}{3} C^{-1} I_2 \right\} \quad (4.203)$$

aplicando-se a equação (4.119) sobre (4.203) tem-se:

$$\sigma_{iso}^2 = \alpha \left[(tr(C)(A \cdot A') - (A \cdot A') \cdot (A \cdot A')) - \left(\frac{2}{3} I_2 \right) I \right] \quad (4.204)$$

Abrindo-se as expressões encontra-se que $tr(C) = tr(A \cdot A')$ e que, chamando-se

$C' = A \cdot A'$ simétrico, tem-se:

$$tr(C')tr(C') - tr(C' \cdot C') = 2I_2 \quad (4.205)$$

donde

$$tr(\sigma_{iso}^2) = \alpha (2I_2 - 2I_2) = 0 \quad (4.206)$$

e, portanto:

$$\sigma_{iso}^2 = \alpha \left[(tr(C)C' - C' \cdot C') - \left(\frac{2}{3} I_2 \right) I \right] = \sigma_{des} \quad (4.207)$$

é desviadora. Ou seja, a tensão de Piola-Kirchhoff S_{iso}^2 corresponde a uma tensão desviadora.

4.9.6 - Alguns potenciais de energia e esclarecimentos:

Após a equação (4.155) comentou-se que iria se determinar o valor de k_{vol} . Em última análise a determinação dessa constante está associada a ensaios laboratoriais. Porém, mostra-se que existe uma relação direta entre k_{vol} e as propriedades elásticas do modelo constitutivo linear (Saint-Venant-Kirchhoff) quando pequenas deformações são assumidas.

Para se fazer essa demonstração deve-se escrever o modelo isotrópico de Saint-Venant-Kirchhoff em sua forma mais direta, como:

$$S_{ij} = 2GE_{ij} + \lambda E_v \delta_{ij} \quad \text{com} \quad E_v = E_{kk} = 3E_h \quad (4.208)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal, λ é a constante de Lamè, E_v é a deformação volumétrica no sentido de pequenas deformações e E_h é chamada de deformação hidrostática, também no sentido de pequenas deformações.

Definindo-se a deformação de Green desviadora como:

$$E_{ij}^{des} = E_{ij} - E_h \delta_{ij} \quad (4.209)$$

ou escrevendo-se a deformação de Green por suas parcelas,

$$E_{ij} = E_{ij}^{des} + E_h \delta_{ij} \quad (4.210)$$

Substituindo-se a equação (4.210) na equação (4.208) escreve-se:

$$S_{ij} = 2GE_{ij}^{des} + KE_v \delta_{ij} = S_{ij}^{des} + S_{ij}^{vol} \quad (4.211)$$

onde $K = E / [3(1 - 2\nu)]$ é o conhecido bulk modulus.

Objetiva-se calcular S_{ij}^{des} e S_{ij}^{vol} e os tensores constitutivos elásticos \mathcal{C}_{ijkl}^{des} e \mathcal{C}_{ijkl}^{vol} a partir de potenciais para grande deformações calculados na vizinhança da deformação nula para verificar sua compatibilidade com a Lei linear (SVK) e determinar as constantes elásticas.

Parte-se da equação (4.174), transcrita a seguir,

$$\Psi = \Psi_{vol}(J) + \Psi_{iso}^1(\bar{I}_1) + \Psi_{iso}^2(\bar{I}_2) \quad (4.174)$$

Utilizando-se alguns potenciais conhecidos na literatura, o primeiro devido a Duster que controla o crescimento da energia de deformação (já usado anteriormente) dado por:

$$\Psi_{vol} = k_{vol} (J^{2n} + J^{-2n} - 2) \quad (4.212)$$

$$\frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} = 2nk_{vol} (J^{2n-1} - J^{-(2n+1)}) \quad (4.213)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial J^2} = 2nk_{vol} ((2n-1)J^{2n-2} + (2n+1)J^{-2(n+1)}) \quad (4.214)$$

Para pequenas deformações $J \cong 1$, assim, o termo (4.213) se anula e o termo (4.214) se simplifica para:

$$\frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial J^2} = 8n^2 k_{vol} \quad (4.215)$$

Juntando-se as equações (4.215), (4.160) e (4.152) se escreve a matriz constitutiva para pequenas deformações a partir do potencial (4.212) como:

$$\mathcal{C}_{ijkl}^{vol} = (JC_{ij}^{-1}) 8n^2 k_{vol} (JC_{kl}^{-1}) \quad (4.216)$$

lembrando-se que as deformações são pequenas, ou seja $J \cong 1$ e $C_{ij}^{-1} \cong \delta_{ij}$ escreve-se:

$$\mathcal{C}_{ijkl}^{vol} = 8n^2 k_{vol} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (4.217)$$

Tomando-se agora a parte volumétrica da lei linear (Saint-Venant-Kirchhoff) (4.211)

$$S_{ij}^{vol} = KE_v \delta_{ij} \quad (4.218)$$

e diferenciando-se em relação à deformação de Green, encontra-se:

$$\mathbf{e}_{ijk\ell}^{vol} = \frac{\partial S_{ij}^{vol}}{\partial E_{k\ell}} = K \delta_{ij} \delta_{k\ell} \quad (4.219)$$

Para um mesmo material as equações (4.219) e (4.217) devem ser iguais, ou seja, determina-se a constante que deve ser usada no modelo não linear para que esse reproduza o comportamento linear do material em pequenas deformações, como:

$$k_{vol} = \frac{K}{8n^2} \quad (4.220)$$

A segunda e terceira parcelas da equação (4.174) será considerada aqui pelo modelo de Mooney-Rivlin, que controla a distorção sem variação de volume, escrito como:

$$\Psi_{iso}^1 + \Psi_{iso}^2 = c_{10} (\bar{I}_1 - 3) + c_{01} (\bar{I}_2 - 3) \quad (4.221)$$

Aparentemente esta expressão está escrita de forma linear e estaria em desacordo com as exigências dos potenciais policonvexos. Porém, tanto \bar{I}_1 quanto \bar{I}_2 são função do tensor de alongamento à direita de Cauchy Green C e, portanto, quadráticos.

Para a primeira parcela, usando-se a equação (4.180), se escreve o tensor constitutivo elástico como:

$$\mathbf{e}_{ijk\ell}^{iso1} = c_{10} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial E_{ij} \partial E_{k\ell}} \quad (4.222)$$

já que $\partial^2 \Psi_{iso}^1 / (\partial \bar{I}_1)^2 = 0$. Usando-se a equação (4.197) para pequenas deformações

$J \cong 1$ e $C_{ij}^{-1} \cong \delta_{ij}$ tem-se:

$$\mathbf{e}_{ijk\ell}^{iso1} = c_{10} \frac{4}{3} J^{-2/3} \left\{ \frac{1}{3} \{ \delta_{ij} \delta_{k\ell} + 3 \delta_{ik} \delta_{lj} \} 3 - \delta_{ij} \delta_{k\ell} - \delta_{k\ell} \delta_{ij} \right\} = c_{10} \frac{4}{3} \{ 3 \delta_{ik} \delta_{lj} - \delta_{ij} \delta_{k\ell} \} \quad (4.223)$$

Tomando-se a parte desviadora da equação (4.211) e aproveitando-se a equação (4.209) escreve-se:

$$S_{ij}^{des} = 2GE_{ij}^{des} = 2G(E_{ij} - E_h \delta_{ij}) \quad (4.224)$$

diferenciando-se encontra-se:

$$\mathbf{e}_{ijk\ell}^{iso1} = \frac{\partial S_{ij}^{des}}{\partial E_{k\ell}} = 2G \left(\delta_{ik} \delta_{j\ell} - \frac{1}{3} \delta_{k\ell} \delta_{ij} \right) = \frac{2}{3} G (3 \delta_{ik} \delta_{j\ell} - \delta_{k\ell} \delta_{ij}) \quad (4.225)$$

Para pequenas deformações, caso apenas a primeira parcela da expressão (4.221) esteja ativa, a equação (4.223) deve ser igual à equação (4.225), resultado:

$$c_{10} = \frac{G}{2} \quad (4.226)$$

Para a segunda parcela da equação (4.221), usando-se a equação (4.181) se escreve o tensor constitutivo elástico como:

$$\mathbf{C}_{ijkl}^{iso2} = c_{01} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (4.227)$$

já que $\partial^2 \Psi_{iso}^2 / (\partial \bar{I}_2)^2 = 0$. Usando-se a equação (4.198) para pequenas deformações

$J \cong 1$ e $C_{ij}^{-1} \cong \delta_{ij}$ tem-se:

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{4}{3} \left\{ [4\delta_{ij}\delta_{kl} + 6\delta_{ik}\delta_{lj}] - [6(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{kl}\delta_{ij})] + 4\delta_{ij}\delta_{kl} + 3[\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{jk}\delta_{il}] \right\} \quad (4.228)$$

ou

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{4}{3} \{ 3\delta_{ik}\delta_{lj} - \delta_{ij}\delta_{kl} \} \quad (4.229)$$

que, substituído na equação (4.227) resulta:

$$\mathbf{C}_{ijkl}^{iso2} = c_{01} \frac{4}{3} \{ 3\delta_{ik}\delta_{lj} - \delta_{ij}\delta_{kl} \} \quad (4.230)$$

Novamente, por diferenciação em relação à deformação de Green, escreve-se de (4.224):

$$\mathbf{C}_{ijkl}^{iso2} = \frac{\partial S_{ij}^{des}}{\partial E_{kl}} = 2G \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{ij} \right) = \frac{2}{3}G \left(3\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{kl}\delta_{ij} \right) \quad (4.231)$$

Imaginando-se que a distorção vem apenas de \bar{I}_2 , iguala-se (4.231) à (4.230) encontrando:

$$c_{01} = \frac{G}{2} \quad (4.232)$$

deve-se observar que as equações (4.232) e (4.226) só valem isoladamente, caso as duas parcelas da equação (4.221) estejam presentes, deve valer:

$$c_{10} + c_{01} = G/2 \quad (4.233)$$

Assim, as constantes k_{vol} , c_{10} e c_{01} estão definidas pelas propriedades elásticas lineares do material.

Em resumo, além da lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff do item 4.9.1, mostrou-se que as tensões S_{vol} , S_{iso}^1 e S_{iso}^2 correspondem às partes hidrostática e desviadora da tensão de Cauchy e que as leis constitutivas não lineares reproduzem a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff para pequenas deformações.

Várias outras expressões coerentes para a energia específica de deformação (ou energia livre de Helmholtz) podem ser propostas, entretanto, todas podem ser interpretadas de forma semelhante ao descrito neste item.

4.10 - Bibliografia recomendada

Além dos trabalhos científicos do autor, recomenda-se a leitura da bibliografia a seguir:

- 1) PASCON, J. P. Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional. Dissertação de Mestrado. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, 2008.
- 2) PASCON, J. P. Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações: implementação numérica em formulação não linear geométrica, Tese de Doutorado. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, 2012.
- 3) BONET, J., WOOD, r.d., Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, Cambridge University Press 1997,2008.
- 4) HOLZAPFEL, G. A. (2000). Nonlinear Solid Mechanics – A Continuum Approach
- 5) OGDEN, R.W., Non-linear Elastic deformation, Ellis Horwood, England, 1984. for Engineering. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England.
- 6) CRISFIELD, M. A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 1. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd., 2000. ISBN 0 471 92956 5 (v. 1).
- 7) CIARLET, P. G. (1993). Mathematical Elasticity, Volume 1: Three Dimensional Elasticity. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands.
- 8) CHOU, P.C., and PAGANO , N.J, Elasticity - Tensor, Dyadic and Engineering Approaches, Dover, 1992.
- 9) CHAVES, E.W.V.. Mecânica del Medio Continuo - Conceptos básicos, CIMNE, Espanha, 2007.

5- Método dos Elementos Finitos Posicional - Sólidos

Antes de se descrever as particularidades do MEF posicional, é necessário se informar que no método dos elementos finitos o contínuo é substituído por um conjunto finito de subdomínios, chamados elementos finitos. Nesses subdomínios, as variáveis de interesse (inclusive a geometria) são aproximadas, transformando-se um problema mecânico contínuo, com infinitas incógnitas, em um problema discreto como número finito de incógnitas. Tal transformação passa pela expressão do princípio da energia mecânica total estacionária, por exemplo, equação (4.120).

Neste capítulo, apresenta-se o desenvolvimento completo da formulação posicional do Método dos Elementos Finitos aplicado a sólidos, utilizando-se como facilitador das deduções a representação de chapas bidimensionais. As chapas serão aqui denominadas sólidos 2D, pois seu equacionamento é totalmente análogo ao dos sólidos 3D, com pequenas variações de detalhes. Essas variações serão apresentadas ao longo do texto, permitindo a implementação computacional de elementos finitos para simular sólidos 2D e 3D.

Para evitar alongar o capítulo com detalhes desnecessários, exemplos podem ser consultados nos primeiros trabalhos da bibliografia recomendada, além dos trabalhos científicos do autor e coautores.

5.1 – Polinômios aproximadores

Nos cursos básicos de matemática apresenta-se o conceito de interpolação através de polinômios aproximadores. Este conceito pode ser entendido como a substituição, em um intervalo de validade, de uma função contínua qualquer por um polinômio de grau qualquer. Como exemplo, seja a substituição da função $f(x) = \text{sen}(x)$ por um polinômio quadrático $P(x)$ no intervalo $0 < x < \pi/12$. O polinômio $P(x)$ pode ser dado como:

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad (5.1)$$

onde a, b e c são constantes incógnitas.

No intervalo estabelecido escolhem-se três valores x_i para os quais o polinômio deve satisfazer exatamente a igualdade $P(x_i) = f(x_i)$. O número de valores x_i escolhidos é igual ao número de constantes incógnitas a se determinar, que depende do grau de aproximação do polinômio.

Para as coordenadas $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/24$ e $x_3 = \pi/12$ tem-se:

$$c = \text{sen}(0) = 0 \quad (5.2)$$

$$a \frac{\pi^2}{576} + b \frac{\pi}{24} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{24}\right) \quad (5.3)$$

$$a \frac{\pi^2}{144} + b \frac{\pi}{12} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad (5.4)$$

Donde $a = -0,065170$ e $b = 1,005677$. Calculando-se alguns valores para $f(x)$ e $P(x)$ no intervalo adotado encontram-se os valores da Tabela 5.1.

Desta forma, o conhecimento da função $f(x)$ em pontos de um intervalo pré-definido, permite que esta seja substituída, com boa aproximação, pelo conhecimento de (no caso do exemplo) três parâmetros, a, b e c de um polinômio interpolador.

Tabela 5.1 - comparação entre valores exatos e aproximados.

x	$f(x) = \text{sen}(x)$	$P(x)$	$f(x) - P(x)$	$(f(x) - P(x)) / f(x)$
0	0	0	0	0
$\pi/48$	0,065403	0,065542	$1,010^{-4}$	0,15%
$\pi/32$	0,098017	0,098104	$1,010^{-4}$	0,10%
$\pi/24$	0,130526	0,130526	0	0
$\pi/16$	0,195090	0,194952	$1,410^{-4}$	0,07%
$\pi/12$	0,258819	0,258819	0	0

5.1.2 – Polinômios de Lagrange para aproximação unidimensional

O primeiro ente a ser aproximado por polinômios é a geometria dos elementos finitos, no caso de elementos finitos posicionais a geometria do elemento finito é chamada simplesmente de posição inicial. Apesar de se poderem utilizar polinômios quaisquer para aproximar a geometria (ou outra variável), no método dos elementos finitos é usual se utilizar os chamados polinômios de Lagrange, pois os parâmetros (constantes) do polinômio serão os valores da função aproximada nos pontos base da aproximação. Nos textos usuais sobre elementos finitos, os polinômios de Lagrange também são chamados de funções de forma.

As funções de forma são escritas em função de uma coordenada adimensional ξ definida no intervalo $[-1,1]$. Na Figura 5.1 mostra-se a representação esquemática dos polinômios de ordem um e dois.

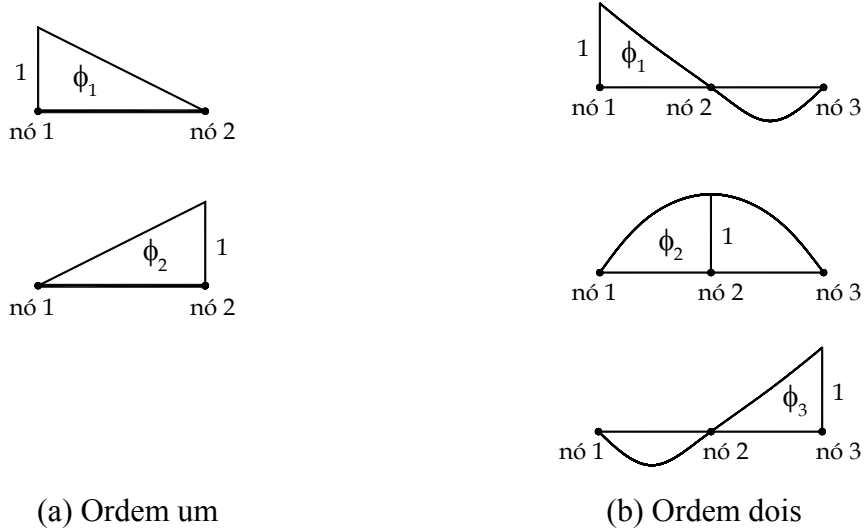


Figura 5.1 – Representação esquemática dos polinômios de Lagrange

Para o polinômio de ordem um o nó 1 corresponde à $\xi = -1$ e o nó 2 à $\xi = 1$. Para o polinômio de ordem dois, o nó 1 corresponde à $\xi = -1$, o nó 2 à $\xi = 0$ e o nó 3 à $\xi = 1$. Como se pode observar, o polinômio assume valor unitário em seu nó correspondente e valor nulo nos demais nós. Assim as fórmulas para os polinômios de ordem um são:

$$\phi_1 = \frac{1-\xi}{2} \quad (5.5)$$

$$\phi_2 = \frac{\xi+1}{2} \quad (5.6)$$

As fórmulas para o polinômio de ordem dois são:

$$\phi_1 = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \cdot \frac{\xi - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} = \frac{\xi(\xi - 1)}{2} \quad (5.7)$$

$$\phi_2 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \cdot \frac{\xi - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} = (1 + \xi)(1 - \xi) \quad (5.8)$$

$$\phi_3 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_3 - \xi_1} \cdot \frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2} = \frac{(\xi + 1)\xi}{2} \quad (5.9)$$

onde ξ_i são os valores das coordenadas adimensionais dos nós i . Usualmente são tomados proporcionais à divisão em tamanhos iguais do intervalo, porém as fórmulas gerais não impõem esta restrição.

A fórmula geral dos polinômios de Lagrange de ordem $n-1$ pode ser dada por:

$$\phi_k = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_k - \xi_1} \dots \frac{\xi - \xi_{k-1}}{\xi_k - \xi_{k-1}} \cdot \frac{\xi - \xi_{k+1}}{\xi_k - \xi_{k+1}} \dots \frac{\xi - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} \quad (5.10)$$

Uma propriedade dos polinômios de Lagrange é a reprodução da unidade, ou seja, a soma de todos os polinômios de uma mesma ordem resulta na unidade. Esta propriedade é usualmente chamada de partição da unidade e indica que a aproximação é capaz de reproduzir trechos de função constante.

Como nesse item se está abordando uma representação unidimensional, a aplicação das funções de forma apresentadas serve para aproximar, por exemplo, superfícies de sólidos 2D e a força de superfície aplicada sobre a mesma. Uma linha de carga em sólido 3D ou elementos de barra geral (pórtico) 2D ou 3D também podem ser aproximados utilizando-se a representação unidimensional apresentada.

Para se utilizar os polinômios de Lagrange como função aproximadora, basta se conhecer os valores da função a ser aproximada nos respectivos ‘nós’, veja figura 5.2a, onde a posição inicial de uma parte da superfície de um sólido 2D é ilustrada.

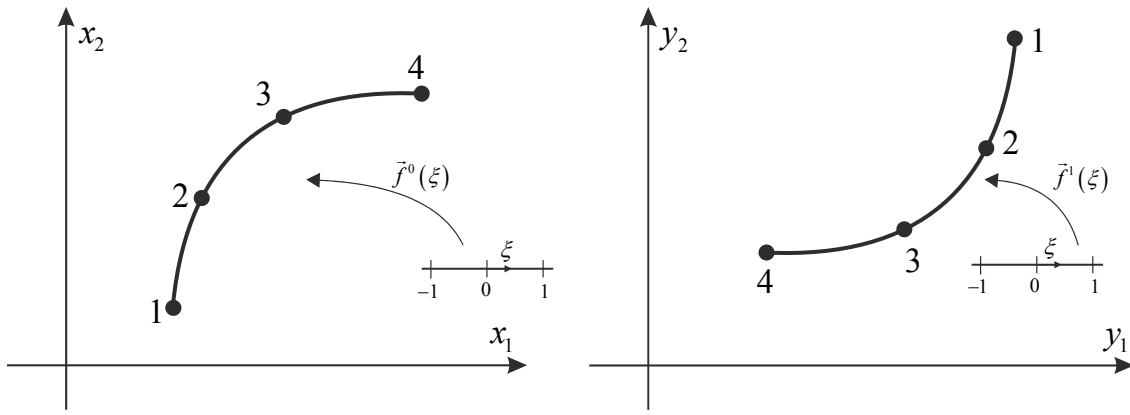
A aproximação proposta para essa superfície (linh) é escrita como:

$$f_i^0(\xi) = x_i(\xi) = \phi_\ell(\xi) X_i^\ell \quad (5.11)$$

onde i é a direção da coordenada (1 ou 2) e ℓ é o nó do elemento (ou a função de forma associada). Na expressão (5.11) a repetição do índice ℓ representa soma sobre nós. Para uma aproximação cúbica tem-se 4 nós, ilustrados na figura 5.2a, e a expressão (5.11) fica explicitada como:

$$x_1(\xi) = \phi_1 X_1^1 + \phi_2 X_1^2 + \phi_3 X_1^3 + \phi_4 X_1^4 \quad (5.12)$$

$$x_2(\xi) = \phi_1 X_2^1 + \phi_2 X_2^2 + \phi_3 X_2^3 + \phi_4 X_2^4 \quad (5.13)$$



(a) Configuração inicial

(b) Configuração atual

Figura 5.2 – Parametrização de um trecho de superfície de sólido 2D

Na Figura 5.2a a função $f_i^0(\xi)$ é chamada de mapeamento da configuração inicial do elemento, enquanto na figura 5.2b $f_i^1(\xi)$ é o mapeamento da configuração atual. Caso essa aproximação fosse para a geometria de uma linha de carga em um sólido 3D a expressão (5.11) ficaria inalterada, apenas a direção i assumiria valores de 1 até 3. Como se observa da figura 5.2b o mapeamento atual da linha é encontrado substituindo-se as coordenadas iniciais X_i^ℓ pelas coordenadas atuais dos nós Y_i^ℓ , ou seja:

$$f_i^1(\xi) = y_i(\xi) = \phi_\ell(\xi) Y_i^\ell \quad (5.14)$$

Caso se deseje modelar qualquer variável de interesse sobre um elemento finito, por exemplo, uma força distribuída \vec{p} aplicada sobre o elemento (linha) da figura 5.2b, basta se escrever:

$$p_i = \phi_\ell(\xi) Q_{i\ell} \quad \text{ou} \quad \vec{p}(\xi) = \vec{\phi}'(\xi) \cdot \vec{Q}' \quad (5.15)$$

onde na última expressão se utilizou a forma compacta ou dyadica. Ao se observar que para cada ξ corresponde uma posição única no espaço, tanto na configuração inicial quanto na configuração atual, a carga \vec{p} está aplicada sobre determinado ponto do sólido e é função indireta das coordenadas daquele ponto.

Uma observação interessante deve ser feita sobre a representação da carga distribuída. Para que esta seja conservativa deve ser função intrínseca da coordenada inicial do elemento, ou seja

$$p_i(\xi) = p_i(x_j(\xi)) \quad (5.16)$$

mas, obviamente, estará aplicada sobre a configuração atual. Dessa forma, o carregamento não será alterado pela função da mudança de configuração do corpo. Essa dependência intrínseca ficará mais bem esclarecida no processo de integração espacial a ser descrito no item 5.2.

5.1.3 – Polinômios de Lagrange para aproximação multidimensional

Antes de se falar sobre elementos com base triangular é interessante mostrar como se constroem funções de forma de base retangular (ou hexaedrica 3D) usando-se os polinômios de Lagrange das aproximações unidimensionais. Os polinômios resultantes valerão 1 no nó correspondente à função de forma associada e zero nos demais nós. Por exemplo, usando-se as funções lineares do subitem anterior, escrevem-se as funções para espaço bidimensional da figura 5.3 como:

$$\varphi_1(\xi_1, \xi_2) = \phi_1(\xi_1)\phi_1(\xi_2) \quad (5.17)$$

$$\varphi_2(\xi_1, \xi_2) = \phi_2(\xi_1)\phi_1(\xi_2) \quad (5.18)$$

$$\varphi_3(\xi_1, \xi_2) = \phi_1(\xi_1)\phi_2(\xi_2) \quad (5.19)$$

$$\varphi_4(\xi_1, \xi_2) = \phi_2(\xi_1)\phi_2(\xi_2) \quad (5.20)$$

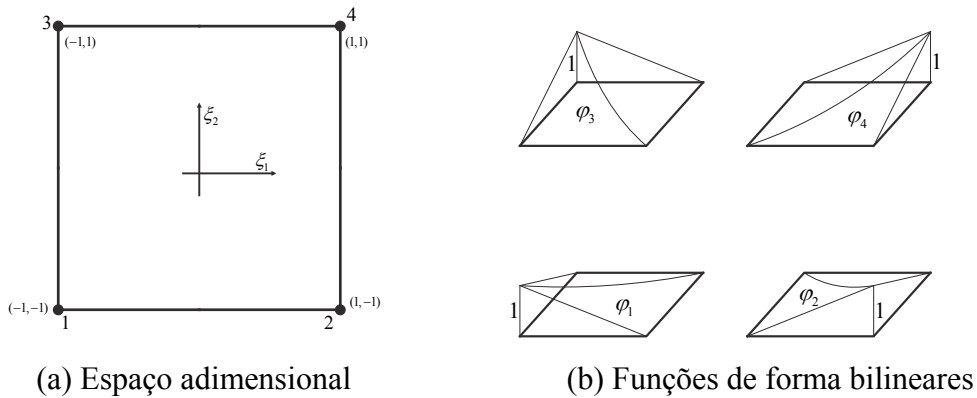


Figura 5.3 - Exemplo simples usando base unidimensional linear

O leitor pode verificar facilmente a validade das funções propostas, inclusive a partição da unidade, substituindo-se as equações (5.5) e (5.6) nas equações (5.17) até (5.20). Pode-se observar também, a presença do termo cruzado ou "hourglass" $\xi_1\xi_2$ que não existe se a aproximação linear for feita por dois elementos triangulares. Generalizando-se o procedimento resulta:

$$\varphi_k(\xi_1, \xi_2) = \phi_i(\xi_1)\phi_j(\xi_2) \quad (5.21)$$

para $k = j(i-1) + j$ em representação bidimensional. Os elementos finitos aproximados dessa forma são chamados elementos de base quadrangular. Na equação (5.21) $i=1,2,\dots,N1$ e $j=1,2,\dots,N2$, onde $N1$ e $N2$ são os números de nós nas direções de ξ_1 e ξ_2 , respectivamente. Além disso, $Ni = ordi + 1$ onde $ordi$ é a ordem de aproximação na direção de ξ_i .

Para uma representação tridimensional escreve-se:

$$\varphi_k(\xi_1, \xi_2) = \phi_i(\xi_1)\phi_j(\xi_2)\phi_\ell(\xi_3) \quad (5.22)$$

para $k = (\ell-1).N1.N2 + j.(i-1) + j$ com $i=1,2,\dots,N1$, $j=1,2,\dots,N2$ e $\ell=1,2,\dots,N3$.

Os mapeamentos das configurações inicial e final de um elemento finito sólido 2D ou 3D fica escrito como:

$$f_i^0(\vec{\xi}) = x_i(\vec{\xi}) = \varphi_i(\vec{\xi})X_i^\ell \quad (5.23)$$

$$f_i^1(\vec{\xi}) = y_i(\vec{\xi}) = \varphi_i(\vec{\xi})Y_i^\ell \quad (5.24)$$

exatamente como no subitem anterior, i.e., a notação passa a ser universal. Como exemplo simples, na figura 5.4 mostra-se um elemento finito quadrático mapeado em sua configuração inicial e atual. Observe que, apesar de se ter apresentado o elemento na configuração inicial com lados retos, o mapeamento inicial pode ser qualquer.

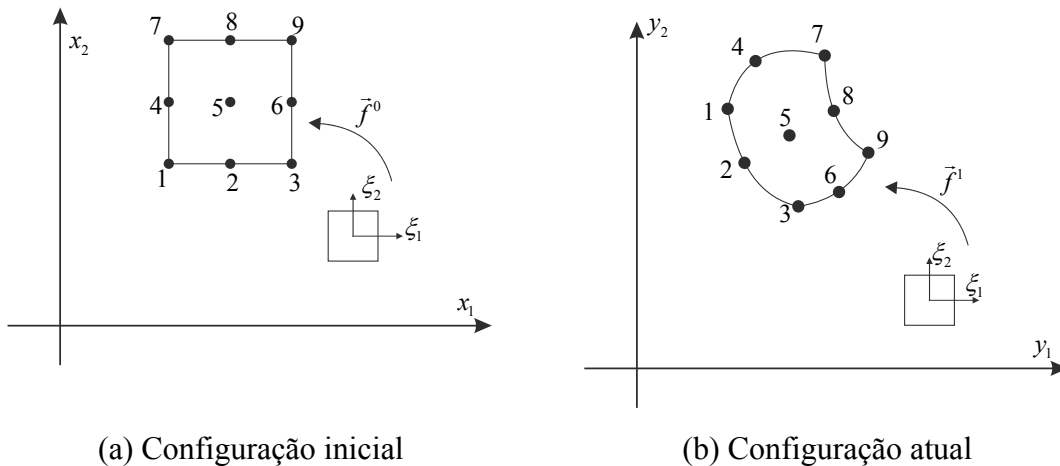


Figura 5.4 - Mapeamento de elemento sólido bidimensional

Quanto ao carregamento aplicado, o elemento bidimensional pode ser uma superfície para carga distribuída em sólido 3D, nesse caso, as dimensões do espaço adimensional não correspondem à dimensão do espaço físico modelado, i.e., $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ e $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e tem-se:

$$p_i(\xi_1, \xi_2) = p_i(x_j(\xi_1, \xi_2)) = \varphi_\ell(\xi_1, \xi_2) Q_i^\ell \quad (5.25)$$

onde $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$. Nessa expressão se informa o caráter Lagrangiano da carga, i.e., a dependência intrínseca à coordenada inicial.

Para a carga distribuída no domínio tem-se:

$$b_i(\vec{\xi}) = b_i(x_j(\vec{\xi})) = \varphi_\ell(\vec{\xi}) B_i^\ell \quad (5.26)$$

com a dimensão de $\vec{\xi}$ igual à do espaço físico modelado.

5.1.4 – Aproximação multidimensional com base triangular:

Elementos triangulares (tetraédricos para 3D) possuem duas vantagens principais em relação aos elementos quadrangulares (hexaédricos 3D). As malhas triangulares e tetraédricas se acomodam melhor às geometrias dos sólidos, o que resulta em uma grande oferta de geradores desse tipo de malhas na literatura. Outro motivo é que os polinômios gerados para elementos triangulares e tetraédricos são completos, não possuindo termos superabundantes como os gerados a partir de polinômios de Lagrange unidimensionais, tal como o termo "hourglass" presente no elemento bilinear mostrado no item anterior.

Na figura 5.5 mostra-se, sobre o espaço adimensional triangular, a posição padrão (igualmente espaçada) dos pontos geradores das funções de forma para elementos de base triangular de aproximações quadrática e cúbica. As variáveis adimensionais variam no intervalo $0 < \xi_i < 1$.

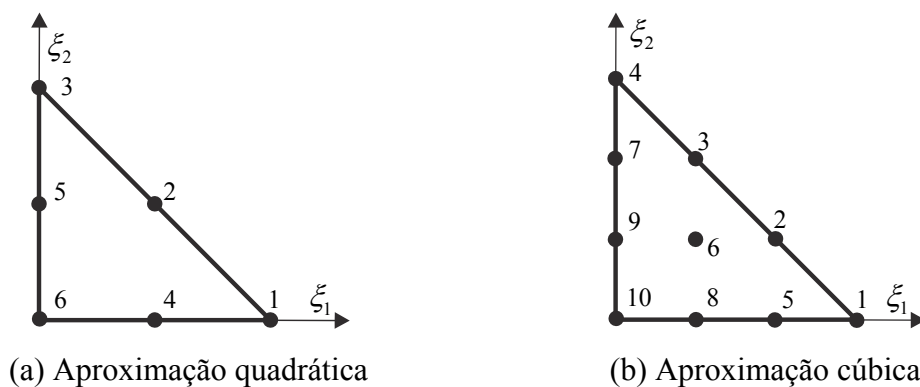


Figura 5.5 - espaço adimensional e pontos geradores.

Por exemplo, respeitando-se a regra de Pascal, geram-se polinômios completos para o caso quadrático como:

$$\phi_k(\xi_1, \xi_2) = a_{k1} + a_{k2}\xi_1 + a_{k3}\xi_2 + a_{k4}\xi_1^2 + a_{k5}\xi_1\xi_2 + a_{k6}\xi_2^2 \quad (5.27)$$

onde k é o número da função de forma ou do ponto base. São, portanto, 6 funções de forma com 6 coeficientes a se determinar para cada função de forma. Para a aproximação quadrática as coordenadas dos pontos base são:

$$P_1 = (1,0), P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), P_3 = (0,1), P_4 = \left(\frac{1}{2}, 0\right), P_5 = \left(0, \frac{1}{2}\right), P_6 = (0,0) \quad (5.28)$$

Aplicando-se as coordenadas (5.28) nas funções (5.27) e lembrando-se que, tal como nas figuras 5.1 e 5.3, cada função de forma vale um em seu ponto base e zero nos demais pontos base, para a aproximação quadrática resulta:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 & 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} = I \quad (5.29)$$

ou, de forma compacta e generalizada,

$$A \cdot P = I \quad \Rightarrow \quad A = P^{-1} \quad (5.30)$$

determinando-se os coeficientes a_{ki} dos polinômios aproximadores, donde é possível se gerar funções de forma completas de qualquer ordem para a base triangular. Deve-se observar uma correspondência entre a ordem da numeração (local) dos nós do problema com aquela adotada para gerar as funções de forma. Por exemplo, na figura 5.6 ilustram-se os mapeamentos inicial e atual de um elemento finito de membrana 2D (chapa) respeitando-se a ordem de numeração.

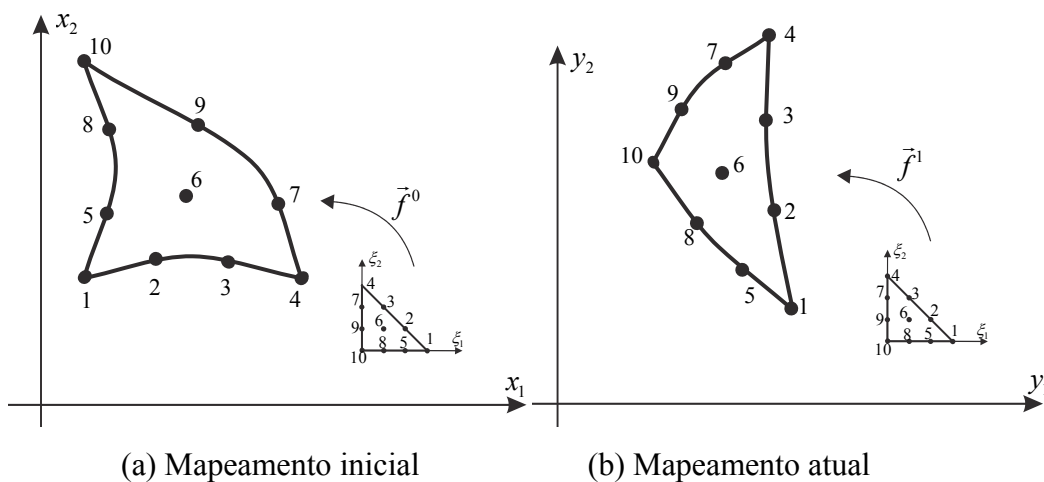


Figura 5.6 - elemento finito de sólido plano de aproximação cúbica.

Na figura 5.6 observa-se também que a geometria inicial do elemento finito não precisa ser regular e o posicionamento dos pontos físicos iniciais não precisam ser igualmente espaçados, ou seja, o mapeamento é generalizado.

O mesmo procedimento pode ser realizado para o problema tridimensional. Veja a figura 5.7 para uma ilustração do espaço adimensional 3D, onde as variáveis adimensionais também variam de 0 até 1.

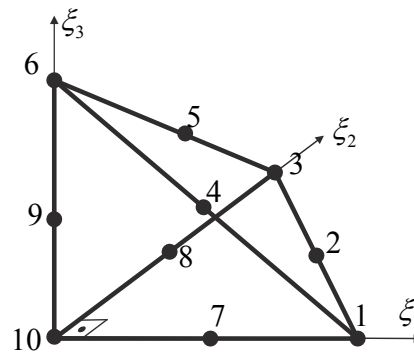


Figura 5.7 - Base tetraédrica para geração de funções de forma - Elemento quadrático

As funções de forma foram organizadas para que as aproximações da geometria, e de qualquer função, sobre os elementos finitos, sigam as fórmulas (5.23), (5.24), (5.25) e (5.26). Conforme foi exposto no capítulo 4, o gradiente da função mudança de configuração será de grande importância para o cálculo das deformações em pontos do domínio e, portanto, na construção dos modelos constitutivos e, conseqüentemente, do MEF posicional.

Será exposto no item 5.2 que o gradiente da função mudança de configuração será escrito em função dos gradientes dos mapeamentos das configurações inicial e final, equações (5.23) e (5.24), que são calculados como:

$$A_{ij}^0 = f_{i,j}^0 = x_{i,j} = \phi_{\ell,j} X_i^\ell \quad (5.31)$$

$$A_{ij}^1 = f_{i,j}^1 = y_{i,j} = \phi_{\ell,j} Y_i^\ell \quad (5.32)$$

ou de forma extensa:

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \phi_\ell}{\partial \xi_j} X_i^\ell \quad (5.33)$$

$$A_{ij}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \phi_\ell}{\partial \xi_j} Y_i^\ell \quad (5.34)$$

de forma compacta ou dyadica tem-se:

$$A^0 = \frac{\partial \vec{f}^0}{\partial \vec{\xi}} = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \vec{\xi}} \cdot X \quad (5.35)$$

$$A^1 = \frac{\partial \vec{f}^1}{\partial \vec{\xi}} = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \vec{\xi}} \cdot Y \quad (5.36)$$

onde Y e X foram escritos na forma não usual de tensor, onde uma de suas dimensões é o nó e a outra é a direção. Os tensores de segunda ordem (matrizes) A^0 e A^1 possuem a dimensão do espaço que representam (3x3) para 3D e (2x2) para 2D. Apenas quando se está representando uma superfície onde cargas serão aplicadas, ou alguns problemas especiais, que estas matrizes não são quadradas, porém, nesses casos sua inversão não é necessária.

Como, por experiência do autor, a melhor representação para sólidos 2D é a aproximação cúbica, aplicaram-se as equações (5.27) e (5.30) para esse caso, resultando no seguinte algoritmo (subrotina) onde as funções de forma e suas derivadas, para elemento de base triangular e aproximação cúbica, são explicitadas.

```

c *****
c Subrotina que fornece os valores das funções de forma
c para elemento triangular cúbico para coordenadas informadas
c  $qi3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$  variável usada para simplificar escrita
c *****

subroutine formaederitri
  qi3=1.-xsi1-xsi2
  fi(1)=0.5d0*xsi1*(3.d0*xsi1-1.d0)*(3.d0*xsi1-2.d0)
  fi(2)=4.5d0*xsi1*xsi2*(3.d0*xsi1-1.d0)
  fi(3)=4.5d0*xsi1*xsi2*(3.d0*xsi2-1.d0)
  fi(4)=0.5d0*xsi2*(3.d0*xsi2-1.d0)*(3.d0*xsi2-2.d0)
  fi(5)=4.5d0*qi3*xsi1*(3.d0*xsi1-1.d0)
  fi(6)=27.0d0*xsi1*xsi2*qi3
  fi(7)=4.5d0*xsi2*qi3*(3.d0*xsi2-1.d0)
  fi(8)=4.5d0*qi3*xsi1*(3.d0*qi3-1.d0)
  fi(9)=4.5d0*xsi2*qi3*(3.d0*qi3-1.d0)
  fi(10)=0.5d0*qi3*(3.d0*qi3-1.d0)*(3.d0*qi3-2.d0)

```

```

dfi(1,1)=0.5*(3*xsi1-1)*(3*xsi1-2)+1.5*xsi1*(3*xsi1-2)+
#1.5*xsi1*(3*xsi1-1)
dfi(1,2)=0.
dfi(2,1)=4.5*xsi2*(3*xsi1-1)+4.5*xsi1*xsi2*3.
dfi(2,2)=4.5*xsi1*(3*xsi1-1)
dfi(3,1)=4.5*xsi2*(3*xsi2-1)
dfi(3,2)=4.5*xsi1*(3*xsi2-1)+4.5*xsi1*xsi2*3.
dfi(4,1)=0.
dfi(4,2)=0.5*(3*xsi2-1)*(3*xsi2-2)+1.5*xsi2*(3*xsi2-2)+
#1.5*xsi2*(3*xsi2-1)
dfi(5,1)=-4.5*xsi1*(3*xsi1-1)+4.5*qi3*(3*xsi1-1)+4.5*qi3*xsi1*3.
dfi(5,2)=-4.5*xsi1*(3*xsi1-1)
dfi(6,1)=27.*(xsi2*qi3-xsi1*xsi2)
dfi(6,2)=27.*(xsi1*qi3-xsi1*xsi2)
dfi(7,1)=-4.5*xsi2*(3*xsi2-1)
dfi(7,2)=4.5*qi3*(3*xsi2-1)-4.5*xsi2*(3*xsi2-1)+4.5*qi3*xsi2*3.
dfi(8,1)=-4.5*xsi1*(3*qi3-1)+4.5*qi3*(3*qi3-1)-4.5*qi3*xsi1*3.
dfi(8,2)=-4.5*xsi1*(3*qi3-1)-4.5*xsi1*qi3*3.
dfi(9,1)=-4.5*xsi2*(3*qi3-1)-4.5*xsi2*qi3*3.
dfi(9,2)=4.5*qi3*(3*qi3-1)-4.5*xsi2*(3*qi3-1)-4.5*qi3*xsi2*3.
dfi(10,1)=-0.5*(3*qi3-1)*(3*qi3-2)-1.5*qi3*(3*qi3-2)-
#1.5*qi3*(3*qi3-1)
dfi(10,2)=dfi(10,1)
return
end

```

5.1.5 – Integração Numérica:

Conforme apresentado no capítulo 4, mais especificamente no item 4.8, na equação (4.120), o Princípio da Energia Mecânica Estacionária a ser aplicado na dedução do MEF posicional fica escrito na seguinte forma integral,

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \bar{y} \cdot \delta \bar{y} dV_0 - \int_{V_0} \bar{b}^0 \cdot \delta \bar{y} dV_0 - \int_{A_0} \bar{p}^0 \cdot \delta \bar{y} dA_0 + \int_{V_0} S : \delta E dV_0 = 0 \quad (5.37)$$

ou seja, diversas integrais de domínio e superfície, todas na referência inicial, devem ser realizadas. Nos itens anteriores ficou claro que o domínio do sólido ou da estrutura

modelada são discretizados em pequenas parcelas chamadas elementos finitos. Além disso, uma divisão da superfície do corpo também pode ser realizada para a aplicação de forças de superfície. O domínio inicial do corpo é mapeado a partir de espaço adimensional e, portanto, uma integral genérica de uma função qualquer $\mathcal{F}(\vec{x})$ sobre o volume inicial V_0 será escrita como:

$$\int_{V_0} \mathcal{F}(\vec{x}) dV_0 = \int_{\xi_2} \int_{\xi_1} \mathcal{F}(\vec{x}(\xi_1, \xi_2)) Det(A_0) d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.38)$$

ou, lembrando-se que $J_0 = Det(A_0)$

$$\int_{V_0} \mathcal{F}(\vec{x}) dV_0 = \int_{\xi_2} \int_{\xi_1} \mathcal{F}(\vec{x}(\xi_1, \xi_2)) J_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.39)$$

para a representação 2D ou

$$\int_{V_0} \mathcal{F}(\vec{x}) dV_0 = \int_{\xi_3} \int_{\xi_2} \int_{\xi_1} \mathcal{F}(\vec{x}(\xi_1, \xi_2)) J_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (5.40)$$

na representação 3D. Observa-se que nessas expressões não se estabeleceram os limites das variáveis adimensionais, pois pode-se tratar de qualquer tipo de domínio adimensional. De qualquer forma, a integração pretendida será realizada numericamente, devido à complexidade dos núcleos das integrais, incluindo o jacobiano do mapeamento inicial.

As integrais numéricas são feitas na forma de quadratura de Hammer ou de Gauss. Sendo a primeira para domínios de base triangular ou tetraédrica e a segunda para domínios unidimensionais ou de base quadrangular ou hexaédrica. Qualquer dessas quadraturas fica escrita na forma:

$$\int_{V_0} \mathcal{F}(\vec{x}) dV_0 = \sum_{i=1}^{nq} \mathcal{F}(\vec{x}(\vec{\xi}_i)) J_0(\vec{\xi}_i) w_i \quad (5.41)$$

onde $\vec{\xi}_i$ é o vetor de coordenadas adimensionais no ponto de integração i e w_i o peso de integração. Na sequência, apresenta-se um trecho de código computacional onde se informam posições e pesos de integração de Hammer para elemento com base triangular 2D de aproximação cúbica. Foram utilizados 7 pontos de integração que garantem precisão suficiente nas integrais pretendidas. A seguinte correspondência foi utilizada: $HAM(i,1) = (\xi_1)_i$ onde i é o ponto de integração. Para facilitar a escrita, cria-se uma coordenada auxiliar $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$.

c*****

c *Atribuição dos pontos de Hammer e seus pesos*

c*****

subroutine hamer7

$$HAM(1,1)=(1./3.d0)$$

$$HAM(1,2)=(1./3.d0)$$

$$HAM(1,3)=(1./3.d0)$$

$$wh(1)=(0.11250d0)$$

$$HAM(2,1)=(0.797426985353087d0)$$

$$HAM(2,2)=(0.101286507323456d0)$$

$$HAM(2,3)=(0.101286507323456d0)$$

$$wh(2)=(0.125939180544827d0)/2.$$

$$HAM(3,1)=(0.101286507323456d0)$$

$$HAM(3,2)=(0.797426985353087d0)$$

$$HAM(3,3)=(0.101286507323456d0)$$

$$wh(3)=(0.125939180544827d0)/2.$$

$$HAM(4,1)=(0.101286507323456d0)$$

$$HAM(4,2)=(0.101286507323456d0)$$

$$HAM(4,3)=(0.797426985353087d0)$$

$$wh(4)=(0.125939180544827d0)/2.$$

$$HAM(5,1)=(0.470142064105115d0)$$

$$HAM(5,2)=(0.470142064105115d0)$$

$$HAM(5,3)=(0.059715871789770d0)$$

$$wh(5)=(0.132394152788506d0)/2.$$

$$HAM(6,1)=(0.059715871789770d0)$$

$$HAM(6,2)=(0.470142064105115d0)$$

$$HAM(6,3)=(0.470142064105115d0)$$

$$wh(6)=(0.132394152788506d0)/2.$$

```

HAM(7,1)=(0.470142064105115d0)
HAM(7,2)=(0.059715871789770d0)
HAM(7,3)=(0.470142064105115d0)
wh(7)=(0.132394152788506d0)/2.
return
end

```

5.2 - O MEF Posicional - a ideia e a técnica de solução

Como apresentado no capítulo 2, a ideia fundamental do MEF posicional é se escrever a energia de deformação em função das posições atuais dos nós que, usando-se as aproximações descritas anteriormente, constituem o sólido analisado por meio de elementos finitos. A partir daí se escrever o Princípio da Energia Mecânica Estacionária usando como parâmetros as posições nodais, resultando em roteiro de solução semelhante ao apresentado para treliças.

5.2.1 - Deformação de Green como função das posições nodais

Para se escrever a energia de deformação do corpo em função das posições nodais (ideia fundamental do MEF posicional) deve-se observar a figura 5.8 onde a função mudança de configuração, e seu gradiente, de uma parte do corpo (elemento finito) é representada. Para que o leitor se sinta a vontade com essa representação, deve-se destacar que a posição inicial é fornecida no arquivo de entrada do código a ser construído e que a posição atual é sempre conhecida na forma de tentativa, sendo a primeira tentativa a própria posição inicial, tal como feito no capítulo 2 para elementos finitos de treliça.

Conforme descrito no capítulo 3 a função mudança de configuração $\vec{f}(\vec{x})$ transforma pontos \vec{x} do volume inicial V_0 para pontos \vec{y} do volume atual V . A determinação da deformação de Green E e, conseqüentemente, da energia específica de deformação Ψ , desenvolvida na mudança de configuração, depende da determinação do gradiente da função mudança de configuração, ou seja $A = Grad(\vec{f})$.

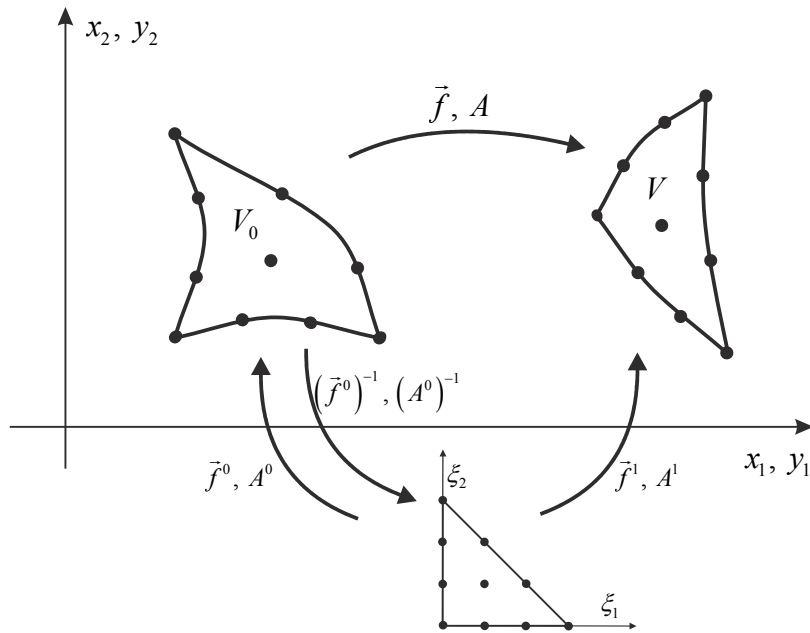


Figura 5.8 - Mapeamento posicional

A partir da figura 5.8, observa-se que a função mudança de configuração pode ser escrita, para um elemento finito, em função dos mapeamentos inicial e atual definidos nesse capítulo, como:

$$\bar{f} = \bar{f}^1 \circ (\bar{f}^0)^{-1} \quad (5.42)$$

onde $(\bar{f}^0)^{-1}$ é a inversa do mapeamento do espaço adimensional para a configuração inicial, veja a figura 5.8. A expressão (5.42) dá a falsa impressão de que é necessário se conhecer $(\bar{f}^0)^{-1}$ para se resolver o problema. Entretanto, não é necessário se conhecer a inversa de \bar{f}^0 , pois se sabe que o gradiente da função mudança de configuração pode ser escrito como:

$$A = A^1 \cdot (A^0)^{-1} \quad (5.43)$$

onde A^0 é uma matriz 2x2 (para aplicações 2D) ou 3x3 (para aplicações 3D) numericamente conhecida e dada pela equação (5.31), sendo sua inversa de cálculo imediato. A matriz A^1 é conhecida, veja equação (5.32), quando se admite que as coordenadas Y_i^ℓ dos nós são conhecidas na forma de tentativa.

Usando-se a equação (5.43), se escreve a deformação de Green sobre o elemento finito como:

$$E = \frac{1}{2} \left(\left(A^1 \cdot (A^0)^{-1} \right)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} - I \right) = \frac{1}{2} \left((A^0)^{-t} (A^1)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} - I \right) \quad (5.44)$$

sendo A^0 e A^1 definidos nas coordenadas adimensionais $\vec{\xi}$ conhecidas, A^0 função das coordenadas iniciais do problema X_i^ℓ e, portanto, conhecidas e A^1 função das posições Y_i^ℓ que, para uma tentativa são consideradas conhecidas, porém são as variáveis do problema.

Fica, portanto, claro que a deformação de Green no MEF posicional varia apenas em função das coordenadas atuais dos nós dos elementos finitos. Sendo a deformação de Green a escolhida como medida de deformação e as expressões de energias específicas de deformação Ψ dependentes apenas de constantes elásticas e da deformação de Green, veja capítulo 4, resulta que a energia de deformação U acumulada no sólido V_0 , dependerá apenas das posições atuais dos nós da discretização.

5.2.2 - O Princípio da estacionariedade e o MEF Posicional - Estática

Utilizando-se as aproximações do MEF posicional, a expressão final do princípio da estacionariedade de sólidos elásticos será escrita. Na sequência, a forma simples de escrita, desenvolvida no capítulo 2 para treliças, será resgatada, abrindo caminho para uma descrição simples da técnica de solução.

Reescreve-se agora a equação (4.91) em sua versão estática:

$$\delta\Pi = \delta U + \delta P \quad (4.91)$$

e em sua versão lagrangiana expandida (4.120),

$$\delta\Pi = - \int_{V_0} \vec{b}^0 \cdot \delta\vec{y} dV_0 - \int_{A_0} \vec{p}^0 \cdot \delta\vec{y} dA_0 + \int_{V_0} S : \delta E dV_0 = 0 \quad (4.120)$$

que em notação indicial resulta:

$$\delta\Pi = -F_i^\ell \delta Y_i^\ell - \int_{V_0^{el}} b_i^0 \delta y_i dV_0^{el} - \int_{A_0^{el}} p_i^0 \delta y_i dA_0^{el} + \int_{V_0^{el}} S_{kj} \delta E_{kj} dV_0^{el} = 0 \quad (5.45)$$

onde se admitiu a existência de cargas concentradas nos nós ℓ da malha de elementos finitos, veja capítulo 2, e indicou-se soma em todos os elementos finitos pela repetição do índice el .

Nesse ponto é de interesse resgatar as aproximações (5.24) até (5.26), escritas como:

$$y_i(\vec{\xi}) = \varphi_\ell(\vec{\xi}) Y_i^\ell \quad \text{ou} \quad \delta y_i(\vec{\xi}) = \varphi_\ell(\vec{\xi}) \delta Y_i^\ell \quad (5.46)$$

$$p_i^0(\vec{\xi}) = p_i^0(x_j(\vec{\xi})) = \varphi_\ell(\vec{\xi})Q_i^\ell \quad (5.47)$$

$$b_i^0(\vec{\xi}) = b_i^0(x_j(\vec{\xi})) = \varphi_\ell(\vec{\xi})B_i^\ell \quad (5.48)$$

onde a natureza lagrangiana das cargas foi destacada com o superscrito 0. Além disso, considerando o exposto após a equação (5.44), pode-se escrever a deformação de Green como função das posições nodais,

$$E = E(Y_i^\ell) \quad (5.49)$$

e, portanto:

$$\delta E_{kj} = \frac{\partial E_{kj}}{\partial Y_i^\ell} \delta Y_i^\ell \quad (5.50)$$

Substituindo-se as equações (5.46), e (5.50) em (5.45) e, observando-se que δY_i^ℓ são valores nodais e não dependem das integrais, tem-se

$$-F_i^\ell \delta Y_i^\ell - \int_{V_0^{el}} b_i^0 \varphi_\ell(\vec{\xi}) dV_0^{el} \delta Y_i^\ell - \int_{A_0^{el}} p_i^0 \varphi_\ell(\vec{\xi}) dA_0^{el} \delta Y_i^\ell + \int_{V_0^{el}} S_{kj} \frac{\partial E_{kj}}{\partial Y_{il}^\ell} dV_0^{el} \delta Y_i^\ell = 0 \quad (5.51)$$

Das discussões após a equação (2.40), lembra-se que δY_i^ℓ é arbitrário, resultando:

$$-F_i^\ell - \int_{V_0^{el}} \varphi_m(\vec{\xi}) \varphi_\ell(\vec{\xi}) dV_0^{el} B_i^m - \int_{A_0^{el}} \varphi_m(\vec{\xi}) \varphi_\ell(\vec{\xi}) dA_0^{el} Q_i^m + \int_{V_0^{el}} S_{kj} \frac{\partial E_{kj}}{\partial Y_i^\ell} dV_0^{el} = 0_i^\ell \quad (5.52)$$

onde as aproximações (5.47) e (5.48) foram aplicadas. A equação (5.52) é o conjunto de equações não lineares numéricas a ser resolvido.

Observando-se os desenvolvimentos realizados no capítulo 2 para treliças, identifica-se que a equação (5.52) pode ser encontrada de forma similar à equação (2.41), ou seja:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i} + \frac{\partial U}{\partial Y_i} = 0_i \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial Y_\gamma^\ell} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_\gamma^\ell} + \frac{\partial U}{\partial Y_\gamma^\ell} = 0_\gamma^\ell \quad (5.53)$$

com $i = d \cdot (\gamma - 1) + \ell$ onde d assume 3 para problemas 3D e 2 para problemas 2D e i é o grau de liberdade.

Assim, a versão integral de (5.52), é:

$$\Pi = \mathbb{P} + U_e = -F_j^\eta Y_j^\eta - B_j^{\alpha 0} \int_{V_0^{el}} \varphi_\alpha \varphi_\eta dV_0^{el} Y_j^\eta - Q_j^{\alpha 0} \int_{A_0^{el}} \varphi_\alpha \varphi_\eta dA_0^{el} Y_j^\eta + \int_{V_0^{el}} \Psi(Y_k^m) dV_0^{el} \quad (5.54)$$

Como forma de verificação, dessa versão integral recupera-se a equação de equilíbrio (5.52) fazendo-se:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial Y_i^\ell} = -\left(F_i^\ell\right)^{\text{ext}} = -F_i^\ell - \int_{V_0^{\text{el}}} \varphi_\ell \varphi_\alpha dV_0^{\text{el}} B_i^{\alpha 0} - \int_{A_0^{\text{el}}} \varphi_\ell \varphi_\alpha dA_0^{\text{el}} Q_i^{\alpha 0} \quad (5.55)$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial Y_i^\ell} = \left(F_i^\ell\right)^{\text{int}} = \int_{V_0^{\text{el}}} \frac{\partial \Psi(Y_k^m)}{\partial Y_i^\ell} dV_0^{\text{el}} = \int_{V_0^{\text{el}}} \frac{\partial \Psi(Y_k^m)}{\partial E_{km}} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_i^\ell} dV_0^{\text{el}} = \int_{V_0^{\text{el}}} S_{km} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_i^\ell} dV_0^{\text{el}} \quad (5.56)$$

onde na última passagem utilizou-se o conceito de conjugado energético.

Assim, de forma resumida, se escreve o conjunto de equações de equilíbrio para sólidos na mesma forma que foi escrito para treliças, ou seja:

$$\left(F_i^\ell\right)^{\text{int}} - \left(F_i^\ell\right)^{\text{ext}} = 0_i \quad (5.57)$$

5.2.3 - Técnica de Solução básica - Newton-Raphson

Antes de se detalhar o cálculo da força interna e das forças distribuídas externas, nesse item a estratégia de solução do sistema não linear, equação (5.57), é mostrada de forma semelhante ao que foi feito no capítulo 2, indicando-se as grandezas a serem calculadas detalhadamente nos próximos itens.

Começa-se reescrevendo a equação (5.57) na estrutura de graus de liberdade da equação (5.53), acrescentando-se o vetor g_i na igualdade para facilitar a descrição,

$$g_j = \frac{\partial \Pi}{\partial Y_j} = \frac{\partial U_e}{\partial Y_j} - F_j = F_j^{\text{int}} - F_j^{\text{ext}} = 0_j \quad (5.58)$$

onde F_j^{int} é o vetor de forças internas calculado como derivada da energia de deformação em relação às posições nodais. As posições nodais são as incógnitas do problema e não se conhece a priori sua solução, portanto, quando se arbitra uma posição tentativa \vec{Y}^0 para o equilíbrio, a equação (5.58) retorna valor não nulo para $g_j(\vec{Y}^0)$ que se torna o vetor de desbalanceamento mecânico do método de Newton-Raphson. Comenta-se que a primeira posição tentativa é a posição inicial do problema, ou seja, \vec{X} .

Expandindo-se o vetor de desbalanceamento mecânico na vizinhança da posição tentativa \vec{Y}^0 , encontra-se:

$$g_j(\vec{Y}) = g_j(\vec{Y}^0) + \left. \frac{\partial g_j}{\partial Y_k} \right|_{(\vec{Y}^0)} \Delta Y_k + O_j^2 = 0 \quad (5.59)$$

onde \vec{Y} é a solução do problema.

Desprezando-se os termos de ordem superior O_j^2 , impõe-se a segunda igualdade de (5.59) como:

$$\Delta Y_k = - \left(\frac{\partial g_j}{\partial Y_k} \Big|_{\bar{Y}^0} \right)^{-1} g_j(\bar{Y}^0) = - \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_k \partial Y_j} \Big|_{\bar{Y}^0} \right)^{-1} g_j(\bar{Y}^0) = - (H_{kj})^{-1} g_j(\bar{Y}^0) \quad (5.60)$$

onde ΔY_k se converte na correção da posição e, para forças conservativas,

$$H_{kj} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_k \partial Y_j} \Big|_{\bar{Y}^0}$$

é a matriz Hessiana ou rigidez tangente do problema para a posição

tentativa.

A solução tentativa é então melhorada fazendo-se:

$$Y_k^0 = Y_k^0 + \Delta Y_k \quad (5.61)$$

com o novo valor tentativa retorna-se à equação (5.60) para se calcular uma nova correção, até ΔY_k ou g_j serem suficientemente pequenos. O nível de carga é aumentado de forma incremental para se percorrer o caminho de equilíbrio da estrutura analisada e se identificar a existência de pontos ou trechos de instabilidade. Estes pontos ocorrem quando a matriz Hessiana deixa de ser positiva definida, conforme a discussão da natureza do equilíbrio realizada no capítulo 1.

Nos próximos itens mostram-se como se obtêm a força interna e a matriz Hessiana (ou rigidez tangente) para elementos sólidos 2D e sua montagem.

O algoritmo de Newton-Raphson pode ser resumido como segue:

a) Assume-se como primeira tentativa de solução a posição inicial, ou seja,

$$Y_k = Y_k^0 = X_k$$

b) Incrementa-se o nível de carga $F_k = F_k + dF_k$ ou de posição prescrita $Y_k = Y_k + dY_k$

c) Calcula-se nos elementos F_k^{int} pelas expressões (5.62) e (5.74) do próximo item

d) Calcula-se nos elementos H_{kj} pelas expressões (5.78) e (5.88) do próximo item

e) Montam-se a força internas e a Hessiana globais usando (5.75) e (5.89)

f) Resolve-se ΔY_k no sistema linear (5.60)

g) Atualiza-se a posição – equação (5.61) como, $Y_k = Y_k + \Delta Y_k$

h) Calcula-se $|\Delta Y_k|/|X_k|$. Caso $|\Delta Y_k|/|X_k| < \text{tolerância}$ encontrou-se a posição de

equilíbrio para este nível de carga, volte ao item (b) e incremente a carga. Caso contrário, volte ao item (c) e, com Y_k calculado no item (g) como nova posição tentativa, faça nova iteração para melhorar a precisão da solução.

5.3 - Detalhamento do cálculo das grandezas envolvidas

Nesse item, para se apresentar com detalhes os termos calculados numericamente, várias expressões serão repetidas, simplificando-se a leitura do texto. Finalmente um algoritmo que ajudará o leitor a organizar seu código será fornecido.

5.3.1 - Força interna

Para um elemento finito, veja a equação (5.56), a força interna é dada por:

$$\left(F_i^\ell\right)_{el}^{int} = \int_{V_0^{el}} \frac{\partial \Psi(Y_k^m)}{\partial Y_i^\ell} dV_0 = \int_{V_0^{el}} f_i^\ell dV_0 = \sum_{ih=1}^{nh} f_i^\ell(\vec{\xi}(ih)) J_0(\vec{\xi}(ih)) w_{ih} \quad (5.62)$$

onde a última forma foi usada para indicar que todas as integrações serão feitas por quadratura de Hammer em domínios de base triangular. Assim, calcula-se para uma coordenada conhecida $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ em um domínio 2D a contribuição f_i^ℓ da força interna, ou seja:

$$f_\alpha^\beta = \frac{\partial \Psi}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ij}} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} = S_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} \quad \text{ou} \quad \vec{f} = \frac{\partial \Psi}{\partial E} : \frac{\partial E}{\partial \vec{Y}} = S : \frac{\partial E}{\partial \vec{Y}} \quad (5.63)$$

Nesse item, adota-se a Lei de SVK para estado plano de deformação, conforme

$$\Psi = \frac{G}{(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu)(E_{11}^2 + E_{22}^2) + 2\nu E_{11}E_{22} + (1-2\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2) \right\} \quad (5.64)$$

ou

$$\Psi = \frac{1}{2} \left\{ K(1-\nu)(E_{11}^2 + E_{22}^2) + 2K\nu E_{11}E_{22} + 2G(E_{12}^2 + E_{21}^2) \right\} \quad (5.65)$$

com $K = E / [(1+\nu)(1-2\nu)]$ e $G = E / [2(1+\nu)]$. Fica para o leitor refazer algumas operações para outros modelos constitutivos.

Calculam-se explicitamente as componentes de tensão como,

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{\partial \Psi}{\partial E_{11}} = K \{ (1-\nu) E_{11} + \nu E_{22} \} \\
S_{22} &= \frac{\partial \Psi}{\partial E_{22}} = K \{ (1-\nu) E_{22} + \nu E_{11} \} \\
S_{12} &= \frac{\partial \Psi}{\partial E_{12}} = 2GE_{12} \\
S_{21} &= \frac{\partial \Psi}{\partial E_{21}} = 2GE_{21}
\end{aligned} \tag{5.66}$$

observa-se que o tensor de deformações de Green é conhecido numericamente (equação (5.44)), pois se conhecem (como tentativa) as posições atuais dos nós e as coordenadas adimensionais de Hammer, equação(5.44), onde se está calculando a contribuição de força interna.

Desta forma a parcela referente à tensão de Piola-Kirchhoff da equação (5.63) é conhecida. A outra parcela será calculada a partir da expressão (5.44) , ou seja:

$$\frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial}{\partial Y_\alpha^\beta} \left[\frac{1}{2} \left((A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} - I \right) \right] \tag{5.67}$$

ou

$$\frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial Y_\alpha^\beta} \left[(A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} \right] \tag{5.68}$$

No interior do colchete da expressão (5.68) apenas A^1 é função da posição atual dos nós, veja equações (5.32) ou (5.35), além disso, a transposta da derivada de A^1 é igual à derivada da sua transposta, i.e.,

$$\left(\frac{\partial A^1}{\partial Y_\alpha^\beta} \right)^t = \frac{\partial (A^1)^t}{\partial Y_\alpha^\beta} \tag{5.69}$$

onde uma notação mista está sendo usada, pois, por exemplo, A^1 e A^0 são tensores de ordem 2. Procedendo-se a derivada, de (5.32) tem-se,

$$DA_{\alpha\beta}^1 = A_{,\alpha\beta}^1 = \frac{\partial A_{ij}^1}{\partial Y_\alpha^\beta} = \phi_{\ell,j} \frac{\partial Y_i^\ell}{\partial Y_\alpha^\beta} = \phi_{\ell,j} \delta_{\alpha i} \delta_{\beta \ell} = \phi_{\beta,j} \delta_{\alpha i} \tag{5.70}$$

Tal como se explicitaram as componentes de tensão, é interessante se explicitar $DA_{\alpha\beta}^1$ que é um tensor de quarta ordem (em notação mista), mas que pode ser entendido como tensores de ordem 2 calculados para cada componente (α, β) , ou seja, nó β e direção α para compor a contribuição da força interna f_α^β , como:

$$\begin{aligned}
DA_{11}^1 &= \frac{\partial A^1}{\partial Y_1^1} = \frac{\partial}{\partial Y_1^1} \begin{bmatrix} \phi_{\ell,1} Y_1^\ell & \phi_{\ell,2} Y_1^\ell \\ \phi_{\ell,1} Y_2^\ell & \phi_{\ell,2} Y_2^\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
DA_{12}^1 &= \frac{\partial A^1}{\partial Y_1^2} = \frac{\partial}{\partial Y_1^2} \begin{bmatrix} \phi_{\ell,1} Y_1^\ell & \phi_{\ell,2} Y_1^\ell \\ \phi_{\ell,1} Y_2^\ell & \phi_{\ell,2} Y_2^\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{2,1} & \phi_{2,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
DA_{21}^1 &= \frac{\partial A^1}{\partial Y_2^1} = \frac{\partial}{\partial Y_2^1} \begin{bmatrix} \phi_{\ell,1} Y_1^\ell & \phi_{\ell,2} Y_1^\ell \\ \phi_{\ell,1} Y_2^\ell & \phi_{\ell,2} Y_2^\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \phi_{1,1} & \phi_{1,2} \end{bmatrix} \\
DA_{22}^1 &= \frac{\partial A^1}{\partial Y_2^2} = \frac{\partial}{\partial Y_2^2} \begin{bmatrix} \phi_{\ell,1} Y_1^\ell & \phi_{\ell,2} Y_1^\ell \\ \phi_{\ell,1} Y_2^\ell & \phi_{\ell,2} Y_2^\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.71}$$

onde considerou-se apenas 2 nós nas expressões abertas da equação (5.71). Como o nó β varia de 1 ao número de nós do elemento, 10 no caso do elemento triangular 2D cúbico, e α somente nas direções de análise (no caso 2), escreve-se:

$$DA_{1\beta}^1 = \begin{bmatrix} \phi_{\beta,1} & \phi_{\beta,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad DA_{2\beta}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \phi_{\beta,1} & \phi_{\beta,2} \end{bmatrix} \tag{5.72}$$

que é a representação de cada componente (α, β) do tensor expresso em (5.70).

Assim, a equação (5.68) pode se escrita em uma notação mista como:

$$DE_{\alpha\beta} = \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{1}{2} \left((A^0)^{-t} \cdot (DA_{\alpha\beta})^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot (DA_{\alpha\beta}) \cdot (A^0)^{-1} \right) \tag{5.73}$$

sem soma na direção α e nó β . Deve-se comentar que todos os tensores de ordem 2 de (5.73) são conhecidos numericamente, pois se conhecem (como tentativa) as posições atuais dos nós e as coordenadas adimensionais de Hammer, onde se está calculando a contribuição de força interna.

Lembrando-se das fórmulas explícitas (5.71) e (5.66) pode-se escrever (5.63) como:

$$f_\alpha^\beta = DE_{\alpha\beta} : S \quad \text{ou ainda} \quad f_\alpha^\beta = (DE_{\alpha\beta})_{ij} S_{ij} \tag{5.74}$$

Usando-se a quadratura (5.62) encontra-se a força interna, que pode ser transformada para forma vetorial, tal como feito no programa de treliça, ou seja:

$$(F_\alpha^\beta)^{\text{int}} \rightarrow (F)_k^{\text{int}} \quad \text{com} \quad k = 2(\beta - 1) + \alpha \tag{5.75}$$

caso o problema fosse 3D $k = 3(\beta - 1) + \alpha$.

5.3.2 - Matriz Hessiana

Para força externa conservativa, da equação (5.60) escreve-se a versão de graus de liberdade da matriz Hessiana como:

$$H_{kj} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y_k \partial Y_j} \quad (5.76)$$

Utilizando-se a representação que utiliza nó e direção e aproveitando-se os resultados da equação (5.56), pode-se trabalhar (5.76) como:

$$\frac{\partial}{\partial Y_\gamma^z} \frac{\partial U}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial (F_\alpha^\beta)^{int}}{\partial Y_\gamma^z} = \int_{V_0^{el}} \frac{\partial^2 \Psi(Y_k^m)}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} dV_0^{el} = \int_{V_0^{el}} \frac{\partial}{\partial Y_\gamma^z} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial E_{km}} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_\alpha^\beta} \right) dV_0^{el} \quad (5.77)$$

A última integral deve ser escrita, para cada elemento finito, em forma de somatório das contribuições calculadas para cada ponto de Hammer, como:

$$H_{\alpha\beta\gamma z}^{el} = \int_{V_0^{el}} h_{\alpha\beta\gamma z} dV_0 = \sum_{ih=1}^{nh} h_{\alpha\beta\gamma z}(\vec{\xi}(ih)) J_0(\vec{\xi}(ih)) w_{ih} \quad (5.78)$$

onde

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial}{\partial Y_\gamma^z} \left(\frac{\partial \Psi(Y_k^m)}{\partial E_{km}} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_\alpha^\beta} \right) \text{ ou } h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial}{\partial Y_\gamma^z} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial E} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} \right) \quad (5.79)$$

escrita em notação mista. O último termo da equação (5.79) é desenvolvido como:

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial}{\partial Y_\gamma^z} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial E} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} \right) = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \frac{\partial^2 \Psi}{\partial E \otimes \partial E} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + \frac{\partial \Psi}{\partial E} : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \quad (5.80)$$

Sabe-se, do capítulo 4, que a segunda derivada da energia específica de deformação em relação à deformação de Green é o tensor constitutivo elástico e que $S = \partial \Psi / \partial E$, assim a equação (5.80) pode ser simplificada para:

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \mathfrak{C} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + S : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \quad (5.81)$$

Da equação (5.73) conhece-se para cada nó β e direção α um tensor de ordem dois $DE_{\alpha\beta}$ e pode-se calcular

$$DS_{\alpha\beta} = \mathfrak{C} : DE_{\alpha\beta} \quad (5.82)$$

Em notação de Voigt esta equação, aproveitando-se a equação (5.66) fica escrita como,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial S_{11}}{\partial Y_\alpha^\beta} \\ \frac{\partial S_{22}}{\partial Y_\alpha^\beta} \\ \frac{\partial S_{12}}{\partial Y_\alpha^\beta} \\ \frac{\partial S_{21}}{\partial Y_\alpha^\beta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K(1-\nu) & K\nu & 0 & 0 \\ K\nu & K(1-\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial E_{11}}{\partial Y_\alpha^\beta} \\ \frac{\partial E_{22}}{\partial Y_\alpha^\beta} \\ \frac{\partial E_{12}}{\partial Y_\alpha^\beta} \\ \frac{\partial E_{21}}{\partial Y_\alpha^\beta} \end{pmatrix} \quad (5.83)$$

ou ainda, de forma abreviada,

$$\begin{pmatrix} DS_{11} \\ DS_{22} \\ DS_{12} \\ DS_{21} \end{pmatrix}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} K(1-\nu) & K\nu & 0 & 0 \\ K\nu & K(1-\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} DE_{11} \\ DE_{22} \\ DE_{12} \\ DE_{21} \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \quad (5.84)$$

reorganizando-se

$$DS_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} DS_{11} & DS_{12} \\ DS_{21} & DS_{22} \end{bmatrix}_{\alpha\beta} \quad (5.85)$$

Antes de se organizar o cálculo da contribuição da Hessiana, falta calcular a segunda derivada da deformação em relação às posições nodais, chamando:

$$D^2E_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\alpha^\beta \partial Y_\gamma^z} \quad (5.86)$$

para facilitar o entendimento, o cálculo de cada termo para o conjunto de índices α, β, γ, z fixados (dois nós e duas direções) é um tensor de ordem 2.

Seu cálculo é feito derivando-se a expressão (5.73) que, à luz da equação (5.72), possui apenas o gradiente A^1 dependente das posições atuais Y_γ^z , pois $DA_{\alpha\beta}^1$ é constante, assim:

$$D^2E_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{1}{2} \left((A^0)^{-t} \cdot (DA_{\alpha\beta}^1)^t \cdot (DA_{\gamma z}^1) \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (DA_{(\gamma)(z)}^1)^t \cdot (DA_{(\alpha)(\beta)}^1) \cdot (A^0)^{-1} \right) \quad (5.87)$$

sem soma em α, β, γ, z .

Usando-se (5.73), (5.85) e (5.87) reescreve-se (5.81) como:

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = DE_{\gamma z} : DS_{\alpha\beta} + S : D^2E_{\alpha\beta\gamma z} \quad (5.88)$$

ou seja, cada componente $(\alpha, \beta, \gamma, z)$ da contribuição da Hessiana é fruto de contrações duplas de tensores de segunda ordem, numericamente conhecidos.

Após a soma de (5.78) a Hessiana pode ser escrita em forma de matriz pela simples transformação de índices,

$$H_{\alpha\beta\gamma z} \rightarrow H_{ij} \quad \text{com} \quad i = 2(\beta - 1) + \alpha \quad \text{e} \quad j = 2(z - 1) + \gamma \quad (5.89)$$

5.3.3 - Algoritmo para construção da força interna e da matriz hessiana

Apesar desse algoritmo estar escrito utilizando-se o formato do FORTRAN, não é um código.

do je=1,ne !elementos finitos

do ih=1,nh ! Pontos de Hammer item 5.1.5

calcular FI e DFI pelo algoritmo do item 5.1.4

calcular A0(2x2) usando (5.33) e J0=Det(A0)

calcular A1(2x2) usando (5.34) com Y tentativa

calcular C(2x2) usando (3.16) comona parcela correspondente de (5.44)

calcular E(2x2) usando (5.44)

*ue=ue+(5.65)*wh(ih)*J0 !opcional*

calcular S(2x2) usando (5.66)

do beta =1,10 ! número de nós

do alpha =1,2 ! direções

calcular DA1 alpha beta (2x2) usando (5.72) !guardar pois vai usar novamente em (5.87)

calcular DE alpha beta (2x2) usando (5.73) !guardar pois vai usar novamente em (5.87)

calcular fl alpha beta usando (5.74)

j = 2(inc(je, beta) - 1) + alpha*

*F(j) = F(j) + fl alpha beta * wh(ih) * J0 ! integrando e montando vetor global*

enddo ! alpha

enddo ! beta

do beta =1,10 ! número de nós

do alpha =1,2 ! direções

do z =1,10 ! número de nós

do gamma =1,2 ! direções

calcular DS alpha beta (2x2) usando (5.85), não precisa guardar

calcular D2E alpha beta gamma z (2x2) usando(5.87), não precisa guardar

calcular escalar $h\alpha\beta\gamma z$ usando (5.88)

$$i = 2 * (\text{inc}(je, \beta) - 1) + \alpha$$

$$j = 2 * (\text{inc}(je, z) - 1) + \gamma$$

$H(i, j) = H(i, j) + h\alpha\beta\gamma z * wh(ih) * J0$! integrando e montando hessiana global

enddo ! γ

enddo ! z

enddo ! α

enddo ! β

enddo ! ih Hammer

enddo ! je elementos finitos

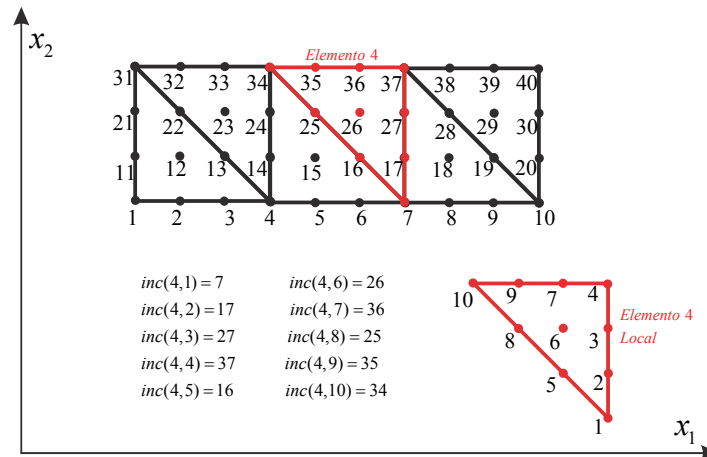


Figura 5.9 - Exemplo de incidência nodal para elemento de placa

Deve-se ainda esclarecer que, da mesma forma que foi definido no capítulo 2, mais especificamente no item 2.3.1, relacionam-se os nós e, portanto, os graus de liberdade da estrutura toda com aqueles definidos para a numeração local do elemento finito. Isso é feito pela matriz de incidência nodal dada por:

$$\Lambda = \text{inc}(je, \lambda) \tag{5.90}$$

onde je é o elemento, λ é o número local do nó (no caso de 1 até 10) e Λ o número global do nó do sólido analisado, veja exemplo da figura 5.9.

Assim, no algoritmo indicado, os resultados da força interna e da matriz Hessiana já se encontram nas coordenadas globais.

5.3.4 - Forças externas

As forças externas aplicadas no sólido são de três tipos, conforme apresentado na equação (5.55) repetida a seguir

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial Y_i^\ell} = -\left(F_i^\ell\right)^{\text{ext}} = -F_i^\ell - \int_{V_0^{\text{el}}} \varphi_\ell \varphi_\alpha dV_0^{\text{el}} B_i^{\alpha 0} - \int_{A_0^{\text{el}}} \varphi_\ell \varphi_\alpha dA_0^{\text{el}} Q_i^{\alpha 0} \quad (5.55)$$

onde $B_i^{\alpha 0}$ e $Q_i^{\alpha 0}$ são os valores nodais das cargas de volume ou de superfície que geram distribuição contínua no elemento via polinômios aproximadores.

As forças concentradas são informadas no arquivo de entrada exatamente como feito no programa de treliça e é necessário apenas se relacionar nó global ℓ e a direção i com o grau de liberdade global j , ou seja

$$F_i^\ell \rightarrow F_j \quad \text{com} \quad j = 2(\ell - 1) + i \quad (5.91)$$

As cargas de volume devem ser calculadas por integração. Para apenas um elemento finito, tem-se:

$$\left(F_i^\ell\right)^{\text{vol}} = \int_{V_0^{\text{el}}} \varphi_\ell \varphi_\alpha dV_0 B_i^{\alpha 0} = \left(\sum_{ih=1}^{nh} \varphi_\ell(ih) \varphi_\alpha(ih) wh(ih) J_0 \right) B_i^{\alpha 0} \quad (5.92)$$

ou

$$\left(F_i^\ell\right)^{\text{vol}} = \mathcal{M}_{\ell\alpha} B_i^{\alpha 0} \quad (5.93)$$

onde se entende ℓ e α como nós locais e i direção, o tensor $\mathcal{M}_{\ell\alpha}$ pode ser calculado apenas uma vez para cada elemento finito, pois não se altera ao longo do processo de solução. Para facilitar o entendimento, pode-se modificar a escrita de (5.93) utilizando-se a forma vetorial da carga $B_i^{\alpha 0}$ pela correspondência entre nó local α e direção i com o grau de liberdade local j ($j = 2(\alpha - 1) + i$) e entre o nó local ℓ e a direção local i com o grau de liberdade global k ($k = 2(\ell - 1) + i$), como:

$$\left(F_k\right)^{\text{vol}} = \mathcal{M}_{kj} B_j^0 \quad (5.94)$$

Para um elemento de apenas 3 nós, a expressão (5.94) fica expandida como:

$$\begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_1^3 \\ F_2^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \int_{V_0^{\text{el}}} \begin{bmatrix} \varphi_1 \varphi_1 & 0 & \varphi_1 \varphi_2 & 0 & \varphi_1 \varphi_3 & 0 \\ 0 & \varphi_1 \varphi_1 & 0 & \varphi_1 \varphi_2 & 0 & \varphi_1 \varphi_3 \\ \varphi_2 \varphi_1 & 0 & \varphi_2 \varphi_2 & 0 & \varphi_2 \varphi_3 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \varphi_1 & 0 & \varphi_2 \varphi_2 & 0 & \varphi_2 \varphi_3 \\ \varphi_3 \varphi_1 & 0 & \varphi_3 \varphi_2 & 0 & \varphi_3 \varphi_3 & 0 \\ 0 & \varphi_3 \varphi_1 & 0 & \varphi_3 \varphi_2 & 0 & \varphi_3 \varphi_3 \end{bmatrix} dV_0 \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{Bmatrix} \quad (5.95)$$

A transformação da força calculada nos graus de liberdade locais para a representação nos graus de liberdade globais segue a operação da equação (5.91). Para a força de superfície o procedimento é similar, porém, deve-se criar uma incidência nodal para linhas de carga (em problemas 2D) ou superfícies de carga (problemas 3D) e usar na aproximação nodal as correspondentes funções de forma.

5.4 - O MEF Posicional Dinâmico

No item anterior se detalhou o MEF posicional para análise estática de sólidos. Nesse item inclui-se o termo da energia cinética, ou seja, vota-se a trabalhar com as expressões completas reescritas de forma conveniente, como:

Energia mecânica total,

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K} \quad (5.96)$$

Princípio da Energia Mecânica Estacionária,

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{K} = 0 \quad (5.97)$$

Escolha de parâmetro para desenvolvimento do método,

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\bar{Y}} \delta\bar{Y} = \left(\frac{\partial\mathbb{P}}{\partial\bar{Y}} + \frac{\partial\mathbb{U}}{\partial\bar{Y}} + \frac{\partial\mathbb{K}}{\partial\bar{Y}} \right) \delta\bar{Y} = 0 \quad (5.98)$$

Arbitrariedade das variações em posições resultando nas equações não lineares de equilíbrio,

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\bar{Y}} = \frac{\partial\mathbb{P}}{\partial\bar{Y}} + \frac{\partial\mathbb{U}}{\partial\bar{Y}} + \frac{\partial\mathbb{K}}{\partial\bar{Y}} = \vec{0} \quad (5.99)$$

Como o objeto desse item é a inclusão da energia cinética no MEF posicional, repete-se de forma breve o descrito no capítulo 4, item 4.6, onde a variação da energia cinética é feita com base no tempo com fácil recuperação de sua forma baseada em posições, como explicado na sequência.

A expressão geral da energia cinética para sólido com volume V é:

$$\mathbb{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{y}_i \dot{y}_i dV \quad (4.93)$$

Desenvolve-se a variação da energia cinética usando o tempo como parâmetro,

$$\delta\mathbb{K} = \frac{d\mathbb{K}}{dt} dt \quad (4.94)$$

Recupera-se a forma desejada escrita em posições pela seguinte sequência:

$$\begin{aligned}\delta\mathbb{K} &= \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{d}{dt} (\dot{y}_i \dot{y}_i) dt dV = \frac{1}{2} \int_V \rho 2 (\dot{y}_i \dot{y}_i) dt dV \\ &= \int_V \rho \dot{y}_i (\dot{y}_i dt) dV = \int_V \rho \dot{y}_i \delta y_i dV = \int_{V_0} \rho_0 \dot{y}_i \delta y_i dV_0\end{aligned}\quad (4.95)$$

Observa-se que a conservação de massa e seu colorário foram usados nas passagens apresentadas na equação (4.95)

Para o desenvolvimento do método numérico, aplica-se sobre a aceleração a mesma aproximação utilizada para posições, também se reescreve a aproximação da variação da posição como,

$$\ddot{y}_i = \varphi_\ell(\bar{\xi}) \ddot{Y}_i^\ell \quad \text{e} \quad \delta y_i = \varphi_\ell(\bar{\xi}) \delta Y_i^\ell \quad (5.100)$$

Utilizando-se (5.100) na forma Lagrangiana de (4.95) se escreve:

$$\delta\mathbb{K} = \int_{V_0} \rho_0 \varphi_\ell \varphi_\alpha \ddot{Y}_i^\alpha dV_0 \delta Y_i^\ell = \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial Y_i^\ell} \delta Y_i^\ell = (F_i^\ell)^{iner} \delta Y_i^\ell \quad (5.101)$$

ou

$$\frac{\partial \mathbb{K}}{\partial Y_i^\ell} = \int_{V_0} \rho_0 \varphi_\ell \varphi_\alpha dV_0 \ddot{Y}_i^\alpha \quad \text{ou} \quad \vec{F}^{iner} = \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \vec{Y}} = \int_{V_0} \rho_0 \vec{\varphi} \otimes \vec{\varphi} dV_0 \cdot \ddot{\vec{Y}} = M \cdot \ddot{\vec{Y}} \quad (5.102)$$

onde a primeira forma da equação (5.102) indica que a matriz de massa é constante ao longo do tempo e que pode ser calculada exatamente como a matriz que relaciona os valores nodais das cargas distribuídas de volume com os respectivos valores nodais, veja equação (5.92). Para simplificar o entendimento, se escreve (para um elemento de chapa de 3 nós) a equação (5.102) no formato da equação (5.95) como:

$$\begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_1^3 \\ F_2^3 \end{Bmatrix}^{iner} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix}^{iner} = \int_{V_0^{el}} \rho_0 \begin{bmatrix} \varphi_1 \varphi_1 & 0 & \varphi_1 \varphi_2 & 0 & \varphi_1 \varphi_3 & 0 \\ 0 & \varphi_1 \varphi_1 & 0 & \varphi_1 \varphi_2 & 0 & \varphi_1 \varphi_3 \\ \varphi_2 \varphi_1 & 0 & \varphi_2 \varphi_2 & 0 & \varphi_2 \varphi_3 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \varphi_1 & 0 & \varphi_2 \varphi_2 & 0 & \varphi_2 \varphi_3 \\ \varphi_3 \varphi_1 & 0 & \varphi_3 \varphi_2 & 0 & \varphi_3 \varphi_3 & 0 \\ 0 & \varphi_3 \varphi_1 & 0 & \varphi_3 \varphi_2 & 0 & \varphi_3 \varphi_3 \end{bmatrix} dV_0 \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_2 \\ \ddot{Y}_3 \\ \ddot{Y}_4 \\ \ddot{Y}_5 \\ \ddot{Y}_6 \end{Bmatrix} \quad (5.103)$$

que detalha a matriz de massa local de elemento finito posicional. Sua montagem para coordenadas globais é feita pela incidência nodal, já comentada várias vezes.

O conjunto de equações não lineares de equilíbrio ou de movimento (5.99) pode ser escrito em sua forma vetorial exatamente como para a solução dinâmica de treliças, ou seja:

$$-\vec{F}^{ext} + \vec{F}^{int} + M \cdot \ddot{\vec{Y}} = \vec{0} \quad (5.104)$$

e o processo de solução é feito combinando-se o integrador de Newmark com o algoritmo de Newton-Raphson, rerepresentado como segue:

5.4.1 - Processo de solução - Newmak + Newton-Raphson

Reescreve-se a equação vetorial de movimento (5.104) lembrando-se que a força interna é a derivada da energia de deformação em relação às posições. Inclui-se, por similaridade aos problemas lineares, um termo de amortecimento proporcional à massa ou à rigidez inicial, como:

$$\vec{g} = \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vec{Y}}(\vec{Y}) + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\vec{Y}} - \vec{F}^{ext}(t) = \vec{0} \quad (5.105)$$

Destaca-se nessa equação a dependência da força externa e da posição em relação ao tempo e da força interna em relação à posição. Lembra-se que a matriz de massa é constante e que o vetor \vec{g} só é nulo se a posição de equilíbrio no instante de análise for conhecida, caso contrário esse vetor é chamado de vetor de desbalanceamento mecânico.

O processo de solução apresentado nesse item é para problemas transientes, ou seja, quando a força externa varia ao longo do tempo. Para se evitar excesso de repetições o leitor deve voltar ao item 2.4.3 para problemas de vibração livre e escolha de passo de tempo.

A equação (5.105) é válida para qualquer instante de análise da estrutura e o tempo é uma variável contínua. Porém, a solução numérica impõe que o tempo seja tratado de forma discreta, ou seja, o instante atual é calculado como o instante anterior acrescido de um passo ou intervalo de tempo, como:

$$t_{s+1} = t_s + \Delta t \quad (5.106)$$

onde t_{s+1} é o instante atual. A equação (5.105) vale para o tempo atual e pode ser reescrita como:

$$\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} \right|_{s+1} = \left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vec{Y}} \right|_{s+1} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}_{s+1} + \mathbf{C} \cdot \dot{\vec{Y}}_{s+1} - \vec{F}_{s+1}^{ext} = \vec{0} \quad (5.107)$$

onde, por simplicidade, omite-se t .

Seguindo a ideia de se transformar o tempo contínuo em discreto, diversas aproximações temporais (chamados de integradores temporais) são propostas na literatura, um dos mais simples e também mais eficiente para análise estrutural linear é o algoritmo de Newmark. O fato da matriz de massa do MEF posicional ser constante

na maioria das aplicações, permite que esse integrador apresente bom desempenho nas análises não lineares. Esta característica se estende para qualquer formulação Lagrangiana total.

As aproximações de Newmark podem ser escritas como:

$$\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_s + \dot{\vec{Y}}_s \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\vec{Y}}_s + \beta \ddot{\vec{Y}}_{s+1} \right] \Delta t^2 \quad (5.108)$$

$$\dot{\vec{Y}}_{s+1} = \dot{\vec{Y}}_s + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\vec{Y}}_s + \gamma \Delta t \ddot{\vec{Y}}_{s+1} \quad (5.109)$$

onde β e γ são parâmetros livres. Por exemplo, se $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$ as equações (5.108) e (5.109) recaem nas equações de movimento retilíneo uniformemente acelerado, ou seja, se está considerando aceleração constante em um passo de tempo. Esses valores serão adotados como padrão na solução de problemas usuais, podendo ser alterados caso se pretenda aplicações como impacto e não linearidades físicas mais severas.

É de interesse se escrever a velocidade e a aceleração atuais em função das posições atuais e valores conhecidos do passado. Para tanto basta se isolar essas variáveis nas equações (5.108) e (5.109), como

$$\ddot{\vec{Y}}_{s+1} = \frac{\vec{Y}_{s+1} - \left(\frac{\vec{Y}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\vec{Y}}_s}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\vec{Y}}_s \right)}{\beta \Delta t^2} - \vec{Q}_s \quad (5.110)$$

$$\dot{\vec{Y}}_{s+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \vec{Y}_{s+1} + \left[\dot{\vec{Y}}_s + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\vec{Y}}_s \right] - \left(\frac{\vec{Y}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\vec{Y}}_s}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\vec{Y}}_s \right) \gamma \Delta t = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \vec{Y}_{s+1} + \vec{R}_s - \gamma \Delta t \vec{Q}_s \quad (5.111)$$

com

$$\vec{Q}_s = \left(\frac{\vec{Y}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\vec{Y}}_s}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\vec{Y}}_s \right) \quad \text{e} \quad \vec{R}_s = \left[\dot{\vec{Y}}_s + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\vec{Y}}_s \right] \quad (5.112)$$

Substituindo-se (5.110) e (5.111) em (5.107) resulta:

$$\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vec{Y}} \Big|_{s+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \vec{Y}_{s+1} - \mathbf{M} \cdot \vec{Q}_s + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \cdot \vec{Y}_{s+1} + \mathbf{C} \cdot \vec{R}_s - \gamma \Delta t \mathbf{C} \cdot \vec{Q}_s - \vec{F}_{s+1}^{ext}(t) = \vec{0} \quad (5.113)$$

A equação (5.113) indica que o equilíbrio ocorre quando $\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) = 0$ e é muito semelhante à equação (5.58). Sendo uma equação não linear com respeito à (\vec{Y}_{s+1}) é necessário aplicar o Método de Newton-Raphson para sua solução.

Uma expansão em série de Taylor truncada em primeira ordem é realizada conforme segue:

$$\bar{0} = \bar{g}(\bar{Y}_{s+1}) \cong \bar{g}(\bar{Y}_{s+1}^0) + \nabla \bar{g}(\bar{Y}_{s+1}^0) \Delta \bar{Y} \quad (5.114)$$

onde

$$\mathbf{H} = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{Y}^2} \right|_{s+1} = \nabla \bar{g}(\bar{Y}_{s+1}^0) = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial Y^2} \right|_{s+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} = \mathbf{H}^{estat} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \quad (5.115)$$

onde \mathbf{H}^{estat} é a hessiana estática já calculada nos itens anteriores e usada no código estático.

Da equação (5.115) resulta o sistema linear para o cálculo da correção da posição no instante considerado, ou seja:

$$\nabla \bar{g}(\bar{Y}_{s+1}^0) \cdot \Delta \bar{Y} = -\bar{g}(\bar{Y}_{s+1}^0) \quad \text{ou} \quad \mathbf{H} \cdot \Delta \bar{Y} = -\bar{g}(\bar{Y}_{s+1}^0) \quad (5.116)$$

onde \bar{Y}_{s+1}^0 é uma posição tentativa. No início de um passo de tempo ela é assumida como sendo o resultado do último passo de tempo, ou seja, \bar{Y}_s . Resolvendo-se a correção $\Delta \bar{Y}$ na equação (5.116) uma nova tentativa para \bar{Y}_{s+1} é calculada como:

$$\bar{Y}_{s+1} = \bar{Y}_{s+1}^0 = \bar{Y}_{s+1}^0 + \Delta \bar{Y} \quad (5.117)$$

Essa equação é idêntica à (5.61). A aceleração e a velocidade devem ser recalculadas para cada iteração, usando-se as equações (5.110) e (5.111) reescritas de forma compacta como:

$$\ddot{\bar{Y}}_{s+1} = \frac{\bar{Y}_{s+1} - \bar{Q}_s}{\beta \Delta t^2} \quad \text{e} \quad \dot{\bar{Y}}_{s+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \bar{Y}_{s+1} + \bar{R}_s - \gamma \Delta t \bar{Q}_s \quad (5.118)$$

Lembra-se que \bar{Q}_s e \bar{R}_s ficam constantes durante as iterações, pois são valores do passado e só são atualizados depois da convergência em um passo de tempo. O critério de parada é dado pela equação,

$$\frac{\|\bar{g}(Y^0)\|}{\|\bar{F}^{ext}\|} \leq TOL \quad \text{ou} \quad \frac{\|\Delta \bar{Y}\|}{\|\bar{X}\|} \leq TOL \quad (5.119)$$

Quando o resultado converge \bar{Y}_{s+1}^0 se confunde com a própria solução \bar{Y}_{s+1} que, para o próximo passo de tempo, será novamente \bar{Y}_s , ou seja, a primeira solução tentativa.

No primeiro passo de tempo a aceleração deve ser calculada como:

$$\ddot{\bar{Y}}_0 = M^{-1} \left[\bar{F}_0^{ext} - \left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial Y} \right|_0 - C \dot{\bar{Y}}_0 \right] \quad (5.120)$$

O algoritmo de solução pode ser resumido como segue:

a) Assume-se como primeira tentativa de solução a posição, velocidade e aceleração do final do passo anterior, ou seja, $\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_{s+1}^0 = \vec{Y}_s$, $\vec{\dot{Y}}_{s+1} = \vec{\dot{Y}}_{s+1}^0 = \vec{\dot{Y}}_s$, $\vec{\ddot{Y}}_{s+1} = \vec{\ddot{Y}}_{s+1}^0 = \vec{\ddot{Y}}_s$. Observa-se que o valor atualizado se confunde com o valor tentativa e o mesmo vetor numérico pode ser usado para armazená-los em código computacional.

b) Calcula-se o nível de força aplicado $\vec{F}_{s+1}^{ext}(t_{s+1})$ e/ou posições prescritas $\vec{Y}_{s+1}(t_{s+1})$, calculam-se \vec{Q}_s e \vec{R}_s com as equações (5.112).

c) Usando a posição tentativa, calculam-se nos elementos a força interna F_{s+1}^{int} e a matriz Hessiana Estática \mathbf{H}_{s+1}^{estat} conforme algoritmo 5.3.3.

d) Montam-se o vetor global de forças internas estáticas e a Hessiana global, usando (5.75) e (5.89). Soma-se a parcela dinâmica $\mathbf{M} \cdot \vec{Y}_{s+1} / \beta \Delta t^2 - \mathbf{M} \cdot \vec{Q}_s + \gamma \mathbf{C} \cdot \vec{Y}_{s+1} / \beta \Delta t + \mathbf{C} \cdot \vec{R}_s - \gamma \Delta t \mathbf{C} \cdot \vec{Q}_s$ no vetor de forças internas. Somam-se os termos de massa e amortecimento na Hessiana estática, resultando na Hessiana completa, veja a equação (5.115)

e) Calcula-se o vetor $\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0)$ ou $\vec{g}(\vec{Y}_{s+1})$ pela equação (5.113) e aplicam-se as condições de contorno conforme item 2.3.5, usando-se a Hessiana completa e o vetor de desbalanceamento mecânico.

f) Resolve-se $\Delta \vec{Y}$ no sistema linear (5.116)

g) Atualiza-se a posição, equação (5.117)

h) Atualizam-se a aceleração e velocidade pelas equações (5.118)

i) Calcula-se $|\Delta Y_k|/|X_k|$.

i1) Caso $|\Delta Y_k|/|X_k| < tol$ encontrou-se a posição de equilíbrio do passo de tempo, guarda-se o resultado do passo presente como valores do passado para o próximo passo, ou seja, $Y_s = Y_{s+1}$, $\dot{Y}_s = \dot{Y}_{s+1}$ e $\ddot{Y}_s = \ddot{Y}_{s+1}$, volta-se ao item (b) para próximo passo de tempo.

i2) Caso $|\Delta Y_k|/|X_k| \geq tol$, volte ao item (c) e faça nova iteração para melhorar a precisão da solução.

5.5 - Cálculo de tensões

Nas análises gerais, é de interesse se calcular as tensões de Cauchy no sólido analisado, principalmente porque essa medida de tensão possui significado físico e constitui muitos modelos de falha ou ruptura. Para tanto, deve-se resgatar a expressão, escrita em formato mais adequado,

$$\sigma = \frac{1}{J} A \cdot S \cdot A^t \quad (4.119)$$

que relaciona o tensor de tensões de Piola-Krichhoff de segunda espécie com o tensor de tensões de Cauchy.

No final de um determinado passo de carga ou de tempo sabe-se que a configuração atual calculada é a melhor representação possível para a posição do corpo. Como são conhecidas as posições nodais Y_i^t , para cada elemento, em um ponto de integração, se conhecem A^0 e A^1 e, portanto, calculam-se:

O gradiente da função mudança de configuração,

$$A = A^1 \cdot (A^0)^{-1} \quad (5.121)$$

A deformação de Green,

$$E = \frac{1}{2} (A^t \cdot A - I) \quad (5.122)$$

e a tensão de Piola Kirchhoff de segunda espécie,

$$S = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial E} \right|_E \quad (5.123)$$

que para o modelo SVK é simplesmente $S = \mathfrak{C} : E$.

Finalmente, com os valores de (5.121) e (5.123) calcula-se σ com (4.119). É importante mencionar que as componentes de tensão de Cauchy calculadas em (4.119) seguem os eixos coordenados originais da estrutura, uma ilustração pode ser vista na figura 5.10.

Um detalhe interessante para códigos computacionais é o pós-processamento dos valores calculados nos pontos de integração. Para se utilizar pós-processadores, em geral, é necessário se informar os valores das variáveis calculadas nos nós da discretização. As posições, por exemplo, são calculadas diretamente nos nós, porém as deformações e tensões são calculadas nos pontos de integração.

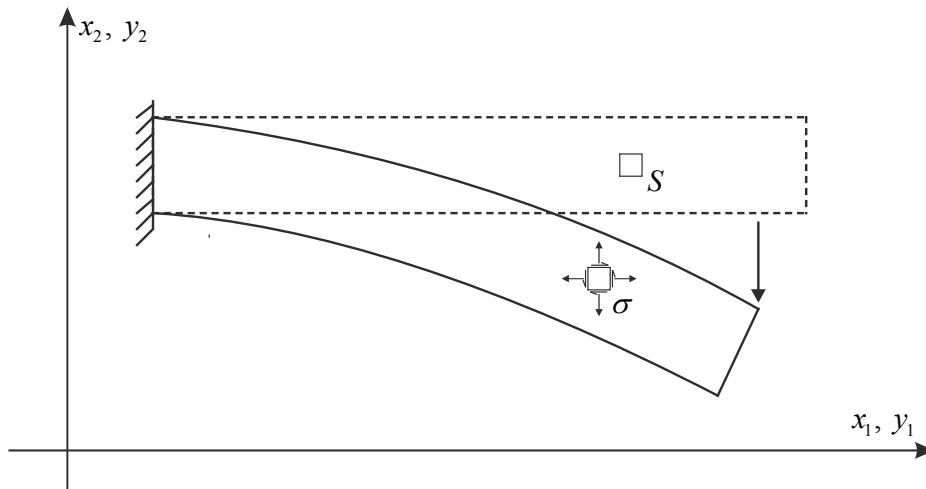


Figura 5.10 - Orientação da tensão de Cauchy calculada

Em problemas elásticos podem-se utilizar as coordenadas adimensionais dos nós do elemento para se calcular as tensões, porém essa prática não pode ser estendida para problemas onde há não linearidade física, por exemplo, a plasticidade. Isso ocorre porque a evolução plástica depende da história das tensões e deformações no ponto em análise e só se conhece essa história nos pontos de integração. Seguem duas propostas, das várias existentes, para se calcular valores nodais a partir de valores conhecidos nos pontos de integração.

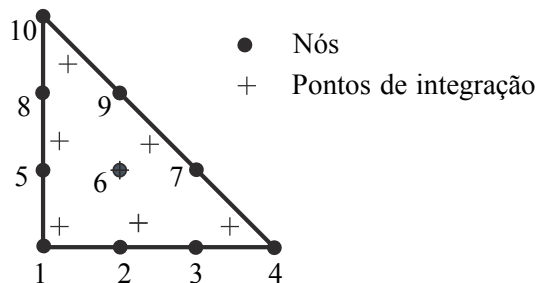


Figura 5.11 - Ilustração dos pontos de integração e nós de um elemento genérico

Seja o elemento triangular de aproximação cúbica mostrado na figura 5.11 para o qual se conhecem os valores de uma variável qualquer a nos 7 pontos de integração, chamados a_i . Esses valores são escritos em função dos valores nodais A_ℓ (incógnitos) como:

$$a_i = L_{i\ell} A_\ell \tag{5.124}$$

onde as primeiras 7 linhas da matriz $L_{i\ell}$ são dadas por:

$$L_{i\ell} = \varphi_\ell(\vec{\xi}_i) \tag{5.125}$$

onde φ_ℓ são as funções de forma associadas ao nó ℓ e $\vec{\xi}_i$ é o vetor das coordenadas do ponto de integração i . Como a intenção é calcular valores nodais, para efeito de pós-processamento, vamos completar a matriz com três equações adicionais, por exemplo, considerando comportamento linear das variáveis no contorno do elemento, assim:

$$\begin{aligned} A_2 - A_3 &= (A_1 - A_4) / 3 \\ A_5 - A_8 &= (A_1 - A_{10}) / 3 \\ A_7 - A_9 &= (A_4 - A_{10}) / 3 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \vec{0} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \vec{A} \quad (5.126)$$

A segunda forma de (5.126) completa as linhas da matriz $L_{(10 \times 10)}$. Dessa forma se determinam os valores nodais para efeito de pós-processamento como:

$$\vec{A} = L^{-1} \cdot \vec{a} \quad (5.127)$$

onde os 3 últimos valores de \vec{a} são nulos.

Outra forma de se realizar essa transformação, muito conhecida na literatura, é baseada em técnicas de mínimos quadrados. Escolhe-se para calcular a matriz L nos pontos de integração, funções de forma de um grau inferior (no caso quadrática) reescrevendo-se a equação (5.124) em forma compacta:

$$\vec{a}_{(7 \times 1)} = L_{(7 \times 6)} \cdot \vec{A}_{(6 \times 1)} \quad (5.128)$$

Como se observa, os valores nodais a serem calculados não correspondem aos nós do elemento cúbico, mas aos nós do elemento quadrático. Pré-multiplicando-se a equação (5.128) por L' , tem-se:

$$\vec{v}_{(6 \times 1)} = L' \cdot \vec{a} = L' \cdot L \cdot \vec{A} = M_{(6 \times 6)} \cdot \vec{A}_{(6 \times 1)} \quad (5.129)$$

assim,

$$\vec{A} = M^{-1} \cdot \vec{v} \quad (5.130)$$

Pode-se fazer o pós-processamento em elemento de ordem inferior, o que pode ser um inconveniente. Isso pode ser contornado calculando-se, pelas funções de forma quadráticas, os valores da variável nas coordenadas base das funções de forma originais, recuperando-se, no caso cúbico, os 10 valores nodais desejados.

Deve-se ainda observar que o pós-processamento pode ser por elemento ou por nó. No primeiro caso surge uma distribuição descontínua de tensões, pois cada elemento pode fornecer valores de tensão diferentes para um mesmo nó da discretização (o MEF só garante continuidade de posições).

Para se realizar o pós-processamento por nó, calcula-se a média dos resultados da variável desejada pelos elementos concorrentes no mesmo nó, nesse processo o

resultado do pós processamento é contínuo. Cuidado deve ser tomado no pós processamento em deformações, quando existir descontinuidade de propriedades físicas de material, pois, nesse caso, as deformações serão realmente descontínuas.

5.6 – Técnica de solução por comprimento de arco

Na opinião desse autor os problemas mecânicos que envolvem instabilidade deveriam ser sempre resolvidos em sua versão dinâmica, pois a versão estática pode se afastar muito da realidade do comportamento estrutural. Entretanto, é hábito na literatura se buscar soluções estáticas com maior poder de interpretação física do comportamento das estruturas. Muitas vezes se procuram soluções em trechos não naturais do caminho de equilíbrio, por exemplo, nas regiões de snap-back, veja capítulo 2. Um procedimento de solução muito conhecido, que será detalhado aqui, é o Método do Comprimento de Arco (ou Arc Length)

Primeiramente reescreve-se a equação de equilíbrio, de forma que a força externa passa a ser proporcional a um valor pequeno F^{ext} , que dá o 'formato' da carga, multiplicado por um fator de carga λ , ou seja

$$\vec{F}^{int}(\vec{Y}) - \lambda \vec{F}^{ext} = \vec{0} \quad (5.131)$$

Caso se queira resolver a equação (5.131) pelo Método de Newton-Raphson, o valor do fator de carga permanece constante em um passo de carga e pode-se definir uma regra para o crescimento da carga, como:

$$\lambda_p = \frac{1}{N_{incr}} p \quad \text{com} \quad p = 1, \dots, N_{incr} \quad (5.132)$$

O método de Newton-Raphson se resumiria em determinar a posição atual \vec{Y} no passo p . Para tanto, assume-se uma posição tentativa \vec{Y}^{ten} usando-se a posição de equilíbrio do passo anterior $p-1$. Como \vec{Y}^{ten} não verifica o equilíbrio, a força residual fica dada por:

$$\vec{R}(\vec{Y}^{ten}) = \vec{F}^{int} - \lambda_p \vec{F}^{ext} \quad (5.133)$$

As correções da posição tentativa são encontradas pela linearização da força residual, como:

$$\vec{R}(\vec{Y}^{ten} + \Delta\vec{Y}) = \vec{R}(\vec{Y}^{ten}) + \left. \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}^{ten}} \cdot \Delta\vec{Y} + O(\Delta\vec{Y}) = 0 \quad (5.134)$$

ou, desprezando termos de ordem superior

$$\vec{R}(\vec{Y}^{ten}) + \left. \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}^{ten}} \cdot \Delta \vec{Y} = 0 \quad (5.135)$$

observando-se que $H(Y^{ten}) = \partial \vec{R} / \partial \vec{Y}$ é a matriz Hessiana, escreve-se

$$\vec{R}(\vec{Y}^{ten}) + H(Y^{ten}) \cdot \Delta \vec{Y} = 0 \quad (5.136)$$

que possibilita encontrar a correção $\Delta \vec{Y}$ como:

$$\Delta \vec{Y} = -[H(Y^{ten})]^{-1} \cdot \vec{R}(\vec{Y}^{ten}) \quad (5.137)$$

A posição de equilíbrio é corrigida usando-se $\Delta \vec{Y}$ encontrada na equação (5.137), isto é:

$$\vec{Y}^{ten} = \vec{Y}^{ten} + \Delta \vec{Y} \quad (5.138)$$

Nesse passo retorna-se ao cálculo da força de desbalanceamento mecânico, equação (5.133) e uma nova correção é calculada até que:

$$\frac{\|\Delta \vec{Y}\|}{\|\vec{X}\|} < tol \quad \text{ou} \quad \frac{\|\vec{R}\|}{\|\vec{F}^{ext}\|} < tol \quad (5.139)$$

Após recordar a solução pelo Método de Newton-Raphson, passa-se a descrever a solução pelo Comprimento de Arco. Na solução por Comprimento de Arco, o fator de carga passa a ser uma variável do problema e a solução para um passo p fica escrita como $\{\vec{Y}_p, \lambda_p\}^T$. Além da equação de equilíbrio estático (5.131), a solução de um incremento deve satisfazer uma equação de restrição definida como:

$$\Delta \vec{Y}_p \cdot \Delta \vec{Y}_p + (\Delta \lambda_p \mu \vec{F}^{ext}) \cdot (\Delta \lambda_p \mu \vec{F}^{ext}) = \Delta l_p^2 \rightarrow \Delta \vec{Y}_p \cdot \Delta \vec{Y}_p + (\Delta \lambda_p \mu)^2 \vec{F}^{ext} \cdot \vec{F}^{ext} = \Delta l_p^2 \quad (5.140)$$

onde $\Delta \vec{Y}_p$ e $\Delta \lambda_p$ são incrementos incógnitos sobre a posição tentativa \vec{Y}_p^{ten} e o nível tentativa do fator de carga λ_p^{ten} . Essas incógnitas são função do raio do chamado arco Δl_p cujo centro é a solução $\{\vec{Y}_{p-1}, \lambda_{p-1}\}^T$ do passo anterior. Finalmente, μ é um parâmetro escalar que compatibiliza as dimensões de força e posições. O arco é considerado esférico quando $\mu = 1$ e cilíndrico quando $\mu = 0$.

O procedimento recomendado consiste em estágios de previsão e correção. O estágio de previsão define o raio do arco Δl_p e calcula a primeira previsão dos valores incrementais do passo p , i.e., $\Delta \vec{Y}_p$ e $\Delta \lambda_p$. A etapa de correção ajusta essas previsões de forma iterativa.

$$\Delta \vec{Y}_p = \Delta \vec{Y}_p + \delta \vec{Y} \quad \Delta \lambda_p = \Delta \lambda_p + \delta \lambda \quad (5.141)$$

até que um critério de convergência seja satisfeito. Nesse processo $\Delta \lambda_p$ se mantém constante no passo e $\delta \vec{Y}$ e $\delta \lambda$ são as correções dos incrementos inicialmente definidos, como descrito no item b a seguir.

a) Etapa de previsão

A primeira iteração de um passo qualquer de análise é definida como a etapa de previsão. Entretanto, no primeiro passo ($p=1$) da análise, que deflagra o processo incremental, a etapa de previsão possui um caráter preparatório de todo o processo de solução.

a1) Primeiro passo

No início do processo incremental a configuração inicial é adotada como a primeira tentativa de solução, assim $\{\vec{Y}_p, \lambda_p\}^T = \{\vec{X}, 0\}^T$ e o primeiro fator e carga $\lambda = \Delta \lambda_0$ é definido (dado) pelo usuário como se o processo de solução fosse o de Newton Raphson, equação (5.131). Conhecido $\Delta \lambda_0$ conhece-se o resíduo da primeira iteração pela expressão:

$$\vec{R}(\vec{X}) = \underbrace{\vec{F}^{int}(\vec{X})}_0 - \Delta \lambda_0 \vec{F}^{ext} = -\Delta \lambda_0 \vec{F}^{ext} \quad (5.142)$$

Utilizando-se o processo de Newton-Raphson, como apresentado anteriormente, encontra-se $\Delta \vec{Y}_0$ como:

$$\Delta \vec{Y}_0 = \Delta \lambda_0 \left[H(\vec{X}) \right]^{-1} \cdot \vec{F}^{ext} \quad (5.143)$$

Usando-se a equação de arco (5.140) encontra-se Δl_1 como:

$$\Delta l_{p=1} = \sqrt{\Delta \vec{Y}_0 \cdot \Delta \vec{Y}_0 + \Delta \lambda_0^2 \mu^2 \vec{F}^{ext} \cdot \vec{F}^{ext}} \quad (5.144)$$

O fato de se determinar Δl_1 em função de $\Delta \lambda_0$ (dado inicial do problema) é que caracteriza a diferença entre primeiro passo e os demais passos do processo de solução por Comprimento de Arco, pois nos passos subsequentes se conhece o comprimento de arco e não a intensidade da carga ou uma posição prescrita.

a2) Previsão nos demais passos

A partir da equação (5.144), com a criação da equação (5.145) se definem, para os próximos incrementos, o raio do arco Δl_p , que controlará a intensidade do fator de carga e da mudança de configuração. O raio do arco pode ser definido em função do raio do arco determinado no passo anterior e do número de interações esperado para o próximo passo, como:

$$\Delta l_p = \Delta l_{p-1} \left(\frac{Nit_d}{Nit_{p-1}} \right)^\gamma \quad (5.145)$$

onde Nit_d é o número de iterações esperadas para o passo que está começando, Nit_{p-1} é o número de iterações do último passo, Δl_{p-1} é o raio do arco do último passo e γ é um parâmetro maior do que zero. Deve-se observar, entretanto, que ao se permitir que o incremento de fator de carga seja muito pequeno, pode-se coincidir um ponto de busca do equilíbrio (tentativa) com uma situação onde a matriz hessiana seja singular, perdendo-se a solução. Nesse caso é importante que se limite um valor de raio mínimo para o arco.

Como na previsão da primeira iteração de um passo qualquer os valores de $\Delta \vec{Y}_p$ e $\Delta \lambda_p$ começam nulos, a equação (5.141) indica que $\Delta \lambda_p = \delta \lambda$ e $\Delta \vec{Y}_p = \delta \vec{Y}$. A previsão é calculada de acordo com a seguinte sequência de operações.

O desbalanceamento mecânico é calculado no início do passo, como:

$$\vec{R}(\vec{Y}_{p-1}) = \vec{F}^{int}(\vec{Y}_{p-1}) - (\lambda_{p-1} + \Delta \lambda_p) \vec{F}^{ext} = -\Delta \lambda_p \vec{F}^{ext} \quad (5.146)$$

Esse resíduo indica que a equação de equilíbrio não está satisfeita para um valor de $\Delta \lambda_p$ incógnito não nulo. A equação de equilíbrio é então linearizada expandindo-se o desequilíbrio mecânico por série de Taylor e igualando-se o resultado a zero,

$$\vec{R}(\vec{Y}_{p-1} + \Delta \vec{Y}_p) = \vec{R}(\vec{Y}_{p-1}) + \left. \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}_{p-1}} \cdot \Delta \vec{Y}_p + O(\Delta \vec{Y}) = \vec{0} \quad (5.147)$$

Desprezando-se termos de ordem superior $O(\Delta y_p)$ encontra-se:

$$-\Delta \lambda_p \vec{F}^{ext} + H(\vec{Y}_{p-1}) \cdot \Delta \vec{Y}_p = \vec{0} \quad (5.148)$$

onde $H(\vec{Y}_{p-1})$ é a matriz Hessiana.

Essa equação é resolvida juntamente com a equação (5.140) encontrando-se $\Delta \vec{Y}_p$ e $\Delta \lambda_p$ em função de Δl_p . Isso é feito a partir da equação (5.149) escrevendo-se $\Delta \vec{Y}_p$ em

função de $\Delta\lambda_p$ como,

$$\Delta\vec{Y}_p = \Delta\lambda_p \left[H(\vec{Y}_{p-1}) \right]^{-1} \cdot \vec{F}^{ext} \quad (5.149)$$

com \vec{Y}_{p-1} e λ_{p-1} sendo o vetor posição e o fator de carga do último equilíbrio (passo anterior). Substituindo-se a equação (5.149) na equação de arco (5.140) se encontra a previsão de $\Delta\lambda_p$ como:

$$\Delta\lambda_p = \pm \frac{\Delta\lambda_p}{\sqrt{\left(\left[H(\vec{Y}_{p-1}) \right]^{-1} \cdot \vec{F}^{ext} \right) \cdot \left(\left[H(\vec{Y}_{p-1}) \right]^{-1} \cdot \vec{F}^{ext} \right) + \mu^2 \vec{F}^{ext} \cdot \vec{F}^{ext}}} \quad (5.150)$$

Para se escolher corretamente o sinal de $\Delta\lambda_p$ é necessário se considerar tanto a rigidez corrente quanto a história de evolução do fator de carga λ_p . Para tanto seguimos aqui o seguinte critério.

$$\text{sign}(\Delta\lambda_p) = \text{sign} \left(\Delta\vec{Y}_{p-1} \cdot \left(\left[H(\vec{Y}_{p-1}) \right]^{-1} \cdot \vec{F}^{ext} \right) + \Delta\lambda_{p-1} \mu^2 (\vec{F}^{ext} \cdot \vec{F}^{ext}) \right) \quad (5.151)$$

Depois de se encontrar $\Delta\lambda_p$ pelas equações (5.150) e (5.151), $\Delta\vec{Y}_p$ é encontrado substituindo-se $\Delta\lambda_p$ na equação (5.149).

b) Estágio de correção

Como mencionado anteriormente, as etapas de correção envolvem um processo iterativo depois da etapa de previsão, e, nesses estágios, $\Delta\vec{Y}_p$ e $\Delta\lambda_p$ não começam nulos, pois foram calculados no estágio de previsão.

O começo da correção consiste em assumir a posição tentativa como $\vec{Y}^{tem} = \vec{Y}_{p-1} + \Delta\vec{Y}_p$ e o fator de carga tentativa como $\lambda^{tem} = \lambda_{p-1} + \Delta\lambda_p$, resultando no primeiro vetor solução tentativa $\{\vec{Y}^{ten}, \lambda^{ten}\}^T$. Como essa solução pode não satisfazer o equilíbrio, aparece o desbalanceamento mecânico, calculado como:

$$\vec{R}(\vec{Y}^{ten}, \lambda^{ten}) = \vec{F}^{int} - \lambda^{ten} \vec{F}^{ext} \quad (5.152)$$

Lembrando-se que já existe $\Delta\vec{Y}_p$ e $\Delta\lambda_p$ calculados na previsão, ou em uma correção anterior, e, portanto, $\Delta\lambda_p \neq \delta\lambda$ e $\Delta\vec{Y}_p \neq \delta\vec{Y}$, desenvolve-se uma expansão em série de Taylor da força de desbalanceamento mecânico, linearizando-se o equilíbrio como:

$$\vec{R}(\vec{Y}^{ten} + \delta\vec{Y}, \lambda^{ten} + \delta\lambda) = \vec{R}(\vec{Y}^{ten}, \lambda^{ten}) + \left. \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}^{ten}} \cdot \delta\vec{Y} + \left. \frac{\partial \vec{R}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda^{ten}} \cdot \delta\lambda + \vec{O}(\delta\vec{Y}, \delta\lambda) = \vec{0} \quad (5.153)$$

Desprezando-se termos de ordem superior e realizando-se a operação $(\partial \vec{R} / \partial \lambda) \cdot \delta\lambda$ encontra-se:

$$\vec{R}(\vec{Y}^{ten}, \lambda^{ten}) + \left. \frac{\partial \vec{F}^{int}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}^{ten}} \cdot \delta\vec{Y} - \vec{F}^{ext} \delta\lambda = \vec{0} \quad (5.154)$$

ou,

$$\vec{R}(\vec{Y}^{ten}, \lambda^{ten}) + H(\vec{Y}^{ten}) \cdot \delta\vec{Y} - \vec{F}^{ext} \delta\lambda = \vec{0} \quad (5.155)$$

A equação (5.155) deve ser resolvida juntamente com a equação de arco (80). Isso é feito escrevendo-se na equação (5.155) o valor de $\delta\vec{Y}$ em função de $\delta\lambda$, ou seja:

$$\delta\vec{Y} = [H(\vec{Y}^{ten})]^{-1} \cdot [\delta\lambda \vec{F}^{ext} - \vec{R}(\vec{Y}^{ten}, \lambda^{ten})] \quad (5.156)$$

onde $H(\vec{Y}^{ten})$ é a matriz Hessiana e $\vec{R}(\vec{Y}^{ten}, \lambda^{ten})$ é o vetor de desbalanceamento mecânico ou resíduo, equação (5.152).

Lembrando-se que os valores considerados $\Delta\vec{Y}_p$ e $\Delta\lambda_p$ foram acumulados antes e são escritos como função das correções $\delta\vec{Y}$ e $\delta\lambda$, veja equação (5.141), a equação de arco (5.140) é reescrita como:

$$(\Delta\vec{Y}_p + \delta\vec{Y}) \cdot (\Delta\vec{Y}_p + \delta\vec{Y}) + \mu^2 (\Delta\lambda_p + \delta\lambda)^2 \vec{F}^{ext} \cdot \vec{F}^{ext} = \Delta M_p^2 \quad (5.157)$$

que pode ser escrita na forma seguinte:

$$\begin{aligned} & (\Delta\vec{Y}_p \cdot \delta\vec{Y} + \mu^2 \Delta\lambda_p \delta\lambda \vec{F}^{ext} \cdot \vec{F}^{ext}) + \frac{1}{2} \underbrace{(\delta\vec{Y} \cdot \delta\vec{Y} + \delta\lambda^2 \mu^2 \vec{F}^{ext} \cdot \vec{F}^{ext})}_{O(\delta\vec{Y}, \delta\lambda)} \\ & + \frac{1}{2} \underbrace{(\Delta\vec{Y}_p \cdot \Delta\vec{Y}_p + \mu^2 \Delta\lambda_p^2 \vec{F}^{ext} \cdot \vec{F}^{ext} - \Delta M_p^2)}_{=0} = 0 \end{aligned} \quad (5.158)$$

O último termo da equação (5.158) é zero, pois é a equação de arco do passo anterior. A equação (5.158) pode ser resolvida de forma completa ou linearizada. Como proposto por algumas referências, negligenciando-se o termo quadrático da equação (5.158), usa-se a forma linearizada, isto é:

$$(\Delta\vec{Y}_p \cdot \delta\vec{Y} + \mu^2 \Delta\lambda_p \delta\lambda \vec{F}^{ext} \cdot \vec{F}^{ext}) = 0 \quad (5.159)$$

Substituindo-se o valor de δy da equação (5.156) em (5.159) encontra-se:

$$\Delta\vec{Y}_p \cdot \left\{ \left[H(\vec{Y}^{ten}) \right]^{-1} \cdot \left[\delta\lambda \vec{F}^{ext} - \vec{R}(\vec{Y}^{ten}, \lambda^{ten}) \right] \right\} + \mu^2 \Delta\lambda_p \delta\lambda \vec{F}^{ext} \cdot \vec{F}^{ext} = 0 \quad (5.160)$$

resolvendo-se $\delta\lambda$ como:

$$\delta\lambda = \frac{\Delta\vec{Y}_p \cdot \left\{ \left[H(\vec{Y}^{ten}) \right]^{-1} \cdot \vec{R}(\vec{Y}^{ten}, \lambda^{ten}) \right\}}{\Delta\vec{Y}_p \cdot \left\{ \left[H(\vec{Y}^{ten}) \right]^{-1} \cdot \vec{F}^{ext} \right\} + \mu^2 \Delta\lambda_p \vec{F}^{ext} \cdot \vec{F}^{ext}} \quad (5.161)$$

Substituindo-se $\delta\lambda$ na equação (5.156), encontra-se $\delta\vec{Y}$. Os incrementos $\Delta\vec{Y}_p$ e $\Delta\lambda_p$ são atualizados pela equação (5.141) e as forças desbalanceadas são recalculadas pela equação (5.152). Esse processo iterativo relativo a $\delta\vec{Y}$ e $\delta\lambda$ continua até que,

$$\frac{\|\delta\vec{Y}\|}{\|\vec{X}\|} < tol \quad \text{ou} \quad \frac{\|\vec{R}\|}{\|\lambda \vec{F}^{ext}\|} < tol \quad (5.162)$$

isto é, até que não haja correção significativa a ser considerada.

Depois da convergência o processo recomeça em um novo incremento de Δl . A equação (5.145) é usada para se encontrar um novo raio de arco Δl_p , uma nova predição para $\Delta\lambda_p$ é calculada nas equações (5.150) e (5.151) e a equação (5.149) é usada para se encontrar $\Delta\vec{Y}_p$. Na sequência \vec{Y}^{ten} e λ^{ten} são atualizados e, usando-se as equações (5.161) e (5.156), calculam-se as correções $\delta\lambda$ e $\delta\vec{Y}$. Finalmente \vec{Y}^{ten} e λ^{ten} são recalculados pela equação (5.141) até que a equação (5.162) seja verificada. Depois disso um novo incremento se inicia.

Finalmente, pode-se observar em muitas das expressões um escalar parecido com:

$$\alpha = \Delta\vec{Y}_p \cdot \left\{ \left[H(\vec{Y}^{ten}) \right]^{-1} \cdot \vec{F}^{ext} \right\} + \mu^2 \Delta\lambda_p \vec{F}^{ext} \cdot \vec{F}^{ext} \quad (5.163)$$

que evidencia a necessidade de μ relacionar grandezas de diferente significados físicos. Se λ for considerado adimensional, μ deverá ter unidade de comprimento/força, algo muito difícil de se calibrar. Assim, sugere-se considerar $\mu = 0$ de forma a se encontrar procedimento com maior grau de estabilidade.

5.7 - Bibliografia Recomendada - Validações

Para não tomar muito espaço e aproximar o leitor aos textos científicos, essa primeira lista de trabalhos são referentes aos artigos do autor, onde exemplos de validação e aplicações mais avançadas poderão ser consultados.

- 1) Carrazedo, Rogerio; Coda, Humberto Breves, Triangular based prismatic finite element for the analysis of orthotropic laminated beams, plates and shells, COMPOSITE STRUCTURES Volume: 168 Páginas: 234-246 Publicado: MAY 15 2017
- 2) Pascon, Joao Paulo; Coda, Humberto Breves, Finite deformation analysis of visco-hyperelastic materials via solid tetrahedral finite elements, FINITE ELEMENTS IN ANALYSIS AND DESIGN Volume: 133 Páginas: 25-41 Publicado: OCT 1 2017
- 3) Paccola, Rodrigo Ribeiro; Coda, Humberto Breves, A direct FEM approach for particulate reinforced elastic solids, COMPOSITE STRUCTURES Volume: 141 Páginas: 282-291 Publicado: MAY 1 2016
- 4) Paccola, Rodrigo Ribeiro; Neto, Dorival Piedade; Coda, Humberto Breves, Geometrical non-linear analysis of fiber reinforced elastic solids considering debonding, COMPOSITE STRUCTURES Volume: 133 Páginas: 343-357 Publicado: DEC 1 2015
- 5) Pascon, Joao Paulo; Coda, Humberto Breves, Large deformation analysis of functionally graded elastoplastic materials via solid tetrahedral finite elements, COMPUTERS & STRUCTURES Volume: 146 Páginas: 59-75 Publicado: JAN 2015
- 6) Pascon, J. P.; Coda, H. B., Large deformation analysis of elastoplastic homogeneous materials via high order tetrahedral finite elements, FINITE ELEMENTS IN ANALYSIS AND DESIGN Volume: 76 Páginas: 21-38 Publicado: NOV 15 2013
- 7) Pascon, J. P.; Coda, H. B., High-order tetrahedral finite elements applied to large deformation analysis of functionally graded rubber-like materials, APPLIED MATHEMATICAL MODELLING Volume: 37 Edição: 20-21 Páginas: 8757-8775 Publicado: NOV 1 2013

Além dos trabalhos científicos do autor, recomenda-se a leitura da bibliografia a seguir:

- 1) MARQUES, G. C. S. C. Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no MEF para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais, Dissertação de Mestrado. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, 2006
- 2) MACIEL, D. N. Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional. Tese de Doutorado. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP, 2008.
- 3) PASCON, J. P. Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional. Dissertação de Mestrado. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, 2008.
- 4) PASCON, J. P. Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações: implementação numérica em formulação não linear geométrica, Tese de Doutorado. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, 2012.
- 5) BONET, J., WOOD, r.d., Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, Cambridge University Press 1997,2008.
- 6) LANCZOS, C. , 1970, “The variational principles of mechanics”, Dover, New York, fourth edition.
- 7) SORIANO, H.L., Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas, EDUSP, 2003.
- 8) Assan, A.E., Método dos Elementos Finitos - Primeiros Passos, Ed. UNICAMP, 2003.
- 9) ROCHA, Fabio Carlos da, Formulação do MEC considerando efeitos microestruturais e continuidade geométrica G1: tratamento de singularidade e análise de convergência, Tese de Doutorado. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP, 2015.

6 - Cinemáticas especiais

A imposição de cinemáticas especiais implica em se limitar o comportamento do contínuo, ou do sólido, a um comportamento esperado para determinado elemento estrutural. É de interesse, portanto, se recordar as definições de sólido, estrutura e elemento estrutural, de forma a se criar conexão entre o desenvolvimento do MEF e a análise estrutural.

- **Sólido:** É um corpo, mais ou menos deformável, que resiste às ações mecânicas e térmicas, sem mudança de estado físico. Ex: Corpo humano, tijolo, tarugo de aço, barra de alumínio, bloco de rocha etc.

- **Estrutura:** É um sólido, constituído de elementos estruturais, organizado para dar sustentação mecânica ao objeto projetado. Ex: Estruturas civis, estruturas mecânicas, estruturas aeronáuticas etc.

- **Elemento Estrutural:** São sólidos menores e mais simples que constituem a estrutura quando racionalmente conectados entre si. Ex: Pilar, vigas, lajes, placas, cascas, eixos, barras de treliça etc.

Os elementos estruturais apresentam geometria simples e, portanto, aceitam hipóteses de cálculo que simplificam sua solução, além disso, sua simplicidade garante a repetitividade necessária para uma produção econômica e racional das estruturas.

No capítulo 5 foi descrita a metodologia do MEF posicional para elementos finitos de sólidos. O leitor deve ter observado o alto grau de semelhança entre as formulações de sólido e de treliça, esta última apresentada no capítulo 2. A diferença principal está na relação entre as posições atuais e o campo de deformações admitido.

No caso do elemento de treliça, adotar uma cinemática aproximada é dizer que se admite deformação uniaxial constante, com variação nula da seção transversal, além de simplificações na lei constitutiva. No caso do modelo sólido, a cinemática admitida não chega a alterar a natureza de sólido para uma característica de elemento estrutural. Porém, se admitir comportamento polinomial, com grau de aproximação pré-definido, para o campo de posições (configuração atual) envolve uma restrição cinemática, que, mesmo que não seja tão aparente, reduz o número infinito de graus de liberdade de um problema sólido para um número finito.

Obviamente que modelar uma treliça utilizando-se elementos sólidos, demandaria um número muito maior de graus de liberdade com pouco ganho para o modelo global. Entretanto, não se pode deixar de comentar que ganhos em análises

localizadas como ligações, juntas, contatos etc, só podem ser alcançados com o uso de elementos sólidos.

Neste capítulo, apresentam-se cinemáticas específicas para se modelar elementos estruturais do tipo barras gerais 2D, placas, cascas e barras gerais 3D. Essas cinemáticas são apresentadas em forma crescente de complexidade, sendo que a ligação racional entre os elementos finitos que representam elementos estruturais, ou partes deles, também será objeto de estudo. Para evitar excesso de repetição, alguns detalhes das cinemáticas mais complexas poderão ser resgatados pelo leitor daquilo que será descrito para cinemáticas mais simples. Enfim, o nível de detalhamento não é tão grande quanto o dos capítulos anteriores, ficando para o leitor completar as lacunas necessárias para desenvolver seus próprios códigos computacionais. No capítulo 7 fornece-se uma lista de trabalhos que pode ajudar nos futuros empreendimentos dos leitores.

Para evitar alongar o capítulo com detalhes desnecessários, exemplos podem ser consultados nos primeiros trabalhos da bibliografia recomendada, além dos trabalhos científicos do autor e coautores.

6.1 – Elemento finito de pórtico plano usando giros como graus de liberdade

No caso particular do Método dos Elementos Finitos Posicional, aplicado a pórticos 2D, se deseja parametrizar as configurações inicial e corrente (atual) da estrutura, utilizando-se as coordenadas iniciais e atuais de nós, incluindo-se as posições angulares das seções transversais.

Utilizando-se polinômios de Lagrange, se aproxima a linha média do elemento de pórtico através da expressão

$$x_i^m(\xi) = \phi_\ell(\xi) X_{i\ell}^m \quad (6.1)$$

onde i é a direção da coordenada (1 ou 2), m representa linha média e ℓ o nó do elemento (ou a função de forma associada). Na expressão (6.1) a repetição do índice ℓ representa soma sobre o mesmo, por exemplo, para 4 nós a expressão (6.1) representa um elemento de aproximação cúbica, tal como ilustrado na Figura 6.1 e é dada de forma aberta por:

$$x_1^m(\xi) = \phi_1 X_{11}^m + \phi_2 X_{12}^m + \phi_3 X_{13}^m + \phi_4 X_{14}^m \quad (6.2)$$

$$x_2^m(\xi) = \phi_1 X_{21}^m + \phi_2 X_{22}^m + \phi_3 X_{23}^m + \phi_4 X_{24}^m \quad (6.3)$$

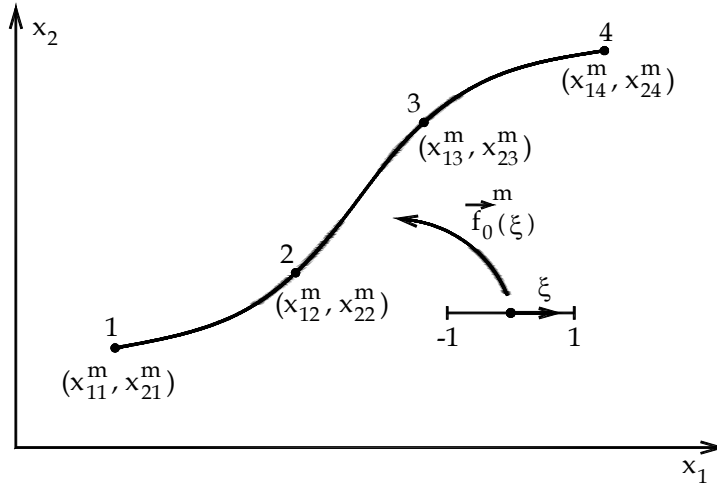


Figura 6.1 – Parametrização da linha média do elemento (aproximação cúbica)

Na Figura 6.1 a função $f_0^m(\xi)$ é chamada de mapeamento inicial da linha média do elemento, considerando-se o elemento em sua configuração inicial. Um mapeamento semelhante pode ser feito para a configuração atual do corpo e será apresentado oportunamente.

6.1.1 – Mapeamento posicional da configuração inicial

Apesar do leitor já estar familiarizado com o elemento sólido do capítulo 5, para facilitar o entendimento de todas as passagens envolvidas, neste item será descrito o mapeamento do sólido simplificado, chamado elemento de barra geral (pórtico) 2D. Adotar-se-á aproximação quadrática, nas deduções particulares, de forma a simplificar o entendimento.

A partir da figura 6.1 desenha-se a figura 6.2, onde se indicam os vetores tangente e os versores ortogonais à linha média para cada nó do elemento finito.

Utilizando-se os conceitos do cálculo diferencial, a partir do mapeamento da linha média, encontram-se as componentes dos vetores tangente, expressos de forma geral a partir da equação (6.1), como

$$T_{ik} = \left. \frac{d\phi_i(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi_k} X_{i\ell}^m \quad (6.4)$$

onde ξ_k são as coordenadas adimensionais para os nós k e T_{ik} é a componente i do vetor tangente no nó k .

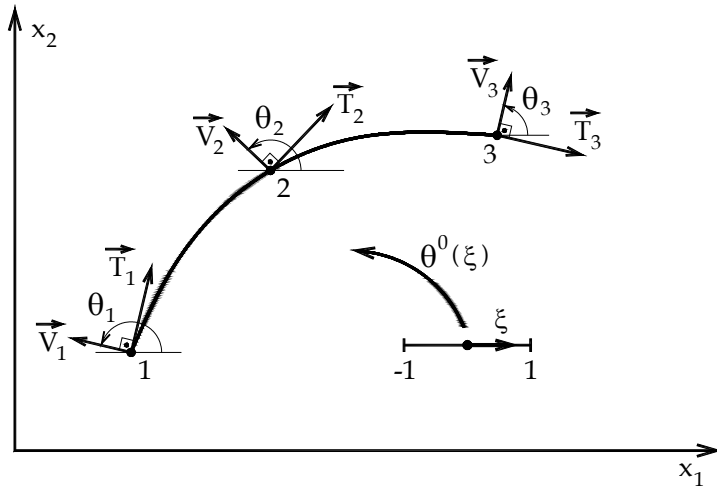


Figura 6.2 – Vetores nodais

Para melhor entendimento executa-se a operação para as equações particulares quadráticas em relação ao nó 1, ou seja, para $\xi = -1$:

$$T_{11} = \left. \frac{d\phi_1}{d\xi} \right|_{\xi=-1} X_{11}^m + \left. \frac{d\phi_2}{d\xi} \right|_{\xi=-1} X_{12}^m + \left. \frac{d\phi_3}{d\xi} \right|_{\xi=-1} X_{13}^m \quad (6.5)$$

$$T_{21} = \left. \frac{d\phi_1}{d\xi} \right|_{\xi=-1} X_{21}^m + \left. \frac{d\phi_2}{d\xi} \right|_{\xi=-1} X_{22}^m + \left. \frac{d\phi_3}{d\xi} \right|_{\xi=-1} X_{23}^m \quad (6.6)$$

sendo

$$\left. \frac{d\phi_1}{d\xi} \right|_{\xi=-1} = \left. \frac{2\xi - 1}{2} \right|_{-1} = -\frac{3}{2} \quad (6.7)$$

$$\left. \frac{d\phi_2}{d\xi} \right|_{\xi=-1} = (1 - \xi) - (1 + \xi) \Big|_{-1} = 2 \quad (6.8)$$

$$\left. \frac{d\phi_3}{d\xi} \right|_{\xi=-1} = \left. \frac{2\xi + 1}{2} \right|_{-1} = -\frac{1}{2} \quad (6.9)$$

Substituindo-se as equações (6.7), (6.8) e (6.9) em (6.5) e (6.6) encontram-se

$$T_{11} = -\frac{3}{2} X_{11}^m - 2X_{12}^m - \frac{1}{2} X_{13}^m \quad (6.10)$$

$$T_{21} = -\frac{3}{2} X_{21}^m - 2X_{22}^m - \frac{1}{2} X_{23}^m \quad (6.11)$$

O mesmo é feito para os outros nós. Desta forma, conclui-se que ao se conhecer as coordenadas iniciais dos nós da linha média do elemento finito, conhecem-se os vetores tangente em qualquer ponto da linha média, em particular, nos nós do elemento finito.

Na formulação posicional do MEF dedicada a barra geral 2D, que será apresentada nesse item, usa-se a posição angular da seção transversal como grau de liberdade, assim o ângulo θ^0 , que o versor normal V_{ik} , na configuração inicial, forma com o eixo x_1 será calculado. As componentes dos versores normais são:

$$V_{1k} = -T_{2k} / \sqrt{T_{1(k)}T_{1(k)}} \quad (6.12)$$

$$V_{2k} = T_{1k} / \sqrt{T_{1(k)}T_{1(k)}} \quad (6.13)$$

onde, em notação indicial, índice repetido entre parêntesis não representa soma, ou seja, para elemento bidimensional tem-se:

$$\sqrt{T_{1(k)}T_{1(k)}} = \sqrt{(T_{1k})^2 + (T_{2k})^2} \quad (6.14)$$

Para a aproximação quadrática, caso particular onde se estão abrindo as expressões, no nó 1 aplicam-se as equações (6.10) e (6.11) em (6.12) e (6.13) encontrando-se o seguinte valor para as componentes do versor normal do nó 1:

$$V_{11} = -T_{21} / \sqrt{(T_{11})^2 + (T_{21})^2} \quad (6.15)$$

$$V_{21} = T_{11} / \sqrt{(T_{11})^2 + (T_{21})^2} \quad (6.16)$$

De posse dos valores nodais das componentes dos versores normais os ângulos θ_k^0 são calculados por:

$$\theta_k^0 = \text{arctg}(V_{2(k)} / V_{1(k)}) \quad (6.17)$$

onde k é o nó.

Aplicando-se polinômios de Lagrange para aproximar $\theta^0(\xi)$ ao longo da barra escreve-se:

$$\theta^0(\xi) = \phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0 \quad (6.18)$$

Usando-se as aproximações da linha média e dos ângulos que definem os versores que geram as seções transversais, cria-se o mapeamento da configuração inicial conforme ilustrado na figura 6.3, de onde se estabelece que a seção transversal inicial é ortogonal à linha média inicial da barra. Serão consideradas constantes a altura h_0 e a largura b_0 da barra geral.

Desta forma, existe um vetor $g_i^0(\xi, \eta)$ que somado ao ponto pertencente à linha média resulta no ponto genérico P da figura 6.3, ou seja:

$$x_i(\xi, \eta) = x_i^m(\xi) + g_i^0(\xi, \eta) \quad (6.19)$$

onde η é a segunda variável adimensional, que varia de -1 à 1 e é ortogonal à ξ , veja Figura 6.3.

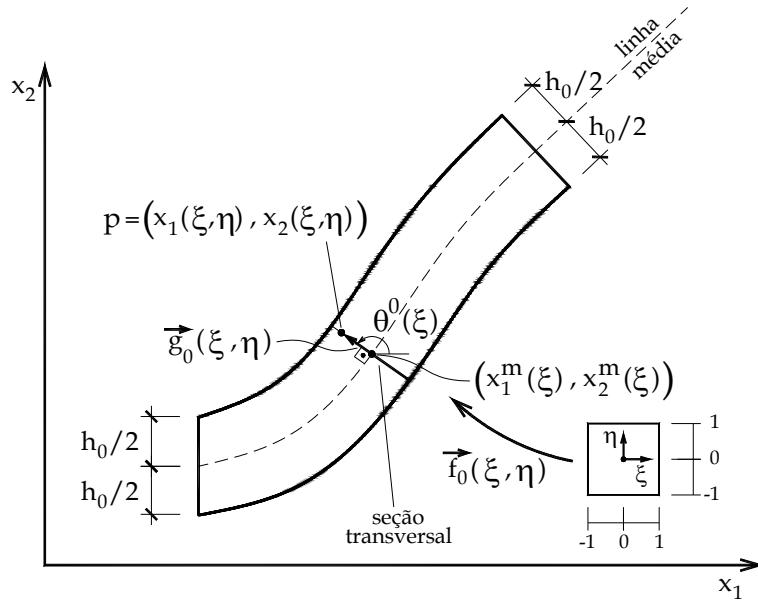


Figura 6.3 – Ponto P sobre seção transversal qualquer.
(mapeamento para configuração inicial)

O vetor $g_i^0(\xi, \eta)$ é proporcional ao versor normal à linha média, recuperado pelo ângulo $\theta^0(\xi)$ dado pela equação (6.18) como:

$$v_1(\xi) = \cos(\phi_k(\xi)\theta_k^0) \quad (6.20)$$

$$v_2(\xi) = \sin(\phi_k(\xi)\theta_k^0) \quad (6.21)$$

Imaginando-se uma seção retangular e homogênea, a linha média se encontra a meia altura da barra e o vetor $g_i^0(\xi, \eta)$ será dado por:

$$g_1^0(\xi, \eta) = \frac{h_0}{2} \eta v_1(\xi) = \frac{h_0}{2} \eta \cos(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0) \quad (6.22)$$

$$g_2^0(\xi, \eta) = \frac{h_0}{2} \eta v_2(\xi) = \frac{h_0}{2} \eta \sin(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0) \quad (6.23)$$

Substituindo-se as equações (6.22), (6.23) e (6.1) em (6.19) resulta o mapeamento posicional da configuração inicial, ou seja:

$$x_1(\xi, \eta) = \phi_\ell(\xi)X_{1\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \cos(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0) \quad (6.24)$$

$$x_2(\xi, \eta) = \phi_\ell(\xi)X_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \sin(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0) \quad (6.25)$$

Observa-se que nesse caso é mais simples se escrever uma equação para cada direção do que se escrever uma expressão geral. Os valores nodais da configuração inicial são as coordenadas dos nós ($X_{i\ell}^m$) e a orientação das seções transversais nos nós, dada pelo ângulo θ_ℓ^0 .

Quando a seção transversal não possui largura constante, a linha média passa a se chamar linha de referência e as equações (6.24) e (6.25) ficam escritas como:

$$x_1(\xi, \eta) = \phi_\ell X_{1\ell}^m + \left(\frac{h_0}{2} \eta + \frac{h_s - h_i}{2} \right) \cos(\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0) \quad (6.26)$$

$$x_2(\xi, \eta) = \phi_\ell X_{2\ell}^m + \left(\frac{h_0}{2} \eta + \frac{h_s - h_i}{2} \right) \text{sen}(\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0) \quad (6.27)$$

onde h_s é a distância do centro de gravidade até a fibra mais distante no sentido positivo de v_i e h_i é a distância do centro de gravidade até a fibra mais distante no sentido contrário a v_i . Além disso, deve-se comentar que o valor da largura b , ou mesmo o módulo de elasticidade podem ser função de η .

Este material introdutório será limitado às deduções do caso descrito pelas equações (6.24) e (6.25) deixando-se para o leitor estender o código para situações mais gerais. É importante notar que, mesmo para uma seção transversal retangular com módulo de elasticidade constante, poder-se-ia escolher a linha de referência fora do cg (diferente da linha média), nesse caso uma força paralela à linha de referência causaria momento fletor.

6.1.2 – Mapeamento posicional para a configuração corrente

Conforme discutido no item anterior, representa-se qualquer ponto do elemento de pórtico, em sua configuração inicial, ao se conhecer as posições e ângulos associados aos nós do elemento. O conhecimento destes valores é fruto da entrada de dados fornecida pelo usuário. Tal como descrito nos capítulos 2 e 3, coordenadas dos nós, incidência dos elementos, condições de contorno em força e posições são dados de entrada do código.

No caso da configuração corrente (ou atual) as posições e ângulos associados aos nós do elemento finito são as incógnitas do problema, denominadas parâmetros ou graus de liberdade. Assim, não são conhecidos a priori e deverão ser encontrados no final da análise. Entretanto, conforme descrito nos capítulos anteriores, os valores

incógnitos são sempre conhecidos na forma de tentativa, portanto a posição de um ponto qualquer do elemento de pórtico, em sua configuração corrente, pode ser escrita em função dos parâmetros incógnitos de forma semelhante ao mapeamento descrito no item anterior, ou seja:

$$y_1(\xi, \eta) = \phi_\ell Y_{1\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \cos(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell) \quad (6.28)$$

$$y_2(\xi, \eta) = \phi_\ell Y_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \text{sen}(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell) \quad (6.29)$$

onde y_i são as coordenadas atuais de um ponto qualquer, $Y_{i\ell}^m$ são as coordenadas atuais dos nós e θ_ℓ os ângulos nodais atuais, veja figura 6.4.

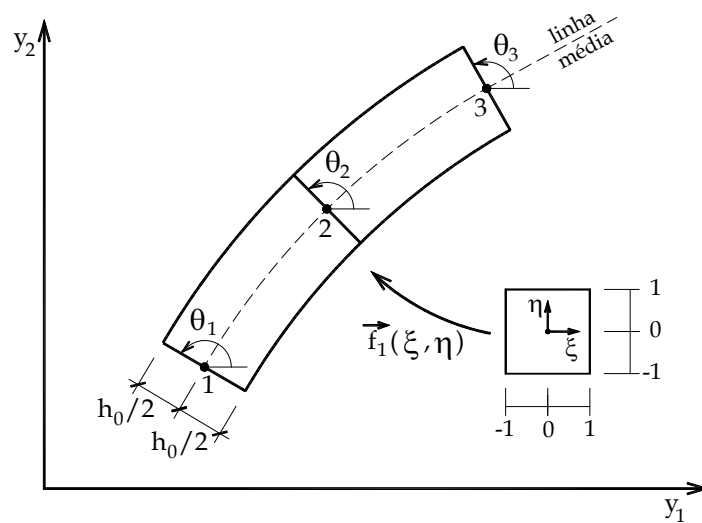


Figura 6.4 – Mapeamento para configuração corrente – detalhe para ângulos

Conclui-se da Figura 6.4 e das equações (6.28) e (6.29) que as seções transversais continuam planas, porém não formam ângulo reto com a linha média. Além disso, as alturas das seções transversais continuam sendo h_0 e uma lei constitutiva relaxada (coeficiente de Poisson nulo) será usada para se evitar problemas de travamento volumétrico desta cinemática. Esse travamento ocorreria, pois uma compressão nas fibras superiores exigiria uma resposta expansiva na direção de \bar{v} enquanto tração em fibras inferiores exigiriam retração na direção de \bar{v} , mobilidades não fornecidas pela cinemática imposta. Nesse ponto fica evidente o comentário feito sobre as hipóteses de cálculo aplicadas sobre elementos estruturais. Uma discussão mais detalhada sobre esse travamento é feita no item 6.2.8.

Observa-se que o quanto a seção transversal deixa de ser ortogonal à linha média está associado ao nível das tensões de cisalhamento envolvidas e ao módulo de elasticidade transversal, indicando que a cinemática já inclui o conhecido efeito de força cortante. O mapeamento descrito pelas equações (6.28) e (6.29) pode, portanto, ser chamado de cinemática de Reissner-Timoshenko, pois incluem os efeitos de cisalhamento na análise de pórtico plano.

6.1.3 – Mudança de configuração e seu gradiente

Da mesma forma descrita no capítulo 5 para elementos sólidos, estando definidos os mapeamentos para a configuração inicial (Figuras 6.3) e para a configuração atual (Figura 6.4) parte-se para a descrição da mudança de configuração do corpo analisado. Isto é feito juntando-se os dois mapeamentos em uma única figura.

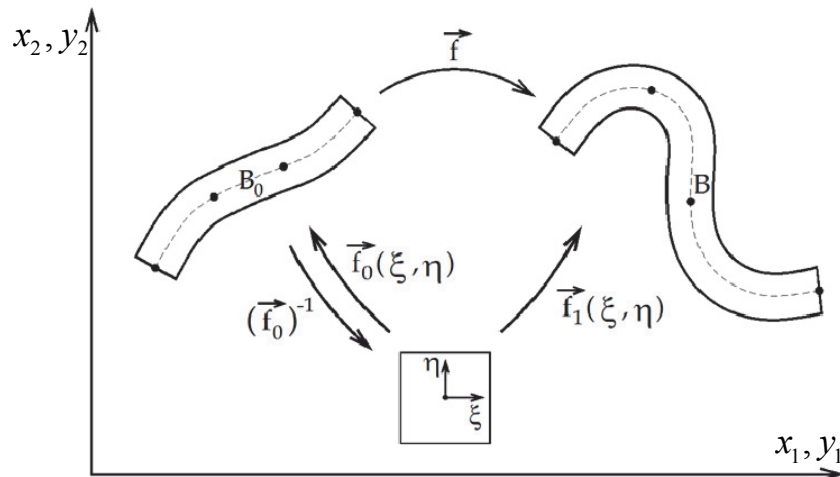


Figura 6.5 – Mudança de configuração – mapeamento posicional

A Figura 6.5 é muito semelhante à Figura 5.8, ou seja, a função “ \vec{f} ” descreve a mudança da configuração inicial (B_0) para a configuração atual (B).

Esta função mudança de configuração pode ser escrita como a composição dos mapeamentos descritos nos itens anteriores, ou seja:

$$\vec{f} = \vec{f}_1 \circ (\vec{f}_0)^{-1} \quad (6.30)$$

De acordo com o Capítulo 5, para se escrever a energia específica de deformação devida à mudança de configuração \vec{f} , basta se conhecer o seu gradiente A , que é, no caso, uma matriz 2x2.

O gradiente da função descrita pela equação (6.30) é dado a partir dos gradientes dos mapeamentos inicial \vec{f}_0 e atual \vec{f}_1 como:

$$A = A^1 \cdot (A^0)^{-1} \quad (6.31)$$

ou em notação indicial

$$A_{ij} = A_{ik}^1 D_{kj}^0 \quad (6.32)$$

onde D_{kj}^0 é a inversa da matriz A_{kj}^0 .

Os elementos das matrizes A_{ij}^0 e A_{ij}^1 são calculados diretamente das expressões (6.24), (6.25), (6.28) e (6.29), respectivamente, para valores conhecidos de ξ e η (pontos de integração), tal como mostrado para sólidos na equação (5.40).

Assim, se escreve:

$$A_{ij}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^0}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1^0}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_2^0}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2^0}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

$$A_{ij}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1^1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_2^1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2^1}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \xi} & \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \xi} & \frac{\partial y_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

com:

$$A_{11}^0 = \frac{\partial x_1}{\partial \xi} = D\phi_\ell(\xi) X_{1\ell}^m - \frac{h_0}{2} \eta \text{sen}(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0) D\phi_k(\xi)\theta_k^0 \quad (6.35)$$

$$A_{12}^0 = \frac{\partial x_1}{\partial \eta} = \frac{h_0}{2} \cos(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0) \quad (6.36)$$

$$A_{21}^0 = \frac{\partial x_2}{\partial \xi} = D\phi_\ell(\xi) X_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \cos(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0) D\phi_k(\xi)\theta_k^0 \quad (6.37)$$

$$A_{22}^0 = \frac{\partial x_2}{\partial \eta} = \frac{h_0}{2} \text{sen}(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0) \quad (6.38)$$

$$A_{11}^1 = \frac{\partial y_1}{\partial \xi} = D\phi_\ell(\xi) Y_{1\ell}^m - \frac{h_0}{2} \eta \text{sen}(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell) D\phi_k(\xi)\theta_k \quad (6.39)$$

$$A_{12}^1 = \frac{\partial y_1}{\partial \eta} = \frac{h_0}{2} \cos(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell) \quad (6.40)$$

$$A_{21}^1 = \frac{\partial y_2}{\partial \xi} = D\phi_\ell(\xi)Y_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2}\eta \cos(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell)D\phi_k(\xi)\theta_k \quad (6.41)$$

$$A_{22}^1 = \frac{\partial y_2}{\partial \eta} = \frac{h_0}{2} \text{sen}(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell) \quad (6.42)$$

onde se usou a notação $\partial\phi_\ell / \partial\xi = D\phi_\ell$.

Repetindo-se o que foi feito nos capítulos 2 e 5, as expressões de (6.39) até (6.42) são calculadas para valores tentativa dos parâmetros $Y_{i\ell}$ e θ_ℓ no processo iterativo de solução. Assim, as matrizes A_{ij}^0 e A_{ij}^1 são valores numéricos para cada par coordenado (ξ, η) , ponto de integração, pré-estabelecido.

6.1.4 – Energia mecânica total – MEF

Conforme já discutido, a energia mecânica total é constituída por três parcelas, a energia de deformação, o potencial das forças conservativas e a energia cinética. A descrição dessas parcelas é muito semelhante aos desenvolvimentos apresentados para o elemento de sólido, porém, algumas particularidades adicionais, inerentes à cinemática adotada, serão detalhadas ao longo da descrição geral.

6.1.4.a – Energia específica de deformação, força interna e matriz Hessiana

A energia específica de deformação adotada é a de Saint-Venant-Kirchhoff referente ao estado plano de deformações, equação (4.141) com coeficiente de Poisson nulo, ou seja, $G = E / 2$:

$$u_e = \frac{E}{2} \left\{ (E_{11}^2 + E_{22}^2) + (E_{12}^2 + E_{21}^2) \right\} \quad (6.43)$$

onde E_{ij} é a deformação de Green, repetida aqui como:

$$E = \frac{1}{2} (A^t \cdot A - I) = \frac{1}{2} (C - I) \quad (6.44)$$

que indicialmente fica:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} (A_{ki}A_{kj} - \delta_{ij}) \quad (6.45)$$

onde A_{ij} é o gradiente mudança de configuração, dado pela equação (6.31) ou (6.32).

Cabe recordar que a cinemática de barra geral é aplicada para corpos longos, ou seja $L > 10h$, assim, para que ocorram grandes deformações, a curvatura da barra deverá ser muito grande. Portanto, deve-se ter cuidado de observar que não se está

tentando resolver um problema de barra muito alta (sólido) usando elemento de barra geral, pois, além de uma distribuição de tensões inadequada, pode ocorrer inversão do material por se estar utilizando a Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff. De qualquer forma, é importante que se programe um critério de parada para evitar grandes deformações.

Utilizando-se a equação (6.31) se escreve o alongamento de Cauchy-Green como:

$$C = A^t \cdot A = \left(A^1 \cdot (A^0)^{-1} \right)^t \cdot \left(A^1 \cdot (A^0)^{-1} \right) = (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} \quad (6.46)$$

onde o sobrescrito (-t) representa transposta da inversa.

Lembrando-se que as matrizes A^0 e A^1 são numéricas (2x2) para um par (ξ, η) de integração, e uma tentativa de posição, a deformação de Green, dada pela equação (6.45), e energia de deformação, dada pela expressão (6.43), estão numericamente definidas.

Por outro lado, considerando que a posição tentativa deverá mudar (variar) no processo de solução, entende-se que a energia específica de deformação varia com Y_{ie} e θ_e , valores presentes apenas na matriz A^1 , visto que as posições iniciais não variam.

A energia de deformação acumulada em um elemento finito é calculada pela integral no volume inicial da energia específica de deformação, dada pela equação (6.43), ou seja,

$$U_e = \int_{V^0} u_e dV^0 \quad (6.47)$$

que é reescrita em coordenadas adimensionais como:

$$U_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_e(\xi, \eta) J_0(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (6.48)$$

onde, do cálculo integral, o jacobiano J_0 é dado por:

$$J_0(\xi, \eta) = \det(A^0) \quad (6.49)$$

Sendo um problema 2D pode se escrever (6.49) explicitamente, como:

$$J_0(\xi, \eta) = A_{11}^0 A_{22}^0 - A_{12}^0 A_{21}^0 \quad (6.50)$$

com A_{ij}^0 dados pelas equação (6.35) até (6.38).

A integral apresentada pela equação (6.48) é feita numericamente utilizando-se quadratura de Gauss nas duas direções, ou seja, é substituída por um somatório dos

valores de u_e calculados em pontos pré-estabelecidos (ξ_{i_g}, η_{j_g}) , denominados pontos de Gauss, e multiplicados pelos respectivos pesos de integração, ou seja:

$$U_e = \sum_{i_g=1}^{ng_\xi} \sum_{j_g=1}^{ng_\eta} u_e(\xi_{i_g}, \eta_{j_g}) w_{i_g} w_{j_g} J_0(\xi_{i_g}, \eta_{j_g}) \quad (6.51)$$

No caso em questão adotam-se os seguintes números de pontos de Gauss: três segundo a direção η e igual ao número de nós segundo a direção ξ . O trecho de programa Fortran a seguir calcula as coordenadas e pesos de Gauss para vários pontos de integração.

```

c *****
c Pontos e pesos de gauss
c Numerical Recipes
c nga - numero de pontos de integração
c qsiga - coordenada do ponto de integração
c wga - peso de integração
c *****
subroutine gauss(nga,qsiga,wga)

integer*4 nga,iga,jga,mga
real*8 x1ga,x2ga,qsiga(20),wga(20),p1ga,p2ga,p3ga,ppga
#,xlga,xmga,zga,z1ga,pi
pi=2.*datan2(1.d0,0.d0) !definido pi radianos
x1ga=-1.
x2ga=1.

mga=(nga+1)/2
xmga=0.d0
xlga=1.d0
do iga=1,mga
zga=dcos(pi*(iga-.25d0)/(nga+.5d0))
1 continue !Newton rapson para refinar raiz
p1ga=1.d0
p2ga=0.d0

```

```

do jga=1,nga
  p3ga=p2ga
  p2ga=p1ga
  p1ga=((2.d0*jga-1.d0)*zga*p2ga-(jga-
#1.d0)*p3ga)/(jga*1.d0)
enddo
ppga=nga*(zga*p1ga-p2ga)/(zga*zga-1.d0)
z1ga=zga
zga=z1ga-p1ga/ppga
if(dabs(zga-z1ga).gt.1.d-15) goto 1 !Newton Rapson
2 continue

qsiga(iga)=xmga-xlga*zga
qsiga(nga+1-iga)=xmga+xlga*zga
wga(iga)=2.d0*xlga/((1.d0-zga*zga)*ppga*ppga)
wga(nga+1-iga)=wga(iga)
enddo

return
end

```

A energia de deformação acumulada em uma estrutura é calculada como a soma das energias de deformação acumuladas em todos os elementos finitos que constituem a discretização. Deve-se reforçar que a energia de deformação depende das posições atuais $(Y_{1\ell}, \theta_\ell, Y_{2\ell}, \theta_\ell)$ dos nós ℓ dos elementos finitos, que variam ao longo da análise.

É importante se recordar a definição de conjugado força/posição apresentada no capítulo 1, equação (1.12), já utilizada nos capítulos 2 e 5. Recordar-se também a definição do conjugado energético momento/rotação, veja equação (m) após equação (1.14) do capítulo 1.

Observando-se que a expressão (6.47) é função das posições nodais e posições angulares das seções transversais nodais do elemento finito (via equações (6.43), (6.44), (6.46) e (6.39)-(6.42)), conclui-se que a derivada da energia de deformação, acumulada em um elemento finito, segundo cada componente de posição ou giro, resulta em

componente de força ou momento interno na direção e sentido da posição em questão, veja a ilustração da Figura 6.6.

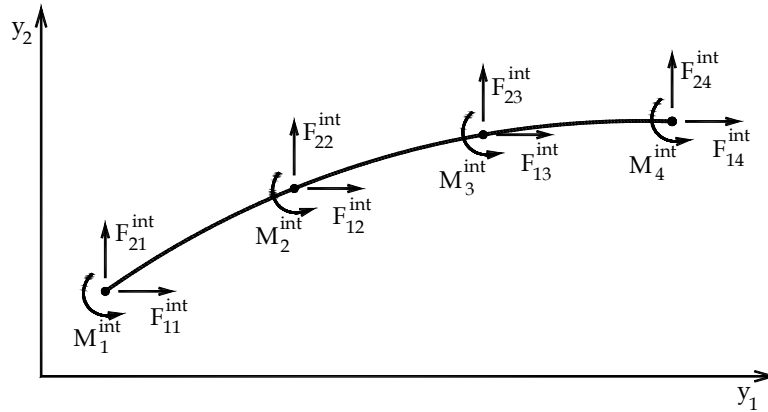


Figura 6.6 – Vetor de força interna para um elemento finito

Desta forma,

$$F_{il}^{int} = \frac{\partial U_e}{\partial Y_{il}} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial Y_{il}} dV_0 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial u_e(\xi, \eta)}{\partial Y_{il}} J_0(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (6.52)$$

$$M_\ell^{int} = \frac{\partial U_e}{\partial \theta_\ell} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial \theta_\ell} dV_0 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial u_e(\xi, \eta)}{\partial \theta_\ell} J_0(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (6.53)$$

As integrais (6.52) e (6.53) são substituídas pelos somatórios

$$F_{il}^{int} = \sum_{i_g=1}^{ng_\xi} \sum_{j_g=1}^{ng_\eta} \frac{\partial u_e(\xi_{i_g}, \eta_{j_g})}{\partial Y_{il}} w_{i_g} w_{j_g} J_0(\xi_{i_g}, \eta_{j_g}) \quad (6.54)$$

$$M_\ell^{int} = \sum_{i_g=1}^{ng_\xi} \sum_{j_g=1}^{ng_\eta} \frac{\partial u_e(\xi_{i_g}, \eta_{j_g})}{\partial \theta_\ell} w_{i_g} w_{j_g} J_0(\xi_{i_g}, \eta_{j_g}) \quad (6.55)$$

Para posições tentativas (previamente conhecidas) as expressões (6.54) e (6.55) são valores numéricos e podem ser organizadas em um só vetor, que, para um elemento de quatro nós (Figura 6.6), resulta:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \{ F_{11}^{int} F_{21}^{int} M_1^{int} F_{12}^{int} F_{22}^{int} M_2^{int} F_{13}^{int} F_{23}^{int} M_3^{int} F_{14}^{int} F_{24}^{int} M_4^{int} \}^t = \\ & \{ F_{11}^{int} F_{21}^{int} F_{31}^{int} F_{12}^{int} F_{22}^{int} F_{32}^{int} F_{13}^{int} F_{23}^{int} F_{33}^{int} F_{14}^{int} F_{24}^{int} F_{34}^{int} \}^t = \\ & \{ F_1^{int} F_2^{int} F_3^{int} F_4^{int} F_5^{int} F_6^{int} F_7^{int} F_8^{int} F_9^{int} F_{10}^{int} F_{11}^{int} F_{12}^{int} \}^t \end{aligned} \quad (6.56)$$

ou ainda

$$F_k = F_{il} \quad \text{com} \quad k = 3(\ell - 1) + i \quad (6.57)$$

com $i = 1, 2, 3$ e ℓ sendo a numeração local dos nós do elemento. Portanto, a dimensão de um vetor de forças internas é três vezes o número de nós, a mesma dimensão do vetor posições quando feita a correspondência $Y_{il} \rightarrow Y_k$. Aqui é interessante se recordar

a relação entre as numerações local e global de um nó de elemento finito dada pela equação (5.90), repetida aqui como:

$$A = inc(j, \ell) \quad (6.58)$$

onde j é o número do elemento finito, (informado pelo usuário), ℓ é o número local do nó e A é o número global do nó. Essa relação entre as numerações será usada na montagem dos vetores e matrizes nas coordenadas globais do problema analisado.

Para se computar os vetores de forças internas, devem-se executar as derivadas da energia de deformação específica em relação às posições nodais atuais, veja, por exemplo, as equações (6.52) e (6.53). Inicia-se o processo observando-se que a energia de deformação, a partir das equações (6.43) e (6.47), é função da deformação de Green que é função do gradiente da mudança de configuração que finalmente é função das posições dos nós. Conforme realizado para força interna o vetor de posições atual será numerado de um até três para cada nó do elemento finito, isto é, $Y_{i\ell}$ com i variando de um até três e $Y_{3\ell} = \theta_\ell$. A partir desta numeração, a energia específica de deformação fica resumida em:

$$u_e = u_e \left(E \left(A^1(Y_{\alpha\ell}) \right) \right) \quad (6.59)$$

Assim, pela regra da cadeia, tem-se:

$$\frac{\partial u_e}{\partial Y_{\alpha\ell}} = \frac{\partial u_e}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial Y_{\alpha\ell}} \quad (6.60)$$

que, graças à simplicidade da energia de deformação utilizada, fica aberta como:

$$\frac{\partial u_e}{\partial Y_{\alpha\ell}} = \left\{ \frac{\partial u_e}{\partial E_{11}} \frac{\partial E_{11}}{\partial Y_{\alpha\ell}} + \frac{\partial u_e}{\partial E_{12}} \frac{\partial E_{12}}{\partial Y_{\alpha\ell}} + \frac{\partial u_e}{\partial E_{21}} \frac{\partial E_{21}}{\partial Y_{\alpha\ell}} + \frac{\partial u_e}{\partial E_{22}} \frac{\partial E_{22}}{\partial Y_{\alpha\ell}} \right\} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{ij}} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_{\alpha\ell}} = S_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_{\alpha\ell}} \quad (6.61)$$

Lembrando-se da definição de conjugado energético entre tensão de Piola-Kirchhoff e deformação de Green, equações (4.118) e (4.127), $S_{ij} = \partial u_e / \partial E_{ij}$ e, usando a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff (6.43) tem-se

$$S_{11} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{11}} = E E_{11} \quad (6.62)$$

$$S_{22} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{22}} = E E_{22} \quad (6.63)$$

$$S_{12} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{12}} = 2G E_{12} = E E_{12} \quad (6.64)$$

$$S_{21} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{21}} = 2G E_{21} = E E_{21} \quad (6.65)$$

As igualdades acima são assim simples pois $v = 0$. A partir deste resultado se escreve a expressão (6.61) como

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_e}{\partial Y_{\alpha\beta}} = S_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_{\alpha\beta}} \quad (6.66)$$

O próximo termo a ser calculado é $\partial E_{ij} / \partial Y_{\alpha\beta}$, a partir de (6.46) como

$$\frac{\partial E}{\partial Y_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \left\{ (A^0)^{-t} \cdot \left(\frac{\partial A^1}{\partial Y_{\alpha\beta}} \right)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot \frac{\partial A^1}{\partial Y_{\alpha\beta}} \cdot (A^0)^{-1} \right\} \quad (6.67)$$

onde se omitiram os índices pois a notação dyadica simplifica o entendimento.

Da propriedade

$$\frac{\partial (A^1)^t}{\partial Y_{\alpha\beta}} = \left(\frac{\partial A^1}{\partial Y_{\alpha\beta}} \right)^t \quad (6.68)$$

resta calcular $\partial A^1 / \partial Y_{\alpha\beta}$. Isto é feito elemento por elemento de A^1 . Porém, adianta-se que a maioria dos valores é nulo, por exemplo:

$$\frac{\partial A^1}{\partial Y_{1\beta}} = \frac{\partial}{\partial Y_{1\beta}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \xi} & \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \xi} & \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi \partial Y_{1\beta}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D\phi_\beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

onde $D\phi_\beta = \partial \phi_\beta / \partial \xi$ sendo β o nó relativo ao qual o grau de liberdade 1 foi tomado.

Aplicando-se a equação (6.69) em (6.67) e operando-se, resulta

$$\frac{\partial E}{\partial Y_{1\beta}} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 2D_{11}D_{11} \frac{\partial y_1}{\partial \xi} + D_{21}D_{11} \left(\frac{\partial y_1}{\partial \eta} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi} \right) \\ 2D_{12}D_{11} \frac{\partial y_1}{\partial \xi} + D_{11}D_{22} \frac{\partial y_2}{\partial \xi} + D_{12}D_{21} \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \end{bmatrix} \right. \\ \left. \begin{bmatrix} 2D_{12}D_{11} \frac{\partial y_1}{\partial \xi} + D_{11}D_{22} \frac{\partial y_2}{\partial \xi} + D_{12}D_{21} \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \\ D_{22}D_{22} \frac{\partial y_2}{\partial \xi} + D_{22}D_{12} \left(\frac{\partial y_1}{\partial \eta} + \frac{\partial y_1}{\partial \xi} \right) + D_{12}D_{12} \frac{\partial y_1}{\partial \xi} \end{bmatrix} \right\} \quad (6.70)$$

onde D_{ij} são as componentes da inversa (numérica) de A^0 .

É possível substituir as equações (6.70) e (6.62) até (6.65) em (6.61) e se encontrar $\partial u_e / \partial Y_{1\beta}$ analiticamente. Porém, como já comentado, as matrizes $D = (A^0)^{-1}$ e A^1 são numéricas, pois são calculadas para uma posição tentativa e um par de pontos de integração (ξ_{i_g}, η_{j_g}) . Assim, executam-se numericamente as operações do tipo da equação (6.70), expressa em (6.67) e a operação (6.61).

Além disso, as demais expressões do tipo da equação (6.69), também numéricas, são transcritas a seguir:

$$\frac{\partial A^1}{\partial Y_{2\beta}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D\phi_\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

$$\frac{\partial A^1}{\partial Y_{3\beta}} = \frac{\partial A^1}{\partial \theta_\beta} = \begin{bmatrix} \left[-\frac{h_0}{2} \eta \left[\cos(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta (D\phi_k \theta_k) + \text{sen}(\phi_\ell \theta_\ell) D\phi_\beta \right] \right] \\ \left[\frac{h_0}{2} \eta \left[-\text{sen}(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta (D\phi_k \theta_k) + \cos(\phi_\ell \theta_\ell) D\phi_\beta \right] \right] \\ \left[-\frac{h_0}{2} \text{sen}(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \right] \\ \left[\frac{h_0}{2} \cos(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \right] \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

Desta forma o vetor de força interna, indicado na equação (6.56), é obtido pelas equações (6.54) e (6.55) pelo seguinte fluxograma.

Para o número de elementos finitos j faça

Para o número de pontos de Gauss em η faça

Para o número de pontos de Gauss em ξ faça

Equações (6.33) e (6.34) $\rightarrow A^0$ e A^1

Equações (6.45) e (6.46) $\rightarrow E$

Equações (6.50) $\rightarrow J_0$

Equações (6.62)-(6.65) $\rightarrow S$

Para o número de nós β faça

Equação (6.69) $\rightarrow \partial A^1 / \partial \bar{Y}$

Equação (6.71) $\rightarrow \partial A^1 / \partial \bar{Y}$

Equação (6.72) $\rightarrow \partial A^1 / \partial \bar{Y}$

Equação (6.67) $\rightarrow \partial E / \partial \bar{Y}$

Equação (6.66) ou Equação (6.61) $\rightarrow f_{\alpha\beta}$

Integra, equações (6.54) e (6.55)

Monta vetor (6.56) e (6.57)

Fim faça β pt Gauss

Fim faça η pt Gauss

Fim faça ξ

Fim faça j

O processo de solução básico do MEF posicional (Newton-Raphson), descrito nos capítulos 2 e 5, será utilizado para os problemas com cinemática especial. Dessa forma é necessário se calcular a Hessiana do problema, ou seja:

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma z}} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma z}} = \int_{V^0} \frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma z}} dV^0 = \int_{V^0} h_{\alpha\beta\gamma z} dV^0 \quad (6.73)$$

ou

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma z}} = \sum_{i_g=1}^{ng_\xi} \sum_{j_g=1}^{ng_\eta} \frac{\partial^2 u_e(\xi_{i_g}, \eta_{j_g})}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma z}} w_{i_g} w_{j_g} J_0(\xi_{i_g}, \eta_{j_g}) \quad (6.74)$$

sendo necessário calcular

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma z}} \quad (6.75)$$

a partir de (6.60), ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial Y_{\gamma z}} \left(\frac{\partial u_e}{\partial Y_{\alpha\beta}} \right) = \frac{\partial}{\partial Y_{\gamma z}} \left(\frac{\partial u_e}{\partial E} : \frac{\partial E}{\partial Y_{\alpha\beta}} \right) = \frac{\partial}{\partial Y_{\gamma z}} \left(S : \frac{\partial E}{\partial Y_{\alpha\beta}} \right) = \frac{\partial S}{\partial Y_{\gamma z}} : \frac{\partial E}{\partial Y_{\alpha\beta}} + S : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_{\gamma z} \partial Y_{\alpha\beta}} \quad (6.76)$$

que para efeito de generalização foi escrita no capítulo 5 como:

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial}{\partial Y_\gamma^z} \left(\frac{\partial u_e}{\partial E} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} \right) = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \frac{\partial^2 u_e}{\partial E \otimes \partial E} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + \frac{\partial u_e}{\partial E} : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \quad (6.77)$$

ou ainda

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \mathbf{c} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + S : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \quad (6.78)$$

Para essa cinemática específica, pode-se tomar a forma expressa na equação (6.76), percebendo-se que os termos S e $\partial E / \partial Y_{\alpha\beta}$ já são conhecidos. Graças à simplicidade da Lei constitutiva adotada, o primeiro termo adicional a ser calculado é:

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial Y_{\gamma\zeta}} = \mathbb{E} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_{\gamma\zeta}} \quad (6.79)$$

veja equações (6.62) até (6.65).

O segundo termo é um pouco mais complicado e é determinado diferenciando-se a expressão (6.67) em relação à $Y_{\gamma z}$, tal como:

$$\frac{\partial}{\partial Y_{\gamma z}} \frac{\partial E}{\partial Y_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial Y_{\gamma z}} \left\{ (A^0)^{-t} \cdot \left(\frac{\partial A^1}{\partial Y_{\alpha\beta}} \right)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot \frac{\partial A^1}{\partial Y_{\alpha\beta}} \cdot (A^0)^{-1} \right\} \quad (6.80)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma\zeta}} &= \frac{1}{2} \left((A^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (A^1)^t}{\partial Y_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial A^1}{\partial Y_{\gamma\zeta}} \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (A^1)^t}{\partial Y_{\gamma\zeta}} \cdot \frac{\partial A^1}{\partial Y_{\alpha\beta}} \cdot (A^0)^{-1} \right) + \\ &\left((A^0)^{-t} \cdot \frac{\partial^2 (A^1)^t}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma\zeta}} \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot \frac{\partial^2 A^1}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma\zeta}} \cdot (A^0)^{-1} \right) \end{aligned} \quad (6.81)$$

Todos os elementos do primeiro parêntesis do lado direito da igualdade (6.81) já foram calculados nas expressões (6.69), (6.71) e (6.72). Ao contrário do elemento sólido, os termos do segundo parêntesis não são todos nulos, porém a maioria das componentes são, restando apenas os seguintes valores não nulos:

$$\frac{\partial^2 A^1}{\partial Y_{3\beta} \partial Y_{3z}} = \frac{\partial^2 A^1}{\partial \theta_\beta \partial \theta_z} = D2A^1_{,\beta z} \quad (6.82)$$

Sendo, para cada β e z , $D2A^1_{,\beta z}$ uma matriz 2x2 escrita como:

$$(D2A^1_{11})_{,\beta z} = \frac{h_0}{2} \eta \left[\text{sen}(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_z \phi_\beta (D\phi_k \theta_k) - \text{cos}(\phi_\ell \theta_\ell) (\phi_z D\phi_\beta + \phi_\beta D\phi_z) \right] \quad (6.83)$$

$$(D2A^1_{21})_{,\beta z} = -\frac{h_0}{2} \eta \left[\text{cos}(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_z \phi_\beta (D\phi_k \theta_k) + \text{sen}(\phi_\ell \theta_\ell) (\phi_z D\phi_\beta + \phi_\beta D\phi_z) \right] \quad (6.84)$$

$$(D2A^1_{12})_{,\beta z} = -\frac{h_0}{2} \text{cos}(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_z \phi_\beta \quad (6.85)$$

$$(D2A^1_{22})_{,\beta z} = -\frac{h_0}{2} \text{sen}(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_z \phi_\beta \quad (6.86)$$

Deve-se comentar que o cálculo numérico dos termos (6.83) – (6.86) envolve custo computacional elevado e pequeno ganho na aceleração da convergência do método de Newton-Raphson e podem ser descartados.

Como ilustração, para um elemento de dois nós, a matriz Hessiana é de ordem 6x6 e fica escrita de forma aberta como

$$\begin{bmatrix} H_{1111} & H_{1121} & H_{1131} & H_{1112} & H_{1122} & H_{1132} \\ H_{2111} & H_{2121} & H_{2131} & H_{2112} & H_{2122} & H_{2132} \\ H_{3111} & H_{3121} & H_{3131} & H_{3112} & H_{3122} & H_{3132} \\ H_{1211} & H_{1221} & H_{1231} & H_{1212} & H_{1222} & H_{1232} \\ H_{2211} & H_{2221} & H_{2231} & H_{2212} & H_{2222} & H_{2232} \\ H_{3211} & H_{3221} & H_{3231} & H_{3212} & H_{3222} & H_{3232} \end{bmatrix} = H_{\alpha\beta\gamma\zeta} \quad (6.87)$$

ou ainda

$$H_{ij} = H_{\alpha\beta\gamma\zeta} \quad \text{com} \quad i = 3(\beta - 1) + \alpha \quad \text{e} \quad j = 3(\gamma - 1) + \zeta \quad (6.88)$$

A montagem da matriz Hessiana global, pode ser feita diretamente substituindo-se β por $inc(je, \beta)$ e γ por $inc(je, \gamma)$ onde je é o elemento finito, veja equação (6.58). A seguir, apresenta-se um algoritmo para o cálculo e montagem da matriz Hessiana.

Para o número de elementos je faça

Para o número de pontos de Gauss ξ_{i_g} faça

Para o número de pontos de Gauss η_{i_g} faça

Equações (6.33) e (6.34) $\rightarrow A^0$ e A^1

Equações (6.45) e (6.46) $\rightarrow E$

Equações (6.50) $\rightarrow J_0$

Equações (6.62)-(6.65) $\rightarrow S$

Para o número de nós β faça

Equação (6.69) $\rightarrow \partial A^1 / \partial \bar{Y}$

Equação (6.71) $\rightarrow \partial A^1 / \partial \bar{Y}$

Equação (6.72) $\rightarrow \partial A^1 / \partial \bar{Y}$

Equação (6.67) $\rightarrow \partial E / \partial \bar{Y}$

Guarde nó β e direção α

Fim faça β

Para o número de nós β faça

Para o número de nós ζ faça

Equação (6.81) $\rightarrow \partial^2 E / (\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y})$

Equação (6.79) $\rightarrow \partial S / \partial \vec{Y}$

Equação (6.75) como (6.76) $\rightarrow \partial^2 u_e / (\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y})$

Integre, equação (6.74)

Monte matriz (6.88)

Fim faça ζ

Fim faça β

Fim faça η_{i_g}

Fim faça ξ_{i_g}

Fim faça j_e

Detalhes numéricos complementares deste procedimento podem ser inferidos dos procedimentos descritos para o elemento sólido do Capítulo 5.

6.1.4.b – Potencial das forças externas

No capítulo 1 foram mostradas as expressões de potenciais de forças conservativas concentradas e distribuídas aplicadas em superfícies quaisquer, veja equações (1.2) e (1.4). Esse tópico foi retomado nas deduções gerais do capítulo 4, veja, por exemplo, a equação (4.120). No capítulo 5, comentaram-se as aproximações das linhas de carga e das forças distribuídas aplicadas sobre as mesmas. Assim, da Figura 6.7 pode-se escrever o potencial das forças externas concentradas e distribuídas em um elemento de pórtico plano como:

$$P = -F_{ik} Y_{ik} - \int_{-1}^1 q_i(\xi) y_i^m(\xi) J_0^{(m)}(\xi) d\xi \quad (6.89)$$

onde i é direção, k é nó do elemento, q_i é o vetor de carga distribuída, F_{ik} é o vetor de carga concentrada, y_i^m é a posição da linha média do elemento, ξ é a coordenada adimensional e $J_0^m(\xi) = \sqrt{T_{i(k)} T_{i(k)}}$ é o jacobiano da transformação da coordenada adimensional ξ para a linha média inicial s_0 e é dado pela equação (6.14). A ilustração da expressão (6.89) é dada na Figura 6.7 onde se omitiu o valor de q_1 para não carregar demais a ilustração.

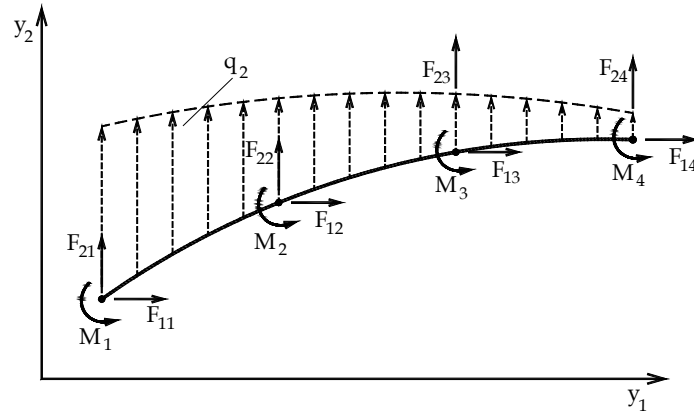


Figura 6.7 – Carregamento externo aplicado no elemento finito

Repetindo-se aqui detalhes dos capítulos anteriores, o carregamento distribuído é aproximado empregando-se polinômios de Lagrange, ou seja:

$$q_i(\xi) = \phi_\ell(\xi)q_{i\ell} \quad (6.90)$$

onde $q_{i\ell}$ são os valores conhecidos nos nós ℓ do carregamento aplicado.

Observando-se que a carga aplicada está sobre a linha média do elemento finito utiliza-se apenas a aproximação da linha média para representar y_i^m , ou seja:

$$y_i^m = \phi_\ell(\xi)Y_{i\ell} \quad (6.91)$$

Substituindo-se as aproximações (6.90) e (6.91) na equação (6.89) resulta,

$$P = -F_{ik}Y_{ik} - \int_{-1}^1 (\phi_\ell(\xi)q_{i\ell})\phi_k(\xi)J^m(\xi)d\xi Y_{ik} \quad \text{ou} \quad F_{ik}^{ext} = F_{ik}^{con} + F_{ik}^d \quad (6.92)$$

A integral indicada na equação (6.92) é calculada numericamente por quadratura de Gauss, e resulta na grandeza chamada força nodal equivalente.

$$F_{ik}^d = \sum_{i_g=1}^{n_g} (\phi_\ell(\xi_{i_g})q_{i\ell})\phi_k(\xi_{i_g})J^m(\xi_{i_g})w_{i_g} \quad (6.93)$$

onde ξ_{i_g} é ponto de Gauss e w_{i_g} é o peso de Gauss.

Aproveitando-se os termos conhecidos F_{ik}^d , reescreve-se a equação (6.92) como

$$P = -F_{ik}Y_{ik} - F_{ik}^d Y_{ik} \quad (6.94)$$

Deve-se observar que o termo F_{3k}^d na equação (6.94) é nulo.

A montagem do vetor em graus de liberdade globais é feita pela regra que relaciona nós e graus de liberdade como:

$$F_i = F_{kj} \quad \text{com} \quad i = 3(k-1) + j \quad (6.95)$$

onde k é o nó em sua numeração global e j é a direção, lembrando-se que o giro corresponde à terceira direção.

Alternativamente, a equação (6.93) pode ser organizada de forma a se aplicar o produto de uma matriz constante sobre os valores nodais das forças distribuídas, independentes da integração, após a integração das funções de forma. Assim, semelhante ao que foi descrito no capítulo 5, o vetor de forças nodais equivalentes, devido ao carregamento distribuído, fica escrita como:

$$\vec{F}^d = Q \cdot \vec{q} \quad (6.96)$$

onde Q é uma matriz que transforma carregamentos distribuídos em nodais equivalentes. Sua construção é semelhante à que será descrita para a matriz de massa no próximo item.

6.1.4.c – Energia cinética

No capítulo 5 foi apresentado o MEF posicional dinâmico, onde se incluiu a energia cinética no sistema. A energia cinética no volume V de um elemento finito é escrita como:

$$\mathbb{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{y}_i \dot{y}_i dV \quad (6.97)$$

Desenvolve-se a variação da energia cinética usando o tempo como parâmetro,

$$\delta \mathbb{K} = \frac{d\mathbb{K}}{dt} dt \quad (6.98)$$

Recupera-se a forma desejada escrita em posições pela seguinte sequência:

$$\begin{aligned} \delta \mathbb{K} &= \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{d}{dt} (\dot{y}_i \dot{y}_i) dt dV = \frac{1}{2} \int_V \rho 2 (\ddot{y}_i \dot{y}_i) dt dV \\ &= \int_V \rho \ddot{y}_i (\dot{y}_i dt) dV = \int_V \rho \ddot{y}_i \delta y_i dV = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 \end{aligned} \quad (6.99)$$

Observa-se que a conservação de massa e seu colorário, equações (4.54) e (4.58), foram usados nas passagens presentes em (6.99)

No elemento finito de sólido aplicou-se, para a aceleração $\ddot{\vec{y}}$ e para a variação das posições $\delta \vec{Y}$, a mesma aproximação utilizada para posições. É possível seguir esse mesmo procedimento para o elemento de barra geral descrito aqui, porém, a relação final seria fortemente não-linear resultando em matriz de massa que varia no tempo, prejudicando, inclusive, o uso do integrador de Newmark.

Para contornar esse problema, recorda-se que o elemento finito de barra geral aqui desenvolvido segue cinemática adequada para elementos estruturais longos, ou seja, $L \geq 10h$. Na figura 6.8, um elemento reto é ilustrado e se calcula a inércia de rotação em torno do eixo x_3 central como:

$$I_z = \int_V (x_1^2 + x_2^2) dV = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h/2}^{h/2} (x_1^2 + x_2^2) dx_2 dx_1 b \quad (6.100)$$

$$I_z = \frac{b}{12} (Lh^3 + hL^3) \quad (6.101)$$

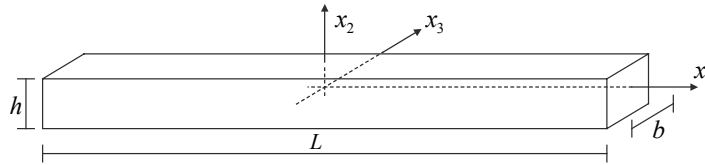


Figura 6.8 - Elemento reto para cálculo de inércia de rotação.

Para $L > 10h$ ou $h < 0,1L$ a influência da componente relativa à rotação da seção transversal Lh^3 é menor do que 1% da influência dos movimentos transversais responsáveis pela parcela hL^3 . Esta relação é avaliada como:

$$\alpha = \frac{Lh^3}{hL^3} < \frac{10^{-3} L^4}{10^{-1} L^4} = 1\% \quad (6.102)$$

Assim, a inércia correspondente à rotação das seções transversais será desprezada e considerar-se-á a massa do elemento finito concentrada na linha média do mesmo. Dessa forma a equação (6.99) passa a ser escrita como:

$$\delta\mathbf{K} = \int_{L_0} (bh) \rho_0 \ddot{y}_i^m \delta y_i^{(m)} dL_0 = \int_{L_0} \bar{\rho}_0 \ddot{y}_i^m \delta y_i^{(m)} dL_0 \quad (6.103)$$

onde m indica a linha média, bh é a área da seção transversal e i assume apenas 1 e 2, ou seja, o grau de liberdade de rotação não é levado em conta na matriz de massa. As aproximações da linha média, com base nas equações (6.28) e (6.29), ficam:

$$\ddot{y}_i^m = \phi_i(\xi) \ddot{Y}_i^\ell \quad \text{e} \quad \delta y_i^m = \phi_i(\xi) \delta Y_i^\ell \quad (6.104)$$

onde o índice m foi omitido do lado direito das igualdades por ser desnecessário. Partindo-se da equação (6.104), na forma Lagrangiana de (6.99), se escreve:

$$\delta\mathbf{K} = \int_{L_0} \bar{\rho}_0 \phi_i \phi_\alpha \ddot{Y}_i^\alpha dL_0 \delta Y_i^\ell = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial Y_i^\ell} \delta Y_i^\ell = \left(F_i^\ell \right)^{iner} \delta Y_i^\ell \quad (6.105)$$

ou

$$\frac{\partial \mathbb{K}}{\partial Y_i^\ell} = \int_{L_0} \bar{\rho}_0 \phi_\ell \phi_\alpha dL_0 \dot{Y}_i^\alpha \quad \text{ou} \quad \bar{F}^{iner} = \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \bar{Y}} = \int_{L_0} \bar{\rho}_0 \bar{\phi} \otimes \bar{\phi} dV_0 \cdot \bar{Y} = M \cdot \bar{Y} \quad (6.106)$$

onde a primeira forma da equação (6.106) indica que a matriz de massa é constante ao longo do tempo e, com base nas equações do capítulo 5, fica escrita para um elemento de 2 nós, por exemplo, como:

$$\begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ 0 \end{Bmatrix}^{iner} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix}^{iner} = \int_{L_0} \bar{\rho}_0 \begin{bmatrix} \phi_1 \phi_1 & 0 & 0 & \phi_1 \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 \phi_1 & 0 & 0 & \phi_1 \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_2 \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_2 \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dL_0 \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_2 \\ \ddot{Y}_3 \\ \ddot{Y}_4 \\ \ddot{Y}_5 \\ \ddot{Y}_6 \end{Bmatrix} \quad (6.107)$$

que detalha a matriz de massa local de elemento finito posicional. Sua montagem para coordenadas globais é feita pela incidência nodal, já comentada, por exemplo, na equação (6.88).

O conjunto de equações não lineares de equilíbrio ou de movimento pode ser escrito em sua forma vetorial exatamente como para as soluções de treliça e sólido, ou seja:

$$-\bar{F}^{ext} - Q \cdot \bar{q} + \bar{F}^{int} + M \cdot \ddot{\bar{Y}} = \vec{0} \quad (6.108)$$

e o processo de solução é feito combinando-se o integrador de Newmark com o algoritmo de Newton-Raphson, já apresentado anteriormente.

Da mesma forma que para treliça, podem-se somar (nas coordenadas globais) massas concentradas nos graus de liberdade correspondentes. Cabe comentar que se pode incluir inércia concentrada nos graus de liberdade referentes aos giros. Por exemplo, para uma massa em forma de disco de espessura b o valor da inércia concentrada é:

$$I_z = \rho_0 \pi b R^4 / 2 \quad (6.109)$$

onde R é o raio do disco.

Uma forma aproximada de se introduzir a inércia, referente à rotação da seção transversal, na matriz de massa de um elemento finito, é usar inércias concentradas calculadas como:

$$I_\ell = b \bar{L}_\ell h^3 / 12 \quad (6.110)$$

onde \bar{L}_ℓ é o comprimento de referência adotado para o nó ℓ do elemento finito. Sugere-se,

$$\bar{L}_\ell = \int_{-1}^1 \phi_\ell(\xi) J_0(\xi) d\xi \quad (6.111)$$

6.1.4.d – Processo de solução

O processo de solução é exatamente o mesmo descrito nos capítulos 2 e 5 para elementos de treliça e sólidos, respectivamente. Entretanto existe um detalhe importante a ser comentado.

O giro foi definido na descrição de elemento finito como posição angular da seção transversal e não simplesmente como um giro de nó. Assim, todos os nós terão seu giro inicial considerado nulo e os acréscimos de giros serão acumulados no terceiro grau de liberdade de cada nó do vetor posições, ou seja:

$$Y_{3,\text{nó}} = 0 + \sum \Delta Y_{3,\text{nó}} \quad (6.112)$$

Para se determinar a posição angular atual da seção transversal, no nível do elemento, o giro nodal acumulado deverá ser somado à posição angular inicial da seção transversal, ou seja:

$$\theta_\ell = Y_{3\ell}^{local} = \theta_\ell^0 + Y_{3-inc(j,\ell)} \quad (6.113)$$

onde $inc(j, \ell)$ relaciona a numeração local ℓ dos nós à numeração global.

A introdução de rótulas em simulações de pórticos é muito simples, basta, durante a montagem de posições, forças e matrizes, fazer coincidir os graus de liberdade de translações e não coincidir os graus de liberdade de rotação do nó que se pretende rotular. Isto resulta em uma modificação da fórmula de incidência cinemática, por exemplo, equações (6.57) ou (6.88) deixada para o leitor.

6.1.5 - Tensões internas e esforços solicitantes

Após a convergência, conhecem-se as posições atuais do corpo e, portanto, o tensor de deformações de Green calculado pela expressão (6.44). A partir da deformação de Green conhece-se o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, calculado pelas equações (6.62) até (6.65).

De posse do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff calcula-se o tensor de tensões de Cauchy utilizando-se a equação (4.119), transcrita a seguir:

$$\sigma = \frac{1}{J} A \cdot S \cdot A^t \quad (4.119)$$

onde

$$J = \frac{J_1}{J_0} = \frac{Det(A^1)}{Det(A^0)} \quad (6.114)$$

Observa-se que a tensão de Cauchy está calculada segundo as direções dos eixos globais (x_1, x_2) ou (y_1, y_2) , já que estas são coincidentes. Para se calcular a tensão de Cauchy na 'superfície' das seções transversais, lança-se mão da posição angular da seção transversal no ponto de integração longitudinal, ou seja, para uma coordenada ξ_{ig_ξ} , como:

$$\theta(\xi) = \phi_\ell(\xi)\theta_\ell \quad (6.115)$$

O ângulo que dá a direção ortogonal à seção transversal é:

$$\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} \quad (6.116)$$

e, portanto, a matriz de rotação que relaciona coordenadas locais às coordenadas globais é:

$$R = \begin{bmatrix} n_1 & g_1 \\ n_2 & g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (6.117)$$

onde \vec{n} é o versor normal à seção transversal e \vec{g} é o versor tangencial.

Assim, se escreve:

$$\bar{\sigma} = R^t \cdot \sigma \cdot R \quad (6.118)$$

sendo agora, $\bar{\sigma}_{11}$ a tensão normal à seção transversal e $\bar{\sigma}_{12}$ a tensão de cisalhamento.

Calcula-se, na seção transversal correspondente ao ponto de integração ξ_{ig_ξ} , a força normal como:

$$\bar{N} = \int_A \bar{\sigma}_{11} dA = \sum_{ig_\eta}^{ng_\eta} b \frac{h_o}{2} \bar{\sigma}_{11} w_{ig_\eta} \quad (6.119)$$

onde b é a largura da seção, $h_o/2$ é o jacobiano da integração na direção transversal, pois a altura da seção não varia e w_{ig_η} é o peso de integração já definido.

Da mesma forma calcula-se a força cortante como:

$$\bar{Q} = \int_A \bar{\sigma}_{12} dA = \sum_{ig_\eta}^{ng_\eta} b \frac{h_o}{2} \bar{\sigma}_{12} w_{ig_\eta} \quad (6.120)$$

e o momento fletor como:

$$M = \int_A \bar{\sigma}_{11} \bar{y}_2 dA = \sum_{ig_\eta}^{ng_\eta} b \frac{h_o}{2} \bar{\sigma}_{12} \left(\frac{h_o}{2} \eta_{ig_\eta} \right) w_{ig_\eta} \quad (6.121)$$

Observa-se que para se ter uma boa representação dos esforços solicitantes, sem a necessidade de número excessivo de elementos, deve-se utilizar aproximação de ordem 4 vezes superior à do carregamento transversal. Por exemplo, para carregamento triangular é necessário se aplicar aproximação de ordem 5, resultando em elemento finito de 6 nós.

6.2 – Elemento finito de pórtico plano usando vetores generalizados como graus de liberdade

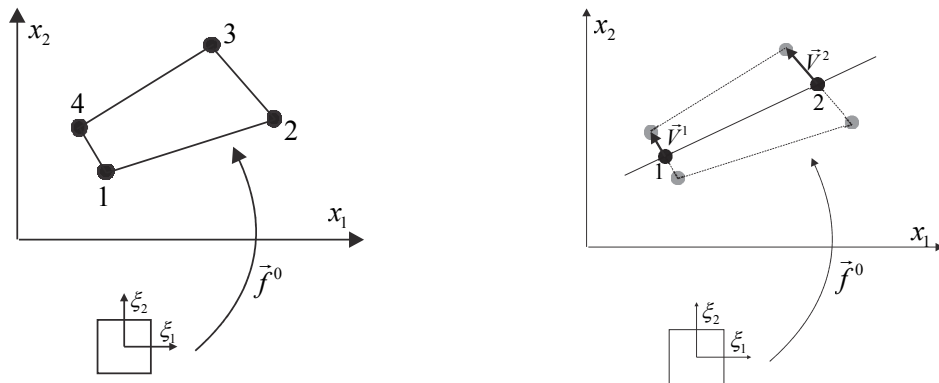
A introdução de vetores generalizados como graus de liberdade em formulações de Método dos Elementos Finitos é uma inovação devida ao autor desse texto. A grande vantagem desse procedimento está associada à solução de problemas tridimensionais, onde não vale a comutatividade de giros finitos. Entretanto, sua apresentação para pórtico plano é muito adequada didaticamente, pois possibilita o entendimento de diversos aspectos importantes que serão estendidos nas formulações de casca e de barras gerais 3D. A descrição que será feita nesse item poderia ser muito mais curta, porém detalhes iniciais são oferecidos para dar o perfeito entendimento da proposta.

6.2.1 – Mapeamento posicional da configuração inicial

Na figura 6.9a apresenta-se um mapeamento bi-linear de um sólido bidimensional escrito como:

$$x_1 = \phi_1 X_1^1 + \phi_2 X_1^2 + \phi_3 X_1^3 + \phi_4 X_1^4 \quad (6.122)$$

$$x_2 = \phi_1 X_2^1 + \phi_2 X_2^2 + \phi_3 X_2^3 + \phi_4 X_2^4 \quad (6.123)$$



(a) Mapeamento clássico

(b) Mapeamento por vetor generalizado

Figura 6.9 - Mapeamento de sólido 2D

Observando-se a figura 6.9 pode-se escrever, que:

$$V_i^1 = (X_i^4 - X_i^1) / 2 \quad V_i^2 = (X_i^3 - X_i^2) / 2 \quad (6.124)$$

$$X_i^{1m} = (X_i^1 + X_i^4) / 2 \quad X_i^{2m} = (X_i^2 + X_i^3) / 2 \quad (6.125)$$

ou, rearranjando,

$$X_i^4 = X_i^{1m} + V_i^1 \quad X_i^1 = X_i^{1m} - V_i^1 \quad (6.126)$$

$$X_i^3 = X_i^{2m} + V_i^2 \quad X_i^2 = X_i^{2m} - V_i^2 \quad (6.127)$$

Substituindo-se (6.126) e (6.127) em (6.122) e (6.123), tem-se

$$x_i = \phi_1 (X_i^{1m} - V_i^1) + \phi_2 (X_i^{2m} - V_i^2) + \phi_3 (X_i^{2m} + V_i^2) + \phi_4 (X_i^{1m} + V_i^1) \quad (6.128)$$

que rearranjada fica:

$$x_i = (\phi_1 + \phi_4) X_i^{1m} + (\phi_2 + \phi_3) X_i^{2m} + (\phi_4 - \phi_1) V_i^1 + (\phi_3 - \phi_2) V_i^2 \quad (6.129)$$

Lembrando-se que:

$$\phi_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \quad (a)$$

$$\phi_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) \quad (b)$$

$$\phi_3(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \quad (c)$$

$$\phi_4(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) \quad (d)$$

escreve-se:

$$\varphi_1(\xi_1) = \phi_1 + \phi_4 = \frac{1}{2}(1 - \xi_1) \quad \varphi_2(\xi_1) = \phi_2 + \phi_3 = \frac{1}{2}(1 + \xi_1) \quad (6.130)$$

$$\phi_4 - \phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi_1)\xi_2 = \varphi_1\xi_2 \quad \phi_3 - \phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi_1)\xi_2 = \varphi_2\xi_2 \quad (6.131)$$

Substituindo-se (6.130) e (6.131) em (6.129) resulta:

$$x_i = \varphi_\ell(\xi_1) X_i^{\ell m} + \xi_2 \varphi_\ell(\xi_1) V_i^\ell \quad (6.132)$$

Pela equação (6.116) nota-se que

$$V_i^\ell = \frac{h_0^{(\ell)}}{2} v_i^\ell \quad (6.133)$$

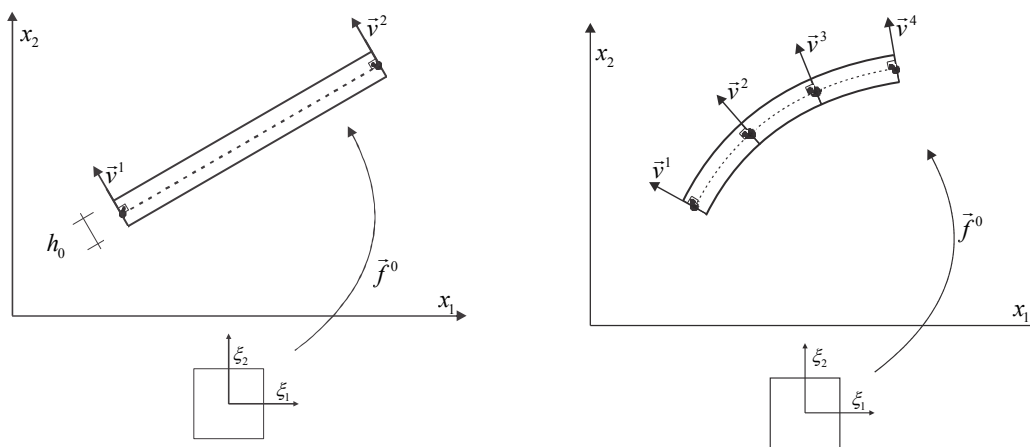
onde h_0^ℓ é o comprimento da face, ou seção transversal, associada ao nó ℓ e v_i^ℓ é um versor (adimensional) que define a direção e o sentido da face. Como se pretende modelar elemento de barra geral, tal como feito no item anterior, o sólido da figura 6.9 passa a ser longo e suas faces, seções transversais, serão inicialmente ortogonais à linha média. Assim, h_0^ℓ passa a ser a altura do elemento finito de barra geral 2D na configuração inicial, veja a figura 6.10a. Substituindo-se a equação (6.133) na equação (6.132), escreve-se o mapeamento inicial como:

$$f_i^0(\xi_1, \xi_2) = x_i = \varphi_\ell(\xi_1)X_i^\ell + \frac{h_0}{2}\xi_2\varphi_\ell(\xi_1)v_i^\ell \quad (6.134)$$

onde $\varphi_\ell(\xi_1)$ passa a ser polinômio de Lagrange de ordem qualquer, $\vec{f}^0(\xi_1, \xi_2)$ é o mapeamento da configuração inicial a partir do espaço adimensional (ξ_1, ξ_2) , o índice m é dispensável e o índice ℓ da altura também deixa de existir, pois a altura será considerada constante em nossa formulação. O Leitor, caso queira, pode introduzir altura variável em sua formulação.

Comparando-se a equação (6.134) com as equações (6.22) até (6.25) conclui-se que o mapeamento por vetores generalizados se dá da mesma forma que o mapeamento que utiliza a posição angular da seção transversal, evitando-se escrever os versores em função da posição angular de cada seção transversal.

Na figura 6.10b, mostra-se a generalização da configuração inicial do elemento de barra geral 2D para uma aproximação de ordem 3 segundo a linha de referência. Observe que a ortogonalidade entre os versores generalizados e a linha de referência será utilizada apenas na configuração inicial.



(a) Elemento linear

(b) Elemento de ordem 3

Figura 6.10 - Mapeamento da configuração inicial usando vetores generalizados

Como se sabe, para o desenvolvimento do MEF posicional, será necessário calcular o gradiente do mapeamento \vec{f}^0 , dado como:

$$A^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\varphi_{\ell,1} X_1^\ell + \frac{h_0}{2} \xi_2 \varphi_{\ell,1} \mathbf{v}_1^\ell \right) & \left(\frac{h_0}{2} \varphi_\ell \mathbf{v}_1^\ell \right) \\ \left(\varphi_{\ell,1} X_2^\ell + \frac{h_0}{2} \xi_2 \varphi_{\ell,1} \mathbf{v}_2^\ell \right) & \left(\frac{h_0}{2} \varphi_\ell \mathbf{v}_2^\ell \right) \end{bmatrix} \quad (6.135)$$

A determinação dos versores da configuração inicial é feita seguindo os procedimentos descritos no item 6.1.1, equações (6.12) e (6.13), deve-se dar atenção às pequenas diferenças das notações empregadas. Comenta-se ainda que o jacobiano da transformação das coordenadas adimensionais para o volume inicial do sólido analisado (barra geral) é dado por.

$$J_0(\xi_1, \xi_2) = Det(A^0) \quad (6.136)$$

Para evitar muita repetição, o leitor é convidado a reler o item 6.1.4a.

6.2.1 – Mapeamento posicional da configuração atual ou corrente

As posições atuais são conhecidas na forma de tentativa e, na cinemática de elementos de barra geral apresentada agora, os parâmetros nodais incógnitos, que constituem os graus de liberdade do problema, são as coordenadas dos nós da linha de referência Y_i^ℓ e as componentes dos vetores generalizados adimensionais \mathbf{g}_i^ℓ .

$$f_i^1(\xi_1, \xi_2) = y_i = \varphi_\ell(\xi_1) Y_i^\ell + \frac{h_0}{2} \xi_2 \varphi_\ell(\xi_1) \mathbf{g}_i^\ell \quad (6.137)$$

É importante se observar que nenhuma restrição é imposta aos vetores generalizados, portanto, este não é ortogonal à linha de referência e não possui módulo unitário, veja a figura 6.11. Assim, a cinemática estabelecida é mais geral que a de Timoshenko-Reissner, pois, além de considerar o efeito de força cortante devido a não ortogonalidade das seções transversais à linha de referência, permite a mudança da 'altura' da seção transversal, recuperada em cada nó ℓ , caso se deseje, por:

$$h^\ell = h^0 |\vec{\mathbf{g}}^\ell| \quad (6.138)$$

Como se sabe, para o desenvolvimento do MEF posicional, será necessário calcular o gradiente do mapeamento \vec{f}^1 , dado como:

$$A^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\varphi_{\ell,1} Y_1^\ell + \frac{h_0}{2} \xi_2 \varphi_{\ell,1} g_1^\ell \right) & \left(\frac{h_0}{2} \varphi_{\ell} g_1^\ell \right) \\ \left(\varphi_{\ell,1} Y_2^\ell + \frac{h_0}{2} \xi_2 \varphi_{\ell,1} g_2^\ell \right) & \left(\frac{h_0}{2} \varphi_{\ell} g_2^\ell \right) \end{bmatrix} \quad (6.139)$$

lembrando-se que os valores numéricos são calculados para cada ponto de integração, exatamente como descrito no item 6.1.4a.

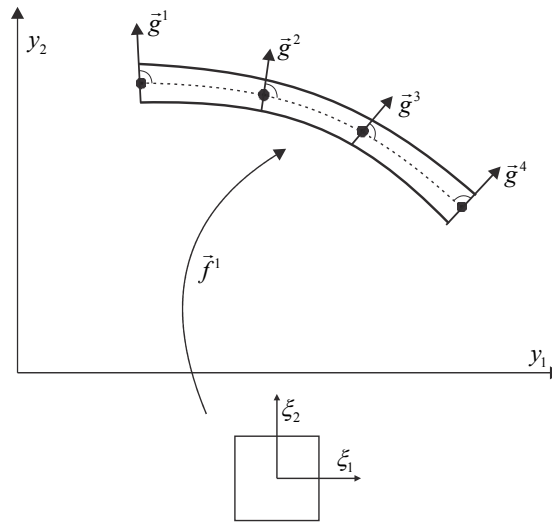


Figura 6.11 - Configuração atual usando vetores generalizados

6.2.3 – Mudança de configuração, Gradiente e Deformação de Green

Estando definidos os mapeamentos para a configuração inicial (Figuras 6.10) e para a configuração atual do elemento finito (Figura 6.11), parte-se para a descrição da mudança de configuração do corpo analisado. Isto é feito juntando-se os dois mapeamentos na figura 6.12.

A função que descreve a mudança da configuração inicial para a configuração corrente é a composição dos mapeamentos, como:

$$\vec{f} = \vec{f}^1 \circ (\vec{f}^0)^{-1} \quad (6.140)$$

portanto, o gradiente da função mudança de configuração fica dado por:

$$A = A^1 \cdot (A^0)^{-1} \quad (6.141)$$

onde A^0 e A^1 já foram apresentados nas equações (6.134) e (6.138). Aplicando-se a fórmula da deformação de Green resulta:

$$E = \frac{1}{2} \left\{ \left[A^1 \cdot (A^0)^{-1} \right]^t \cdot \left[A^1 \cdot (A^0)^{-1} \right] - I \right\} \quad (6.142)$$

calculado para um determinado ponto de integração $\left((\xi_1)_{ig}, (\xi_2)_{ig} \right)$.

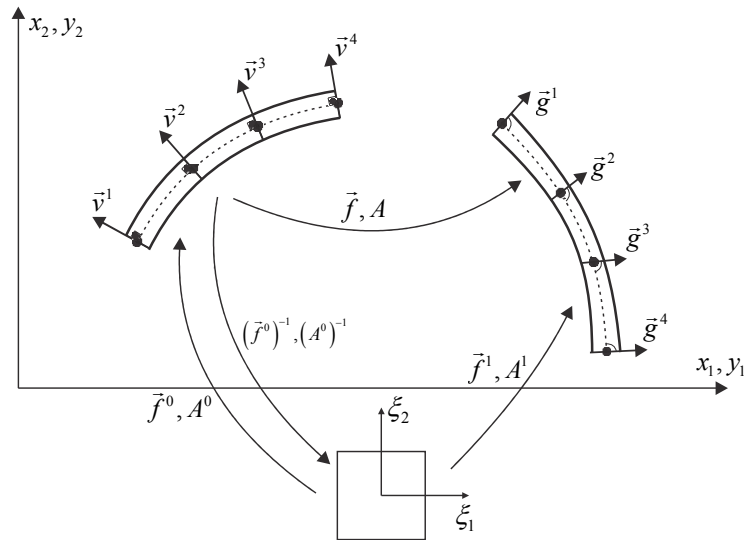


Figura 6.12 - Mapeamento posicional com vetores generalizados

6.2.4 – Energia de deformação - tensões e forças internas

Uma das energias específicas de deformação adotada é a de Saint-Venant-Kirchhoff referente ao estado plano de deformações, ou de tensões com coeficiente de Poisson nulo já utilizada nesse capítulo, ou seja, $G = E / 2$:

$$u_e = \frac{E}{2} \left\{ (E_{11}^2 + E_{22}^2) + (E_{12}^2 + E_{21}^2) \right\} \quad (6.43)$$

onde E_{ij} é a deformação de Green. Nesse caso as tensões de Piola-Kirchhof de segunda espécie são:

$$S_{11} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{11}} = E E_{11} \quad (6.62)$$

$$S_{22} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{22}} = E E_{22} \quad (6.63)$$

$$S_{12} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{12}} = 2G E_{12} = E E_{12} \quad (6.64)$$

$$S_{21} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{21}} = 2G E_{21} = E E_{21} \quad (6.65)$$

Entretanto, algumas discussões referentes a problemas de travamento serão iniciadas e, para tanto, descreve-se a formulação utilizando-se a Lei de Saint-Venant-

Kirchhoff completa para o EPT dada no capítulo 4, ou seja, assume-se:

$S_{13} = S_{31} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = 0$ e a energia de deformação fica dada por:

$$u_e = \frac{\mathcal{G}}{(1-\nu)} \left\{ E_{11}^2 + E_{22}^2 + 2\nu E_{11}E_{22} + (1-\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2) \right\} \quad (4.142)$$

E as tensões de Piola Kirchhoff de segunda espécie ficam dadas por:

$$S_{11} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{11}} = \frac{2\mathcal{G}}{(1-\nu)} \left\{ E_{11} + \nu E_{22} \right\} \quad (4.143)$$

$$S_{22} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{22}} = \frac{2\mathcal{G}}{(1-\nu)} \left\{ E_{22} + \nu E_{11} \right\} \quad (4.144)$$

$$S_{12} = 2\mathcal{G}E_{12} \quad (4.145)$$

$$S_{21} = 2\mathcal{G}E_{21} \quad (4.146)$$

É obvio, portanto, que a diferença operacional entre utilizar um ou outro modelo constitutivo consiste apenas nos cálculos que envolvem os valores de tensão e suas derivadas em relação à deformação de Green.

Apenas para ser completo, apesar de repetitivo, a energia de deformação acumulada em um elemento finito é a integral, no volume inicial do elemento, da energia específica de deformação e a energia de deformação em uma estrutura é a soma das energias de deformação calculadas em todos os elementos. Assim, para um elemento finito, escreve-se:

$$U_e = \int_{V^0} u_e dV^0 \quad (6.143)$$

que é reescrita em coordenadas adimensionais como:

$$U_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_e(\xi_1, \xi_2) J_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (6.144)$$

Utilizando-se quadratura de Gauss para realizar a integração se escreve:

$$U_e = \sum_{i_g=1}^{ng_{\xi_1}} \sum_{j_g=1}^{ng_{\xi_2}} u_e(\xi_{1_{i_g}}, \xi_{2_{j_g}}) w_{i_g} w_{j_g} J_0(\xi_{1_{i_g}}, \xi_{2_{j_g}}) \quad (6.145)$$

Para elemento de aproximação cúbica adota-se $ng_{\xi_1} = 4$ e, para a integração da direção transversal, em análises elásticas, $ng_{\xi_2} = 3$ é suficiente. No item 6.1.4a apresentou-se uma rotina FORTRAN que fornece as coordenadas e pesos de Gauss.

Aproveitando-se do conhecimento prévio do processo de solução e das definições de conjugado energético, define-se o vetor de forças internas para um elemento finito de barra geral como:

$$F_i^\alpha = \frac{\partial U_e}{\partial Y_i^\alpha} = \sum_{i_g=1}^{ng_{\xi 1}} \sum_{j_g=1}^{ng_{\xi 2}} \frac{\partial u_e}{\partial Y_i^\alpha}(\xi_{1_{i_g}}, \xi_{2_{j_g}}) w_{i_g} w_{j_g} J_0(\xi_{1_{i_g}}, \xi_{2_{j_g}}) \quad (6.146)$$

ou

$$F_i^\alpha = \sum_{i_g=1}^{ng_{\xi 1}} \sum_{j_g=1}^{ng_{\xi 2}} f_i^\alpha(\xi_{1_{i_g}}, \xi_{2_{j_g}}) w_{i_g} w_{j_g} J_0(\xi_{1_{i_g}}, \xi_{2_{j_g}}) \quad \text{com} \quad f_i^\alpha = \frac{\partial u_e}{\partial Y_i^\alpha} \quad (6.147)$$

onde i é a direção e α é o nó do elemento finito. A seguinte correspondência entre a posição generalizada e o vetor generalizado que define as seções transversais deve ser feita:

$$Y_3^\alpha = g_1^\alpha \quad \text{e} \quad Y_4^\alpha = g_2^\alpha \quad (6.148)$$

ou seja, os terceiro e quarto graus de liberdade de cada nó correspondem à primeira e segunda componentes do vetor generalizado de cada nó. Assim, alguns esclarecimentos serão feitos nos itens seguintes, sobre os conjugados energéticos F_3^α e F_4^α quando da aplicação de carregamentos externos e conexão de graus de liberdade entre elementos adjacentes.

Dando continuidade à descrição matemática do termo f_i^α , lembra-se que

$$f_i^\alpha = \frac{\partial u_e}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{\partial u_e}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} = S \cdot \frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} \quad (6.149)$$

onde, para se calcular o último termo usa-se a equação (6.142), como:

$$\frac{\partial E}{\partial Y_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \left\{ (A^0)^{-t} \cdot \left(\frac{\partial A^1}{\partial Y_{\alpha\beta}} \right)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot \frac{\partial A^1}{\partial Y_{\alpha\beta}} \cdot (A^0)^{-1} \right\} \quad (6.150)$$

Da equação (6.139) se escreve:

$$\frac{\partial A^1}{\partial Y_1^\alpha} = \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial A^1}{\partial Y_2^\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_{\alpha,1} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.151)$$

$$\frac{\partial A^1}{\partial Y_3^\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{h_0}{2} \xi_2 \varphi_{\alpha,1} & \frac{h_0}{2} \varphi_\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial A^1}{\partial Y_4^\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{h_0}{2} \xi_2 \varphi_{\alpha,1} & \frac{h_0}{2} \varphi_\alpha \end{bmatrix} \quad (6.152)$$

As demais operações são idênticas aos procedimentos dos item 6.1, a menos da montagem e conexão dos graus de liberdade dos vetores generalizados e aplicação de carregamentos que serão descritos a seguir.

6.2.5 – Ligação entre graus de liberdade

No elemento de barra geral descrito no item 6.1, onde a posição angular da seção é o grau de liberdade, calculavam-se os acréscimos de giro que eram somados nas posições angulares de cada seção transversal dos elementos. No caso tratado agora, a descrição da posição da seção transversal é feita por meio de vetores generalizados e o acréscimo de componentes de vetores não é único para um mesmo nó, a menos que os vetores iniciais sejam coincidentes, veja as figuras 6.13 e 6.14 para alguns casos práticos.

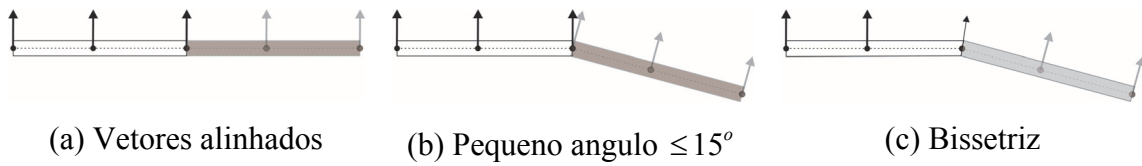


Figura 6.13 - Casos onde é possível usar grau de liberdade coincidente

Na figura 6.13a observa-se, para uma configuração inicial, a coincidência dos vetores do nó que liga dois elementos de barra geral de aproximação quadrática. Nessa situação, caso se queira uma ligação monolítica, pode-se coincidir a numeração dos graus de liberdade dos vetores generalizados, porém, caso se deseje uma rótula, basta não coincidir a numeração dos graus de liberdade dos vetores generalizados. Na figura 6.13b mostra-se uma situação onde os vetores são quasecolineares $\Delta\theta^0 \leq 15^\circ$, caso se deseje uma ligação monolítica, pode-se calcular a bissetriz dos vetores calculados para cada elemento concorrente, substituir os versores originais pela bissetriz normalizada e considerar graus de liberdade coincidentes. Deve-se observar que o sólido que representa a barra geral sofrerá pequena distorção na extremidade da ligação, pois, mantendo-se o vetor unitário e a altura constante, como a seção transversal é um pouco inclinada, há uma pequena redução da altura real.

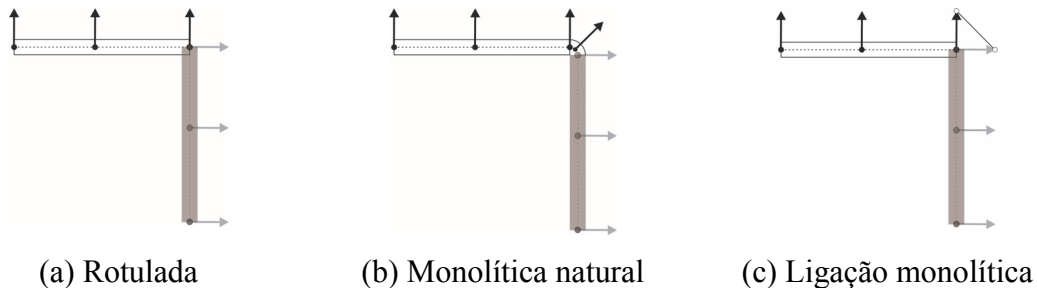


Figura 6.14 - Configurações que impossibilitam coincidir graus de liberdade $\Delta\theta^0 > 15^\circ$

Na figura 6.14 observa-se que o ângulo entre as barras com nó coincidente é grande e a distorção dos elementos adjacentes seria excessiva ao se tomar a bissetriz como direção inicial da seção transversal. Inclusive pode ocorrer inversão de material na configuração inicial, surgindo $J_0 < 0$, situação inadmissível. Como já comentado, para se fazer ligação rotulada, considera-se numeração diferente para os graus de liberdade dos vetores generalizados. Para ligação monolítica têm-se duas soluções, a natural, figura 6.14b, que utiliza elemento curvo para realizar a conexão com vetores coincidentes e a ligação monolítica imposta por penalização, figura 6.14c, que utiliza elemento de barra simples (treliça) com graus de liberdade correspondentes aos graus de liberdade dos vetores generalizados.

Nesse último caso, quando a rigidez do elemento de barra simples (penalização) é elevada a ligação pode ser considerada rígida, porém, pode-se utilizar a rigidez da barra de treliça para simular ligações semi-rígidas entre os nós, desde que o giro relativo entre as barras gerais não seja excessivo $|\Delta\theta - \Delta\theta^0| \leq 15^\circ$.

Quando houver mais de dois elementos conectados em apenas um nó, pode-se escolher um dos elementos como mestre e os vetores generalizados dos outros elementos estarão conectados por meio de barras simples ao vetor generalizado mestre. Deve-se tomar cuidado quando o ângulo entre dois vetores estiver entre 135° e 180° , nesse caso é melhor inverter a numeração de um dos elementos de forma a se ter ângulo entre 0° e 15° , fazendo-se a conexão por bissetriz.

Para se calcular a rigidez da barra simples que faz a conexão entre os vetores generalizados pode-se utilizar uma equivalência aproximada de energias de deformação.

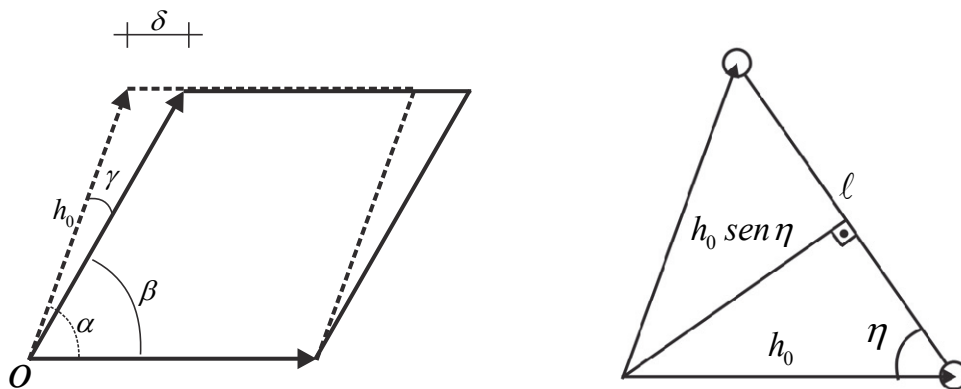


Figura 6.15 - Equivalência entre energias de deformação para definir rigidez de barra simples

Sem perda de generalidade, na figura 6.15 mostra-se o espaço compreendido entre duas barras conectadas pelo ponto O . No problema físico esse espaço é preenchido pelo material constituinte das barras gerais e, portanto, possui módulo de elasticidade transversal G conhecido e altura de seção transversal h_0 . Observa-se, na figura 6.15 que, após mudança de configuração, ocorre uma distorção desse espaço. Adotando-se genericamente a medida γ da figura como sendo a distorção do meio (adaptada da definição de distorção para $\alpha = \pi/2$) a energia específica de deformação de interesse fica escrita de forma simplista como:

$$u_e = \frac{1}{2} G \gamma^2 \quad (6.153)$$

e a energia de deformação em todo esse espaço, fica:

$$U_e^{sol} = \frac{1}{2} G_{sol} \gamma^2 h_0^2 b \operatorname{sen} \alpha \quad (6.154)$$

onde b é a largura da barra.

Para se calcular a rigidez da barra simples que deverá substituir o sólido que preenche o espaço, far-se-á uma equivalência entre as energias de deformação para a mobilidade de interesse. Calcula-se o comprimento inicial da barra e a distância do ponto de conexão e a barra como:

$$\ell = 2h_0 \cos \eta \quad \text{e} \quad d = h_0 \operatorname{sen} \eta \quad (6.155)$$

onde $\eta = (\pi - \alpha) / 2$.

A partir dessas dimensões calculam-se a variação do comprimento da barra em função de γ e a deformação longitudinal da barra como:

$$\Delta \ell = \gamma d = \gamma h_0 \operatorname{sen} \eta \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\Delta \ell}{\ell} = \gamma \operatorname{tg} \eta \quad (6.156)$$

A energia de deformação na barra é calculada como:

$$U_e^{barra} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 A \ell \quad \text{ou} \quad U_e^{barra} = \frac{1}{4} E \gamma^2 (\operatorname{tg} \eta)^2 \cos \eta A h_0 \quad (6.157)$$

igualando-se (6.157) e (6.154) e aplicando-se propriedades trigonométricas, resulta:

$$EA = 4G_{sol} (h_0 b) [\operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{sen}(\alpha/2)] \quad (6.158)$$

Quando o ângulo inicial entre as barras é $\pi/2$ tem-se $EA = 2\sqrt{2}G_{sol}h_0b$. Essa rigidez aproximada serve para garantir grandezas numéricas coerentes, assim, caso as barras gerais possuam alturas e / ou módulos de elasticidade diferentes, sugere-se que se

escolham valores médios para cálculo. Além disso, como γ é o giro relativo entre as seções, se escreve:

$$M = \frac{\partial U_e^{sol}}{\partial \gamma} = k\gamma = \gamma(G_{sol} h_0^2 b \text{sen}\alpha) \quad \text{donde} \quad G_{sol} = \frac{k}{h_0^2 b \text{sen}\alpha} \quad (6.159)$$

ou seja, caso se conheça uma rigidez desejada para uma mola de flexão pode-se calcular a rigidez de uma barra, dada por (6.158) para simular uma mola de ligação em pequenas rotações relativas, usando-se a última de (6.159).

Como o vetor generalizado não possui altura h_0 , mas sim unitária, chamada aqui de \bar{h} realiza-se uma correção na equação (6.158) dada por:

$$EA = 4G_{sol}(h_0 b) [\text{tg}(\alpha/2) \text{sen}(\alpha/2)] \frac{h_0}{\bar{h}} \quad (6.160)$$

Pode-se criar outro tipo de ligação semi-rígida baseada diretamente no giro relativo entre as barras gerais, mesmo usando vetores generalizados. Essa ligação permite grandes rotações relativas entre barras. Esse assunto foge aos objetivos desse livro e pode ser encontrado em artigos publicados pelo autor.

6.2.6 – Forças externas associadas aos vetores generalizados

Pelas equações (6.124), (6.133) e (6.138), e pelas ilustrações das figuras 6.9 e 6.11 infere-se que o vetor \bar{g}^ℓ adimensional da configuração atual, descreve o 'alongamento' da seção transversal do nó ℓ e seu giro. Assim, representa-se na figura 6.16 a decomposição do conjugado energético $\partial U_e / \partial \bar{g}$ nas componentes que possuem significado físico, ou seja, força de alongamento e binário.

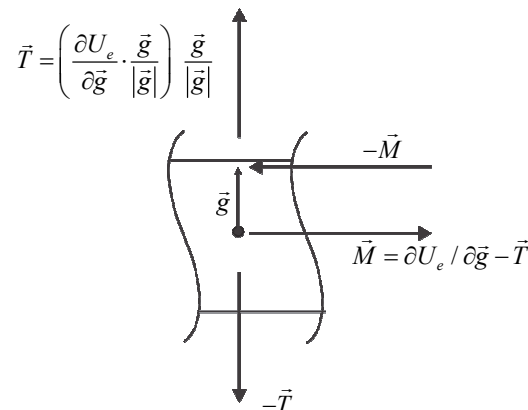


Figura 6.16 - Componentes com significado físico do conjugado energético do vetor generalizado

Na figura 6.16 o vetor \vec{g} é um vetor generalizado associado a um nó qualquer do elemento finito. A derivada do escalar U_e em relação \vec{g} , à luz das equações (6.124) e (6.138), resulta em um par de forças auto-equilibradas, cuja componente na direção de \vec{g} , chamada \vec{T} é responsável pelo estiramento ou encurtamento da seção transversal, já a componente ortogonal à \vec{g} , chamada \vec{M} , é responsável por um binário dado por:

$$\vec{m} = \vec{M} \wedge \vec{g} \quad (6.161)$$

Apesar do estiramento da seção transversal poder ocorrer, o módulo de \vec{g} será praticamente unitário. Assim $M = |\vec{M}| \cong m = |\vec{m}|$.

Finalmente, sabendo-se que no equilíbrio $\vec{F}^{int} - \vec{F}^{ext} = \vec{0}$ pode-se inferir que a aplicação de momento externo é realizada aplicando-se nas componentes F_3^α e F_4^α os seguintes valores:

$$F_3^\alpha = MY_4^\alpha \quad \text{e} \quad F_4^\alpha = -MY_3^\alpha \quad (6.162)$$

onde, aplicando-se a regra de montagem do vetor posição, usou-se $Y_3^\alpha = g_1$ e $Y_4^\alpha = g_2$.

Pode-se verificar a validade desses valores realizando-se o cálculo do momento resultante ao aplicá-los, como:

$$\vec{m} = \begin{vmatrix} F_3^\alpha & Y_3^\alpha & \vec{i} \\ F_4^\alpha & Y_4^\alpha & \vec{j} \\ 0 & 0 & \vec{k} \end{vmatrix} = (F_3^{(\alpha)}Y_4^\alpha - F_4^{(\alpha)}Y_3^\alpha) \vec{k} = M \left((Y_3^\alpha)^2 + (Y_4^\alpha)^2 \right) \vec{k} = M |\vec{g}^\alpha| \vec{k} = m \vec{k} \quad (6.163)$$

Lembrando-se que como $|\vec{g}| \cong 1$ e, portanto, $M \cong m$ sabe-se, de forma bastante simples, qual o momento está sendo aplicado. Deve-se observar que para a formulação em vetores generalizados, o momento é um carregamento não conservativo, pois depende da posição do vetor generalizado, veja equação (6.163). Porém, esse carregamento será tratado de forma conservativa, para tanto basta que ele seja atualizado no início de cada passo de carga (ou tempo) e seja considerado constante ao longo das iterações do método de Newton-Raphson. Sendo \vec{g} adimensional, \vec{M} tem estritamente unidade de força, mas seu valor corresponde ao valor de momento aplicado na unidade do problema analisado.

6.2.7 – Matriz Hessiana

Resolvido o problema de conexão dos vetores generalizados e considerando o carregamento como conservativo (por passo de carga quando houver momento aplicado), a matriz Hessiana do problema é encontrada pela montagem da matriz Hessiana de cada elemento finito, dada por:

$$H_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} = \sum_{i_g=1}^{ng_{\varepsilon 1}} \sum_{j_g=1}^{ng_{\varepsilon 2}} \frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta}(\xi_{1_{i_g}}, \xi_{2_{j_g}}) w_{i_g} w_{j_g} J_0(\xi_{1_{i_g}}, \xi_{2_{j_g}}) \quad (6.164)$$

ou

$$H_{ij}^{\alpha\beta} = \sum_{i_g=1}^{ng_{\varepsilon 1}} \sum_{j_g=1}^{ng_{\varepsilon 2}} h_{ij}^{\alpha\beta}(\xi_{1_{i_g}}, \xi_{2_{j_g}}) w_{i_g} w_{j_g} J_0(\xi_{1_{i_g}}, \xi_{2_{j_g}}) \quad \text{com} \quad h_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} \quad (6.165)$$

ou ainda, dos desenvolvimentos anteriores,

$$h_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} : \mathbf{e} : \frac{\partial E}{\partial Y_j^\beta} + S : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} \quad (6.166)$$

O termo $\partial E / \partial \bar{Y}$ foi descrito nas equações (6.150) até (6.152), a tensão de Piola-Kirchhoff será calculada como nas equações (4.142) até (4.146) faltando se apresentar o último termo da equação (6.158), já escrito nesse capítulo na equação (6.81) repetida aqui, como:.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma\zeta}} &= \frac{1}{2} \left((A^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (A^1)^t}{\partial Y_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial A^1}{\partial Y_{\gamma\zeta}} \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (A^1)^t}{\partial Y_{\gamma\zeta}} \cdot \frac{\partial A^1}{\partial Y_{\alpha\beta}} \cdot (A^0)^{-1} \right) + \\ &\left((A^0)^{-t} \cdot \frac{\partial^2 (A^1)^t}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma\zeta}} \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot \frac{\partial^2 A^1}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma\zeta}} \cdot (A^0)^{-1} \right) \end{aligned} \quad (6.167)$$

observando-se as equações (6.151) e (6.152) conclui-se que, tal como para o modelo sólido, tem-se:

$$\frac{\partial^2 A^1}{\partial \bar{Y} \otimes \partial \bar{Y}} = 0 \quad (6.168)$$

e, portanto, tem-se:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} = \frac{1}{2} \left((A^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (A^1)^t}{\partial Y_i^\alpha} \cdot \frac{\partial A^1}{\partial Y_j^\beta} \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (A^1)^t}{\partial Y_j^\beta} \cdot \frac{\partial A^1}{\partial Y_i^\alpha} \cdot (A^0)^{-1} \right) \quad (6.169)$$

onde as derivadas do mapeamento atual são conhecidas, veja as equações (6.151) e (6.152).

Lembra-se mais uma vez que o vetor de forças internas e a matriz Hessiana relativos aos elementos de barra simples, que conectam os graus de liberdade dos

vetores generalizados para a ligação monolítica, devem ser montados nos graus de liberdade correspondentes da força interna e matriz Hessiana globais.

6.2.8 – Problema de travamento e soluções.

Ao se decidir utilizar o modelo constitutivo (4.142), estado plano de tensões com coeficiente de Poisson não nulo, permite-se que ao sofrer tensões normais de flexão, as seções transversais se deformem na direção dos vetores generalizados. Essa deformação transversal à barra não é constante, mas sim linear (veja a figura 6.17), devido ao comportamento linear das tensões normais. Assim, o grau de liberdade de alongamento da seção transversal, fornecido pela variação do comprimento do vetor generalizado, não é suficiente para acomodar a deformação transversal, pois garante apenas comportamento constante para essa deformação.

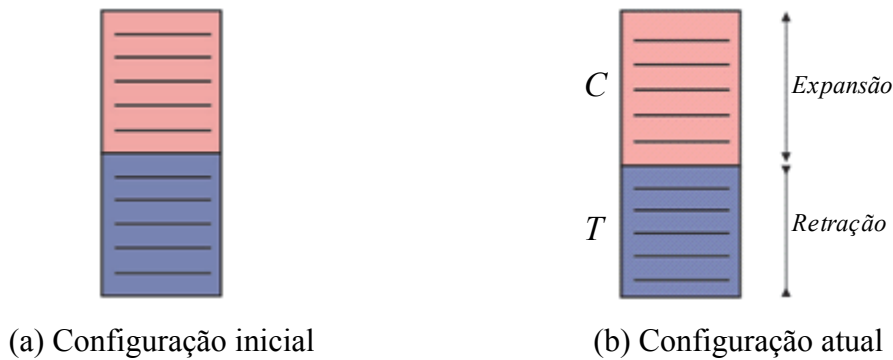


Figura 6.17 - Comportamento da seção transversal carregada

Duas soluções são possíveis. A primeira é assumir Poisson nulo no termo cruzado de (4.142), ou seja:

$$u_e = \frac{\mathcal{G}}{(1-\nu)} \left\{ E_{11}^2 + E_{22}^2 + (1-\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2) \right\} \quad (6.170)$$

reescrevendo-se (6.170) como:

$$u_e = \frac{\mathbb{E}}{2(1+\nu)(1-\nu)} (E_{11}^2 + E_{22}^2) + \mathcal{G} (E_{12}^2 + E_{21}^2) \quad (6.171)$$

e, caso se queira, pode-se assumir coeficiente de Poisson nulo no primeiro termo, resulta:

$$u_e = \frac{\mathbb{E}}{2} (E_{11}^2 + E_{22}^2) + \mathcal{G} (E_{12}^2 + E_{21}^2) \quad (6.172)$$

dessa forma as tensões de Piola Kirchhoff de segunda espécie ficam dadas por:

$$S_{11} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{11}} = \mathbb{E} E_{11} \quad \text{ou} \quad S_{11} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{11}} = \frac{\mathbb{E}}{2(1+\nu)(1-2\nu)} E_{11} \quad (6.173)$$

$$S_{22} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{22}} = \mathbb{E} E_{22} \quad \text{ou} \quad S_{22} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{22}} = \frac{\mathbb{E}}{2(1+\nu)(1-2\nu)} E_{22} \quad (6.174)$$

$$S_{12} = 2\mathcal{G} E_{12} \quad (6.175)$$

$$S_{21} = 2\mathcal{G} E_{21} \quad (6.176)$$

onde $\mathcal{G} = \mathbb{E} / 2(1 + \nu)$,

Essa solução é interessante para o elemento de barra geral, porém para elementos de casca a eliminação dos termos cruzados na lei constitutiva prejudica o comportamento de membrana da casca e deve ser evitado ou feito de forma mais apropriada.

A segunda alternativa é criar um grau de liberdade, chamado enriquecimento cinemático, capaz de garantir comportamento linear da deformação na direção dos vetores generalizado. Isto é feito reescrevendo-se a equação (6.137) como:

$$f_i^1(\xi_1, \xi_2) = y_i = \varphi_\ell(\xi_1) Y_i^\ell + \frac{h_0}{2} (\xi_2 + (\varphi_\ell(\xi_1) \bar{T}_\ell) \xi_2^2) \varphi_\ell(\xi_1) G_i^\ell \quad (6.177)$$

onde

$$T(\xi_1) = \varphi_\ell(\xi_1) \bar{T}_\ell \quad (6.178)$$

é chamada de componente linear de deformação na direção transversal da barra. Deve-se comentar que não há alteração no mapeamento da configuração inicial.

A partir de (6.177) o gradiente do mapeamento corrente fica dado por:

$$A^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\varphi_{\ell,1} Y_1^\ell + \frac{h_0}{2} (\xi_2 + (\varphi_\ell(\xi_1) \bar{T}_\ell) \xi_2^2) \varphi_{\ell,1} G_1^\ell + \frac{h_0}{2} (\varphi_{\ell,1}(\xi_1) \bar{T}_\ell) \xi_2^2 \varphi_\ell G_1^\ell \right) \\ \left(\varphi_{\ell,1} Y_2^\ell + \frac{h_0}{2} (\xi_2 + (\varphi_\ell(\xi_1) \bar{T}_\ell) \xi_2^2) \varphi_{\ell,1} G_2^\ell + \frac{h_0}{2} (\varphi_{\ell,1}(\xi_1) \bar{T}_\ell) \xi_2^2 \varphi_\ell G_2^\ell \right) \\ \left(\left(\frac{h_0}{2} + h_0 (\varphi_\ell(\xi_1) \bar{T}_\ell) \xi_2 \right) \varphi_\ell G_1^\ell \right) \\ \left(\left(\frac{h_0}{2} + h_0 (\varphi_\ell(\xi_1) \bar{T}_\ell) \xi_2 \right) \varphi_\ell G_2^\ell \right) \end{bmatrix} \quad (6.179)$$

Além disso, as derivadas desse gradiente em relação aos parâmetros nodais ficam:

$$\frac{\partial A^1}{\partial Y_1^\alpha} = \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A^1}{\partial Y_2^\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_{\alpha,1} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.180)$$

$$\frac{\partial A^1}{\partial G_1^\alpha} = \begin{bmatrix} \left(\frac{h_0}{2} (\xi_2 + (\varphi_\ell(\xi_1) \bar{T}_\ell) \xi_2^2) \varphi_{\alpha,1} + \frac{h_0}{2} (\varphi_{\ell,1}(\xi_1) \bar{T}_\ell) \xi_2^2 \varphi_\alpha \right) \left(\left(\frac{h_0}{2} + h_0 (\varphi_\ell(\xi_1) \bar{T}_\ell) \xi_2 \right) \varphi_\alpha \right) & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.181)$$

$$\frac{\partial A^1}{\partial G_2^\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \left(\frac{h_0}{2} (\xi_2 + (\varphi_\ell(\xi_1) \bar{T}_\ell) \xi_2^2) \varphi_{\alpha,1} + \frac{h_0}{2} (\varphi_{\ell,1}(\xi_1) \bar{T}_\ell) \xi_2^2 \varphi_\alpha \right) \left(\left(\frac{h_0}{2} + h_0 (\varphi_\ell(\xi_1) \bar{T}_\ell) \xi_2 \right) \varphi_\alpha \right) & \end{bmatrix} \quad (6.182)$$

$$\frac{\partial A^1}{\partial T_\alpha} = \begin{bmatrix} \left(\frac{h_0}{2} ((\varphi_\alpha(\xi_1) \xi_2^2) \varphi_{\ell,1} G_1^\ell + \frac{h_0}{2} (\varphi_{\alpha,1}(\xi_1)) \xi_2^2 \varphi_\ell G_1^\ell) \right) (h_0 \varphi_\alpha(\xi_1) \xi_2) \varphi_\ell G_1^\ell & \\ \left(\frac{h_0}{2} ((\varphi_\alpha(\xi_1)) \xi_2^2) \varphi_{\ell,1} G_2^\ell + \frac{h_0}{2} (\varphi_{\alpha,1}(\xi_1)) \xi_2^2 \varphi_\ell G_2^\ell) \right) (h_0 \varphi_\alpha(\xi_1) \xi_2) \varphi_\ell G_2^\ell & \end{bmatrix} \quad (6.183)$$

Para a construção da matriz Hessiana deve-se proceder a segunda derivada de A^1 em relação às posições. Os únicos termos não nulos são os cruzados em \vec{G} e T , ou seja:

$$\frac{\partial^2 A^1}{\partial g_1^\alpha T_\beta} = \begin{bmatrix} \left(\frac{h_0}{2} (\xi_2 + \varphi_\beta(\xi_1) \xi_2^2) \varphi_{\alpha,1} + \frac{h_0}{2} \varphi_{\beta,1}(\xi_1) \xi_2^2 \varphi_\alpha \right) \left(\left(\frac{h_0}{2} + h_0 \varphi_\beta(\xi_1) \xi_2 \right) \varphi_\alpha \right) & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.184)$$

$$\frac{\partial^2 A^1}{\partial g_1^\beta T_\alpha} = \begin{bmatrix} \left(\frac{h_0}{2} (\xi_2 + \varphi_\alpha(\xi_1) \xi_2^2) \varphi_{\beta,1} + \frac{h_0}{2} \varphi_{\alpha,1}(\xi_1) \xi_2^2 \varphi_\beta \right) \left(\left(\frac{h_0}{2} + h_0 \varphi_\alpha(\xi_1) \xi_2 \right) \varphi_\beta \right) & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.185)$$

$$\frac{\partial^2 A^1}{\partial g_2^\alpha T_\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \left(\frac{h_0}{2} (\xi_2 + \varphi_\beta(\xi_1) \xi_2^2) \varphi_{\alpha,1} + \frac{h_0}{2} \varphi_{\beta,1}(\xi_1) \xi_2^2 \varphi_\alpha \right) \left(\left(\frac{h_0}{2} + h_0 \varphi_\beta(\xi_1) \xi_2 \right) \varphi_\alpha \right) & \end{bmatrix} \quad (6.186)$$

$$\frac{\partial^2 A^1}{\partial g_2^\beta T_\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \left(\frac{h_0}{2} (\xi_2 + \varphi_\alpha(\xi_1) \xi_2^2) \varphi_{\beta,1} + \frac{h_0}{2} \varphi_{\alpha,1}(\xi_1) \xi_2^2 \varphi_\beta \right) \left(\left(\frac{h_0}{2} + h_0 \varphi_\alpha(\xi_1) \xi_2 \right) \varphi_\beta \right) & \end{bmatrix} \quad (6.187)$$

finalizando o cálculo de todas as variáveis necessárias para impedir o travamento volumétrico no elemento de barra geral 2D utilizando-se vetores generalizados e lei constitutiva completa de Saint-Venant-Kirchhoff.

6.2.9 – Comentários finais.

Como os vetores generalizados das barras são as variáveis corrigidas no processo iterativo de solução, ao contrário do uso das posições angulares, sua

atualização se dá de forma direta, como feita para as posições. O carregamento transversal e a matriz de massa são calculados considerando-se a linha de referência e, portanto, idênticos ao elemento de barra geral baseado em posição angular. O acréscimo de inércia de rotação não pode ser feito como o foi para giro. Caso se deseje considerá-la, deve-se realizar a integração total da densidade no sólido, gerando termos complicados e matriz de massa variável no tempo. Dispensa-se a matriz de massa completa, limitando-se o uso de elementos de barra geral para $L \geq 10h$.

No processo iterativo o vetor generalizado não possui a mesma métrica das posições, assim, uma das alternativas para o cálculo do vetor resíduo $\Delta\bar{Y}$ é não considerar o vetor generalizado. Outra alternativa é fazer uma norma de parada separada para o vetor generalizado e admitir convergência quando posição e vetores generalizados convergirem. Uma terceira alternativa é fazer uma alteração no cálculo da norma para que o que o valor considerado no cálculo da norma de parada contemple a altura da barra, ou seja, substitui-se \bar{v}^ℓ por $h_0\bar{v}^\ell$ (inicial) e \bar{g}^ℓ por $h_0\bar{g}^\ell$ (atual) no cálculo da norma de convergência, tornando-a única.

6.3 – Elemento de casca

Chama-se casca um sólido que possui uma de suas dimensões muito menor que as outras. Neste item, apresenta-se a cinemática de casca incluindo-se o termo de enriquecimento que considera comportamento linear de deformação na direção transversal, como mostrado na equação (6.177) para o elemento de barra geral. Na sequência, mostra-se uma alternativa de relaxamento da Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhof que permite se dispensar o enriquecimento transversal da cinemática. Observa-se, entretanto, que para relações constitutivas mais complexas, veja final do capítulo 4, o caminho mais simples é manter o enriquecimento necessário.

6.3.1 – Mapeamentos e gradiente da função mudança de configuração

Pode-se aproximar a superfície média de uma casca em suas configurações inicial e atual, veja a figura 6.18, pelos seguintes mapeamentos:

$$f_i^{m0} = x_i^m(\xi_1, \xi_2, X_{ti}) = \phi_\ell(\xi_1, \xi_2)X_{ti} \quad (6.188)$$

$$f_i^{m1} = y_i^m(\xi_1, \xi_2, Y_{ti}) = \phi_\ell(\xi_1, \xi_2)Y_{ti} \quad (6.189)$$

onde x_i^m é a coordenada genérica de um ponto na superfície média da configuração inicial, $X_{\ell i}$ é a coordenada i de um nó ℓ na configuração inicial, y_i^m é a coordenada genérica de um ponto na superfície média atual da casca, $Y_{\ell i}$ é a coordenada atual i de um nó ℓ na posição atual. As funções de forma $\phi_i(\xi_1, \xi_2)$ podem ser de qualquer ordem, entretanto, pela experiência do autor, uma boa escolha é a aproximação cubica de base triangular, já utilizada com bastante detalhe no capítulo 5.

Na figura 6.18 pode-se observar que \vec{f}^{m0} é o mapeamento do espaço adimensional para a configuração inicial da superfície média da casca, enquanto \vec{f}^{m1} é o mapeamento posicional da superfície média atual, assim, \vec{f}^m é o mapeamento da superfície média inicial para a superfície média atual da casca. Apenas para ser completo, na figura 6.18 mostram-se também os gradientes desses mapeamentos, ou seja, A^{m0} , A^{m1} , A^m .

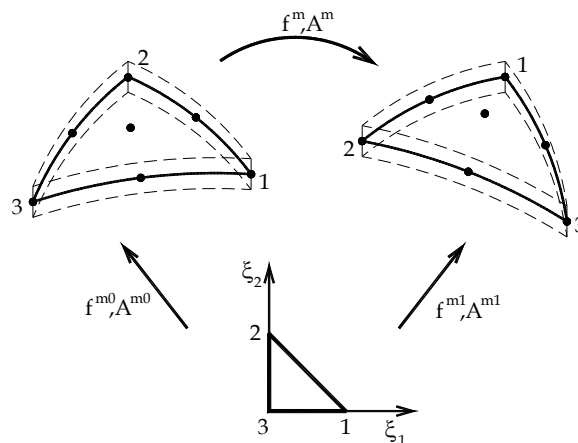


Figura 6.18 – Mapeamento da superfície média

Para completar a descrição da casca pelo método dos elementos finitos posicional, tanto para a configuração inicial, quanto para a configuração atual, observa-se que a posição de um ponto qualquer, no interior da casca, pode ser escrita como a soma da posição de um ponto na superfície média com um vetor genérico \vec{g}^0 ou \vec{g}^1 , veja a figura 6.19. Deve-se observar a alteração da notação, sendo os vetores com letras minúsculas agora vetores com dimensão no domínio do corpo, enquanto os versores adimensionais serão representados com letras maiúsculas.

As posições inicial e atual de um ponto qualquer ficam escritas como:

$$x_i = x_i^m + g_i^0 \quad (6.190)$$

$$y_i = y_i^m + g_i^1 \quad (6.191)$$

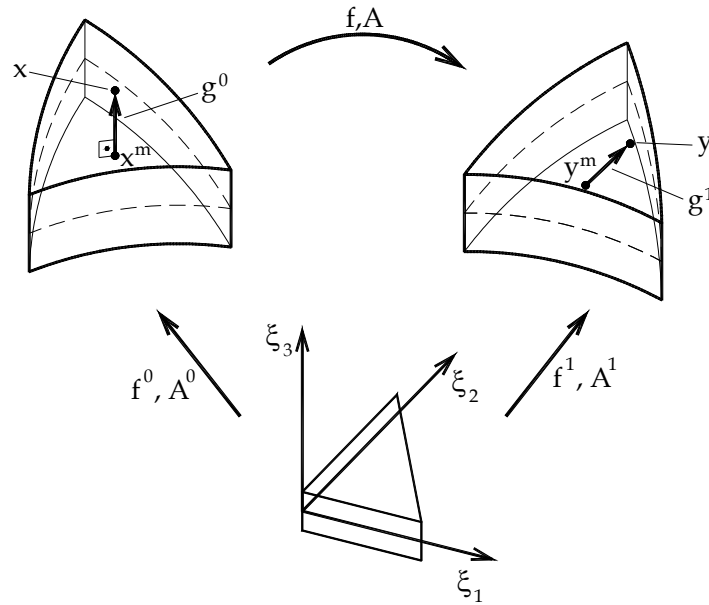


Figura 6.19 – Vetores posição ou generalizados

Quando a variação da espessura da casca for constante com referência à coordenada adimensional ξ_3 , podem-se escrever os vetores \bar{g}^0 ou \bar{g}^1 em função das coordenadas adimensionais, como:

$$g_i^0(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{h_0}{2} \xi_3 \right) V_{it} \phi_t(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{h_0}{2} \xi_3 \right) v_i(\xi_1, \xi_2) \quad (6.192)$$

$$g_i^1(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{h_0}{2} \xi_3 \right) G_{it} \phi_t(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{h_0}{2} \xi_3 \right) g_i(\xi_1, \xi_2) \quad (6.193)$$

onde se utilizou V_{it} como valores nodais conhecidos dos versores adimensionais nodais da configuração inicial e G_{it} e como parâmetros nodais desconhecidos dos vetores generalizados adimensionais na configuração atual. Como no elemento de barra geral 2D, considera-se a altura inicial do elemento de casca h_0 constante. A altura na configuração atual pode ser recuperada fazendo-se:

$$h(\xi_1, \xi_2) = h_0 |\bar{g}(\xi_1, \xi_2)| \quad (6.194)$$

Para se introduzir a variação linear da deformação segundo a direção transversal, um novo escalar, $a(\xi_1, \xi_2)$, chamado taxa de variação linear na espessura, deve ser incluído na expressão do vetor generalizado atual, como:

$$g_i^1 = \frac{h_0}{2} \left[\xi_3 + a(\xi_1, \xi_2) \xi_3^2 \right] \phi_\ell(\xi_1, \xi_2) G_{i\ell} \quad (6.195)$$

Substituindo-se as equações (6.192) e (6.195) nas equações (6.190) e (6.191), resultam os mapeamentos:

$$f_i^0 = x_i = \phi_\ell(\xi_1, \xi_2) X_{i\ell} + \frac{h_0}{2} \xi_3 \phi_\ell(\xi_1, \xi_2) V_{i\ell} \quad (6.196)$$

$$f_i^1 = y_i = \phi_\ell(\xi_1, \xi_2) Y_{i\ell} + \frac{h_0}{2} \left[\xi_3 + \phi_\ell(\xi_1, \xi_2) A_\ell \xi_3^2 \right] \phi_\ell(\xi_1, \xi_2) G_{i\ell} \quad (6.197)$$

onde a taxa de variação linear também foi parametrizada por valores nodais, como

$$a(\xi_1, \xi_2) = \phi_\ell(\xi_1, \xi_2) A_\ell \quad (6.198)$$

As equações (6.196) e (6.197) são os mapeamentos posicionais para casca e os parâmetros incógnitos por nó são sete, ou seja: três posições $Y_{i\ell}$, três componentes do vetor generalizado $G_{i\ell}$ e o valor nodal da variação linear da deformação na espessura A_ℓ .

6.3.2 – Derivadas do gradiente da função mudança de configuração

Apesar de já ter sido descrita várias vezes, a mudança de configuração da configuração inicial para a atual é feita pela composição:

$$\vec{f} = \vec{f}^1 \circ (\vec{f}^0)^{-1} \quad (6.199)$$

e seu gradiente é dado por:

$$A = A^1 \cdot (A^0)^{-1} \quad (6.200)$$

com A^0 sendo uma matriz numérica (3x3) dada por:

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} \quad (6.201)$$

e A^1 calculado na forma de tentativa pela expressão:

$$A_{ij}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} \quad (6.202)$$

o cálculo das componentes de A^0 é trivial e deixado para o leitor, já os termos de A^1 são mostrados na sequência:

$$A_{i1}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_1} = \phi_{\ell,1} Y_{li} + \frac{h_0}{2} [\phi_{\ell,1} A_\ell \xi_3^2] \phi_\ell G_{i\ell} + \frac{h_0}{2} [\xi_3 + \phi_\ell A_\ell \xi_3^2] \phi_{\ell,1} G_{i\ell} \quad (6.203)$$

$$A_{i2}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_2} = \phi_{\ell,2} Y_{li} + \frac{h_0}{2} [\phi_{\ell,2} A_\ell \xi_3^2] \phi_\ell G_{i\ell} + \frac{h_0}{2} [\xi_3 + \phi_\ell A_\ell \xi_3^2] \phi_{\ell,2} G_{i\ell} \quad (6.204)$$

$$A_{i3}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_3} = \frac{h_0}{2} [1 + 2\phi_\ell A_\ell \xi_3] \phi_\ell G_{i\ell} \quad (6.205)$$

Lembrando-se que para o cálculo das forças internas realizam-se as derivadas da energia de deformação, e, portanto, das deformações de Green em relação às posições nodais; e lembrando-se que apenas a parcela A^1 que compõe a deformação de Green, depende dessas posições, escrevem-se:

$$\frac{\partial A_{11}^1}{\partial Y_{\alpha 1}} = \phi_{\alpha,1}(\xi_1, \xi_2), \quad \frac{\partial A_{12}^1}{\partial Y_{\alpha 1}} = \phi_{\alpha,2}(\xi_1, \xi_2) \quad (6.206)$$

$$\frac{\partial A_{21}^1}{\partial Y_{\alpha 2}} = \phi_{\alpha,1}(\xi_1, \xi_2), \quad \frac{\partial A_{22}^1}{\partial Y_{\alpha 2}} = \phi_{\alpha,2}(\xi_1, \xi_2) \quad (6.207)$$

$$\frac{\partial A_{31}^1}{\partial Y_{\alpha 3}} = \phi_{\alpha,1}(\xi_1, \xi_2), \quad \frac{\partial A_{32}^1}{\partial Y_{\alpha 3}} = \phi_{\alpha,2}(\xi_1, \xi_2) \quad (6.208)$$

$$\frac{\partial A_{i1}^1}{\partial Y_{\alpha 4}} = \frac{h_0}{2} [\phi_{\alpha,1} \xi_3^2] \phi_\ell G_{i\ell} + \frac{h_0}{2} [\xi_3 + \phi_\alpha \xi_3^2] \phi_{\ell,1} G_{i\ell} \quad (6.209)$$

$$\frac{\partial A_{i2}^1}{\partial Y_{\alpha 4}} = \frac{h_0}{2} [\phi_{\alpha,2} \xi_3^2] \phi_\ell G_{i\ell} + \frac{h_0}{2} [\xi_3 + \phi_\alpha \xi_3^2] \phi_{\ell,2} G_{i\ell} \quad (6.210)$$

$$\frac{\partial A_{i3}^1}{\partial Y_{\alpha 4}} = \frac{h_0}{2} [2\phi_\alpha \xi_3] \phi_\ell G_{i\ell} \quad (6.211)$$

$$\frac{\partial A_{11}^1}{\partial Y_{\alpha 5}} = \frac{h_0}{2} [\phi_{\ell,1} A_\ell \xi_3^2] \phi_\alpha + \frac{h_0}{2} [\xi_3 + \phi_\ell A_\ell \xi_3^2] \phi_{\alpha,1} \quad (6.212)$$

$$\frac{\partial A_{21}^1}{\partial Y_{\alpha 6}} = \frac{h_0}{2} [\phi_{\ell,1} A_\ell \xi_3^2] \phi_\alpha + \frac{h_0}{2} [\xi_3 + \phi_\ell A_\ell \xi_3^2] \phi_{\alpha,1} \quad (6.213)$$

$$\frac{\partial A_{31}^1}{\partial Y_{\alpha 7}} = \frac{h_0}{2} [\phi_{\ell,1} A_\ell \xi_3^2] \phi_\alpha + \frac{h_0}{2} [\xi_3 + \phi_\ell A_\ell \xi_3^2] \phi_{\alpha,1} \quad (6.214)$$

$$\frac{\partial A_{12}^1}{\partial Y_{\alpha 5}} = \frac{h_0}{2} [\phi_{\ell,2} A_\ell \xi_3^2] \phi_\alpha + \frac{h_0}{2} [\xi_3 + \phi_\ell A_\ell \xi_3^2] \phi_{\alpha,2} \quad (6.215)$$

$$\frac{\partial A_{22}^1}{\partial Y_{\alpha 6}} = \frac{h_0}{2} [\phi_{\ell,2} A_\ell \xi_3^2] \phi_\alpha + \frac{h_0}{2} [\xi_3 + \phi_\ell A_\ell \xi_3^2] \phi_{\alpha,2} \quad (6.216)$$

$$\frac{\partial A_{32}^1}{\partial Y_{\alpha 7}} = \frac{h_0}{2} [\phi_{\ell,2} A_{\ell} \xi_3^2] \phi_{\alpha} + \frac{h_0}{2} [\xi_3 + \phi_{\ell} A_{\ell} \xi_3^2] \phi_{\alpha,2} \quad (6.217)$$

$$\frac{\partial A_{13}^1}{\partial Y_{\alpha 5}} = \frac{h_0}{2} [1 + 2\phi_{\ell} A_{\ell} \xi_3] \phi_{\alpha} \quad (6.218)$$

$$\frac{\partial A_{23}^1}{\partial Y_{\alpha 6}} = \frac{h_0}{2} [1 + 2\phi_{\ell} A_{\ell} \xi_3] \phi_{\alpha} \quad (6.219)$$

$$\frac{\partial A_{33}^1}{\partial Y_{\alpha 7}} = \frac{h_0}{2} [1 + 2\phi_{\ell} A_{\ell} \xi_3] \phi_{\alpha} \quad (6.220)$$

onde a seguinte correspondência de graus de liberdade foi seguida:

$$\left\{ Y_{\ell 1}, Y_{\ell 2}, Y_{\ell 3}, Y_{\ell 4}, Y_{\ell 5}, Y_{\ell 6}, Y_{\ell 7} \right\} = \{ Y_{\ell 1}, Y_{\ell 2}, Y_{\ell 3}, A_{\ell 4}, G_{\ell 1}, G_{\ell 2}, G_{\ell 3} \} \quad (6.221)$$

Para o cálculo da matriz Hessiana calculam-se as segundas derivadas, não nulas, dos termos cruzados para nós γ e α :

$$\frac{\partial^2 A_{33}^1}{\partial Y_{\alpha 7} \partial Y_{\gamma 4}} = h_0 \phi_{\gamma} \phi_{\alpha} \xi_3, \quad \frac{\partial^2 A_{23}^1}{\partial Y_{\alpha 6} \partial Y_{\gamma 4}} = h_0 \phi_{\gamma} \phi_{\alpha} \xi_3, \quad \frac{\partial^2 A_{13}^1}{\partial Y_{\alpha 5} \partial Y_{\gamma 4}} = h_0 \phi_{\gamma} \phi_{\alpha} \xi_3 \quad (6.222)$$

$$\frac{\partial^2 A_{32}^1}{\partial Y_{\alpha 7} \partial Y_{\gamma 4}} = \frac{h_0}{2} [\phi_{\gamma,2} \xi_3^2] \phi_{\alpha} + \frac{h_0}{2} [\phi_{\gamma} \xi_3^2] \phi_{\alpha,2} \quad (6.223)$$

$$\frac{\partial^2 A_{22}^1}{\partial Y_{\alpha 6} \partial Y_{\gamma 4}} = \frac{h_0}{2} [\phi_{\gamma,2} \xi_3^2] \phi_{\alpha} + \frac{h_0}{2} [\phi_{\gamma} \xi_3^2] \phi_{\alpha,2} \quad (6.224)$$

$$\frac{\partial^2 A_{12}^1}{\partial Y_{\alpha 5} \partial Y_{\gamma 4}} = \frac{h_0}{2} [\phi_{\gamma,2} \xi_3^2] \phi_{\alpha} + \frac{h_0}{2} [\phi_{\gamma} \xi_3^2] \phi_{\alpha,2} \quad (6.225)$$

$$\frac{\partial^2 A_{31}^1}{\partial Y_{\alpha 7} \partial Y_{\gamma 4}} = \frac{h_0}{2} [\phi_{\gamma,1} \xi_3^2] \phi_{\alpha} + \frac{h_0}{2} [\phi_{\gamma} \xi_3^2] \phi_{\alpha,1} \quad (6.226)$$

$$\frac{\partial^2 A_{21}^1}{\partial Y_{\alpha 6} \partial Y_{\gamma 4}} = \frac{h_0}{2} [\phi_{\gamma,1} \xi_3^2] \phi_{\alpha} + \frac{h_0}{2} [\phi_{\gamma} \xi_3^2] \phi_{\alpha,1} \quad (6.227)$$

$$\frac{\partial^2 A_{11}^1}{\partial Y_{\alpha 5} \partial Y_{\gamma 4}} = \frac{h_0}{2} [\phi_{\gamma,1} \xi_3^2] \phi_{\alpha} + \frac{h_0}{2} [\phi_{\gamma} \xi_3^2] \phi_{\alpha,1} \quad (6.228)$$

Observar que todas as segundas derivadas que envolvem as posições de translação são nulas e que todas as segundas derivadas sobre a mesma variável também são nulas.

6.3.4 – Relaxamento da lei constitutiva para prescindir do enriquecimento em deformações

No item relacionado aos desenvolvimentos do elemento de barra geral 2D baseado em vetores generalizados, mostrou-se que adotar coeficiente de Poisson nulo em parte da lei constitutiva, veja equação (6.174), pode resolver o problema de travamento volumétrico.

No elemento de casca isso também pode ser feito eliminando-se, em um material escrito como transversalmente isotrópico, o coeficiente de Poisson que relaciona as tensões paralelas ao plano da casca com a deformação longitudinal segundo a direção transversal. Deve-se destacar que aqui se está falando da lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff, que relaciona linearmente as tensões de Piola-Kirchhoff com as deformações de Green, tendo como referência a configuração inicial do corpo analisado. Para modelos constitutivos mais complexos, veja final do capítulo 4, o que é descrito deve ser adaptado ou aprimorado em trabalhos futuros do leitor.

Recorda-se que a Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff fica escrita nas coordenadas globais como:

$$u_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathfrak{C} : \mathbf{E} \quad \text{ou} \quad \mathbf{S} = \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} = \mathfrak{C} : \mathbf{E} \quad (6.229)$$

onde \mathfrak{C} é o tensor constitutivo elástico.

Para materiais transversalmente isotrópicos, considerar a direção ortogonal à superfície média da casca como a direção ortotrópica implica que as direções paralelas à superfície da casca formam o plano (ou superfície) de isotropia. Para esse tipo de material, considerando-se um sistema de coordenadas locais segundo os eixos de ortotropia, escreve-se:

$$u_e = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}} : \bar{\mathfrak{C}} : \bar{\mathbf{E}} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{S}} = \frac{\partial u_e}{\partial \bar{\mathbf{E}}} = \bar{\mathfrak{C}} : \bar{\mathbf{E}} \quad (6.230)$$

onde $\bar{\mathfrak{C}}$ é o tensor constitutivo elástico na coordenada local que, em notação de Voigt, pode ser escrito na sua forma inversa como:

$$\begin{Bmatrix} \bar{E}_{11} \\ \bar{E}_{22} \\ \bar{E}_{33} \\ \bar{E}_{23} \\ \bar{E}_{13} \\ \bar{E}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{33} \\ \bar{S}_{23} \\ \bar{S}_{13} \\ \bar{S}_{12} \end{Bmatrix} \quad (6.231)$$

Pela simetria, $E_1\nu_{13} = E_3\nu_{31}$ e $E_1\nu_{12} = E_2\nu_{21}$. A penalização é feita considerando-se $\nu_{31} = \nu_{13} = \nu_{12} = \nu_{21} = 0$, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \bar{E}_{11} \\ \bar{E}_{22} \\ \bar{E}_{33} \\ \bar{E}_{23} \\ \bar{E}_{13} \\ \bar{E}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{33} \\ \bar{S}_{23} \\ \bar{S}_{13} \\ \bar{S}_{12} \end{Bmatrix} \quad (6.232)$$

Para se efetivar a penalização seletiva do modelo constitutivo, basta se determinar a direção ortogonal à superfície da casca, na configuração inicial, \vec{V}^3 sobre um ponto de integração P definido a partir das coordenadas adimensionais (ξ_1^P, ξ_2^P) e monta-se o sistema de coordenadas local, veja a figura 6.20. Na sequência, aplica-se o equacionamento energético do MEF posicional nas coordenadas locais do ponto de integração, gerando as contribuições de força interna e matriz hessiana nas coordenadas dos pontos de integração. Essas contribuições são rotacionadas e somadas no sistema de referência global.

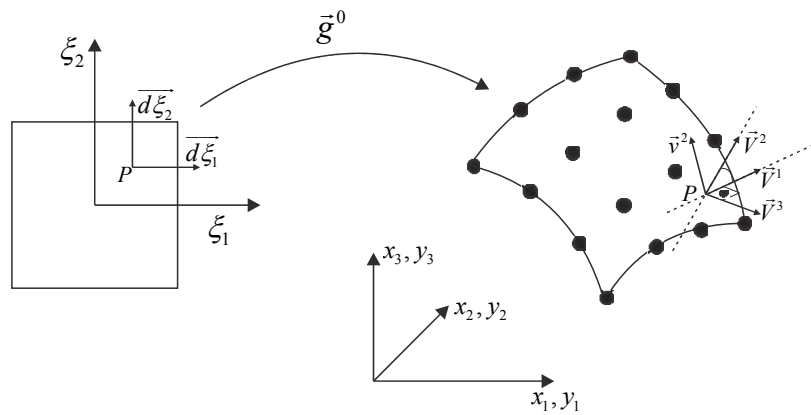


Figura 6.20 - Definição do plano tangente de isotropia em um ponto de integração P .

A representação esquemática da figura 6.20 é feita usando-se elemento de base quadrangular, porém, as deduções são válidas para qualquer caso, incluindo o elemento de aproximação cúbica de base triangular, recomendado pelo autor.

Para se escrever o sistema local calculam-se os vetores tangentes iniciais como:

$$V_i^1 = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \phi_\ell}{\partial \xi_1} X_i^\ell \quad \text{e} \quad V_i^2 = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \phi_\ell}{\partial \xi_2} X_i^\ell \quad (6.233)$$

sendo o vetor normal dado por:

$$\vec{V}^3 = \vec{V}^1 \wedge \vec{V}^2 \quad (6.234)$$

Normaliza-se \vec{V}^1 e \vec{V}^3 como:

$$\vec{v}^1 = \vec{V}^1 / |\vec{V}^1| \quad \text{e} \quad \vec{v}^3 = \vec{V}^3 / |\vec{V}^3| \quad (6.235)$$

e calcula-se

$$\vec{v}^2 = \vec{v}^3 \wedge \vec{v}^1 \quad (6.236)$$

Utilizando-se esses vetores, escreve-se a matriz de rotação,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \\ v_3^1 & v_3^2 & v_3^3 \end{bmatrix} \quad (6.237)$$

que, pelo fato da formulação ser Lagrangiana total, transforma as coordenadas locais \bar{X}_i e \bar{Y}_i segundo a base $(\vec{v}^1, \vec{v}^2, \vec{v}^3)$ nas coordenadas globais X_i e Y_i da seguinte forma:

$$\bar{X} = \mathbf{R} \cdot \bar{\bar{X}} \quad \text{e} \quad \bar{Y} = \mathbf{R} \cdot \bar{\bar{Y}} \quad (6.238)$$

ou, inversamente,

$$\bar{\bar{X}} = \mathbf{R}' \cdot \bar{X} \quad \text{e} \quad \bar{\bar{Y}} = \mathbf{R}' \cdot \bar{Y} \quad (6.239)$$

Utilizando-se para cada ponto de integração a correspondente matriz de rotação \mathbf{R} como na equação (6.239), transformam-se as coordenadas de todos os nós do elemento para as coordenadas locais de um ponto de integração e se escrevem os gradientes dos mapeamentos como:

$$\bar{A}^0 = \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{\xi}} \quad \text{e} \quad \bar{A}^1 = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{\xi}} \quad (6.240)$$

onde valem as expressões usadas nos cálculos relativos às coordenadas globais. Assim, tem-se que:

$$\bar{A} = \bar{A}^1 \cdot (\bar{A}^0)^{-1} \quad \text{e} \quad \bar{E} = \frac{1}{2} (\bar{A}' \cdot \bar{A} - \mathbf{I}) \quad (6.241)$$

Além disso, se escrevem $\frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \bar{Y}_\gamma^\eta}$ e $\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{E}}}{\partial \bar{Y}^\beta \otimes \partial \bar{Y}^\eta}$ (onde β e η representam nós),

exatamente como feito para coordenadas globais. Antes de se proceder a integração numérica realizam-se as rotações inversas,

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \bar{Y}_\gamma^\eta} \frac{\partial \bar{Y}_\gamma^\eta}{\partial Y_\alpha^\beta} = R_{\gamma\alpha} \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \bar{Y}_\gamma^\eta} \delta_{\eta\beta} = R_{\gamma\alpha} \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \bar{Y}_\gamma^\beta} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \bar{Y}^\beta} = \mathbf{R}^t \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \bar{Y}^\beta} \quad (6.242)$$

e

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \bar{Y}^\beta \otimes \partial \bar{Y}^\eta} = \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \bar{Y}^\beta \otimes \partial \bar{Y}^\eta} \cdot \mathbf{R}^t \quad (6.243)$$

para se constituir a força interna e matriz Hessiana do elemento nas coordenadas globais.

Esse procedimento pode ser melhorado para considerar materiais ortotrópicos segundo superfícies paralelas à superfície média da casca. Deve-se observar, entretanto, que nesse caso os vetores $\bar{\mathbf{v}}^1$ e $\bar{\mathbf{v}}^2$ devem ser adequadamente posicionados no espaço 3D, respeitando as direções de ortotropia do corpo modelado.

6.3.5 - Tensões internas e esforços solicitantes:

Retornando-se para o caso enriquecido do item 6.3.3, após a convergência, conhecem-se as posições atuais do corpo e, portanto, o tensor de deformações de Green calculado pela expressão (6.44). A partir da deformação de Green conhece-se o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, nas coordenadas globais calculado pela equação (6.229).

De posse do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff calcula-se o tensor de tensões de Cauchy utilizando-se a equação (4.119), transcrita a seguir:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^t \quad (4.119)$$

onde

$$J = \frac{J_1}{J_0} = \frac{\text{Det}(\mathbf{A}^1)}{\text{Det}(\mathbf{A}^0)} \quad (6.114)$$

Observa-se que a tensão de Cauchy, como indicada, está calculada segundo as direções dos eixos globais. Para a melhor interpretação dos resultados em tensão, ou mesmo para o cálculo dos esforços solicitantes, é preferível que se escrevam as tensões de Cauchy segundo os eixos locais, ou seja, utilizando-se a equação (6.230). Os eixos

locais são definidos de forma semelhante às direções de ortotropia mas na configuração atual, sendo a direção do vetor gerador da casca sempre uma dessas direções. Assim, os esforços solicitantes de cascas ou placas são calculados como:

$$\bar{m}_{22} = \int_{-1}^1 \bar{\sigma}_{11} \frac{h_0}{2} \xi_3 J_{\xi_3} d\xi_3, \bar{m}_{11} = \int_{-1}^1 \bar{\sigma}_{22} \frac{h_0}{2} \xi_3 J_{\xi_3} d\xi_3, \bar{m}_{12} = \int_{-1}^1 \bar{\sigma}_{12} \frac{h_0}{2} \xi_3 J_{\xi_3} d\xi_3 \quad (a)$$

$$\bar{q}_{13} = \int_{-1}^1 \bar{\sigma}_{13} J_{\xi_3} d\xi_3, \bar{q}_{23} = \int_{-1}^1 \bar{\sigma}_{23} J_{\xi_3} d\xi_3, \bar{n}_{11} = \int_{-1}^1 \bar{\sigma}_{11} J_{\xi_3} d\xi_3, \bar{n}_{22} = \int_{-1}^1 \bar{\sigma}_{22} J_{\xi_3} |\bar{g}| d\xi_3 \quad (b)$$

onde $J_{\xi_3} = |\bar{g}(\xi_1, \xi_2)| h_0 / 2$ onde \bar{g} foi definido na equação (6.193). E podem ser graficados usando diagrama de cores na configuração inicial para facilitar a leitura. É importante notar que esforços solicitantes são informações de interesse aos projetistas de estruturas, mas o cálculo das tensões ponto a ponto traz muito mais informações do que o próprio esforço solicitante. O cálculo direto das tensões possibilita o uso de muito mais recursos do software desenvolvido, como critérios de resistência, regras de evolução de plasticidade ou dano etc, que fogem ao objetivo desse livro introdutório.

Deve-se observar que, no caso sem enriquecimento, item 6.3.4 as tensões seriam calculadas diretamente nas coordenadas locais pela equação (6.230).

6.3.6 - Carga distribuída e matriz de massa:

Tanto a carga distribuída quanto a matriz de massa são encontradas exatamente como feito para o elemento de pórtico. Para a força distribuída, o potencial das forças externas é escrito como:

$$P = -F_{ik} Y_{ik} - \int \int_{\xi_2 \xi_1} q_i(\xi_1, \xi_2) y_i^m(\xi_1, \xi_2) J_0^{(m)}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (6.244)$$

onde i é direção, k é nó, q_i é o vetor de carga distribuída, F_{ik} é o vetor de carga concentrada, y_i^m é a posição da superfície média dos elementos, (ξ_1, ξ_2) são as coordenadas adimensionais que mapeiam a superfície média da casca e $J_0^m(\xi_1, \xi_2)$ é o jacobiano da transformação das coordenadas adimensionais para a superfície média da casca e pode ser calculado como o módulo do vetor normal \vec{V}^3 dado na expressão (6.234). Uma ilustração para o problema de barra geral foi mostrada na figura 6.7.

O carregamento distribuído é aproximado empregando-se as mesmas funções de forma aplicadas para aproximar a geometria da superfície média do elemento, ou seja:

$$q_i(\xi_1, \xi_2) = \phi_\ell(\xi_1, \xi_2) q_{i\ell} \quad (6.235)$$

onde $q_{i\ell}$ são os valores conhecidos nos nós ℓ do carregamento aplicado.

Observando-se que a carga aplicada está sobre a superfície média do elemento, y_i^m , reescreve-se:

$$Y_i^m = \phi_\ell(\xi_1, \xi_2) Y_{i\ell} \quad (6.236)$$

Substituindo-se as aproximações (6.235) e (6.236) na equação (6.234) resulta,

$$P = -F_{ik} Y_{ik} - \int \int_{\xi_2, \xi_1} (\phi_\ell(\xi_1, \xi_2) q_{i\ell}) \phi_k(\xi_1, \xi_2) J_0^m(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 Y_{ik} \quad (6.237)$$

A integral indicada na equação (6.92) é calculada numericamente por quadratura de Hammer, e resulta na grandeza chamada força nodal equivalente.

$$F_{ik}^d = \sum_{j_{ham}=1}^{n_{ham}} (\phi_\ell(\xi_{1j_{ham}}, \xi_{2j_{ham}}) q_{i\ell}) \phi_k(\xi_{1j_{ham}}, \xi_{2j_{ham}}) J_0^m(\xi_{1j_{ham}}, \xi_{2j_{ham}}) w_{j_{ham}} \quad (6.238)$$

onde $(\xi_{1j_{ham}}, \xi_{2j_{ham}})$ é ponto de integração e $w_{j_{ham}}$ representa o peso de Hammer.

Aproveitando-se os termos conhecidos F_{ik}^d , reescreve-se a equação (6.237) como

$$P = -F_{ik} Y_{ik} - F_{ik}^d Y_{ik} \quad (6.239)$$

Deve-se observar que os termos F_{4k}^d , F_{5k}^d , F_{6k}^d e F_{7k}^d na equação (6.239) são nulos, veja a correspondência de graus de liberdade na equação (6.222).

A montagem do vetor em graus de liberdade globais é feita pela regra que relaciona nós e graus de liberdade, parecida com o elemento de pórtico baseado em vetores generalizados, que será comentada mais adiante.

Alternativamente, a equação (6.238) pode ser organizada isolando-se os valores das forças distribuídas relativas aos nós, independentes da integração. Assim, semelhante ao que foi descrito no capítulo 5, o vetor de forças nodais equivalentes, devido ao carregamento distribuído, fica assim escrito:

$$\vec{F}^d = Q \cdot \vec{q} \quad (6.240)$$

onde Q é uma matriz que transforma carregamentos distribuídos em nodais equivalentes.

Com base no capítulo 5, o termo gerador da matriz de massa é a variação da energia cinética, escrita como:

$$\delta K = \int_{S_0} (h_0 \rho_0) \ddot{y}_i^m \delta y_i^{(m)} dS_0 = \int_{S_0} \bar{\rho}_0 \ddot{y}_i^m \delta y_i^{(m)} dS_0 \quad (6.241)$$

que, à luz das equações (6.244), (6.235) e (6.236) e lembrando-se que a aceleração recebe a mesma aproximação espacial aplicada para posições, resulta:

$$F_{ik}^{iner} = \int_{\xi_2} \int_{\xi_1} \bar{\rho}_0 \phi_\ell(\xi_1, \xi_2) \phi_k(\xi_1, \xi_2) J_0^m(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \ddot{Y}_{ik} \quad (6.242)$$

ou, numericamente:

$$F_{ik}^{iner} = \sum_{j_{ham}=1}^{n_{ham}} \bar{\rho}_0 \phi_\ell(\xi_{1j_{ham}}, \xi_{2j_{ham}}) \phi_k(\xi_{1j_{ham}}, \xi_{2j_{ham}}) J_0^m(\xi_{1j_{ham}}, \xi_{2j_{ham}}) w_{j_{ham}} \ddot{Y}_{ik} \quad (6.243)$$

ou ainda, matricialmente:

$$\vec{F}^{iner} = M \cdot \ddot{\vec{Y}} \quad (6.244)$$

onde M é a matriz de massa constante, tendo em vista que os vetores generalizados e o enriquecimento transversal não foram considerados, pois a espessura da casca é muito menor que as outras dimensões. A montagem da matriz é feita pela regra que relaciona nós e graus de liberdade, veja equação (6.222), para uma visualização do procedimento no caso de elementos de sólido veja a equação (5.103).

6.3.7 - Aplicação de momento externo usando o grau de liberdade de vetor generalizado:

Estendendo-se o que foi descrito para elemento de barra 2D na seção 6.2.6, para o caso de elemento de casca, o vetor generalizado descreve tanto a mudança da espessura da casca quanto a sua orientação. Aplicar-se força externa para a mudança de espessura da casca não constitui algo plausível, porém, a aplicação de momento externo pode ser requerida. Na figura 6.21, mostra-se o vetor generalizado \vec{G} orientado em uma direção qualquer, em um ponto A.

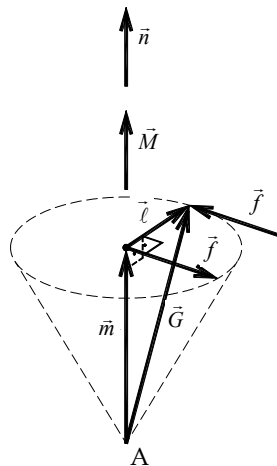


Figura 6.21 - Momento externo aplicado no ponto A

Na figura 6.21 o versor \vec{n} indica a direção segundo a qual se orienta o momento que se pretende aplicar, o vetor \vec{m} é a componente do vetor \vec{G} na direção de \vec{n} , ou seja,

$$\vec{m} = (\vec{G} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (6.245)$$

e o vetor $\vec{\ell}$ é dado pela diferença

$$\vec{\ell} = \vec{G} - \vec{m} \quad (6.246)$$

fazendo-se que $\vec{\ell}$ seja unitário, ou seja:

$$\vec{\ell} = \frac{\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|} \quad (6.247)$$

pode-se calcular o vetor momento como sendo

$$\vec{M} = \vec{f} \wedge \vec{\ell} \quad (6.248)$$

Resta então calcular \vec{f} . Sabe-se que a intensidade do momento coincide com a intensidade da força \vec{f} a ser aplicada nos graus de liberdade correspondentes ao vetor generalizado. Portanto, dado \vec{G} e \vec{M} calcula-se \vec{f} como,

$$\vec{f} = |\vec{M}| \vec{\ell} \wedge \vec{n} \quad (6.249)$$

Observa-se que o momento se torna uma força não conservativa na estratégia de solução via vetores generalizados, conforme já havia se concluído no item 6.2.6. Porém, sua aplicação se faz de forma constante a cada passo de tempo ou carga, assim, o processo de solução não se altera.

6.3.8 - Comentários finais:

Como os vetores generalizados do elemento de casca são as variáveis corrigidas no processo iterativo de solução, sua atualização se dá de forma direta, como feita para as posições. O carregamento transversal e a matriz de massa são calculados considerando a superfície de referência e, portanto, não geram 'momento nodal equivalente' e não incluem inércia de rotação. O acréscimo de inércia de rotação não pode ser feito como o foi para o giro de barras 2D, deve-se realizar a integração total da densidade no sólido, gerando termos complicados e matriz de massa variável no tempo, deixados para o leitor. Dispensa-se a matriz de massa completa, limitando-se o uso de elementos para cascas esbeltas.

No processo iterativo o vetor generalizado não possui a mesma métrica das posições, assim, uma das alternativas para o cálculo da norma do resíduo $\Delta\vec{Y}$ é não considerar o vetor generalizado. Outra alternativa é fazer uma norma de parada separada para o vetor generalizado e admitir convergência quando posição e vetores generalizados convergirem. Uma terceira alternativa é substituir no cálculo da norma \vec{v} por $\vec{v}^* = h_0\vec{v}$ (inicial) e, na configuração atual \vec{g} por $\vec{g}^* = h_0\vec{g}$, assim \vec{v}^* e \vec{g}^* já contemplam a altura e a métrica do vetor usado para o cálculo da norma coincidirá com a de posições, tornando a norma de convergência única.

6.4 - Elemento de barra geral 3D com cinemática em vetores generalizados

O elemento de barra geral 3D seria uma extensão direta do elemento de barra geral 2D se a seção transversal fosse sempre retangular. Entretanto, para se inserir seções transversais quaisquer alguma abstração será exigida. Inicia-se a descrição do problema como se a seção transversal fosse retangular e depois se faz a generalização para uma seção qualquer. Comenta-se sobre os tipos de travamento que podem estar presentes no problema e introduz-se possíveis soluções.

6.4.1 - Cinemática básica:

Na figura 6.22 observa-se o mapeamento para a configuração inicial de um elemento de barra geral 3D simplificada, com apenas dois nós.

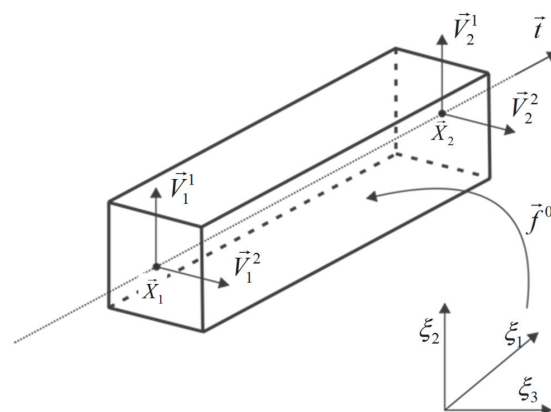


Figura 6.22 - Mapeamento de elemento de barra geral 3D

Sendo a seção transversal retangular, pode-se estender diretamente o mapeamento inicial do elemento barra geral bidimensional para contemplar a geometria tridimensional como:

$$f_i^0 = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, X_{\ell i}, V_{\ell i}^1, V_{\ell i}^2) = \varphi_{\ell}(\xi_1)X_{\ell i} + \frac{h_0^1}{2}\xi_2 V_{\ell i}^1 \varphi_{\ell}(\xi_1) + \frac{h_0^2}{2}\xi_3 V_{\ell i}^2 \varphi_{\ell}(\xi_1) \quad (6.250)$$

onde $X_{\ell i}$ são as coordenadas do nó ℓ , $V_{\ell i}^1$ são as componentes do primeiro versor do nó ℓ e $V_{\ell i}^2$ são as componentes do segundo versor do nó ℓ . Como sempre, as coordenadas iniciais dos nós são dados do problema. Para se construir os versores iniciais parte-se do vetor tangente calculado como:

$$t_i(\xi_1) = \frac{\partial \varphi_{\ell}}{\partial \xi_1} X_{\ell i} \quad (6.251)$$

escrito para os pontos nodais $T_{\ell i} = t_i(\xi_{\ell})$. Arbitra-se um ponto chave $P_{\ell i}$ que, juntamente com o ponto nodal $X_{\ell i}$ define um vetor $\alpha_{\ell i}$, como:

$$\alpha_{\ell i} = P_{\ell i} - X_{\ell i} \quad (6.252)$$

o produto vetorial entre $\vec{\alpha}_{\ell}$ e \vec{T}_{ℓ} (dividido por seu módulo) resulta no primeiro versor nodal, como:

$$\vec{V}_{\ell}^1 = \frac{\vec{\alpha}_{(\ell)} \wedge \vec{T}_{\ell}}{|\vec{\alpha}_{(\ell)} \wedge \vec{T}_{\ell}|} \quad (6.253)$$

finalmente o segundo versor é dado por:

$$\vec{V}_{\ell}^2 = \frac{\vec{T}_{(\ell)} \wedge \vec{V}_{\ell}^1}{|\vec{T}_{(\ell)} \wedge \vec{V}_{\ell}^1|} \quad (6.254)$$

Em geral o ponto chave é único para um elemento de barra geral, ou mesmo para um conjunto muito grande de elementos de barra geral, a depender da geometria do problema a ser resolvido.

Sem pensar em problemas de travamento, a configuração atual pode ser mapeada da mesma forma que a configuração inicial, ou seja:

$$f_i^1 = y_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, Y_{\ell i}, G_{\ell i}^1, G_{\ell i}^2) = \varphi_{\ell}(\xi_1)Y_{\ell i} + \frac{h_0^1}{2}\xi_2 G_{\ell i}^1 \varphi_{\ell}(\xi_1) + \frac{h_0^2}{2}\xi_3 G_{\ell i}^2 \varphi_{\ell}(\xi_1) \quad (6.255)$$

onde as posições nodais atuais e os vetores generalizados passam a ser incógnitas do problema, mas são conhecidos na forma de tentativa. Dessa forma, retorna-se ao processo usual do MEF posicional, ou seja, no processo iterativo de soluções calculam-se os gradientes dos mapeamentos, as deformações de Green, as tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, o vetor de forças internas, a matriz Hessiana, a correção das posições e o erro numérico. Todo esse processo pode ser visto nos itens 6.1 e 6.2, algumas equações chave são retomadas para resumir as expressões importantes.

Lembra-se que os gradientes dos mapeamentos são dados por,

$$A_{ij}^0 = f_{i,j}^0 = x_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \quad \text{e} \quad A_{ij}^1 = f_{i,j}^1 = y_{i,j} = \frac{\partial y_i}{\partial \xi_j} \quad (6.256)$$

que o alongamento de Cauchy-Green à direita e a deformação de Green são escritos como:

$$C = A^1 \cdot (A^0)^{-1} \quad \text{e} \quad E = \frac{1}{2}[C - I] \quad (6.257)$$

que para o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff, a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie fica dada por

$$S = \mathfrak{C} : E \quad \text{ou} \quad S_{ij} = \mathfrak{C}_{ijkl} : E_{kl} \quad (6.258)$$

com

$$\mathfrak{C}_{ijkl} = 2G \delta_{ik} \delta_{jl} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{C} = 2G II + \lambda I \otimes I \quad (6.259)$$

sem contar com a simetria do tensor de deformações. É interessante recordar que aplicando-se (6.259) em (6.258) resulta:

$$S_{ij} = 2GE_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij} \quad \text{ou} \quad S = 2G E + \lambda \text{Trac}(E)I \quad (6.260)$$

A contribuição de um ponto de integração na força interna é:

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_e}{\partial Y_{\alpha\beta}} = S_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_{\alpha\beta}} \quad (6.261)$$

com $Y_{\alpha\beta}$ representando as $\beta = 1, 2, \dots, 9$ posições referentes aos nós α incluindo os vetores generalizados, ou seja, os três primeiros termos correspondem às posições, os três termos subsequentes correspondem às componentes do primeiro vetor generalizado e os últimos três termos correspondem às três componentes do segundo vetor generalizado.

A derivada da deformação de Green é dada por,

$$\frac{\partial E}{\partial Y_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \left\{ (A^0)^{-t} \cdot \left(\frac{\partial A^1}{\partial Y_{\alpha\beta}} \right)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot \frac{\partial A^1}{\partial Y_{\alpha\beta}} \cdot (A^0)^{-1} \right\} \quad (6.262)$$

Já a contribuição do ponto de integração na matriz Hessiana fica:

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \mathfrak{C} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + S : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \quad (6.263)$$

com

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma\zeta}} = \frac{1}{2} \left((A^0)^{-t} \cdot \frac{\partial(A^1)^t}{\partial Y_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial A^1}{\partial Y_{\gamma\zeta}} \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot \frac{\partial(A^1)^t}{\partial Y_{\gamma\zeta}} \cdot \frac{\partial A^1}{\partial Y_{\alpha\beta}} \cdot (A^0)^{-1} \right) + \left((A^0)^{-t} \cdot \frac{\partial^2(A^1)^t}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma\zeta}} \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot \frac{\partial^2 A^1}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma\zeta}} \cdot (A^0)^{-1} \right) \quad (6.264)$$

6.4.2 - Geometria de seção transversal geral:

No item anterior a seção transversal foi considerada retangular, mas em análises gerais, outras formas de seção transversal devem ser consideradas. Para tanto, usando os vetores generalizados como base geradora do espaço da seção transversal, propõe-se uma subdivisão da geometria em regiões triangulares, veja a figura 6.23.

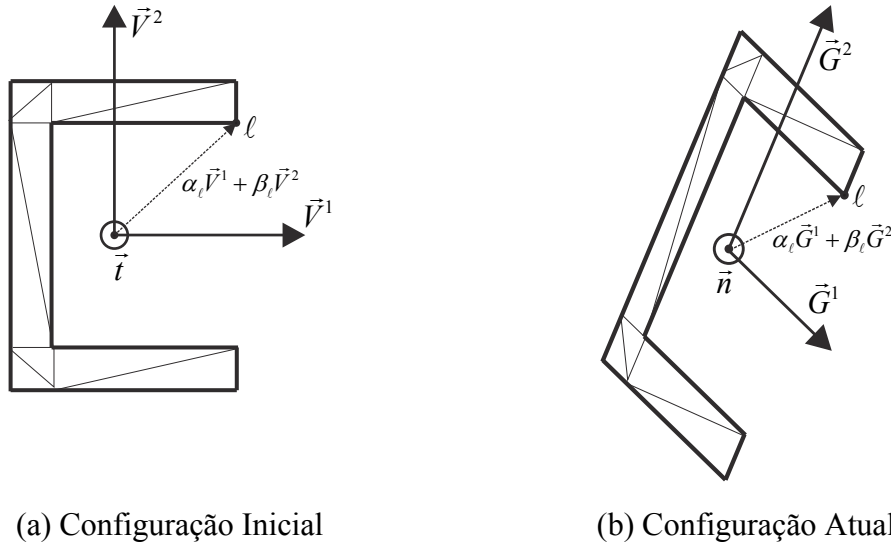


Figura 6.23 - Descrição da geometria da seção transversal como função dos vetores generalizados

Essa divisão é muito parecida com elementos finitos de chapa, entretanto as 'coordenadas' α_ℓ e β_ℓ de um ponto sobre a seção transversal não mudam quando a configuração do corpo muda, quem muda é a posição dos vetores generalizados, ou seja, o espaço gerador.

Um ponto no interior do elemento finito fica dado na configuração inicial por:

$$f_i^{0s} = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = X_{ik} \phi_k(\xi_1) + \alpha_\ell \varphi_\ell^s(\xi_2, \xi_3) V_{ik}^1 \phi_k(\xi_1) + \beta_\ell \varphi_\ell^s(\xi_2, \xi_3) V_{ik}^2 \phi_k(\xi_1) \quad (6.265)$$

onde α_ℓ e β_ℓ são as coordenadas no plano da seção transversal fornecidas na configuração inicial por um gerador de malha semelhante ao de elementos de chapa,

(ξ_2, ξ_3) são coordenadas adimensionais de espaço triangular semelhante às utilizadas no elemento de chapa e usadas em cada subdivisão triangular "s" da seção transversal que auxilia no mapeamento de pontos internos ao elemento utilizando-se das funções de forma $\varphi_\ell^s(\xi_2, \xi_3)$, finalmente ξ_1 é a coordenada adimensional que, pelas funções de forma $\phi_k(\xi_1)$, aproxima a linha média e os vetores generalizados da barra.

A configuração atual fica descrita como:

$$f_i^{1s} = y_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = Y_{ik}\phi_k(\xi_1) + \alpha_\ell\varphi_\ell^s(\xi_2, \xi_3)G_{ik}^1\phi_k(\xi_1) + \beta_\ell\varphi_\ell^s(\xi_2, \xi_3)G_{ik}^2\phi_k(\xi_1) \quad (6.266)$$

onde se observa que apenas as coordenadas nodais Y_{ik} e os vetores generalizados locais G_{ik}^1 e G_{ik}^2 são as variáveis do problema. A partir daí valem todas as equações descritas anteriormente, ou seja, de (6.256) até (6.264) onde em A^0 e A^1 aparecerão termos em $\partial\varphi^s/\partial\xi_j$ tanto para as coordenadas α quanto β .

6.4.3 - Enriquecimentos cinemáticos:

Pelo mesmo motivo do elemento de barra geral 2D, essa cinemática apresenta travamento volumétrico que pode ser eliminado aplicando-se o enriquecimento de deformação longitudinal linear nas direções transversais, ou por relaxação da lei constitutiva.

Além disso, quando se pretende usar esse elemento finito para modelar seções de parede fina, a inexistência da mobilidade relativa ao empenamento da seção transversal também causa travamento, a solução para esse problema é dada pela soma de um grau de liberdade que represente a intensidade do modo de empenamento da seção transversal. Esse modo é calculado resolvendo-se o problema de torção livre e é somado na direção \vec{t} ortogonal ao plano atual da seção transversal.

6.4.3.a - Enriquecimento de deformação linear segundo direção transversal

O enriquecimento de deformação linear segundo a direção transversal é análogo ao problema de barra geral 2D, veja a figura 6.16 e a equação (6.169). Dessa forma, o mapeamento da configuração atual fica dado por:

$$f_i^1 = y_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = Y_{ik}\phi_k(\xi_1) + \alpha_\ell\varphi_\ell(\xi_2, \xi_3)G_{ik}^1\phi_k(\xi_1) + \beta_\ell\varphi_\ell(\xi_2, \xi_3)G_{ik}^2\phi_k(\xi_1) + \left\{ [\alpha_\ell\varphi_\ell(\xi_2, \xi_3)]^2 (\bar{T}_k^1\phi_k(\xi_1)) \right\} G_{ik}^1\phi_k(\xi_1) + \left\{ [\beta_\ell\varphi_\ell(\xi_2, \xi_3)]^2 (\bar{T}_k^2\phi_k(\xi_1)) \right\} G_{ik}^2\phi_k(\xi_1) \quad (6.267)$$

onde os novos graus de liberdade (valores nos nós k) que indicam a intensidade do enriquecimento são \bar{T}_k^1 e \bar{T}_k^2 . Observa-se uma maior dificuldade algébrica para o cálculo de A^1 e suas derivadas, porém o roteiro do MEF posicional, resumido de forma muito compacta pelas equações (6.256) até (6.264), continua válido. Os cálculos são deixados para o leitor interessado em elaborar código computacional para a solução desse tipo de problema. Lembra-se que o total de graus de liberdade por nó k para a equação (6.267) será 11, três translações Y_{ik} , seis componentes de vetores generalizados G_{ik}^1 e G_{ik}^2 e dois enriquecimentos \bar{T}_k^1 e \bar{T}_k^2 . Todos esses graus de liberdade podem ser organizados em um único vetor \bar{Y} permitindo-se a utilização dos algoritmos já descritos anteriormente.

O valor inicial dos enriquecimentos da deformação transversal é nulo e pode-se adotar valor nodal igual para nós de elementos diferentes, ou mesmo valores independentes (aumentando o número de graus de liberdade) não causando grandes alterações nos resultados finais.

6.4.3.b - Relaxamento de lei constitutiva como alternativa para solução de problemas de travamento.

No caso do elemento de casca, o comportamento de membrana nas direções paralelas à superfície média é muito importante. Assim, definiu-se a direção ortogonal à casca como sendo a direção de ortotropia, anulando-se os coeficientes de Poisson correspondentes. Para o elemento de barra geral, se o comportamento de membrana fosse importante no plano da seção, a direção de ortotropia corresponderia ao eixo de referência da barra geral, ou seja, a direção \bar{t} . Entretanto, esse comportamento não é importante na barra geral, podendo-se assumir matriz constitutiva elástica como:

$$\left\{ \begin{matrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{23} \\ E_{13} \\ E_{12} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1/E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{matrix} \right\} \quad (6.268)$$

assumindo-se $G = E / 2(1 + \nu)$ mantendo-se a importância do comportamento de não ortogonalidade da seção transversal em relação à linha de referência da barra geral.

Sendo o tensor constitutivo isotrópico, não há necessidade de se fazer tratamentos de coordenadas locais e globais. Utilizando-se essa lei constitutiva, ao invés de se utilizar a expressão (6.267) pode-se adotar a forma (6.266) para o mapeamento atual sem travamento volumétrico.

6.4.3.c - Enriquecimento de empenamento para seções transversais de parede fina

Da mecânica das estruturas sabe-se que barras gerais com seção transversal de parede fina sofrem empenamento ao serem submetidas a torção.

No método dos elementos finitos tradicionais, introduz-se a rigidez à torção em elemento de barra geral reto para pequenos deslocamentos e rotações (estratégia também usada para grandes deslocamentos em formulação Lagrangianas atualizadas). Essa rigidez é calculada usando-se o valor do momento de inércia a torção da resistência dos materiais, ou seja, a torção é considerada livre, mesmo quando engastes totais são adotados pelo analista.

Na formulação posicional, pelo fato do elemento finito ter característica de sólido, é possível e desejável que se considere a cinemática de empenamento na formulação. Essa cinemática é resolvida em módulo de pré-processamento onde a discretização da seção transversal da figura 6.23 é utilizada para se calcular o chamado modo de empenamento. A técnica de solução do problema de torção livre é apresentada no item 6.4.7 finalizando o capítulo, tendo em vista ser mais importante a conceituação da aplicação do enriquecimento proposto na cinemática da barra geral do que sua dedução.

O empenamento da seção transversal, resolvido a partir da geometria atual, conforme descrito no item 6.4.7, é escrito como:

$$d(\xi_2, \xi_3) = D_\ell \phi_\ell(\xi_2, \xi_3) \quad (6.269)$$

onde D_ℓ são os valores nodais do empenamento calculados nos ℓ nós da seção transversal (onde a designação nó está sendo usada de forma geral). A direção do acréscimo de posição devido ao empenamento deve ser somada à direção ortogonal \bar{n} da seção transversal atual da barra geral, dada por:

$$n_i(\xi_1) = \zeta_{ijk} g_j^1(\xi_1) g_k^2(\xi_1) = \zeta_{ijk} \left[G_{j\ell}^1 \phi_\ell(\xi_1) \right] \left[G_{km}^2 \phi_m(\xi_1) \right] \quad (6.270)$$

onde ζ_{ijk} é o tensor de permutação cíclica de Levi-Cevita (produto vetorial entre os vetores geradores).

Criando-se o fator multiplicativo W_ℓ , que indica a intensidade do empenamento em um ponto nodal ℓ do elemento finito, escreve-se a intensidade do empenamento em uma seção qualquer, dependente de ξ_1 como:

$$w = \phi_\ell(\xi_1) W_\ell \quad (6.271)$$

Combinando-se as equações (6.269), (6.270) e (6.271) escreve-se:

$$w_i = (\phi_\ell(\xi_1) W_\ell) [D_\alpha \varphi_\alpha(\xi_2, \xi_3)] \zeta_{ijk} [G_{j\beta}^1 \phi_\beta(\xi_1)] [G_{km}^2 \phi_m(\xi_1)] \quad (6.272)$$

que representa o acréscimo de posição necessário para representar o empenamento da seção, sendo a única variável adicional W_ℓ , novo grau de liberdade incógnito do problema.

Somando-se a equação (6.272) na equação (6.266) com o relaxamento (6.268) ou somando-se (6.272) na equação (6.267) escreve-se o mapeamento da configuração atual como:

$$f_i^1 = y_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = Y_{ik} \phi_k(\xi_1) + \alpha_\ell \varphi_\ell(\xi_2, \xi_3) G_{ik}^1 \phi_k(\xi_1) + \beta_\ell \varphi_\ell(\xi_2, \xi_3) G_{ik}^2 \phi_k(\xi_1) + (\phi_\ell(\xi_1) W_\ell) [D_\alpha \varphi_\alpha(\xi_2, \xi_3)] \zeta_{ijk} [G_{j\beta}^1 \phi_\beta(\xi_1)] [G_{km}^2 \phi_m(\xi_1)] \quad (6.273)$$

ou

$$f_i^1 = y_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = Y_{ik} \phi_k(\xi_1) + \alpha_\ell \varphi_\ell(\xi_2, \xi_3) G_{ik}^1 \phi_k(\xi_1) + \beta_\ell \varphi_\ell(\xi_2, \xi_3) G_{ik}^2 \phi_k(\xi_1) + \{[\alpha_\ell \varphi_\ell(\xi_2, \xi_3)]^2 (\bar{T}_k^1 \phi_k(\xi_1))\} G_{ik}^1 \phi_k(\xi_1) + \{[\beta_\ell \varphi_\ell(\xi_2, \xi_3)]^2 (\bar{T}_k^2 \phi_k(\xi_1))\} G_{ik}^2 \phi_k(\xi_1) + (\phi_\ell(\xi_1) W_\ell) [D_\alpha \varphi_\alpha(\xi_2, \xi_3)] \zeta_{ijk} [G_{j\beta}^1 \phi_\beta(\xi_1)] [G_{km}^2 \phi_m(\xi_1)] \quad (6.274)$$

No caso da equação (6.273) resultam 10 graus de liberdade por nó e no caso do mapeamento (6.274) serão 12 graus de liberdade por nó. Quando o grau de liberdade de empenamento é restrito significa que o empenamento está impedido, surgindo tensões normais de flexo-torção. Quando o empenamento não é restrito está se considerando torção livre.

No item 6.4.7 uma técnica para se gerar o modo de empenamento, bem como comentários sobre a escolha do eixo de referência de seções de parede fina são tecidos. De maneira simplista, quando se escolhe o centro de gravidade, cargas transversais podem causar torção e quando se escolhe o centro de cisalhamento, cargas longitudinais podem causar flexão. Esse comportamento é compatível com o esperado na simulação de barras gerais.

6.4.4 - Carga distribuída e matriz de massa

A carga distribuída é aplicada na linha de referência adotada e somente em relação aos graus de liberdade de translação, ou seja, exatamente igual ao que foi realizado para os elementos de barra geral descritos no espaço bidimensional.

A matriz de massa também desprezará termos de inércia de rotação, ou seja, apenas a aproximação da linha média é considerada. Observando-se os passos realizados da equação (6.103) até a equação (6.107) escreve-se para a barra 3D:

$$\delta\mathbb{K} = \int_{L_0} \int_A \rho_0 dA \ddot{y}_i^m \delta y_i^{(m)} dL_0 = \int_{L_0} \bar{\rho}_0 \ddot{y}_i^m \delta y_i^{(m)} dL_0 \quad (6.275)$$

onde m indica a linha média, e $\bar{\rho}_0$ é a densidade por unidade de comprimento, resultado da integral da densidade de cada 'elemento' que descreve a geometria e propriedades da seção transversal, i assume apenas 1, 2 e 3, ou seja, os graus de liberdade dos vetores generalizados e os enriquecimentos não são considerados. As aproximações da aceleração e da variação de posição da linha média, com base nas equações (6.250) e (6.255), ficam:

$$\ddot{y}_i^m = \phi_\ell(\bar{\xi}) \ddot{Y}_i^\ell \quad \text{e} \quad \delta y_i^m = \phi_\ell(\bar{\xi}) \delta Y_i^\ell \quad (6.276)$$

onde o índice m foi omitido do lado direito das igualdades por ser desnecessário. Partindo-se da equação (6.276) na forma Lagrangiana de (6.99) se escreve:

$$\delta\mathbb{K} = \int_{L_0} \bar{\rho}_0 \phi_\ell \phi_\alpha \ddot{Y}_i^\alpha dL_0 \delta Y_i^\ell = \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial Y_i^\ell} \delta Y_i^\ell = (F_i^\ell)^{iner} \delta Y_i^\ell \quad (6.277)$$

ou

$$\frac{\partial \mathbb{K}}{\partial Y_i^\ell} = \int_{L_0} \bar{\rho}_0 \phi_\ell \phi_\alpha dL_0 \ddot{Y}_i^\alpha \quad \text{ou} \quad \vec{F}^{iner} = \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \vec{Y}} = \int_{L_0} \bar{\rho}_0 \vec{\phi} \otimes \vec{\phi} dV_0 \cdot \vec{\ddot{Y}} = M \cdot \vec{\ddot{Y}} \quad (6.278)$$

onde a primeira forma da equação (6.278) indica que a matriz de massa é constante ao longo do tempo e, com base nas equações do capítulo 5, fica escrita para um elemento de 2 nós, por exemplo, como:

$$\begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ \bar{0} \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \\ \bar{0} \\ 0 \end{Bmatrix}^{iner} = \int_{L_0^{el}} \bar{\rho}_0 \begin{bmatrix} \phi_1 \phi_1 & 0 & \bar{0}^t & \phi_1 \phi_2 & \bar{0}^t & \bar{0}^t & 0 \\ 0 & \phi_1 \phi_1 & \bar{0}^t & 0 & \phi_1 \phi_2 & \bar{0}^t & 0 \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \otimes \bar{0}^t & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \otimes \bar{0}^t & 0 \\ \phi_2 \phi_1 & 0 & \bar{0}^t & \phi_2 \phi_2 & 0 & \bar{0}^t & 0 \\ \bar{0} & \phi_2 \phi_1 & \bar{0}^t & 0 & \phi_2 \phi_2 & \bar{0}^t & 0 \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \otimes \bar{0}^t & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \otimes \bar{0}^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dL_0 \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_2 \\ \ddot{Y}_3 \\ \bar{0} \\ \ddot{Y}_4 \\ \ddot{Y}_5 \\ \ddot{Y}_6 \\ \bar{0} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.279)$$

onde $\bar{0}$ é um vetor nulo de 4 posições para a cinemática completa que considera o enriquecimento linear de deformação na seção transversal ou de 3 posições quando esse enriquecimento não é utilizado, mas sim o relaxamento da lei constitutiva para eliminar o travamento volumétrico. A montagem da matriz de massa para coordenadas globais é feita pela incidência nodal, já comentada em vários pontos desse material.

6.4.5 - Tensões internas e esforços solicitantes

As tensões internas e os esforços solicitantes em barras gerais 3D são calculados como uma extensão do caso de cascas. Lembra-se apenas que a integração das tensões de Cauchy é feita sobre a 'discretização' da seção transversal, resultando em valores de momento e força calculados no ponto de integração referente à coordenada ξ_1 . É interessante que o leitor retorne ao estudo elementar de barras e placas para realizar corretamente as transformações. Em geral os diagramas de cores (ou nesse caso de linhas) podem ser feitos na configuração inicial para simplificar a leitura.

Apenas para não deixar as informações muito vagas, lembra-se que o momento torçor em barras gerais (de seção retangular) é calculado, na configuração atual como:

$$\bar{M}_t = \int_A \left\{ \bar{\sigma}_{12} \left(\frac{h_0^{(2)}}{2} \xi_3 \right) - \bar{\sigma}_{13} \left(\frac{h_0^1}{2} \xi_2 \right) \right\} dA \quad (6.280)$$

Quando a seção não é quadrada a equação (6.280) deve ser escrita em relação ao centro de cisalhamento e a integração será feita como a soma de integrais sobre os 'elementos' que constituem a seção transversal.

6.4.6 - Determinação do modo de empenamento

Para se determinar o modo de empenamento usado na equação (6.272), propõe-se resolver o problema de torção livre da elasticidade linear pelo método dos elementos finitos. Na figura 6.24 observa-se uma seção transversal qualquer com uma origem arbitrária.

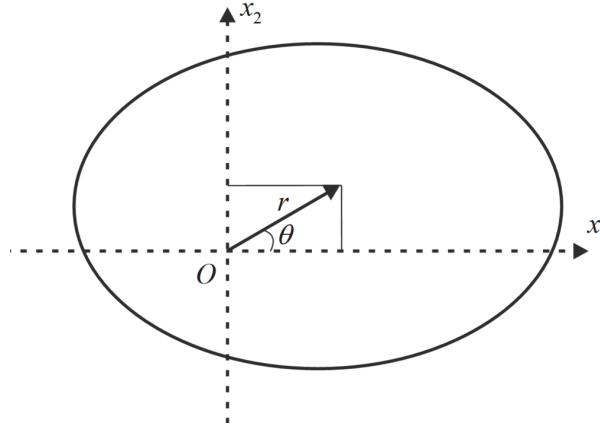


Figura 6.24 - Cinemática de torção livre para origem arbitrária

A direção x_3 está saindo do papel e em sua origem imagina-se que a barra está impedida de girar. A cinemática de torção livre, proposta por Saint-Venant para pequenas rotações, afirma que:

$$u_1 = -\alpha x_3 r \operatorname{sen}\theta = -\alpha x_3 x_2 \quad (6.281)$$

$$u_2 = \alpha x_3 r \operatorname{cos}\theta = \alpha x_3 x_1 \quad (6.282)$$

onde α é a intensidade do giro por unidade de comprimento, constante. Afirma também que, desde que as seções transversais sejam as mesmas para qualquer valor de x_3 , o deslocamento na direção x_3 ($u_3 = w$ empenamento) é independente dessa coordenada, ou seja, o empenamento é igual para todas as seções que fazem parte de uma barra sujeita à torção livre.

$$u_3 = u_3(x_1, x_2) \quad (6.283)$$

Em função dessa cinemática calcula-se que:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0 \quad (6.284)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \alpha x_2 \right) \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \alpha x_1 \right) \quad (6.285)$$

Aplicando-se a Lei de Hooke 3D generalizada para material isotrópico,

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \quad (6.286)$$

resulta:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0 \quad (6.287)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = G \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \alpha x_2 \right) \quad (6.288)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = G \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \alpha x_1 \right) \quad (6.289)$$

As equações de equilíbrio para o problema 3D sem força de volume são:

$$\sigma_{ij,i} = 0_j \quad (6.289)$$

Sabendo-se dos valores nulos da equação (2.286) as equações de equilíbrio nas direções 1 e 2 estão satisfeitas, sobrando a equação de equilíbrio na direção 3, dada como:

$$\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = 0_3 \quad (6.290)$$

Poder-se-ia substituir as equações (6.288) e (6.289) em (6.290) para se encontrar uma equação diferencial parcial em deslocamentos para ser resolvida. Porém, como a solução será feita pelo MEF, calcula-se a variação do equilíbrio local como:

$$\delta\pi = \sigma_{i3,i} \delta u_3 = 0 \quad \text{com} \quad i = 1, 2 \quad (6.291)$$

Como essa equação é independente da direção 3, para se encontrar a variação da energia total do corpo, basta se integrar a equação (6.291) na área da seção transversal, como:

$$\delta\Pi = \int_A \sigma_{i3,i} \delta u_3 dA = 0 \quad (6.292)$$

Aplica-se o teorema da divergência (ou de Gauss) na equação (6.292) como:

$$\int_A \sigma_{i3,i} \delta u_3 dA = \int_{\Gamma} \sigma_{i3} n_i \delta u_3 d\Gamma - \int_A \sigma_{i3} \delta u_{3,i} = 0 \quad (6.293)$$

onde Γ é o contorno da seção transversal, ou seja, representa a superfície livre da barra sob torção. Dessa forma:

$$\sigma_{i3} n_i = p_3 = 0 \quad (6.294)$$

ou seja, a equação (6.293) se resume à:

$$\int_A \sigma_{13} \delta u_{3,1} + \sigma_{23} \delta u_{3,2} = 0 \quad (6.295)$$

Substituindo-se as equações (6.288) e (6.289) em (6.295) e rearranjando-se resulta:

$$\int_A G (u_{3,1} \delta u_{3,1} + u_{3,2} \delta u_{3,2}) dA = \alpha \int_A G (x_2 \delta u_{3,1} - x_1 \delta u_{3,2}) dA \quad (6.296)$$

Substitui-se a seção transversal original pela discretização em elementos finitos, veja a figura 6.23, dessa forma o campo de empenamento u_3 e sua variação serão escritos em função de seus valores nodais e das funções de forma dos elementos finitos do plano da seção, como:

$$u_3 = \phi_\ell(\xi_1, \xi_2)U_{\ell 3} \quad \text{e} \quad \delta u_3 = \phi_\ell(\xi_1, \xi_2)\delta U_{\ell 3} \quad (6.297)$$

lembra-se dos elementos finitos clássicos que:

$$\phi_{\ell,i} = \frac{\partial \phi_\ell}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi_\ell}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_\ell}{\partial \xi_k} = b_{ki} \frac{\partial \phi_\ell}{\partial \xi_k} \quad (6.298)$$

em notação mista se escreve

$$D\bar{\phi}_\ell = B^t \cdot \overline{D\phi}_\ell \quad (6.299)$$

onde

$$B = (A^0)^{-1} \quad (6.300)$$

Conhecida a forma de se realizarem as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas cartesianas, escreve-se simplesmente:

$$u_{3,i} = \phi_{\ell,i}U_{\ell 3} \quad \text{e} \quad \delta u_{3,i} = \phi_{\ell,i}\delta U_{\ell 3} \quad (6.301)$$

onde as derivadas são em relação às coordenadas globais x_i .

Substituindo-se as equações (6.301) em (6.296) resulta

$$\int_{A_e} U_{\ell 3}^e G(\phi_{\ell,1}\phi_{k,1} + \phi_{\ell,2}\phi_{k,2})\delta U_{\ell 3}^{(e)} dA = \alpha \int_{A_e} G(x_2\phi_{k,1} - x_1\phi_{k,2})\delta U_{\ell 3}^e dA \quad (6.302)$$

com soma na letra e que representa elementos finitos.

Como os valores nodais $U_{\ell 3}^e$ e $\delta U_{\ell 3}^e$ não dependem de (x_1, x_2) podem ser colocados para fora da integral, resultando a matriz de rigidez e o vetor de forças independentes nas coordenadas locais dos elementos como:

$$K_{\ell k}^e = \int_{A_e} G(\phi_{\ell,1}\phi_{k,1} + \phi_{\ell,2}\phi_{k,2})dA \quad (6.303)$$

$$F_k = \int_{A_e} G(x_2\phi_{k,1} - x_1\phi_{k,2})dA \quad (6.304)$$

sendo a ordem da matriz local igual ao número de nós do elemento finito, a depender da ordem de aproximação escolhida. Seguindo o esquema usual de montagem de graus de liberdade e lembrando que $\delta W_\ell = \delta U_{3\ell}$ é arbitrário, a equação (6.302) fica escrita como:

$$K \cdot \bar{U}_3 = \alpha \bar{F} \quad (6.305)$$

sendo K simétrica.

Observa-se nas equações (6.302) e (6.304) que está sendo considerado material laminado com, pelo menos, módulo de elasticidade diferente para cada elemento que constitui a seção transversal.

Apesar da origem poder ser arbitrária, o melhor procedimento é começar a análise pela centro de gravidade da seção transversal, considerada constituída por material laminado. Para tanto, a partir de uma origem arbitrária \bar{O} determina-se a posição do cg como:

$$\bar{x}_i^{cg} = \frac{\int_A E \bar{x}_i dA}{\int_A E dA} \quad (6.306)$$

como a seção transversal está dividida em elementos finitos e as coordenadas auxiliares \bar{X}_i^e dos nós são conhecidas, se escreve para cada elemento:

$$\bar{x}_i^e = \phi_\ell(\xi_1, \xi_2) \bar{X}_{\ell i}^e \quad (6.307)$$

$$\int_A E \bar{x}_i dA = \int_{\xi_2} \int_{\xi_1} E_e \phi_\ell(\xi_1, \xi_2) \bar{X}_{\ell i}^{(e)} J_0^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (6.308)$$

e

$$\int_A E dA = \int_{\xi_2} \int_{\xi_1} E_e J_0^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

onde existe soma para os elementos e e

$$J_0(\xi_1, \xi_2) = Det(A^0) \quad (6.309)$$

com

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \xi_j} = \phi_{\ell, j} \bar{X}_{\ell i} \quad (6.310)$$

Determinada a posição do cg faz-se:

$$x_i = \bar{x}_i - \bar{x}_i^{cg} \quad (6.311)$$

valendo novamente as equações e deduções a partir da equação (6.281) até a equação (6.305).

A determinação do CC é feita com base na equação (3.302) reescrita para uma nova origem desconhecida O' a ser determinada,

$$x'_i = x_i - x_i^{CC} \quad (6.312)$$

Nessa transformação como x_i^{CC} é uma constante e, portanto:

$$\partial x'_i = \partial x_i \quad (6.313)$$

Além disso para essa nova origem tem-se as seguintes propriedades:

$$\int_A E x'_1 u'_3 dA = 0 \quad \int_A E x'_2 u'_3 dA = 0 \quad \int_A E u'_3 dA = 0 \quad (6.314)$$

Substituindo-se a equação (6.312) em (6.302) escreve-se:

$$\begin{aligned} \int_{A_e} U'_{\ell 3} G(\phi_{\ell,1} \phi_{k,1} + \phi_{\ell,2} \phi_{k,2}) dA = \\ \alpha \int_{A_e} G(x_2 \phi_{k,1} - x_1 \phi_{k,2}) dA - \alpha x_2^{CC} \int_{A_e} G \phi_{k,1} dA + \alpha x_1^{CC} \int_{A_e} G \phi_{k,2} dA \end{aligned} \quad (6.315)$$

que, repetindo-se o procedimento de integração e montagem resulta:

$$K \cdot \vec{U}'_3 = \alpha \vec{F} + \alpha x_2^{CC} \vec{F}_1 + \alpha x_1^{CC} \vec{F}_2 \quad (6.316)$$

$$\vec{U}'_3 = \alpha (\vec{U}_3 + x_2^{CC} \vec{U}_{31} + x_1^{CC} \vec{U}_{32}) \quad (6.317)$$

Assim, no nível do elemento tem-se:

$$u'_3 = \alpha (u_3 + x_2^{CC} u_{31} + x_1^{CC} u_{32}) = \alpha (\phi_\ell U_{\ell 3} + x_2^{CC} \phi_\ell U_{\ell 31} + x_1^{CC} \phi_\ell U_{\ell 32}) \quad (6.318)$$

que substituída nas primeiras equações de (6.314) resulta:

$$\int_A E x'_1 u_3 dA + x_2^{CC} \int_A E x'_1 u_{31} dA + x_1^{CC} \int_A E x'_1 u_{32} dA = 0 \quad (6.319)$$

$$\int_A E x'_2 u_3 dA + x_2^{CC} \int_A E x'_2 u_{31} dA + x_1^{CC} \int_A E x'_2 u_{32} dA = 0 \quad (6.320)$$

para as quais usando-se a versão numérica e integrando-se os elementos finitos resulta em um sistema dois por dois para resolver a posição do CC.

$$F_1 = -\int_A E x'_1 u_3 dA \quad F_2 = -\int_A E x'_2 u_3 dA \quad (6.321)$$

$$a_{12} = \int_A E x'_1 u_{31} dA \quad a_{22} = \int_A E x'_2 u_{31} dA \quad (6.322)$$

$$a_{11} = \int_A E x'_1 u_{32} dA \quad a_{21} = \int_A E x'_2 u_{32} dA \quad (6.323)$$

$$a_{11} x_1^{CC} + a_{12} x_2^{CC} = F_1 \quad (6.324)$$

$$a_{21} x_1^{CC} + a_{22} x_2^{CC} = F_2 \quad (6.325)$$

de onde se encontra a posição do Centro de Cisalhamento.

Calculada a posição do CC volta-se em (6.317) e determina-se $\vec{U}'_3 = \vec{W}$ para $\alpha = 1$ que é o valor procurado para gerar o empenamento da seção na cinemática de barra geral 3D, equação (6.272). Entretanto, como nenhuma condição essencial (deslocamento) foi aplicada, pode ser necessário fazer uma translação nos valores utilizando-se a terceira equação de (6.314) como:

$$\int_A E(u'_3 - \beta) dA = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\int_A E u'_3 dA}{\int_A E dA} \quad (6.326)$$

e faz-se

$$\vec{W} = \vec{U}'_3 = \vec{U}'_3 - \beta \quad (6.327)$$

finalizando as deduções do modo de empenamento.

6.4.7 - Comentários finais

A divisão da seção transversal em 'elementos' permite que se escolham propriedades físicas diferentes para cada região da seção transversal, o que já é contemplado na estratégia de determinação do modo de empenamento e do centro de cisalhamento da seção transversal. Dessa forma, um tipo de simulação de barras laminadas ou compostas já está contemplado na formulação descrita, cabendo ao leitor fazer as adaptações necessárias em seu código computacional.

A ligação entre os graus de liberdade definidos pelo vetor generalizado segue o mesmo esquema proposto para o elemento de barra geral 2D ou para o elemento de casca. Deve-se comentar que, se adotando uma das barras concorrentes a um nó como mestre, as demais podem ter ou não conexão por meio de barras simples (ou por conexão direta de graus de liberdade) com aquela, resultando em rótulas, ligações monolíticas rígidas ou flexíveis, ligações parciais etc. A ligação entre os graus de empenamento podem ter significado mais complexo. As duas estratégias de conexão naturais são: não conectar os graus de elementos adjacentes, resultando em torção livre de cada membro, ou conectar, significando que os empenamentos deverão ter a mesma intensidade do nó da conexão. Restringir o empenamento também é possível, indicando que no nó restrito a barra é impedida de empenar.

6.5 - Bibliografia Recomendada - Validações

Para não tomar muito espaço e aproximar o leitor aos textos científicos, essa primeira lista de trabalhos são referentes aos artigos do autor, onde exemplos de validação e aplicações mais avançadas poderão ser consultados.

- 1) Coda, Humberto Breves; Paccola, Rodrigo Ribeiro; Carrazedo, Rogerio , Zig-Zag effect without degrees of freedom in linear and non linear analysis of laminated plates

and shells, COMPOSITE STRUCTURES Volume: 161 Páginas: 32-50 Publicado: FEB 1 2017

2) Siqueira, Tiago Morkis; Coda, Humberto Breves , Total Lagrangian FEM formulation for nonlinear dynamics of sliding connections in viscoelastic plane structures and mechanisms, FINITE ELEMENTS IN ANALYSIS AND DESIGN Volume: 129 Páginas: 63-77 Publicado: JUL 2017

3) Kuche Sanches, Rodolfo Andre; Coda, Humberto Breves, Flexible Multibody Dynamics Finite Element Formulation Applied to Structural Progressive Collapse Analysis, LATIN AMERICAN JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES Volume: 14 Edição: 1 Páginas: 52-71 Publicado: 2017

4) Paccola, Rodrigo R.; Sampaio, Maria S. M.; Coda, Humberto B., Continuous stress distribution following transverse direction for FEM orthotropic laminated plates and shells, APPLIED MATHEMATICAL MODELLING Volume: 40 Edição: 15-16 Páginas: 7382-7409 Publicado: AUG 2016

5) Nogueira, Geovanne Viana; Paccola, Rodrigo Ribeiro; Coda, Humberto Breves , A positional Unconstrained Vector Layerwise (UVLWT) FEM formulation for laminated frame element modeling, COMPOSITE STRUCTURES Volume: 148 Páginas: 97-112 Publicado: JUL 15 2016

6) Coda, H. B., Continuous inter-laminar stresses for regular and inverse geometrically non linear dynamic and static analyses of laminated plates and shells, COMPOSITE STRUCTURES Volume: 132 Páginas: 406-422 Publicado: NOV 15 2015

7) Coda, Humberto B.; Sampaio, Maria S. M.; Paccola, Rodrigo R., A FEM continuous transverse stress distribution for the analysis of geometrically nonlinear elastoplastic laminated plates and shells, FINITE ELEMENTS IN ANALYSIS AND DESIGN Volume: 101 Páginas: 15-33 Publicado: SEP 1 2015

8) Sampaio, M. S. M.; Paccola, R. R.; Coda, H. B., A geometrically nonlinear FEM formulation for the analysis of fiber reinforced laminated plates and shells, COMPOSITE STRUCTURES Volume: 119 Páginas: 799-814 Publicado: JAN 2015

9) Coda, Humberto Breves; Paccola, Rodrigo Ribeiro , A total-Lagrangian position-based FEM applied to physical and geometrical nonlinear dynamics of plane frames including semi-rigid connections and progressive collapse, FINITE ELEMENTS IN ANALYSIS AND DESIGN Volume: 91 Páginas: 1-15 Publicado: NOV 15 2014

10) Rigobello, Ronaldo; Coda, Humberto Breves; Munaiar Neto, Jorge , A 3D solid-like frame finite element applied to steel structures under high temperatures, FINITE ELEMENTS IN ANALYSIS AND DESIGN Volume: 91 Páginas: 68-83 Publicado: NOV 15 2014

Além dos trabalhos científicos do autor, recomenda-se a leitura da bibliografia a seguir:

- 1) SAMPAIO, M.S.M, Análise Não Linear Geométrica de Cascas Laminadas Reforçadas com Fibras, Tese de Doutorado. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, 2014
- 2) MACIEL, D. N. Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional. Tese de Doutorado. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP, 2008.
- 3) KZAM, Aref Kalilo Lima, Análise da instabilidade estrutural global e local pelo MEF posicional com determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio, Tese de Doutorado. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, 2015.
- 4) RODRIGUEZ, Edwin Alexander Morantes, Desenvolvimento de modelo de ligação deslizante para a simulação de dispositivos de controle de vibração na análise não linear geométrica de estruturas. Dissertação de Mestrado, São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, 2017.
- 5) SIQUEIRA, Tiago Morkis, Análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos reticulados planos com ligações deslizantes, Dissertação de Mestrado, São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, 2016.
- 6) LANCZOS, C. , 1970, “The variational principles of mechanics”, Dover, New York, fourth edition.