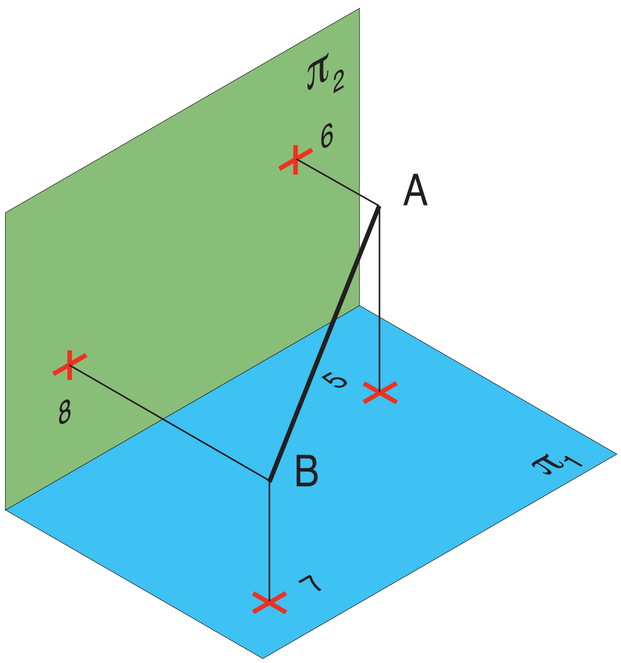
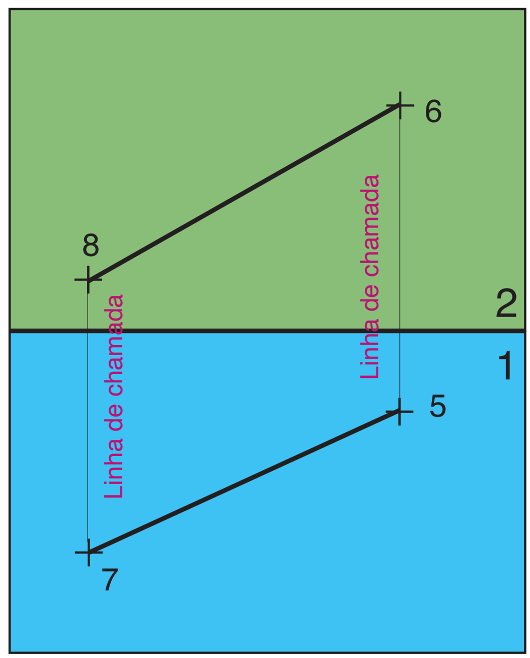
Elementos Principais da Geometria Descritiva





Alexandre Kawano & João Petreche

2023

Elementos Principais da Geometria Descritiva

Alexandre Kawano
ORCID https://orcid.org/0000-0002-2248-6422

João Roberto Diego Petreche
ORCID https://orcid.org/0000-0003-1335-3334

2023

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO -USP
Reitor: Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior
Vice-reitora: Profa. Dra. Maria Arminda do Nascimento Arruda

ESCOLA POLITÉCNICA -EP
Diretor: Prof. Dr. Reinaldo Giudici
Vice-diretor: Prof. Dr. Sílvio Ikuyo Nabeta

.

Catalogação-na-publicação (CIP). Serviço de Biblioteca e Documentação
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Maria Cristina Olaio
Villela CRB 1338/8ª

Kawano, Alexandre
Elementos Principais da Geometria Descritiva / A.Kawano, J. R. D. Petreche – São Paulo : Epusp, 2023.
518 kb

ISBN 978-65-89190-24-0
DOI 10.11606/9786589190240

1. Geometria Descritiva I.Petreche, João Roberto Diego I.t.

Conteúdo

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução à Geometria Descritiva

1.1 Introdução

A Geometria Descritiva tem como objetivo representar objetos tridimensionais em planos bidimensionais, utilizando projeções de elementos geométricos como pontos e retas.

Ela foi desenvolvida no século XVII por Gaspard Monge e é utilizada nas áreas de engenharia, arquitetura e design.

A Geometria Descritiva é baseada em um conjunto de princípios permitem representar a forma e a posição de objetos tridimensionais em um sistema de projeções ortogonais. Essas projeções são obtidas por meio de planos de projeção, que são posicionados de forma a capturar as diferentes vistas do objeto.

A Geometria Descritiva é uma ferramenta essencial para a representação e a comunicação de ideias no campo da engenharia e do design. Ela permite aos profissionais visualizarem e analisarem objetos complexos em um plano bidimensional, facilitando o processo de projeto, construção e fabricação.

1.2 Objetivos

O objetivo principal é apresentar ao leitor os fundamentos da geometria descritiva, que é uma ferramenta gráfica para a solução de problemas geométricos no espaço. Nossa experiência indica que o tema, apesar de ser de fácil leitura, é de difícil aprendizado. A melhor forma de se aprender a matéria, é fazendo exercícios.

1.3 Sistemas de Projeção

Até se aprender multiplicação de matrizes, era óbvio que um ente a multiplicado a outro b, resultaria em um ente $a \times b$, que era igual à $b \times a$. Em outras palavras, a propriedade comutativa era “óbvia”. Depois da primeira mordida na aula de multiplicação de matrizes, caímos na realidade: a comutatividade não é óbvia, e temos a sensação de que o chão sob nossos pés não nos sustenta firmemente, mas após algum tempo, percebemos claramente que a nossa compreensão da matemática aumentou.

O mesmo acontece com o desenho e a geometria descritiva. Existem inúmeros sistemas de projeção, e depois que se atinge um certo nível de maturidade, pode-se formular problemas algébricos, resolver problemas de geodésicas (linhas de menor comprimento), ou até mesmo projetar elementos geométricos do 4-D para sistemas de projeção 2-D. Mas paremos por aqui e iniciemos a jornada “à maturidade”.

Apresentamos agora dois sistemas de projeção, o cilíndrico ortogonal e o cônico. Em ambos os sistemas, há três elementos principais: o *objeto a ser projetado*, o *quadro de projeção* e o *centro de projeção*, como é mostrado na figura 1.1.

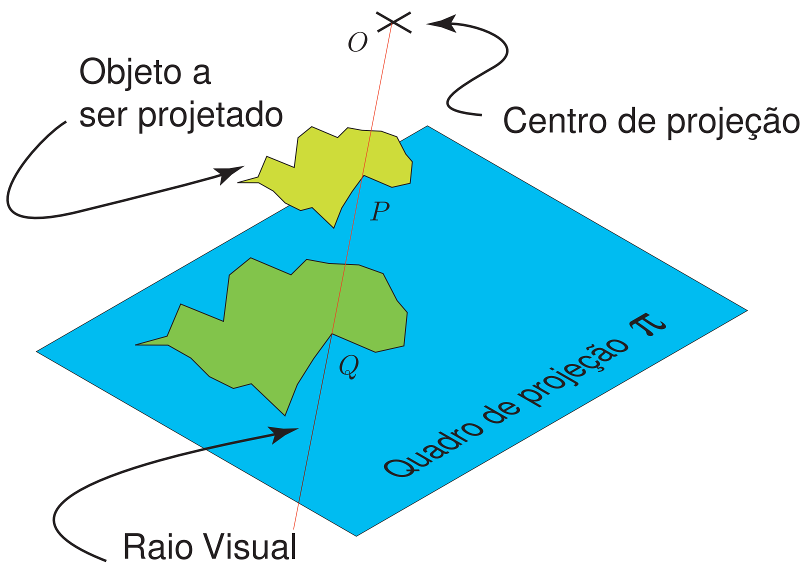


Figura 1.1: Elementos principais do sistema de projeção.

Um raio de luz (ou mais tecnicamente *raio visual*) parte do centro de projeção O, passa por um ponto genérico P do objeto, e atinge o quadro de projeção π em Q. Dizemos que o ponto Q é a *projeção de P em π*. Projetando-se todos os pontos do objeto, obtém-se a sua projeção.

Quando o centro de projeção P está a uma distância finita (cuidado com os conceitos de finito e infinito[1]), aqueles objetos que estão mais próximos do centro de projeção tem projeção mais ampliada do que aqueles mais distantes, como mostrado na figura 1.2.

[1]Se você consegue dar um valor limitante para distância, por maior que seja, então a distância é finita. Por exemplo, se digo que a distância entre você e o prédio do IFUSP é menor que um milhão de anos luz, então essa distância é finita

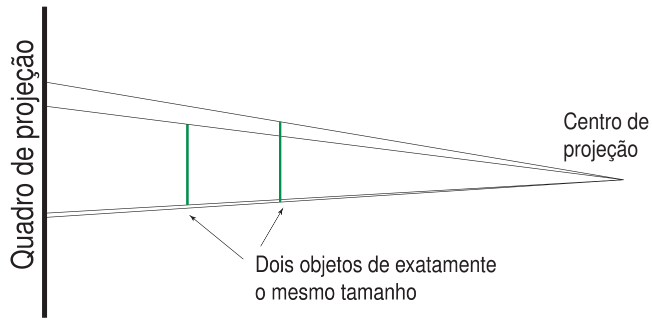


Figura 1.2: Efeito da proximidade com o centro de projeção.

Usando agora a abstração, coloque o centro de projeção à uma distância infinita do quadro de projeção, mantendo o objeto a uma distância finita. O resultado é que a distância do objeto ao quadro de projeção (note que agora, devido ao conceito de infinito, não há sentido em falarmos em distância ao centro de projeção) não influencia mais a ampliação da projeção com relação ao objeto sendo projetado (ver figura 1.3).

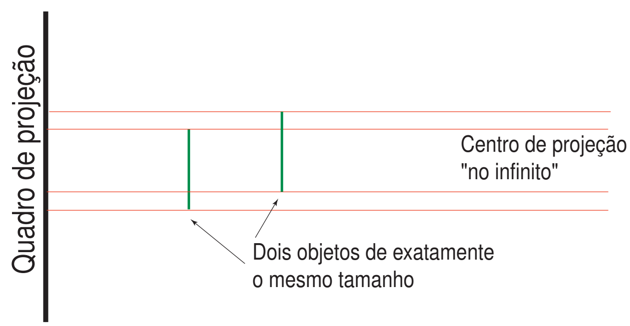


Figura 1.3: Centro de projeção no infinito.

Quando o centro de projeção está a uma distância finita, temos o sistema cônico de projeção (figura 1.1), e quando está a uma distância infinita, temos o sistema cilíndrico de projeção (figura 1.4)[2].

Continuando com a especialização, se os raios visuais são perpendiculares ao quadro de projeção, e o centro de projeção está à uma distância infinita do quadro (figura 1.5), então, temos o sistema cilíndrico ortogonal.

Duas propriedades são importantes no sistema cilíndrico ortogonal:

1. Um segmento de reta paralelo ao quadro de projeção é projetado em *verdadeira grandeza*, isto é, o comprimento da projeção é igual ao comprimento do próprio segmento.

[2]trata-se então de uma abstração, certo?

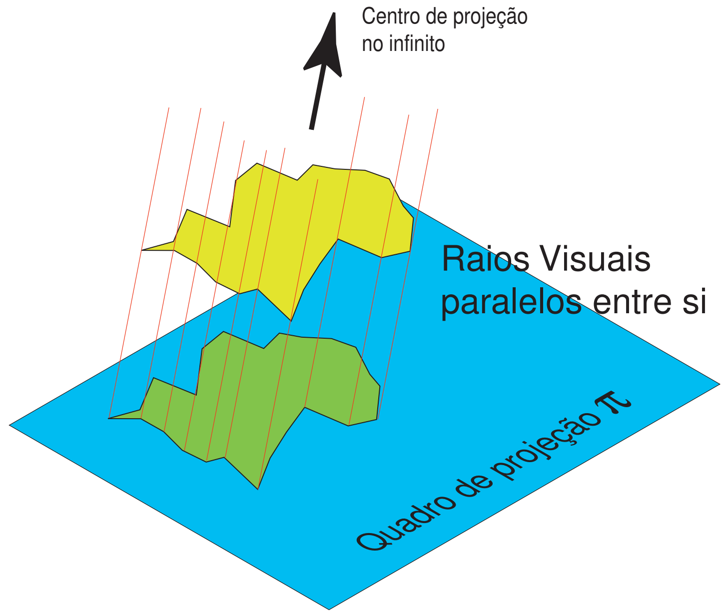


Figura 1.4: Sistema cilíndrico de projeção.

2. Sejam duas retas ortogonais entre si. Se (pelo menos) uma delas é paralela ao quadro de projeção, então as projeções das duas retas são perpendiculares entre si. Veja figura 1.6.

Passamos agora a estudar os elementos principais da Geometria Descritiva, que são: pontos, retas e planos.

1.4 Elementos principais da Geometria Descritiva

A Geometria Descritiva, foi criada por Gaspar Monge (1746-1818), um matemático francês que serviu Napoleão em sua campanha pelo Egito, foi seu Ministro da Marinha, e que tinha vários interesses tanto na Matemática como na Física e Química. Foi amigo de Lavoisier e Fourier. Para termos uma idéia do avanço científico da época, em 1800 Volta inventa a pilha elétrica!

A motivação para a criação da Geometria Descritiva foi o projeto de fortes militares, que naturalmente envolvia problemas geométricos tridimensionais complexos. Após sua invenção, ela foi conservada como segredo militar por vários anos pelo próprio Napoleão. Certamente, a Geometria Descritiva não era "óbvia", como hoje pode parecer.

E, afinal, qual era o grande "segredo" de Gaspar Monge? Era o uso simultâneo de *dois* sistemas de projeção cilíndricos ortogonais, ortogonais entre si, como mostrado na figura 1.7.

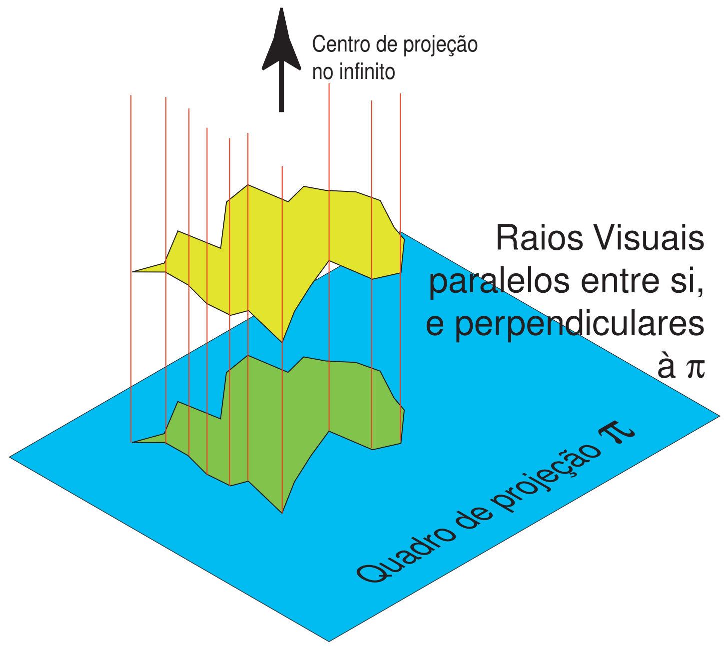


Figura 1.5: Sistema cilíndrico ortogonal de projeção.

Como você já deve ser capaz de intuir, um ponto no espaço é representado no sistema mongeano como na figura 1.8.

Falando um pouco mais formalmente, um ponto P no espaço tridimensional é localizado por três coordenadas, x, y e z. Através da projeção em dois planos π_1 e π_2, é possível se especificar as três coordenadas de P.

A reta resultante da intersecção dos planos π_1 e π_2 é denominada *linha de terra (L.T.)*.

Tanto o plano π_2 como as figuras nele resultantes são rotacionados em torno da L.T. de modo a ficarem coplanares com π_1, como é indicado na figura 1.9.

Assim, a posição de um dado ponto P pode ser totalmente descrita por suas projeções em π_1 e π_2, dispostos em um único plano (figura 1.10), denominado épura. Na épura, logo acima e abaixo da linha de terra são escritos os algarismos correspondentes aos planos que dão origem a ela (figura 1.10).

O segmento que une as projeções do ponto P, P_1 e P_2, é denominada *linha de chamada*. Perceba que ela deve ser perpendicular à linha de terra. Convencionaremos neste curso, designar o plano π_1, que contém os eixos x e y, de plano horizontal de projeção e o plano π_2, que contém os eixos x e z, de plano vertical de projeção. A projeção de um ponto no plano horizontal de projeção é denominada projeção horizontal, e a projeção sobre o plano vertical, de projeção vertical.

Em resumo, pode-se perceber que um ponto no espaço pode ser completamente especificado dadas as suas projeções ortogonais em dois planos perpendiculares

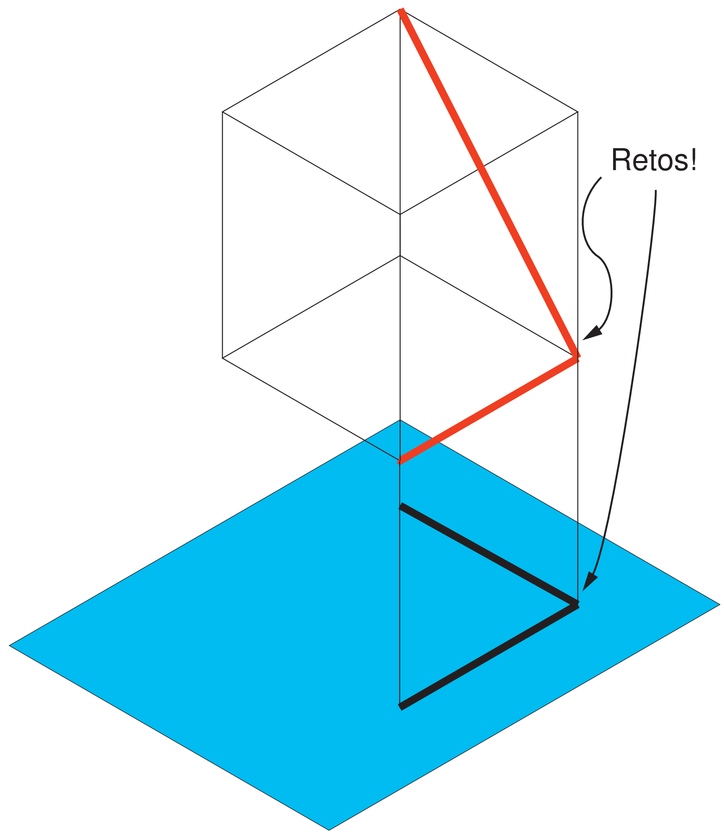


Figura 1.6: O perpendicularismo se mantém.

(afinal de contas, temos as três coordenadas x, y, z de cada ponto), designados plano horizontal de projeção, e plano vertical de projeção.

Os planos vertical e horizontal de projeção, dividem o espaço em quatro diedros como é mostrado na figura 1.11.

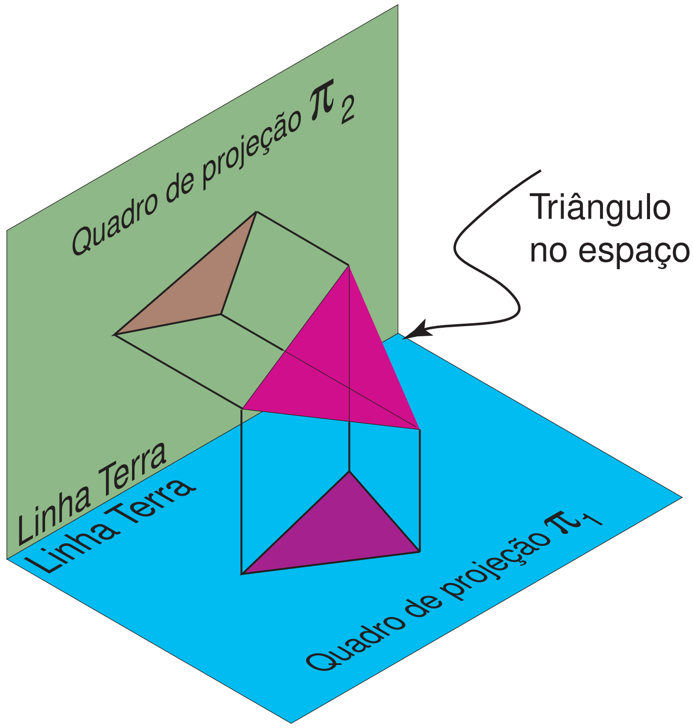


Figura 1.7: Sistema de Monge.

Exercício 1: *Um ponto pode estar em qualquer um dos quatro diedros. Faça quatro épuras indicando a posição de pontos nos quatro diedros diferentes.*

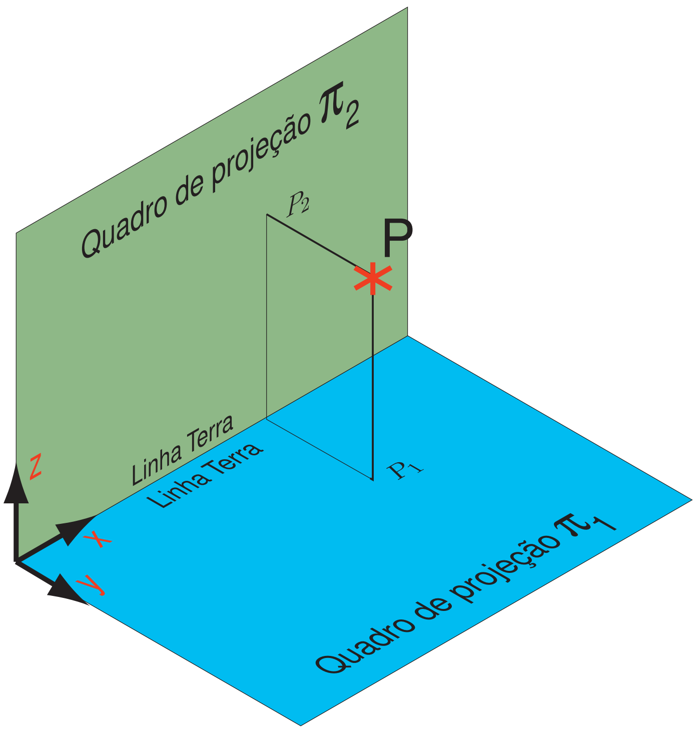


Figura 1.8: Projeção de um ponto em dois planos perpendiculares entre si.

Exercício 2: *Escreva uma justificativa simples para o fato das projeções de um ponto estarem sobre uma reta perpendicular à linha de terra.*

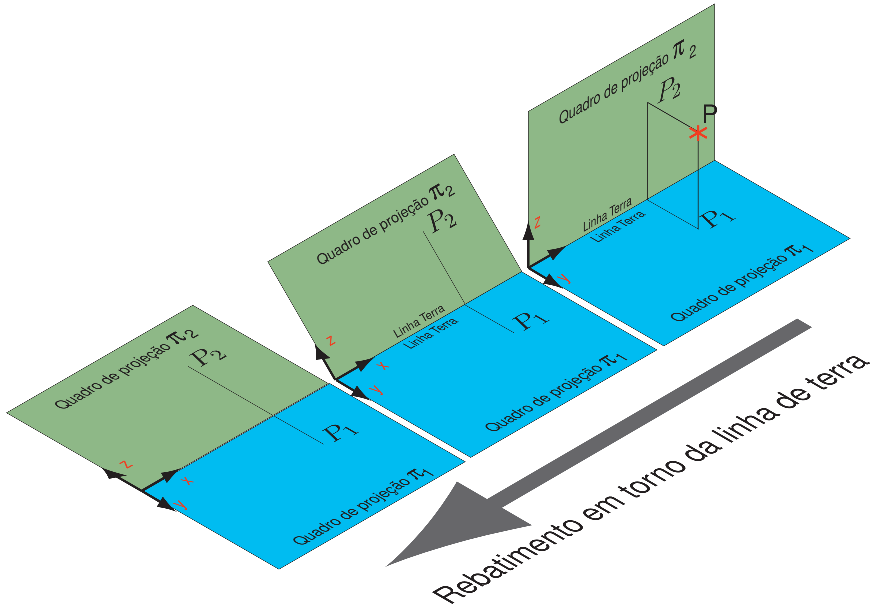


Figura 1.9: Rotação das figuras contidas em π_2 em torno da linha de terra LT.

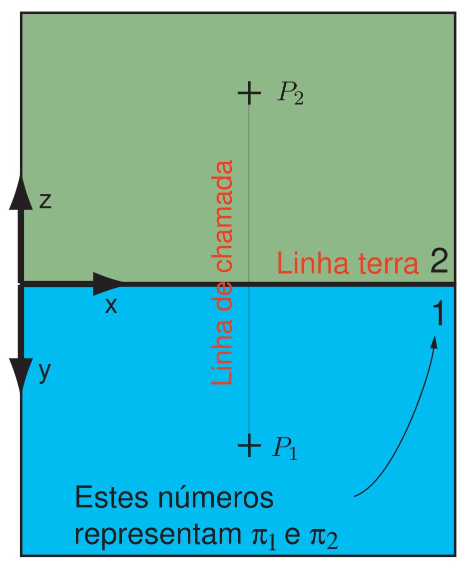


Figura 1.10: Épura.

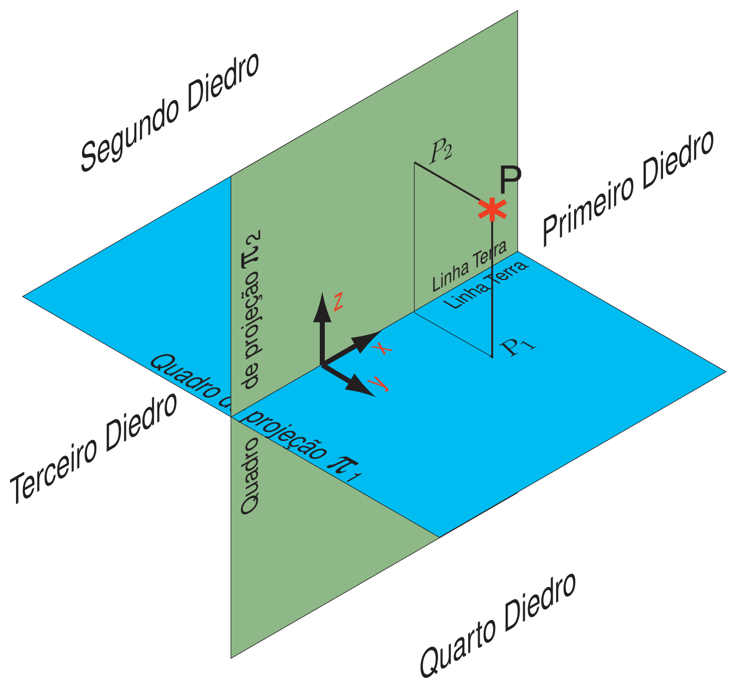


Figura 1.11: Divisão do espaço em quatro diedros.

Capítulo 2

Pontos e Retas

2.1 Objetivos

Os elementos geométricos principais para a resolução de qualquer problema espacial são pontos e retas. Neste capítulo, examinaremos esses entes, procurando no processo de aprendizado, fomentar o amadurecimentos de idéias relacionadas ao espaço geométrico representado no sistema de Monge.

2.2 Estudo do ponto

A distância z de um ponto P ao plano horizontal de projeção é denominada cota, como na geometria cotada, que você já estudou no primeiro semestre. Na épura, a cota é a distância acima da linha de terra até a projeção vertical do ponto, como é mostrado na figura 2.1. Um ponto pertencente ao plano horizontal de projeção tem cota nula, e portanto, na épura, sua projeção vertical deve estar na linha de terra. A coordenada y de um ponto P é denominada afastamento. Na épura, o afastamento é a distância abaixo da linha de terra até a projeção horizontal do ponto. A coordenada x, fixada a partir de uma origem arbitrária, é denominada abscissa.

Um ponto pertencente ao plano vertical de projeção tem coordenada y nula, e portanto, sua projeção horizontal deve estar sobre a linha de terra. É importante notar que é possível a existência de cotas e afastamentos negativos. Por exemplo, um ponto no segundo diedro tem cota positiva, mas afastamento negativo. Um ponto no terceiro diedro tem cota e afastamento negativos.

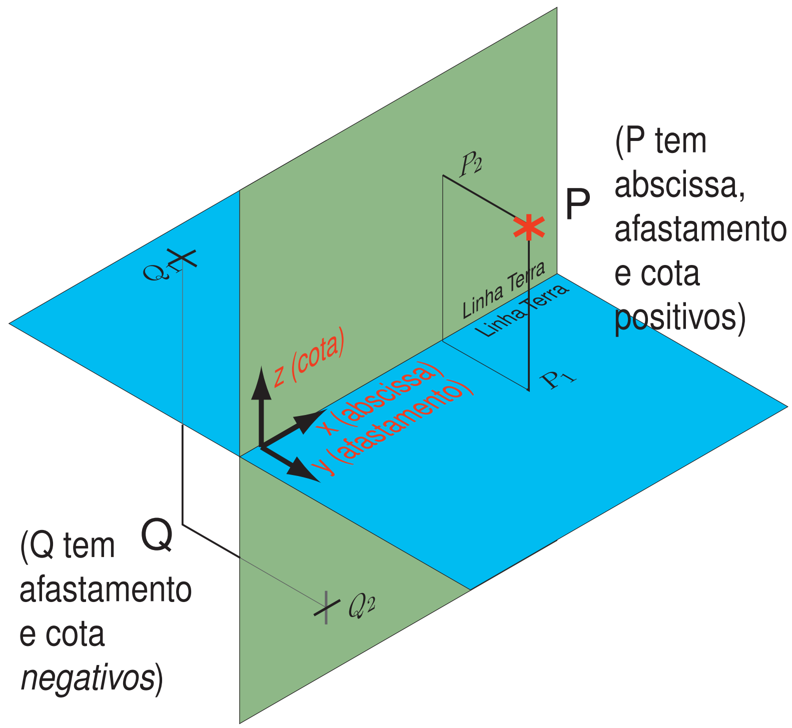
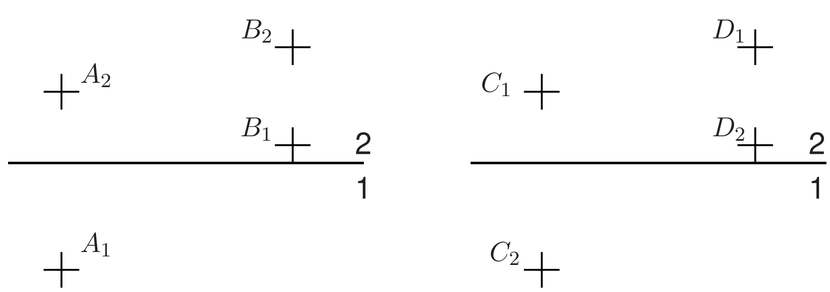


Figura 2.1: Cota, afastamento e abscissa de um ponto.

Exercício 1: *Os pontos A, B, C e D são dados em épura. Determinar:*

1. *as projeções dos pontos A' e B', simétricos de A e B com relação ao plano horizontal de projeção.*
2. *as projeções dos pontos C' e D', simétricos de C e D com relação ao plano vertical de projeção.*



2.3 Estudo da reta

2.3.1 Elementos principais

Uma forma de se especificar uma reta r é fornecendo dois pontos por onde ela passa. Uma outra seria através de suas projeções em π_1 e π_2 como é mostrado na figura 2.2. Perceba que já estamos usando a nova ferramenta (épura) que acabamos de apresentar. Há quatro pontos e dois segmentos de reta no desenho, mas eles representam apenas *um* segmento de reta e *dois* pontos.

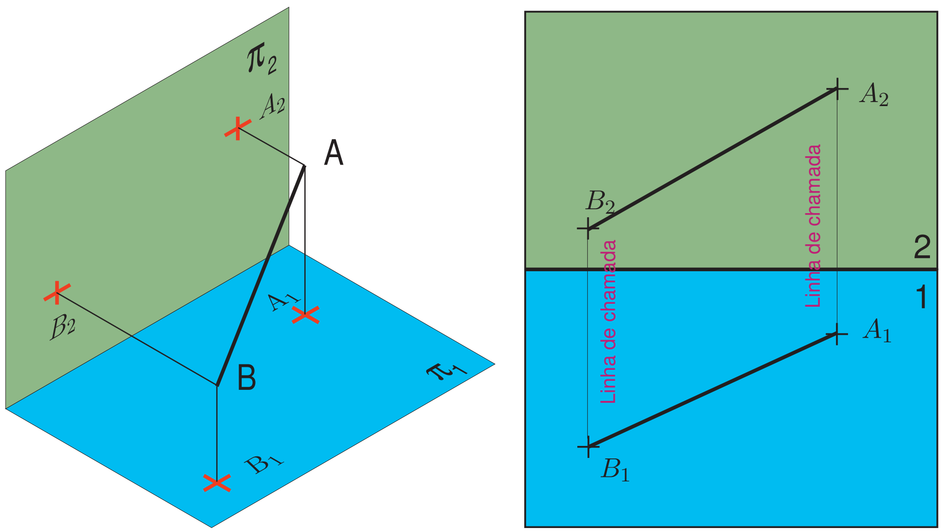
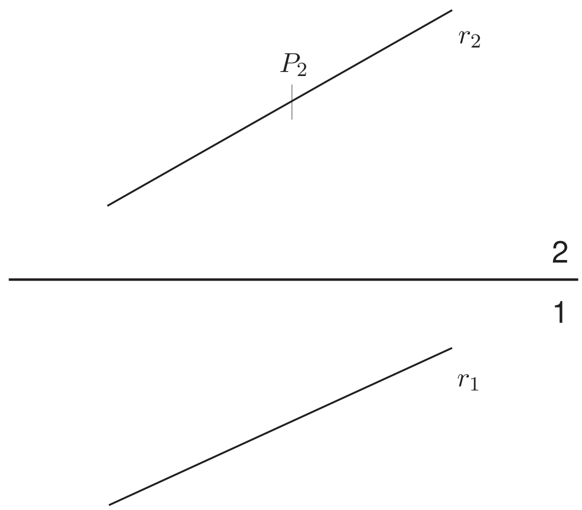


Figura 2.2: Projeções de uma reta na épura.

Exercício 2: *São dados uma reta r e um ponto $P \in r$, representados em épura. Determinar a projeção do ponto P em π_1.*



Na designação das projeções da reta, usa-se como índice o número do plano de projeção correspondente. Assim, por exemplo, a projeção em π_2 é designada por r_2. Os traços de uma reta são pontos resultantes das intersecções da reta com os planos de projeção. Um exemplo é mostrado na figura 2.3. É muito importante compreender a épura associada.

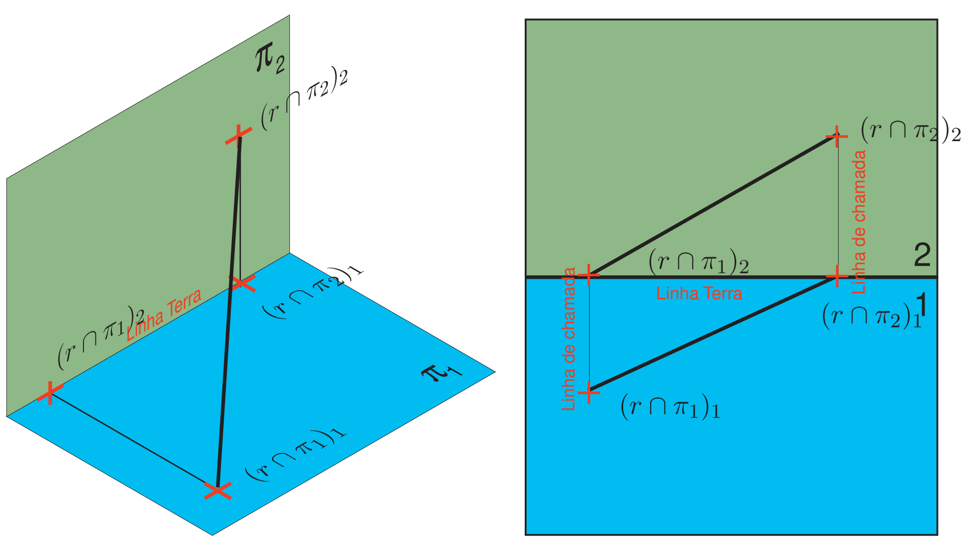
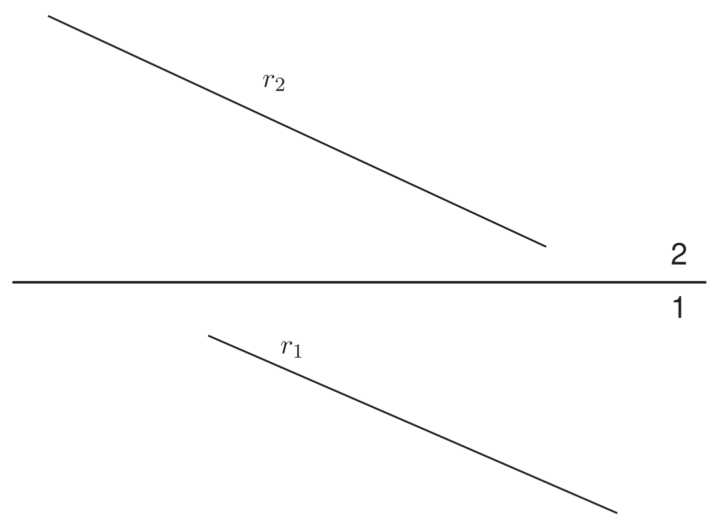


Figura 2.3: Traços de uma reta.

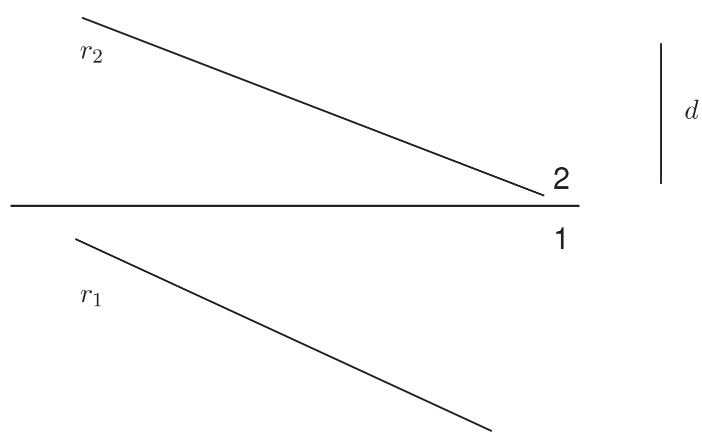
O traço de uma reta r no plano π_1 é designada por $r \cap \pi_1$ e no plano π_2, $r \cap \pi_2$.

Veja que o traço no plano horizontal tem cota nula, e portanto, na épura, a projeção vertical de tal traço *deve estar sobre a linha de terra*. Raciocínio análogo pode ser feito para o traço no plano vertical. Note também que as linhas de chamada são sempre perpendiculares à linha de terra.

Exercício 3: *Determinar os traços da reta r no plano horizontal π_1 e vertical π_2. Se você acertou, deve ter marcado no papel* quatro *pontos.*



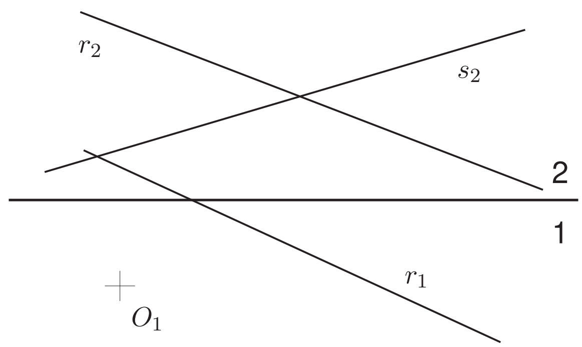
Exercício 4: *Determinar os traços da reta r com os planos de projeção. Obter na reta r o ponto A de afastamento igual ao comprimento d e o ponto B de cota $\frac{d}{2}$.*



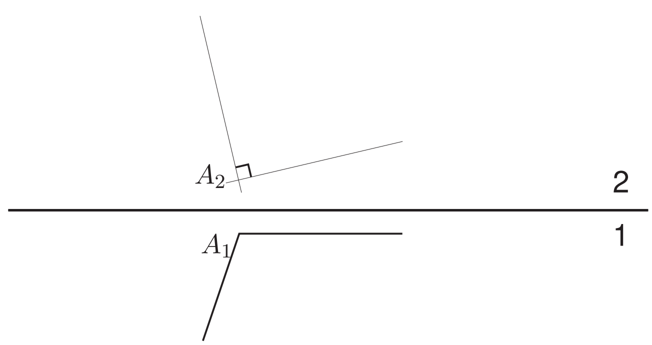
Faça todos os exercícios que agora são propostos. Alguns são desafios.

2.4 Exercícios Gerais

Exercício 5: *Completar as projeções que faltam, sabendo-se que as retas r e s são concorrentes entre si e o ponto O pertence à s.*

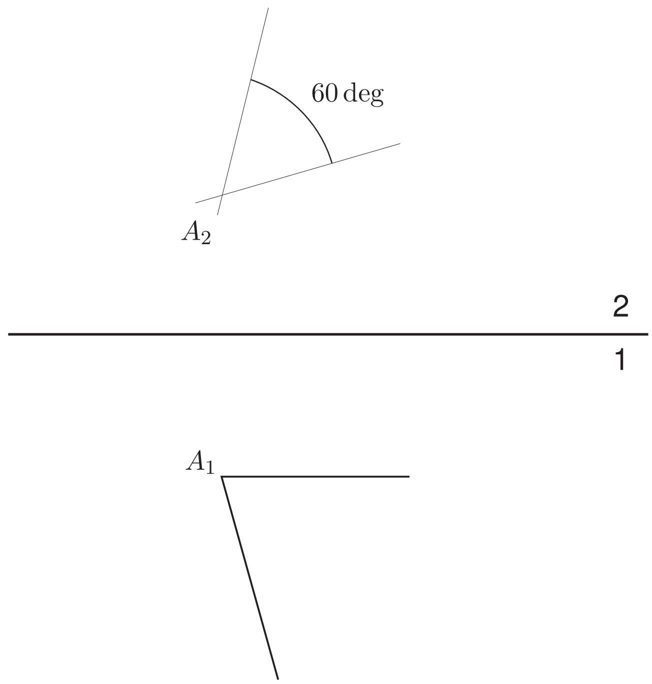


Exercício 6: *Convença-se de que o ângulo $\hat{A}$ (pense no espaço) mostrado na épura é reto*[a].



[a]Parece óbvio, mas nessa altura do campeonato, você já deve saber que não é!

Exercício 7: *Convença-se de que o ângulo* $\hat{A}$ *mostrado na épura* não *tem* $60\,\mathrm{deg}$.

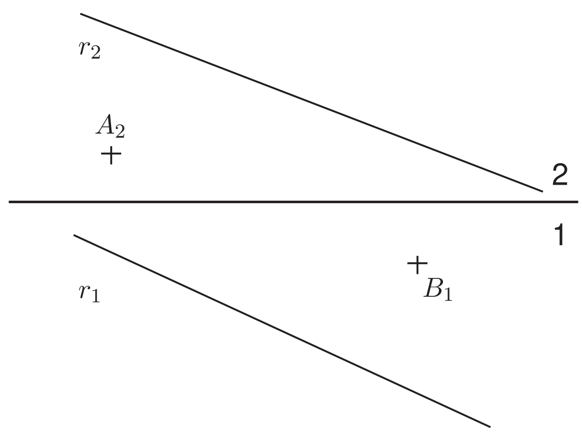


Exercício 8: *Quantas retas no espaço formam um ângulo de 60 graus com* π_1 *e são frontais?*

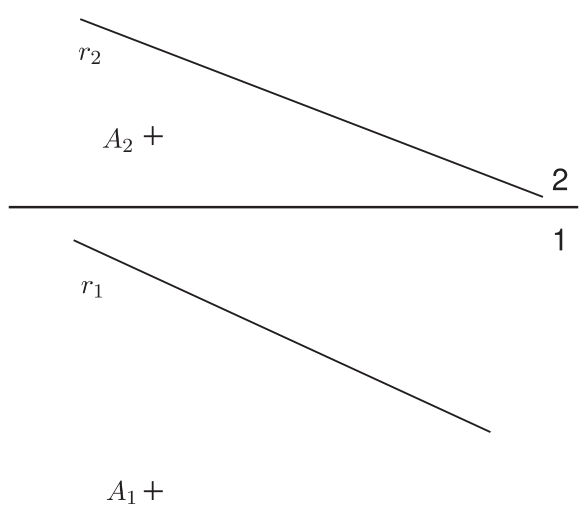
Exercício 9: *Representar em épura três retas que fazem um ângulo de 60 graus com* π_1 *.*

Exercício 10: *Traçar por um ponto* A *situado no primeiro diedro, as retas paralelas à* π_2 *que fazem um ângulo de* $60 \deg$ *com* π_1 *e obter seus traços.*

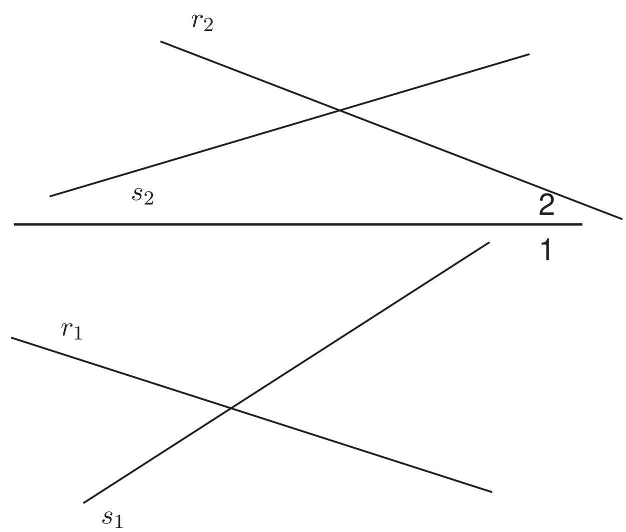
Exercício 11: *Os pontos A e B definem uma reta s paralela à reta r. Determine as projeções de s.*



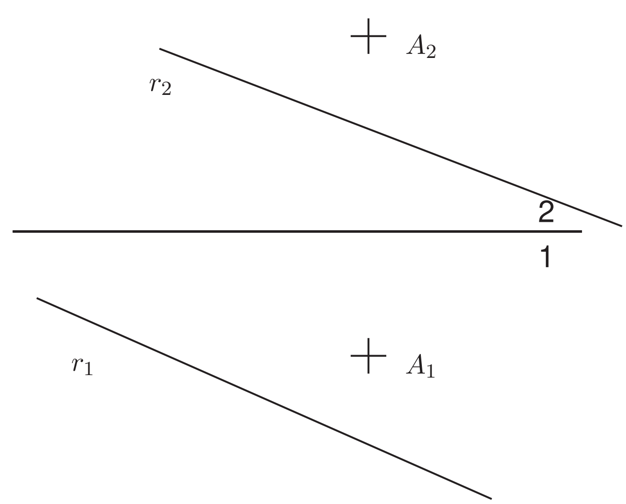
Exercício 12: *Determinar a reta s paralela à π_1 que passa por A e que se apóia na reta r.*



Exercício 13: *Determinar a reta perpendicular à π_2 que se apóia nas retas r e s.*



Exercício 14: *Determinar as retas que passam por A, fazem um ângulo de 60 graus com π_1, e que se apóiam em r.*



Capítulo 3

Planos

3.1 Objetivos

Prosseguiremos analisando os principais elementos da Geometria Descritiva. Vermos agora “planos”, e suas relações com pontos e retas que vimos no capítulo 2. Temos agora três elementos; assim o número de combinações, interrelações entre eles, é necessariamente maior que quando tínhamos apenas pontos e retas para estudar. Concretamente, as relações a ser estudadas são:

- Intersecção de plano com os quadros de projeção π_1 e π_2.
- Pertinência de ponto a plano;
- Intersecção de plano com plano;
- Intersecção de reta e plano.

Esses itens são os que veremos nas seções seguintes.

3.2 Intersecção de plano com os quadros de projeção

A intesecção de um plano qualquer com um quadro de projeção se chama *traço*. Assim, a interseção de um plano α com π_1 se chama *traço de α em π_1* e é simbolizado por $\alpha \cap \pi_1$. Caso análogo acontece com a intesecção com π_2 (veja figura 3.1).

Se você atentar bem, $\alpha \cap \pi_1$ e $\alpha \cap \pi_2$, que são retas, se interseptam em um ponto P[1] pertencente à linha de terra. Isso deveria realmente acontecer, pois a linha de terra é resultado da intersecção $\pi_1 \cap \pi_2$, e interesecção de reta e plano é um ponto. Daí:

$$\begin{aligned} (\pi_1 \cap \pi_2) \cap \alpha &= P \\ (\pi_1 \cap \alpha) \cap (\pi_2 \cap \alpha) &= P \end{aligned}$$

[1] A rigor, {P}, mas vamos relaxar.

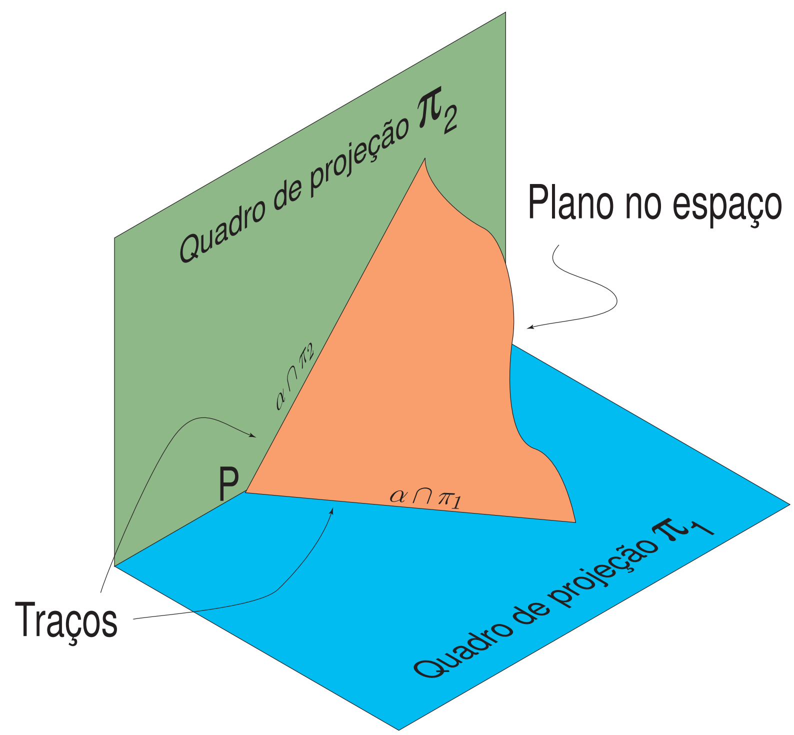


Figura 3.1: Traços de um plano no espaço.

A épura fica então como a figura 3.2.

A figura 3.2 é realmente importante. Note que cada traço do plano α, que são retas, tem *duas* projeções. Por exemplo, a reta $\alpha \cap \pi_1$ tem as projeções $(\alpha \cap \pi_1)_1$ e $(\alpha \cap \pi_1)_2$. Ocorre que a reta $(\alpha \cap \pi_1)_1$ está exatamente sobre o plano π_1 e a reta $(\alpha \cap \pi_2)_2$, exatamente sobre π_2. Então, para evitarmos confusão de linhas, símbolos e índices, convencionaremos que quando um elemento geométrico (ponto, reta, plano, figura, etc.) estiver sobre[2] um dos planos de projeção[3], representaremos apenas a projeção mais significativa, ou seja aquela que não coincidir com a linha de terra. Deste modo, como essa simplificação, a épura da figura 3.2 fica sendo como mostrada na figura 3.3

Um plano no espaço fica definido quando são dados três de seus pontos, um ponto e uma reta a ele pertencentes; duas retas coplanares; sua normal (lembra-se do curso de *Álgebra Linear*?) e um ponto, uma reta contida no plano e o requisito de que o plano deve ser paralelo a uma outra reta, etc, etc, etc. Realmente, existem várias formas de se especificar um plano no espaço, mas *convencionaremos* que um plano somente é conhecido se os traços nos planos de projeção são dados.

[2]Um ponto *pertence* a um plano e retas, planos e figuras estão *contidas* em um plano

[3]Se um elemento está sobre um dos planos de projeção, então sua projeção sobre o outro plano será coincidente com a linha terra

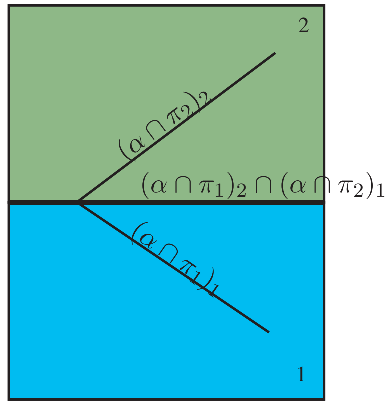


Figura 3.2: Épura dos traços de um plano.

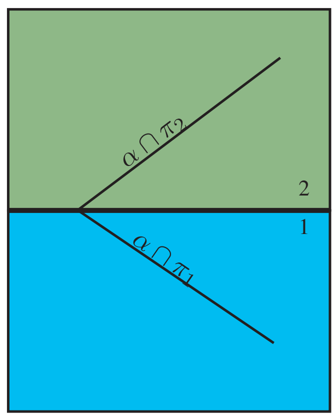


Figura 3.3: Épura simplificada dos traços de um plano.

Como exemplo, suponha que são dados três pontos A, B e C pertencentes a um plano α, e pede-se determinar os traços de α. Para achar um ponto pertencente ao traço em π_1, basta unir dois pontos dados, digamos A e B, e determinar o traço da reta AB em π_1, com foi visto no capítulo 2 (veja figura (fig:TracosReta)). Determinando-se os traços de, digamos, AB e AC, nos planos de projeção, e ligando pontos correspondentes, pode-se determinar os traços do plano α . A situação toda está ilustrada na figura 3.4.

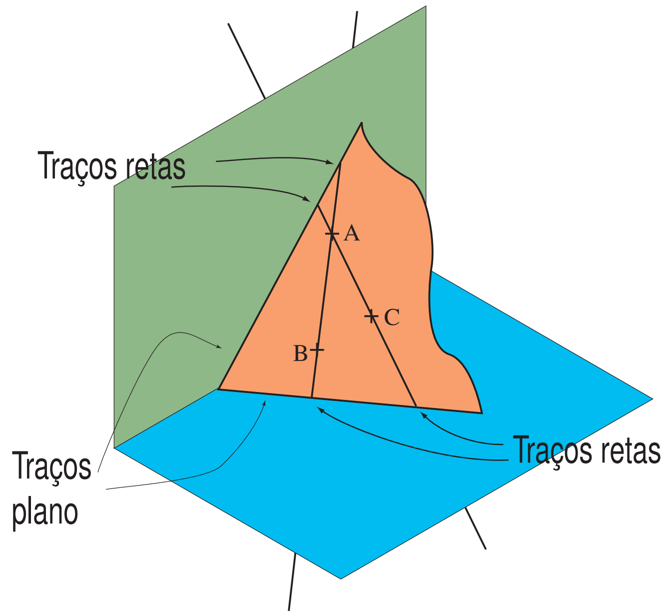
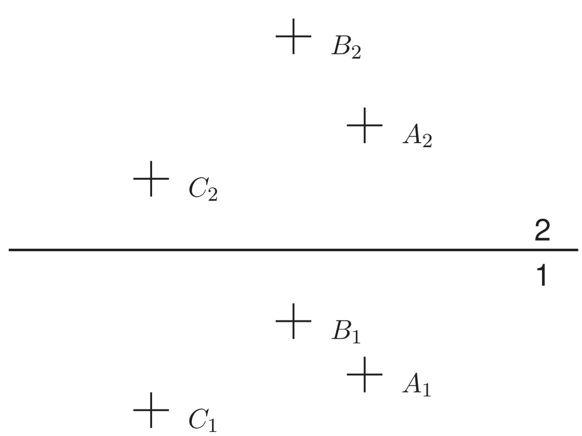


Figura 3.4: Traços de um plano e traços de retas nele contidas.

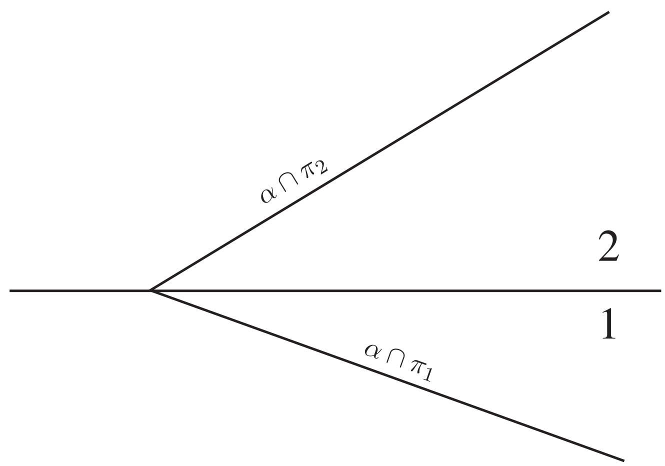
Exercício 1: *Determinar os traços do plano α definido pelos pontos A, B e C indicados na épura abaixo.*



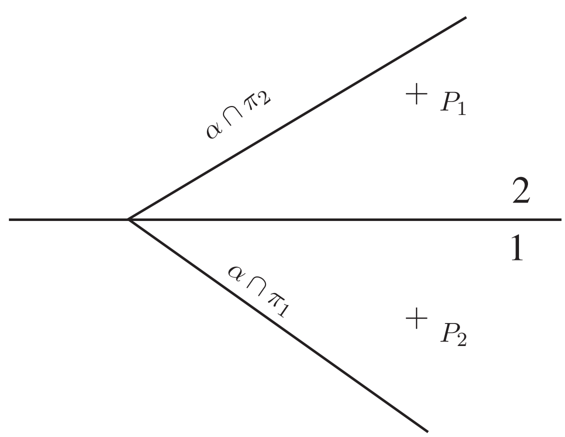
3.3 Pertinência de ponto a plano

Para se determinar se um ponto P pertence a um plano α, deve-se recair primeiro no problema da pertinência de ponto a reta. Se $r \subset \alpha$ e $P \in r$, então $P \in \alpha$.

Exercício 2: *Seja α dado pelos seus traços nos planos de projeção. Forneça uma reta qualquer r contida em α e seus traços.*



Exercício 3: *Verifique se o ponto P pertence à α.*



Um problema natural que pode surgir para você é a determinação do ponto de uma determinada reta que tem distância *zero* a um plano, ou seja, a intersecção de uma reta com um plano. Para se resolver esse problema, é necessário primeiro atacar outro, que é a intersecção entre dois planos.

3.4 Intersecção de plano com plano

Partimos do fato que a intersecção entre dois planos é uma reta [4]. Ora, se é uma reta, para determiná-la, bastam dois pontos. Seja a épura na figura 3.5 onde estão representados dois planos α e β.

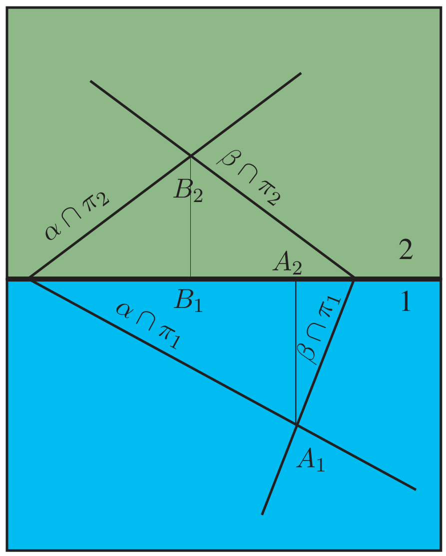


Figura 3.5: Intersecção de dois planos: uma conjectura.

Uma conjectura plausível é afirmar que os pontos A e B pertencem à intersecção $\alpha \cap \beta$. E realmente pertencem? A resposta é sim, pelo seguinte argumento:

$$
\begin{aligned}
A &= (\pi_2 \cap \alpha) \cap (\pi_2 \cap \beta) \Rightarrow A \in (\alpha \cap \beta) \\
B &= (\pi_1 \cap \alpha) \cap (\pi_1 \cap \beta) \Rightarrow B \in (\alpha \cap \beta)
\end{aligned}
$$

A intersecção entre os planos é mostrada na figura 3.6.

[4]Deixemos de lado casos patológicos

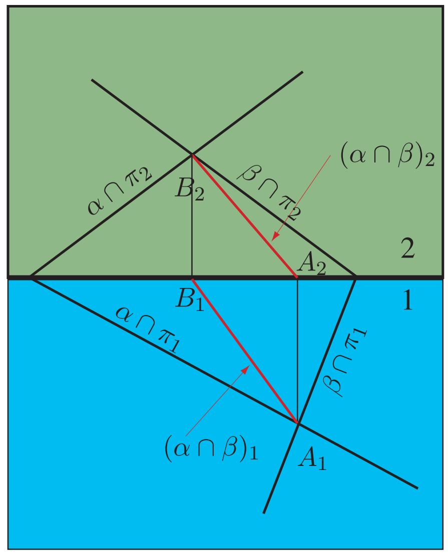
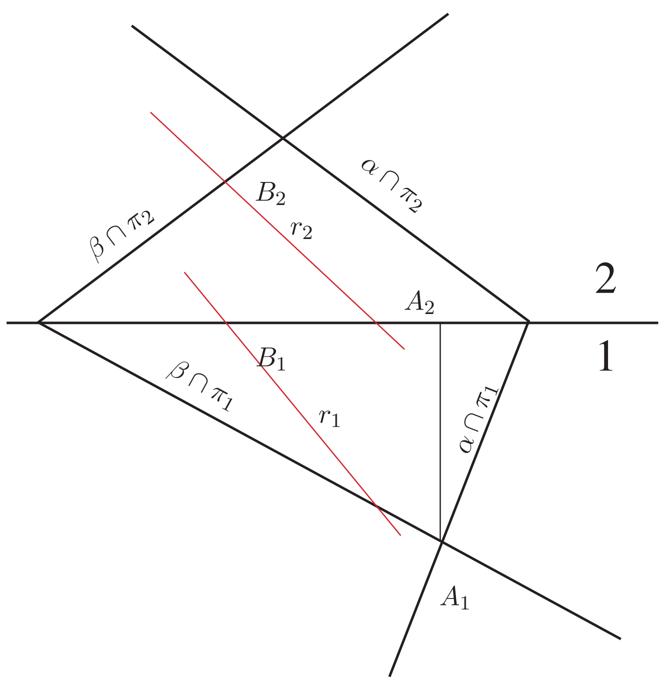


Figura 3.6: Intersecção de dois planos: solução

Exercício 4: *Sejam dois planos α e β e uma reta $r \subset \beta$. Determine $r \cap \alpha$.*



No último exercício, você deve ter concluido que a intersecção $r \cap \alpha$ é dada por $r \cap (\alpha \cap \beta)$, sendo que $\alpha \cap \beta$ foi determinado em exercício anterior.

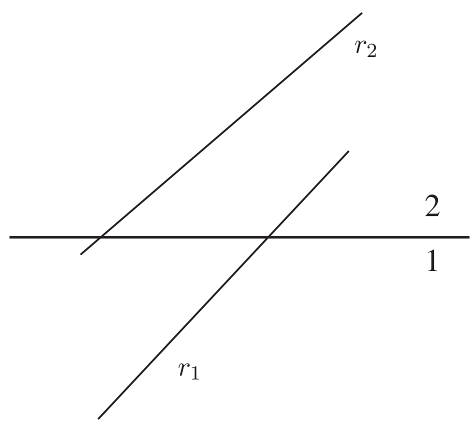
A grande lição é que para se determinar a intersecção de uma reta com um plano, é funcamental ter à disposição um plano que passe pela reta. Se esse plano não é dado, criamos um em uma posição *arbitrária*[5].

3.5 Intersecção de reta com plano

Da última seção tiramos que para se determinar a intersecção de reta com plano, é necessário primeiro criarmos um plano que contenha a reta. Existem infinitos planos, basta escolher um!

Suponha que seja dada uma reta no espaço e seja pedido que se passe um plano qualquer por ela. Pensando em termos de épura, a única restrição é que os traços do plano passem pelos traços da reta nos planos de projeção. Só.

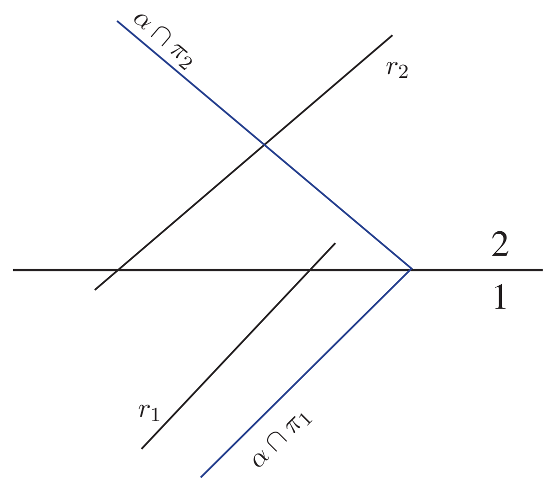
Exercício 5: *Seja a reta r. Dê um plano arbitrário que contenha r.*



Agora suponha que no exercício anterior seja acrescido um plano α, e que seja pedido a intersecção de α com r. Sei que você sabe resolver!

[5] Arbitrária, e não "aleatória" como muitos estudantes dizem. Esse erro dá até arrepios!

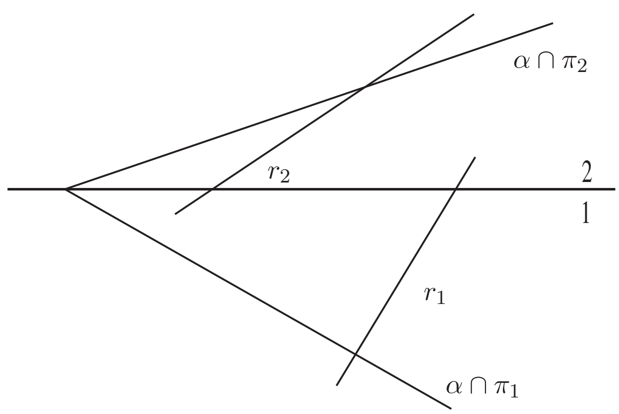
Exercício 6: *Sejam a reta r e o plano α.Determine $r \cap \alpha$.*



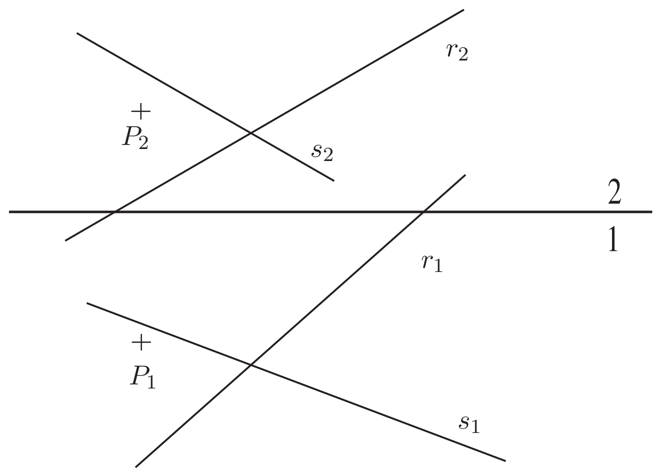
3.6 Exercícios Gerais

Exercício 7: *São dados três planos no espaço. Pede-se a intersecção entre eles. Quais são as possibilidades para o resultado da intersecção?*

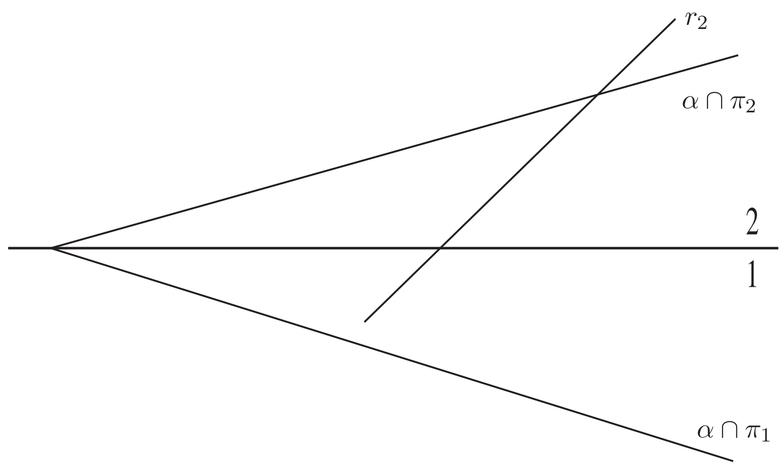
Exercício 8: *Verifique se a reta r pertence ou não ao plano α dado pelos seus traços.*



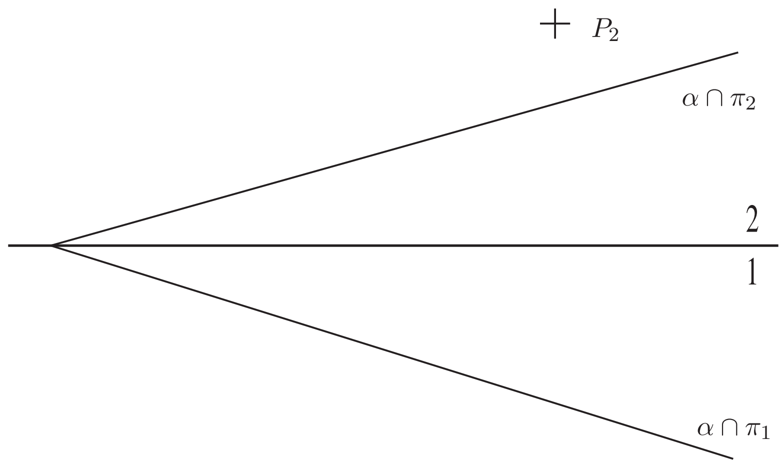
Exercício 9: *Verifique se o ponto P pertence ou não ao plano α definido pelas retas r e s concorrentes.*



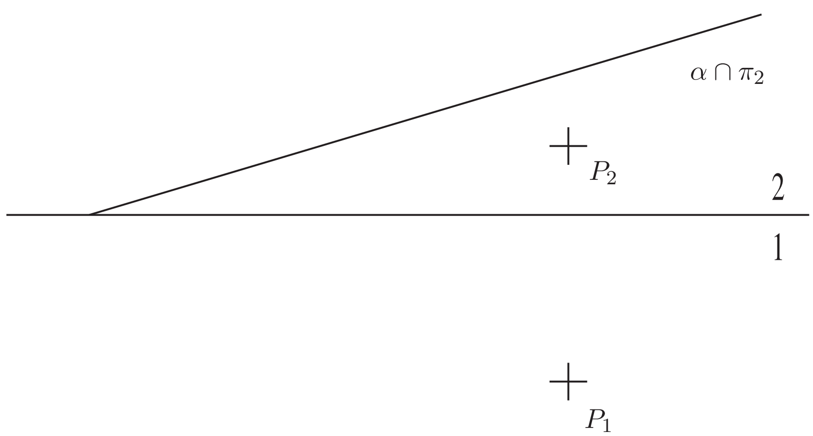
Exercício 10: *São dados um plano α e uma reta $r \subset \alpha$. Determine a projeção de r sobre o plano horizontal π_1.*



Exercício 11: *Seja um ponto P pertencente a um plano α. Determine a projeção de P sobre o plano horizontal π_1.*



Exercício 12: Determinar a reta r normal ao plano α, passando pelo ponto $P \in \alpha$.



Capítulo 4

Métodos

4.1 Objetivos

Veremos agora métodos geométricos poderosos para atacar problemas mais difíceis, e ao mesmo tempo que estudamos, você verá que a sua compreensão da Geometria Descritiva aumenta. Se você realmente *aprender* o conteúdo dessa aula, ficará bem claro que a resolução de problemas em Geometria Descritiva não se baseia em um amontoado de regras arbitrárias, mas sim em operações bem fundamentadas na geometria projetiva.

Concretamente, veremos dois métodos: Resolução de problemas na épura por rotação de objetos e por mudança de planos de projeção.

4.2 Rotações

Um problema clássico é a determinação da *verdadeira grandeza*[1] de entes geométricos, como segmentos de reta e áreas de polígonos, quando estes estão representados na épura. Suponha que você deva obter o comprimento do segmento AB representado na épura da figura 4.1.

Naturalmente, você pode usar o teorema de Pitágoras, mas queremos que você use métodos puramente geométricos (régua e compasso). Como fazer?
Uma saída seria *rotacionar* AB em torno de um eixo perpendicular à π_2 passando por B, até que AB fique paralelo à π_1. Daí é só medir com a régua a projeção de AB na nova posição. A operação está descrita na figura 4.2.

[1] Vimos o que é verdadeira grandeza na aula de Geometria Cotada no primeiro semestre

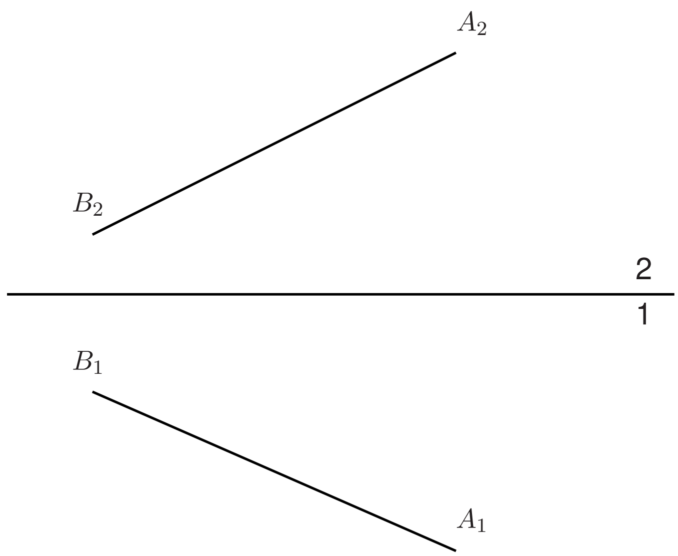


Figura 4.1: Segmento de reta na épura: obter sua VG.

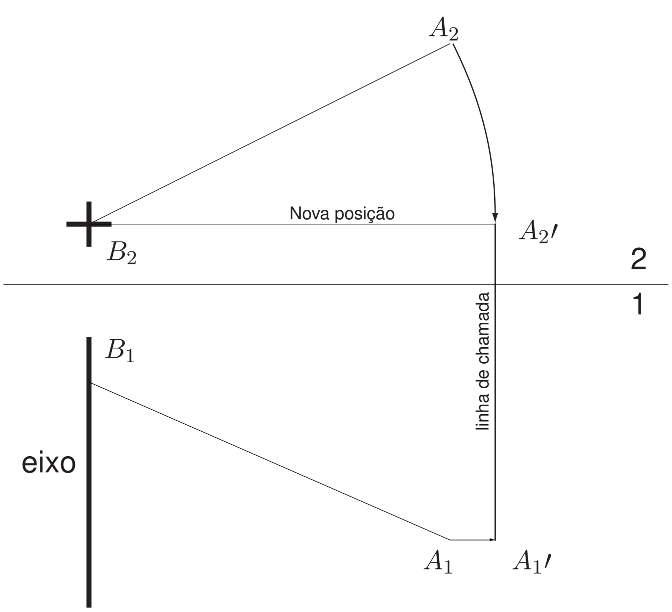
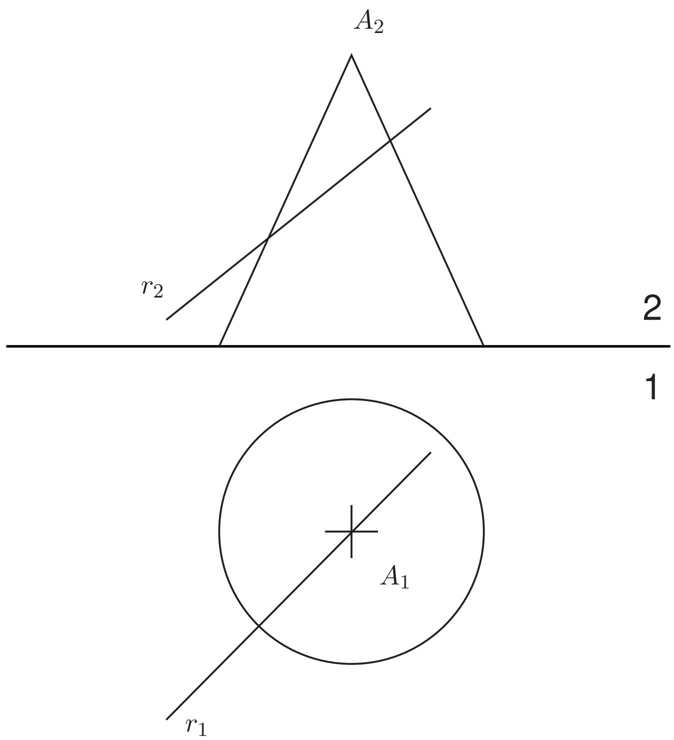


Figura 4.2: Rotação de Segmento.

Exercício 1: *Determinar a intersecção a reta r com o cone γ usando a técnica da rotação. Note que r está em uma posição particular que facilita grandemente a resolução do problema.*



Um problema mais sofisticado seria saber se dada uma figura plana, pode-se, de alguma forma, rotacioná-la para obter a sua verdadeira grandeza. A resposta é afirmativa. Precisamos apenas de duas rotações consecutivas. Primeiramente, é necessário localizar uma reta horizontal h que servirá de "eixo". Como não necessariamente este eixo está numa posição conveniente, isto é, perpendicular à π_2, fazemos uma rotação de h e de toda a figura, de forma que h se posicione perpendicularmente à π_2. O segundo passo é rotacionar a figura em torno da nova posição de h. A operação é ilustrada na figura 4.3.

Resolva novamente o exercício da intersecção do cone, mas agora note que a reta r está em uma posição genérica no espaço.

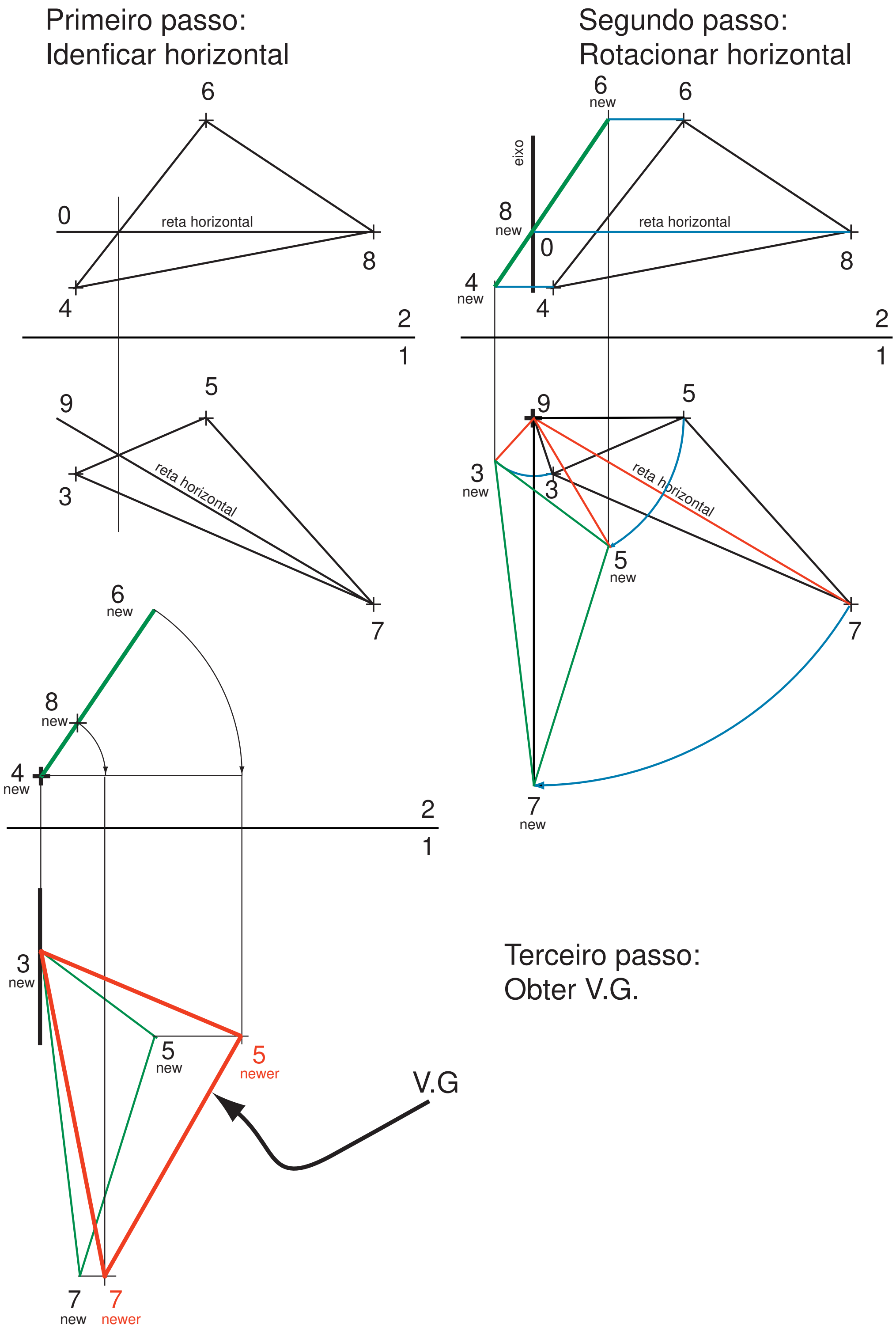
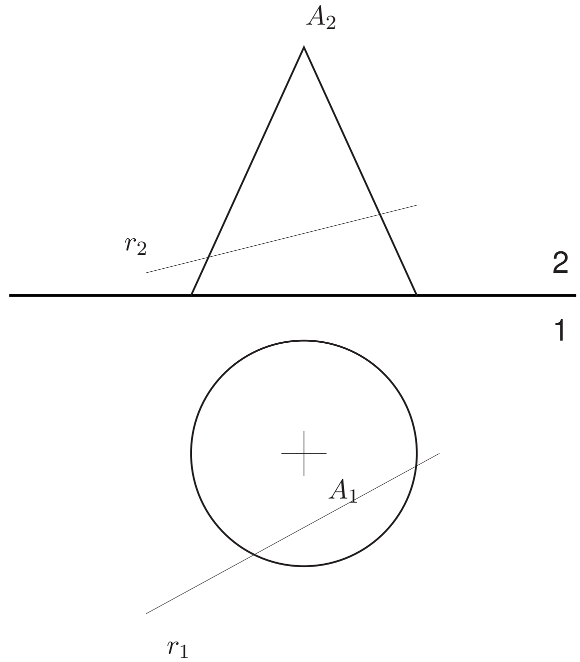


Figura 4.3: Rotação de uma figura no espaço.

Exercício 2: *Determinar a intersecção a reta r com o cone* γ *usando a técnica da rotação.*



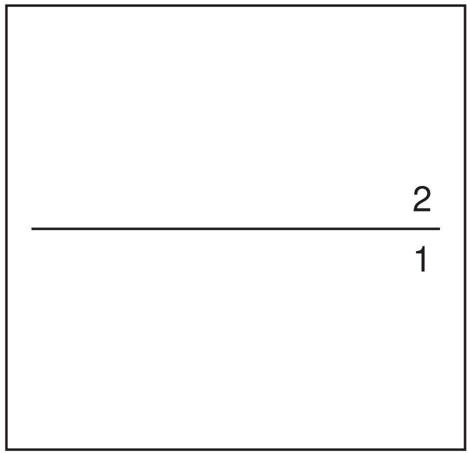


Figura 4.4: Épura tradicional.

4.3 Mudança de planos

A primeira coisa a ser feita é uma “mudança de mentalidade”. Desde que começamos o nosso curso, a épura sempre foi representada com a linha terra paralela à borda inferior do papel (ou do monitor!), como mostrado na figura 4.4

Nada impede que a linha terra fosse colocada de modo inclinado como ilustrado na figura 4.5

Ou ainda mais radicalmente, colocássemos *duas* linhas terra, como mostrado na figura 4.6.

E que situação a figura 4.6 estaria representando espacialmente? E se um ponto P fosse representado nessa épura com duas linhas de terra, quais seriam as posições das projeções de P?

Para responder, veja a figura 4.7.

Note que a *cota* do ponto, ou a distância do ponto P à π_1 é constante, independente da posição do plano vertical (π_2, π_3, e outros arbitrariamente colocados).

Pode-se então colocar o plano vertical π_3 onde quisermos, sendo que na épura, a cota dos pontos representada em π_3 deve ser a mesma representada em π_2.

A essa operação de colocarmos planos de projeção adicionais chamamos de *mudança de planos*. Ela pode ser usada para a obtenção da VG de figuras no espaço.

Por exemplo, seja novamente o segmento AB da figura 4.1. A obtenção de sua VG por mudança de planos está mostrada na figura 4.8.

Resolva novamente o problema da intersecção da reta com cone usando mudança de planos.

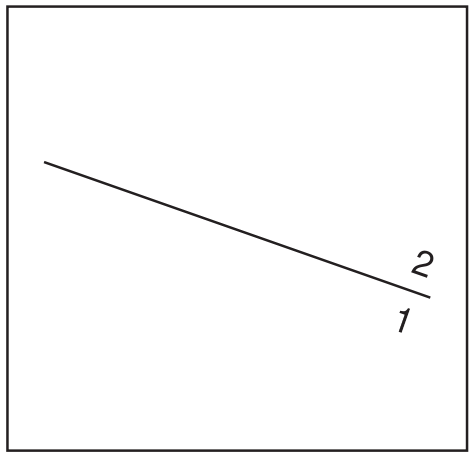


Figura 4.5: Também é épura.

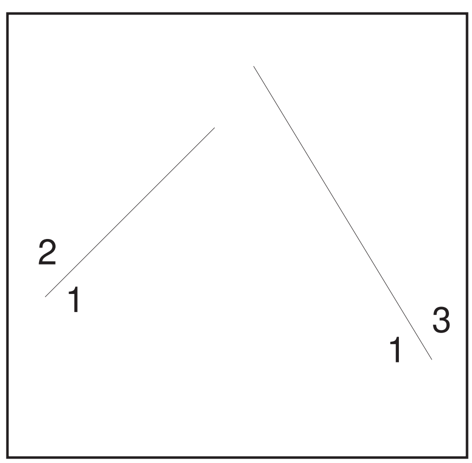


Figura 4.6: Épura generalizada.

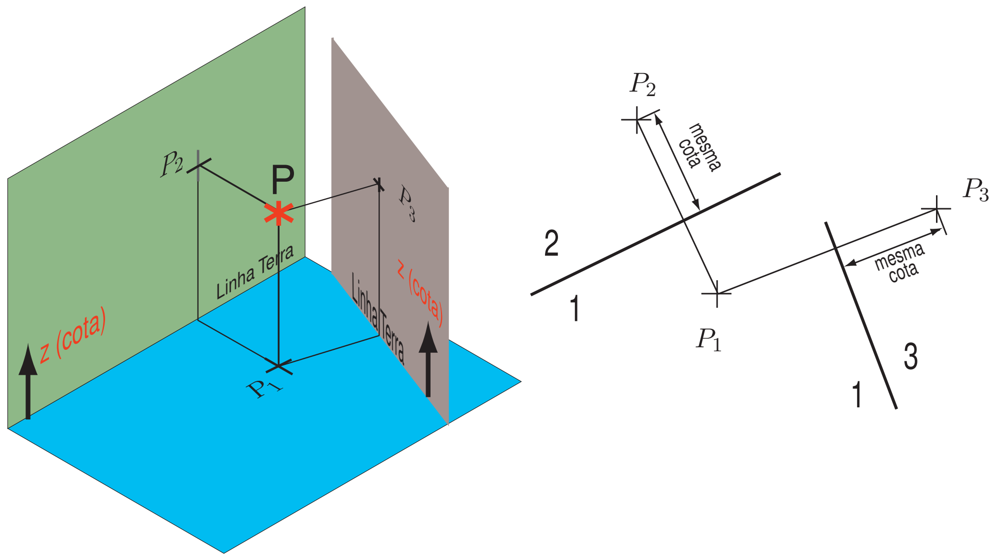


Figura 4.7: Épura generalizada mostrando projeção de ponto.

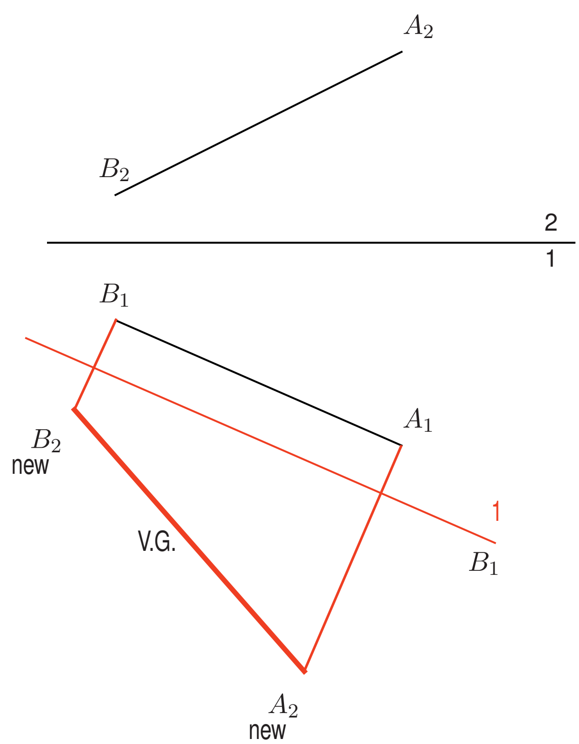
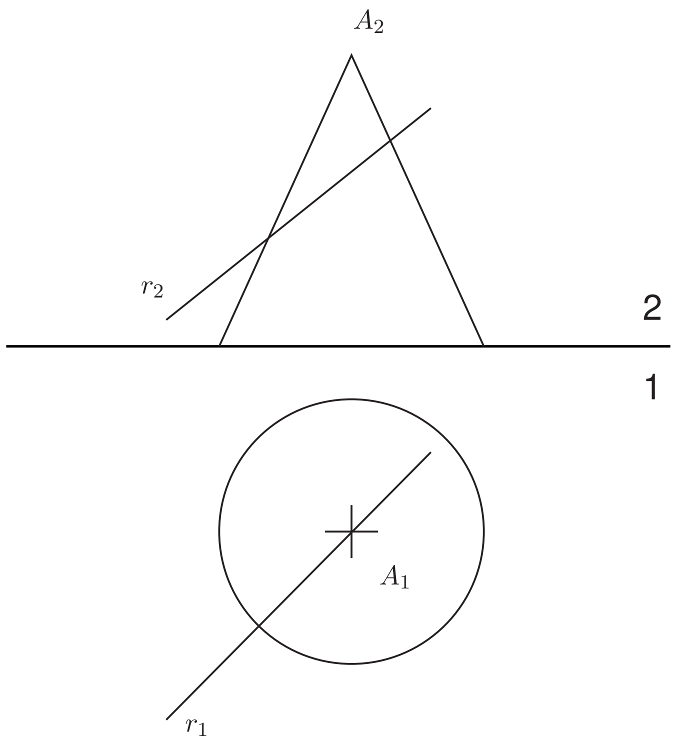


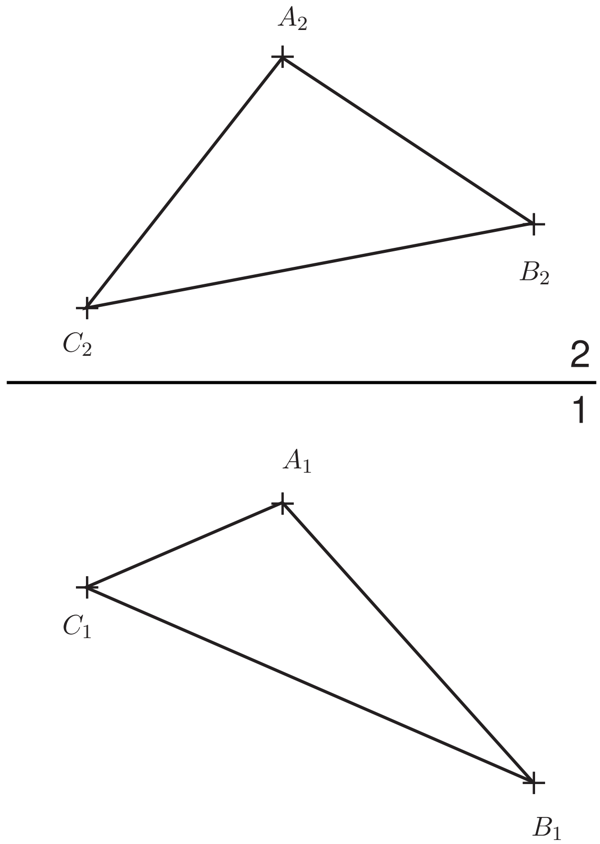
Figura 4.8: Obtenção de VG de segmento de reta.

Exercício 3: *Determinar a intersecção a reta r com o cone γ usando a técnica da mudança de planos. Note que r está em uma posição particular que facilita grandemente a resolução do problema.*

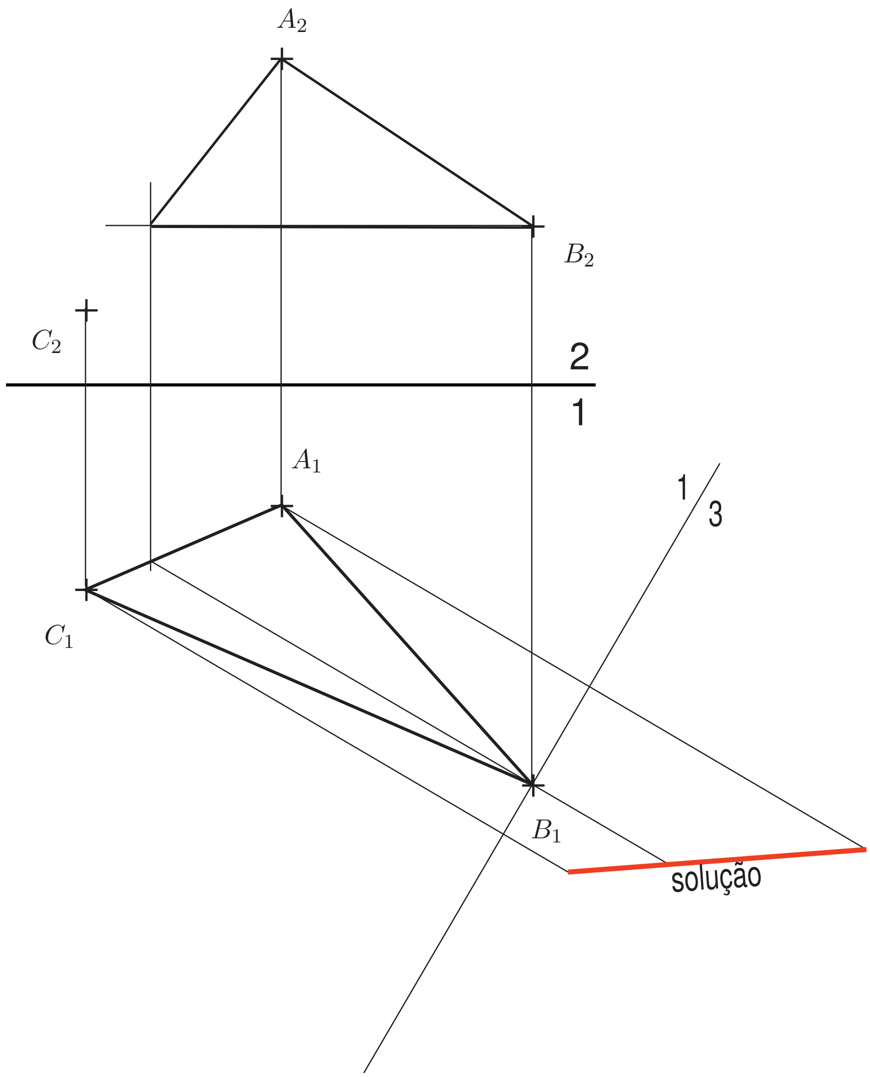


O próximo exercício é importante.

Exercício 4: *Determinar um plano de projeção (sua linha de terra) perpendicular ao plano definido pelos pontos A, B e C. Além disso, determinar a projeção do triângulo ABC no novo plano de projeção (deve dar apenas um segmento de reta).*



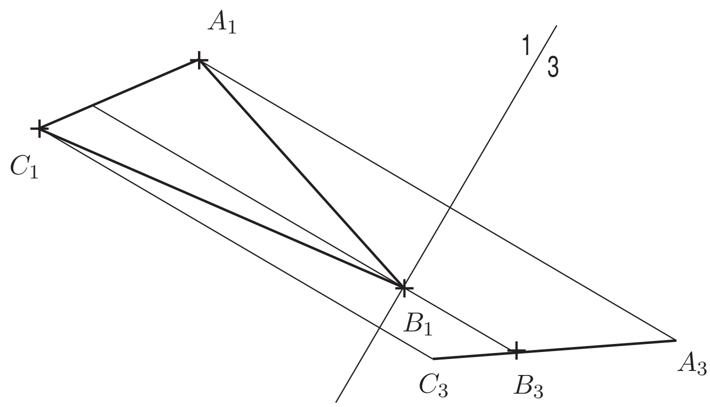
Como esse exercício é importante, aqui está a sua resolução:



O próximo problema será apenas um exercício de aplicação:

Exercício 5: *Determinar a VG do triângulo ABC representado na épura. Note duas coisas:*

- *A épura deste problema é igual a épura solução do exercício anterior;*
- *O triângulo está em uma posição particular.*

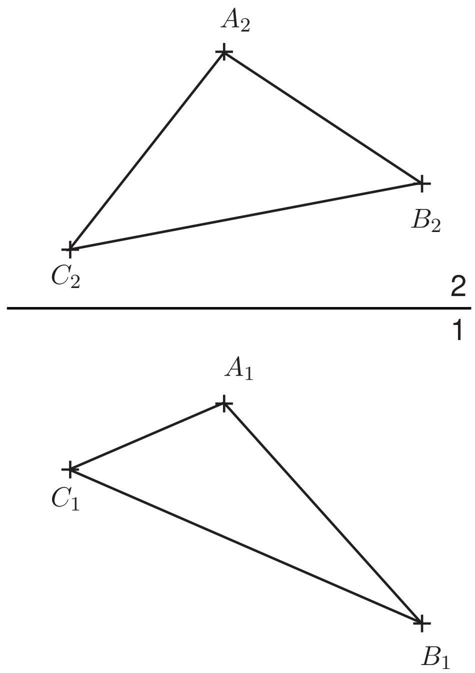


Agora a próxima questão, natural, é perguntar se podemos usar o método de mudança de planos para se resolver o problema de determinar a VG de uma figura plana colocada em uma posição qualquer do espaço. A resposta é afirmativa, e se você realmente está entendendo a exposição, você já sabe qual é o procedimento. O procedimento de solução pode ser resumido assim:

- "Mudar o plano de projeção" de modo a fazer com que a figura plana fique perpendicular ao novo plano de projeção;
- o resultado do passo anterior define um novo problema, que é o de se determinar a VG de uma figura em uma posição particular.

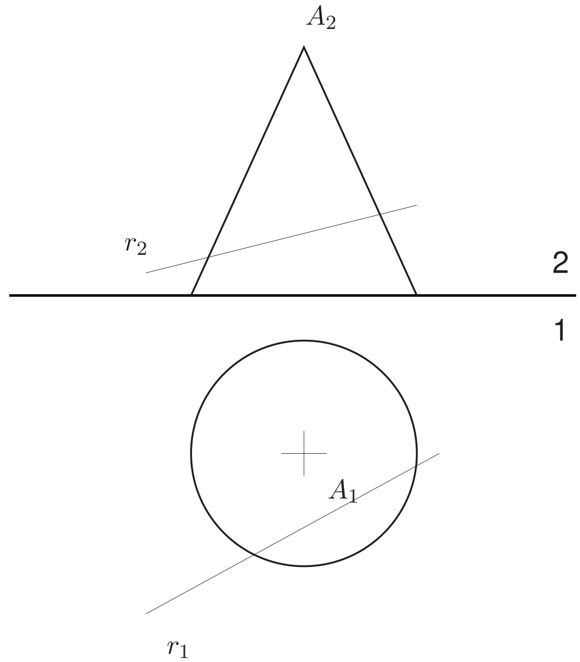
Resolva agora o problema completo:

Exercício 6: *Determinar a VG do triângulo definido pelos pontos* A, B, e C.



Como aplicação do que acabamos de ver, resolva o "problema do cone" novamente, mas agora usando o novo método:

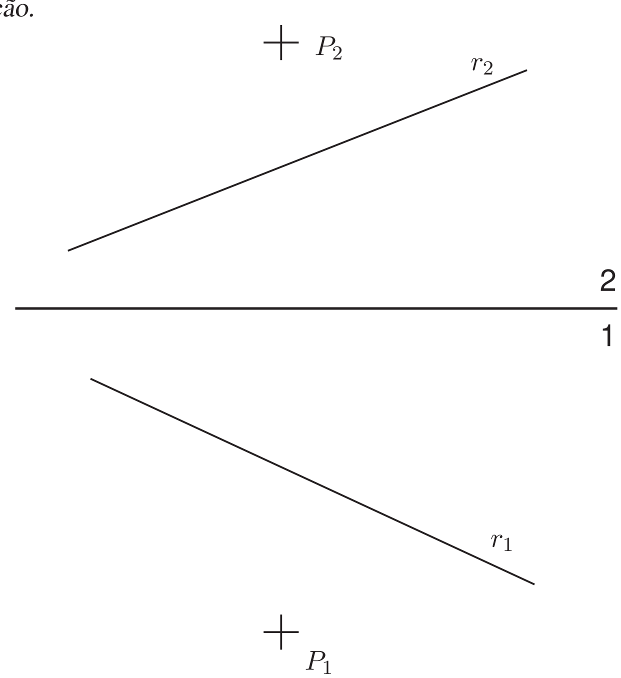
Exercício 7: *Determinar a intersecção a reta r com o cone γ usando a técnica da mudança de planos de projeção.*



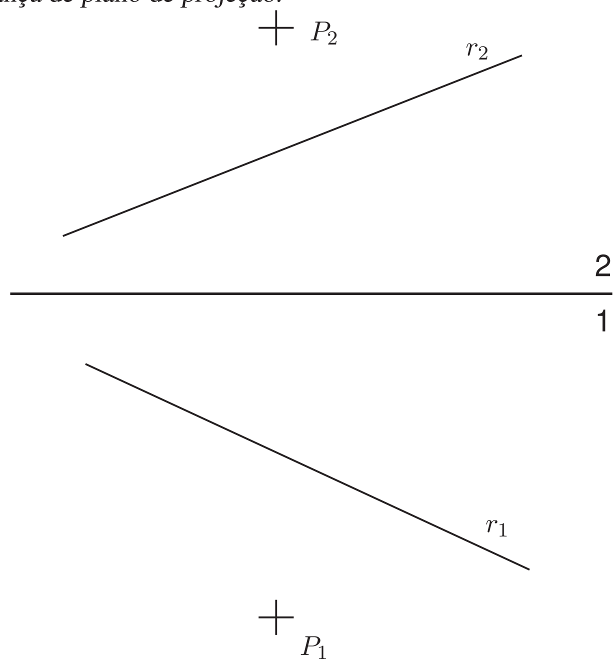
4.4 Exercícios Gerais

Faça os “Projetos” em folha separada.

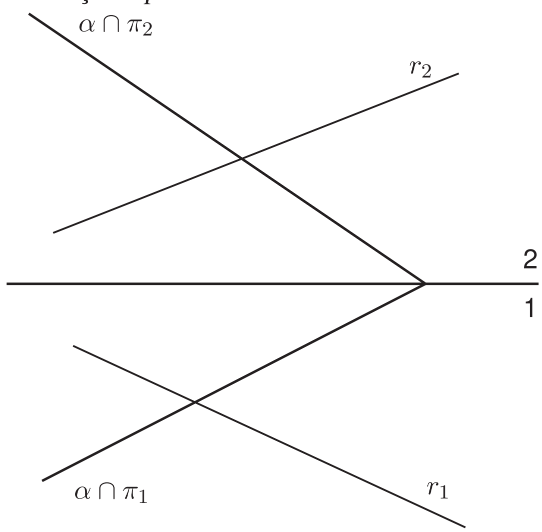
Exercício 8: *Determinar a distância entre a reta r e o ponto P usando o método da rotação.*



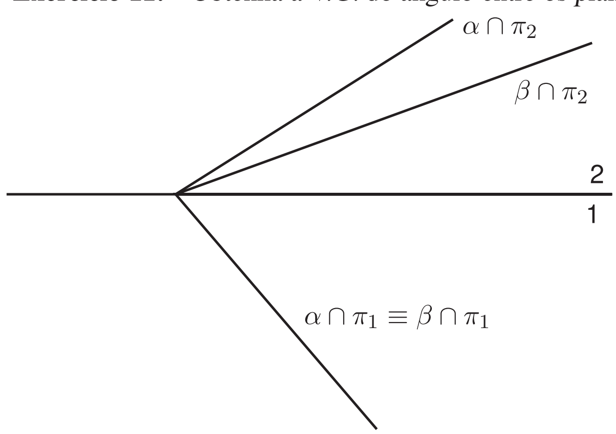
Exercício 9: *Determinar a distância entre a reta r e o ponto P usando o método da mudança de plano de projeção.*



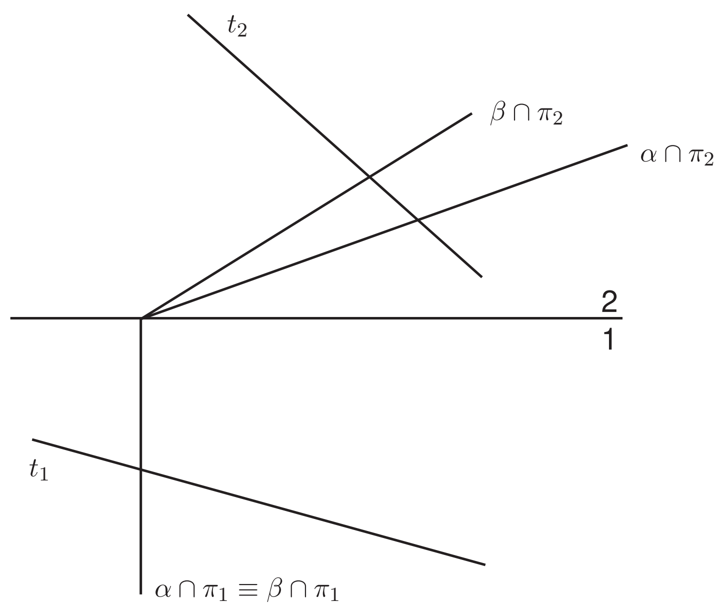
Exercício 10: *Determinar a intersecção entre a reta r e o plano α usando mudança de planos.*



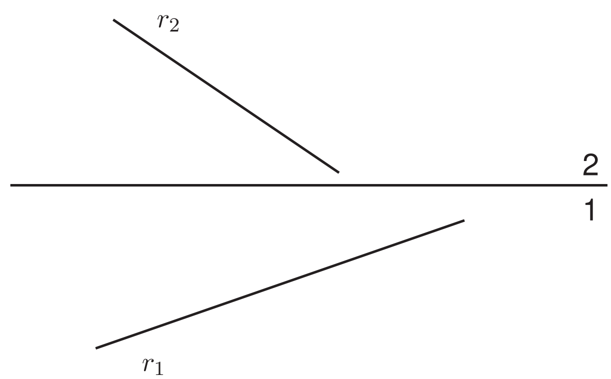
Exercício 11: *Obtenha a V.G. do ângulo entre os planos α e β.*



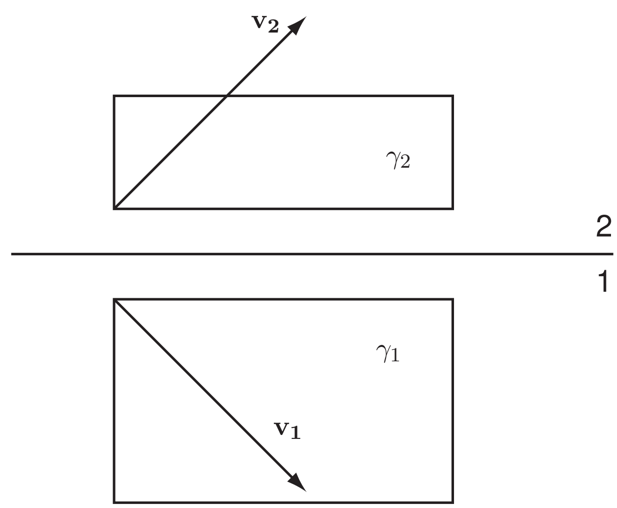
Exercício 12: *Obtenha o ponto C da reta t que eqüidista dos planos α e β.*



Exercício 13: *Obtenha os traços do plano α, sabendo que ele contém a reta r e é forma um ângulo de $45\deg$ com π_1.*

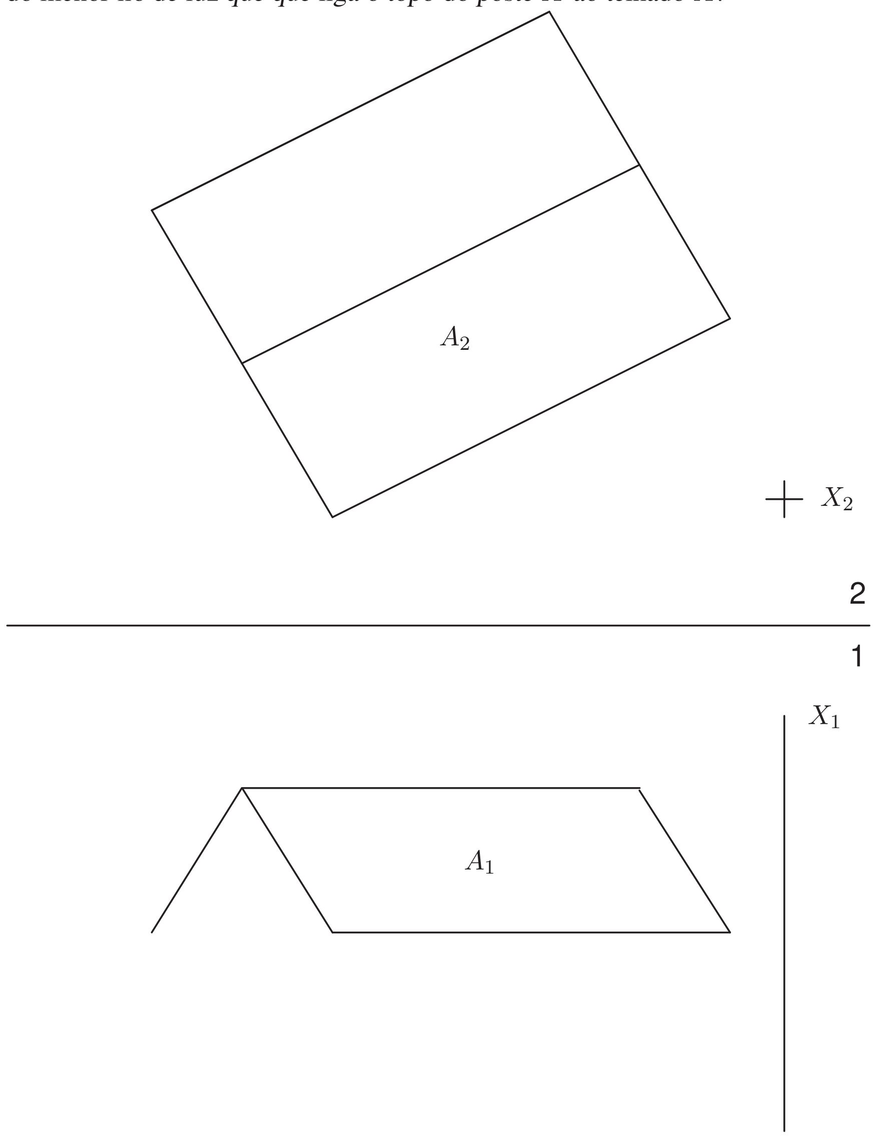


Projeto 1: *Seja o paralelepípedo* γ, *e o vetor* $\mathbf{v} = (1, 1, 1)^a$. *Use o método de mudança de planos de modo que* $\mathbf{v}$ *seja projetado como um ponto, e obtenha a projeção do paralelepípedo.*



[a] ver capítulo 1

Projeto 2: *São dados o telhado de uma casa e um poste. Qual é o comprimento do menor fio de luz que que liga o topo do poste* X *ao telhado* A*?*



Projeto 3: *Dois turistas estão discutindo se a rota de vôo mais curta entre São Paulo (*$23\,\text{deg}$ *Sul* $46\,\text{deg}$ *Oeste) e Tóquio (*$35\,\text{deg}$ *Norte* $139\,\text{deg}$ *Leste) passa por Los Angeles (*$34\,\text{deg}$ *Norte* $118\,\text{deg}$ *Oeste) ou Nova Iorque (*$40\,\text{deg}$ *Norte* $74\,\text{deg}$ *Oeste). Descubra quem tem razão usando a geometria descritiva. Para isso, resolva os seguintes problemas parciais:*

1. *Faça uma mudança de planos de projeção de modo que a reta que liga o centro da Terra e São Paulo seja projetada como uma reta frontal no novo sistema.*
2. *Faça uma nova mudança de planos de modo que a reta que liga o centro da Terra e São Paulo seja projetada como uma reta de topo.*
3. *Qual dos dois turistas tem razão?*

Obs: Um desenho do mapa da Terra foi dado, mas ele é apenas ilustrativo! Ele foi baseado em na figura encontrada em rawpixel.com / Freepik

Projeto 4: *Ao levantar vôo em São Paulo (*$23\,\text{deg}$ *Sul,* $46\,\text{deg}$ *Oeste) um avião viaja em diretamente à Sydney (*$33\,\text{deg}$ *Sul,* $15\,\text{deg}$ *Leste). O ângulo que a direção do avião forma com a direção norte (ambas são tangentes à superfície da terra) pode ser lida usando uma bússola. Determine este ângulo, desprezando a diferença entre os polos magnético e geográfico.*